МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Л.Р. Вотякова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Нижнекамск
2014

УДК 519.85
В 79

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФБГОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Макусева Т.Г., к.п.н., доцент, зав. кафедрой математики НХТИ;
Габдуллина Г.К., к.э.н., доцент кафедры экономики и менеджмента Нижнекамского института информационных технологий и телекоммуникаций КНИТУ им. А.Н. Туполева.

Вотякова, Л.Р.
В 79 Экономико-математические методы : лабораторный практикум / Л.Р. Вотякова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФБГОУ ВПО «КНИТУ», 2014. – 120 с.

Подготовлен на кафедре информационных систем и технологий Нижнекамского химико-технологического института Казанского национального исследовательского технологического университета.

Круг вопросов, рассматриваемых в предлагаемом лабораторном практикуме, включает в себя раскрытие понятий и методов экономико-математического моделирования социально-экономических систем и процессов. Рассматриваются одноиндексные, двухиндексные задачи линейного программирования, структура и методы анализа модели межотраслевого баланса, международной торговли и модели управления запасами.

Подробно, на примере конкретного задания по каждой теме, описана последовательность проведения расчётов по формированию экономико-математической модели. Для самостоятельной работы студентов предусмотрены лабораторные задания. Цель лабораторного практикума – закрепление знаний по теории и практическому использованию математических моделей в сложных экономических расчётах и выработка навыков проведения расчётов с использованием электронных таблиц Microsoft Excel.

Предлагаемое методическое пособие рекомендуется для использования в курсе «Экономико-математические методы» для студентов по направлениям 38.03.01 «Экономика» (профиль: Экономика предприятий и организаций), 38.03.02 «Менеджмент» (профиль: Производственный менеджмент), 38.03.03 «Управление персоналом» очной, вечерней и заочной форм обучения.

УДК 519.85

Содержание

Введение. Экономико-математическое моделирование 4

Лабораторная работа №1. Задачи линейного программирования в экономике. Составление экономико-математической модели задачи линейного программирования 7

Индивидуальные задания 13

Лабораторная работа №2. Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft Excel 23

Индивидуальные задания 38

Лабораторная работа №3. Графический метод решения задачи линейного программирования 43

Индивидуальные задания 49

Лабораторная работа №4. Анализ чувствительности одноиндексных задач линейного программирования 53

Лабораторная работа №5. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования 61

Индивидуальные задания 66

Лабораторная работа №6. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева) 68

Индивидуальные задания 74

Лабораторная работа №7. Экономико-математическая модель международной торговли (линейная модель обмена) 77

Индивидуальные задания 82

Лабораторная работа №8. Решение двухиндексных задач линейного программирования. Транспортная задача 85

Индивидуальные задания 95

Лабораторная работа №9. Модели управления запасами........................101

Индивидуальные задания 108

Задания на контрольную работу для студентов заочного отделения 109

Тесты итогового контроля по дисциплине «Экономико-математические методы» 110

Литература 118

Приложение...119

ВВЕДЕНИЕ
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Экономико-математическое моделирование заключается в использовании методов и средств математического моделирования для исследования экономических объектов и явлений.

Экономико-математическая модель – это математическое описание исследуемого экономического объекта или явления (процесса).

Экономико-математическое моделирование можно разделить на следующие 5 этапов:

1 этап – постановка экономической проблемы;

2 этап – построение математической модели;

3 этап – численное решение;

4 этап – оценка адекватности построенной модели;

5 этап – применение численных результатов моделирования.

Экономико-математическое моделирование сводится к построению математической модели.

