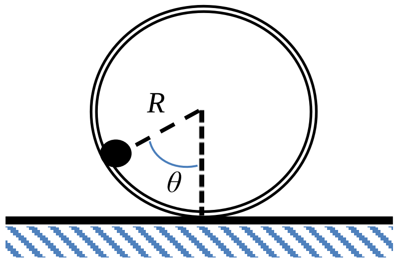
Итоговая контрольная работа по

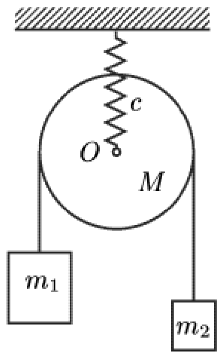
***Теоретической механике* (сентябрь, 2020)**

РАЗДЕЛ I

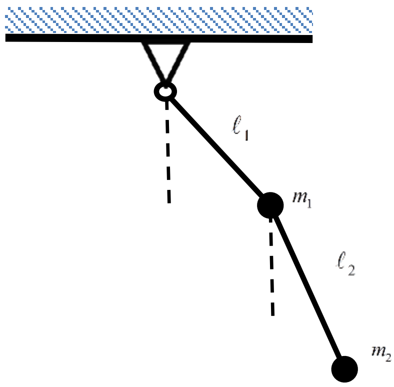
1. На внутренней поверхности обруча массы M закреплено небольшое тело массы m. Обруч может катиться по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Радиус обруча равен R. Записать функцию Лагранжа и найти уравнения движения. Какие особенности в динамике этой системы наблюдаются в случаях $\frac{m}{M} \to \infty$ и $\frac{m}{M} \to 0$?



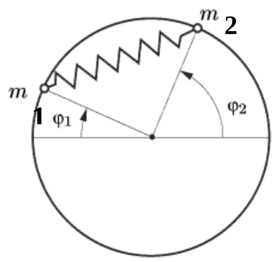
   Рекомендация: используйте в качестве обобщённой координаты угол θ, см. рисунок.
2. Пусть задана некоторая вогнутая чётная функция $f(x) = f(-x)$, минимум которой расположен в начале координат (что-то вроде параболы). Из жёсткой тонкой проволочки изготовили дугу, форма которой описывается функцией $f(x)$ (ось OY является осью симметрии и направлена вертикально вверх, ось OX направлена горизонтально). На проволочке находится бусинка массы m, которая может скользить по проволочке без трения. Проволочку раскручивают относительно оси симметрии до угловой скорости Ω. Записать функцию Лагранжа и получить уравнения движения бусинки. Рассмотрите частный случай: $f(x) = ax^2,\ a > 0$.
3. В горизонтальной плоскости вращается гладкая трубка, внутри которой находится шарик массы m. Ось вращения проходит через один конец трубки. Шарик соединён с этим концом лёгкой пружиной жёсткости k (также находящейся внутри трубки). Угловая скорость вращения ω постоянна. Получить уравнения Лагранжа. Сохраняется или нет энергия шарика? Ответ обосновать.
4. Массивный блок прикреплён к потолку с помощью пружины жёсткости c. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой привязаны грузы m_1 и m_2. Грузы движутся по вертикали, а нить не проскальзывает по поверхности блока. Считая блок невесомым, записать функцию Лагранжа и получить уравнения движения. Трением пренебречь. Что изменится в функции Лагранжа, если считать блок однородным массивным диском? Радиус блока равен R.



5. Двойной математический маятник состоит из двух лёгких стержней, к концам которых прикреплены точечные массы m_1 и m_2. Между собой стержни соединены шарнирно, а первый стержень также шарнирно закреплён на потолке. Используя в качестве обобщённых координат углы, образованные стержнями с вертикалью, найти функцию Лагранжа и получить уравнения движения. Показать, что в пределе $m_2 \to 0$ система описывается уравнениями движения для простого математического маятника. Длины стержней равны соответственно ℓ_1 и ℓ_2.



6. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r, лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ. Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $\vartheta_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ и $\vartheta_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, найти закон движения в квадратурах.



7. Материальная точка движется в поле тяжести по поверхности конуса $z = -\alpha\sqrt{x^2 + y^2} \equiv -\alpha\rho$, $\alpha > 0$. Получить систему уравнений движения в декартовой или цилиндрической системе координат. Указать все сохраняющиеся величины, а также те уравнения, с помощью которых должен определяться лагранжев множитель.