При построении математической модели можно выделить следующие основные этапы:

1. Определение цели решения задачи, т.е. чего хотят добиться, решая данную задачу.
2. Определение параметров модели, т.е. заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.
3. Формирование управляющих переменных, значения которых являются решением задачи и при изменении которых можно достичь поставленной цели.
4. Определение области допустимых решений, т.е. ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.
5. Выявление неизвестных факторов, т.е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.
6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, т.е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

С учетом перечисленных выше этапов построения математической модели введем следующие условные обозначения:

α – параметры модели;

x – управляющие переменные или решения;

X – область допустимых решений (ОДР);

ξ – случайные или неопределенные факторы;

Z – целевая функция, или критерий эффективности (критерий оптимальности

ности), которая записывается как $Z = Z(x, \alpha, \xi)$.

В соответствии с введенными обозначениями математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$Z = Z(x, \alpha, \xi) \to \underset{x \in X}{extr}, \text{ где } extr = \begin{Bmatrix} \min \\ \max \end{Bmatrix}.$$

Задача предполагает нахождение такого оптимального решения $x^* \in X$, чтобы при данных фиксированных параметрах α и с учетом неизвестных факторов ξ был получен экстремум целевой функции Z, т.е.

$$Z^* = Z(x^*, \alpha, \xi) \to extr\{\underset{x \in X}{Z(x, \alpha, \xi)}\}.$$

Таким образом, ***оптимальное решение*** – это решение, предпочтительное (наилучшее) перед другими по определенному критерию эффективности (одному или нескольким).

Математические модели можно разделить на однокритериальные и многокритериальные, которые, в свою очередь, делятся на:

– детерминированные;
– стохастические;
– неопределенные.

В однокритериальных моделях используется единственный критерий эффективности, а многокритериальных – два и более.

Рассмотрим детерминированные модели. При построении детерминированных моделей задач исследования операций случайные или неопределенные факторы не учитываются. Все остальные факторы, входящие в описание операции, можно разделить на следующие две группы:

– постоянные факторы, или параметры модели (условия проведения операции). Обозначим их $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$;

– зависимые факторы, или управляющие переменные (элементы решения). Обозначим их $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Например, в задаче об использовании ресурсов к постоянным факторам α_i следует отнести запасы ресурсов каждого вида, производственную матрицу, элементы которой определяют расход сырья каждого вида на единицу выпускаемой продукции каждого вида. Зависимые факторы x_j – план выпуска продукции каждого вида.

Критерий эффективности, выражаемый целевой функцией Z, зависит от факторов обеих групп и может быть записан в общем виде

$$Z = f(x, \alpha) = f(x_1, x_2, ..., x_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m).$$

Все модели могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операции, характера решаемых задач, особенностей применяемых методов.

Прежде всего, необходимо выделить большой класс оптимизационных моделей. Такие задачи возникают при попытке оптимизировать планирование и управление сложными системами, в первую очередь экономическими системами.

Оптимизационные модели – это модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства распределения или потребления.

Оптимизационную задачу можно сформулировать следующим образом:

найти значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$*, которые при заданных условиях* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$*, удовлетворяют системе неравенств (уравнений)*

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \le b_i, \ i = 1, 2, ..., k \qquad (1)$$

и обращают в экстремум (минимум или максимум) целевую функцию, т.е.

$$Z(\overline{X}) = f(x_1, x_2, ..., x_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \to extr \ . \qquad (2)$$

Если имеются условия неотрицательности значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$*, то они также входят в ограничение (1).*

Лабораторная работа № 1
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ. СОСТАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков составления экономико-математической модели задач линейного программирования.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Линейные модели являются одним из наиболее простых и часто используемых классов математических моделей, используемых в экономике. Они изучаются в рамках линейного программирования – одного из наиболее ранних и проработанных разделов исследования операций.

Линейное программирование (англ. *Linear programming*) – это набор математических методов и приемов решения задачи оптимального распределения имеющихся ограниченных ресурсов (денег, материалов, времени и т.п.) для достижения определенной цели (максимума прибыли или минимума издержек).

Если критерий эффективности Z в (2) представляет собой линейную функцию, а функции φ_i в системе ограничений (1) также линейны, то такая задача является ***задачей линейного программирования (ЗЛП)***.

Общая постановка задачи линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, *максимизирующие целевую функцию*

$$Z(\overline{X}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Планом или допустимым решением ЗЛП будем называть вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям (4) и (5) задачи.

План $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ будем называть ***решением ЗЛП или ее оптимальным планом***, если

$$Z(\overline{X}^*) = \max_{x \in X} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Имеется целый ряд различных методов линейного программирования;

одни из них являются специализированными или узконаправленными (т.е. предназначены для решения определенного круга задач), другие имеют общий характер. Наиболее распространенным методом решения задач линейного программирования является так называемый симплекс-метод, разработанный Дж. Данцигом, а наиболее эффективным из известных – метод эллипсоидов. В простейшем случае, когда число переменных равно двум, удобен простой и наглядный графический метод.

Эффективное применение линейного программирования достигается при решении следующих общих классов задач:

- ***задачи о составлении смеси***, цель которых заключается в выборе наиболее экономичной смеси ингредиентов, т.е. составляющих (руды, нефти, пищевых продуктов и др.) при учете ограничений на физический или химический состав смеси и на наличие необходимых материалов;
- ***задачи планирования производства,*** цель которых заключается в получении максимальной прибыли одного или нескольких видов продукции при использовании некоторого числа ограниченных ресурсов;
- ***задачи распределения товаров,*** цель которых состоит в том, чтобы организовать доставку товаров от некоторого числа поставщиков к некоторому числу потребителей так, чтобы оказались минимальными либо расходы по этой доставке, либо время, либо некоторая комбинация того и другого. В простейшем случае это задача о перевозках (транспортная задача).

Рассмотрим несколько примеров составления математической модели экономической задачи.

1. Задачи о составлении смеси.

Задача №1.

Металлургическому комбинату требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с долей зольных примесей не более 3,25 %. Комбинат закупает три сорта угля A, B и C, с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешивать сорта угля A, B и C, чтобы полученная смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную цену?

Содержание примесей и цена каждого сорта угля приведены в таблице 1.

Таблица 1

Сорт угля	Содержание, %		Цена 1 т., руб.
	фосфора	золы	
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Решение.

Построим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим:

x_1 – количество угля сорта А в тонне смеси,

x_2 – количество угля сорта В в тонне смеси,

x_3 –количество угля сорта С в тонне смеси.

Стоимость 1 тонны смеси (целевая функция) с учетом введенных обозначений и данных последнего столбца запишется в следующем виде:

$$Z = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3 .$$

Ограничение на содержание фосфора в смеси запишется в виде

$$0{,}06x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \le 0{,}03 \text{ (в \%)}.$$

Ограничение на содержание зольных примесей в смеси запишется в виде

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 3{,}25 \text{ (в \%)}.$$

Ограничение на состав 1 т смеси запишется в виде

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи примет вид:

определить количества x_1, x_2, x_3 *угля сортов А, В, С, соответственно, в тонне смеси, при которых достигается минимум целевой функции:*

$$Z = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}06x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \le 0{,}03, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 3{,}25, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №2.

Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один кг корма I вида стоит 80 р. и содержит: 3 ед. белков, 1 ед. жиров, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один кг корма II вида стоит 10 р. и содержит: 1 ед. белков, 3 ед. жиров, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий белков не менее 9 ед., жиров не менее 6 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

Решение.

Для удобства представим данные, содержащиеся в условии задачи, в табличном виде (таблица 2).