РАЗДЕЛ II

8. Тело начинает движение по окружности с нулевой начальной скоростью, причём его ускорение остаётся постоянным по величине. Определить, какую долю дуги окружности пройдёт тело к тому моменту, когда касательная составляющая a_τ его ускорения обратится в нуль.
9. Точка движется по плоской кривой. В каждый момент времени модуль скорости $\upsilon(t)$ и кривизна $k(t)$ известны (иными словами υ и k - заданные функции времени). Показать, что система ДУ $\dot{x} = \upsilon\cos\psi,\ \dot{y} = \upsilon\sin\psi,\ \dot{\psi} = \upsilon k$ представляет закон движения $x(t),\ y(t)$ материальной точки (то есть что производные $\dot{x},\ \dot{y}$ могут быть выражены через заданные функции υ и k указанным образом).

10. Частица движется по спирали, описываемой уравнением
$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j} + \upsilon_{\|} t\,\vec{k}\,.$$

Выразить кривизну и кручение траектории через сохраняющиеся компоненты скорости $\upsilon_\perp$ и $\upsilon_{\|}$, а также через радиус спирали и угловую частоту вращения. Ответ обосновать.
11. Показать, что при движении с ускорением, постоянным по направлению, величина этого ускорения может быть представлена формулой: $a = \mathrm{const}\cdot\dfrac{\upsilon^2}{R}$, где $\upsilon -$ скорость, а $R -$ радиус кривизны в заданной точке траектории.
12. Показать, что максимальная площадь, ограниченная замкнутой плоской кривой длины L, имеет форму окружности. Указание: получите общее выражение для площади, ограниченной плоской кривой, и найдите экстремум полученного функционала при условии, что длина кривой фиксирована (используйте метод множителей Лагранжа).

13. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.
14. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории $\rho = \rho_0 e^{-\lambda\phi}, z = 0$, если секторная скорость относительно начала координат (то есть площадь, «заметаемая» радиус-вектором точки в единицу времени) $\sigma = \sigma_0 = const$. Параметры $\rho_0, \lambda, \sigma_0$

траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния ρ до начала координат.

РАЗДЕЛ III

15. Выяснить, сохраняются ли следующие физические величины –

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}\,, \quad \vec{A} = \vec{p} \times \vec{\ell} + \alpha m \frac{\vec{r}}{r}\,,$$

в системе с гамильтонианом (α и m - параметры)

$$H(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\alpha}{|\vec{r}|}\ .$$

Указание: для доказательства используйте канонический формализм, записав условие сохранения с помощью скобок Пуассона.

16. Используя свойства скобок Пуассона, доказать непосредственным расчётом, что если две наблюдаемые $\mathfrak{F}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ и $\mathfrak{G}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ сохраняются, то их скобка Пуассона $\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}$ также является сохраняющейся величиной.

17. Показать, что преобразование $q = \dfrac{Q^2}{2}$, $p = \dfrac{P}{Q}$ от канонических переменных (q, p) к переменным (Q, P) является каноническим. С его помощью найти решение уравнений движения для системы с гамильтонианом $H(p,q) = qp^2 + \dfrac{\alpha}{q}$.

18. Функция Гамильтона частицы имеет вид $H(p,q) = \dfrac{1}{2}p^2 - \dfrac{1}{q}$, $q > 0$. Получить и проинтегрировать уравнения движения, используя каноническое преобразование:

$$q = 2P^2 \sin^2\zeta, \quad p = \frac{1}{P}\cot\zeta, \quad Q = 2\zeta - \sin 2\zeta\ .$$

Обратите внимание на то, что переход от переменных (q, p) к переменным (Q, P) задаётся в *параметрической* форме: последнее уравнение, рассматриваемое как уравнение относительно ζ, относится к классу трансцендентных и в явном виде решено быть не может. Тем не менее, связь $\zeta \leftrightarrow Q$ взаимно-однозначна (почему?), и, подставляя функцию $\zeta(\mathrm{Q})$ в первые два уравнения, мы получим каноническое преобразование. Докажите это.

19. Простейшая модель биоценоза типа «хищник – жертва» задаётся системой уравнений:

$$\dot{x} = \beta(1-y)x, \quad \dot{y} = -\gamma(1-x)y\ .$$

Здесь β и γ - постоянные параметры. Представить эти уравнения в гамильтоновой форме (то есть указать соответствующую функцию Гамильтона), и найти решение вблизи точки равновесия.

20. Гамильтониан некоторой механической системы имеет вид $H = q_1 q_2 + p_1 p_2$. Покажите, что динамические переменные $\mathfrak{F} = p_1^2 + q_2^2$, $\mathfrak{G} = p_2^2 + q_1^2$ и их скобка Пуассона $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}\}$ являются независимыми первыми интегралами движения.