Таблица 2

Питательное вещество	Число единиц питательных веществ на 1 кг корма		Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	
Белки	3	1	9
Жиры	1	3	6
Углеводы	1	8	8
Нитраты	2	4	16 (не более)
Цена 1 кг корма, р.	80	10	

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим:

x_1 – количество корма вида I,

x_2 – количество корма вида II. Тогда общая стоимость рациона (целевая функция) запишется в виде

$$Z = 80x_1 + 10x_2 .$$

С учетом того, что количество единиц питательных веществ, входящих в рацион кормления, не должно быть меньше (больше) указанного минимума (максимума), ограничения запишутся в виде следующих неравенств:

$3x_1 + x_2 \geq 9$ – для белков,

$x_1 + 3x_2 \geq 6$ – для жиров,

$x_1 + 8x_2 \geq 8$ – для углеводов,

$2x_1 + 4x_2 \leq 16$ – для нитратов.

Кроме того, по смыслу задачи должно выполняться условие неотрицательности:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 .$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи примет следующий вид:

Составить рацион питания, при котором достигается минимум целевой функции:

$$Z = 80x_1 + 10x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 8x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Задачи производственного планирования.

Задача №3.

Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского – 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим:

x_1 – число женских костюмов;

x_2 – число мужских костюмов.

Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10x_1$, а от реализации мужских $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию

$$Z = 10x_1 + 20x_2.$$

Ограничения задачи имеют вид:

$x_1 + x_2 \leq 150$ – ограничение по труду,

$2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 240$ – ограничение по лавсану

$2x_1 + 3{,}5x_2 \leq 350$ –ограничение по шерсти

$x_2 \geq 60$ –ограничение по костюмам

$x_1 \geq 0$ – по смыслу задачи.

Таким образом, экономико-математическая модель задачи примет следующий вид:

определить план выпуска женских и мужских костюмов $\overline{X} = (x_1, x_2)$, при котором достигается максимум целевой функции

$$Z = 10x_1 + 20x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 150, \\ 2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240, \\ 2x_1 + 3{,}5x_2 \le 350, \\ x_2 \ge 60, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Задачи об использовании мощностей (загрузке оборудования)

Задача №4

На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов: А, В и С. Другие данные условия задачи приведены в таблице 3.

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

Таблица 3

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт/сут		Затраты на работу линий, р/сут		План, шт
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	20
В	6	5	100	200	40
С	8	2	300	400	50

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим:

x_{1a}, x_{1b}, x_{1c} – время, в течение которого 1-я линия будет занята выпуском аппаратов А, В и С соответственно;

x_{2a}, x_{2b}, x_{2c} – время, в течение которого 2-я линия будет занята выпуском аппаратов А, В и С соответственно.

Так как время работы каждой линии ограничено 10-ю сутками, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} \le 10, \\ x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} \le 10. \end{cases}$$

Для выполнения плана по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} 4x_{1a} + 3x_{2a} \ge 20, \\ 6x_{1b} + 5x_{2b} \ge 40, \\ 8x_{1c} + 2c_{2c} \ge 50. \end{cases}$$

Кроме того, по смыслу задачи

$$x_{1a} \ge 0, x_{1b} \ge 0, x_{1c} \ge 0,$$
$$x_{2a} \ge 0, x_{2b} \ge 0, x_{2c} \ge 0.$$

Затраты на производство планового количества аппаратов А, В и С выражаются следующей целевой функцией:

$$Z(\overline{X}) = 400x_{1a} + 100x_{1b} + 300x_{1c} + 300x_{2a} + 200x_{2b} + 400x_{2c}.$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи примет вид:

Найти такое решение $\overline{X} = (x_{1a}, x_{1b}, x_{1c}, x_{2a}, x_{2b}, x_{2c})$, *удовлетворяющее ограничениям*

$$\begin{cases} x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} \le 10, \\ x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} \le 10, \\ 4x_{1a} + 3x_{2a} \ge 20, \\ 6x_{1b} + 5x_{2b} \ge 40, \\ 8x_{1c} + 2c_{2c} \ge 50. \end{cases}$$

при котором целевая функция принимает минимальное значение:

$$Z(\overline{X}) = 400x_{1a} + 100x_{1b} + 300x_{1c} + 300x_{2a} + 200x_{2b} + 400x_{2c} \to \min.$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ №1

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

По номеру Вашего варианта составьте экономико-математическую модель задачи.

Вариант 1

Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Составить математическую модель задачи, если необходимо получить информацию, сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю при том, что доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y – 40 ф. ст.?

Вариант 2

Завод по производству электронного оборудования выпускает персональные компьютеры и системы подготовки текстов. В настоящее время освоены две модели: «Юпитер»– объем памяти 1 Гб, одинарный дисковод; «Марс»– объем памяти 2 Гб, двойной дисковод. В производственный процесс вовлечены три цеха завода – цех узловой сборки, сборочный и испытательный. Распределение времени, требуемого для обработки каждой модели в каждом цехе, а также максимальные производственные мощности цехов приведены в табл. Отдел исследований рынка производит периодическую оценку потребительского спроса на каждую модель. Максимальные прогнозные значения спроса и доходы от реализации единицы продукции каждой модели также содержатся в табл. Построить математическую модель для изложенной проблемы производства изделий в ассортименте, если цель состоит в максимизации общего ежемесячного дохода. Время, требуемое на обработку каждой модели в каждом цехе:

Цех	Время на единицу продукции, ч		Максимальная производственная мощность
	«Юпитер»	«Марс»	
Узловой сборки	5	20	800
Сборочный	2	8	420
Испытательный	0,1	2	150
Максимальное прогнозное значение спроса, за месяц	100	25	
Доход, ф.ст.	15	120	

Вариант 3

«Princetown PaintsLtd» выпускает два основных типа румян – перламутровые и матовые – с использованием одинаковых смесеобразующих машин и видов работ. Главному бухгалтеру фирмы было поручено разработать для компании план производства на неделю. Информация о ценах продаж и стоимости 100 л товара приведена в таблице (ф. ст.).

	Румяна

	Перламутровые	Матовые
Цена продажи на 100 л	126	110
Издержки производства товаров на 100 л:		
Стоимость сырья	25	20
Стоимость трудозатрат	36	24
Стоимость приготовления смеси	20	36
Другие издержки	15	10

Стоимость 1 чел.-ч составляет 3 ф. ст. а стоимость 1 ч приготовления смеси – 4 ф. ст. Фонд рабочего времени ограничен 8000 чел.-ч. в неделю, а ограничение на фонд работы смесеобразующих машин равно 5900 ч в неделю. В соответствии с контрактными соглашениями компания должна производить 25000 л матовых румян в неделю. Максимальный спрос на перламутровые румяна – 29000 л в неделю. Требуется сформулировать математическую модель задачи, позволяющую определить объемы производства матовых и перламутровых румян в неделю, при которых достигается максимальное значение получаемой за неделю прибыли.

Вариант 4

Компания «Bermuda Paint»– частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена продажи 1 галлона, ф.ст.	Издержки производства 1 галлона, ф.ст.
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака – 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как её расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день. В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход. Требуется построить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания.

Вариант 5

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт. при расходе по способу)	
	1	2
I II III	2 5 2	6 4 3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Вариант 6

Производитель элементов центрального отопления изготавливает радиаторы 4 моделей (A,B,C,D). Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливают радиаторы.

Модель радиатора	A	B	C	D
Необходимое кол-во раб. силы	0,7	1,6	2	1,8
Необходимое кол-во стального листа, м^2	4	3	5	6
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	15	15	22,5	10

Кол-во стального листа – не более 2500 м^2, количество человеко-часов – не более 500. Решите задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции.

Вариант 7

Фирма производит три вида продукции (A, B, C), для выпуска каждого из них требуется определенное время обработки на всех 4 устройствах I, II, III, IV.

Вид про-	Время обработки	Прибыль,

дукции	I	II	III	IV	долл.
A	1	3	1	2	300
B	6	1	3	3	600
C	3	3	2	4	400

Пусть время работы на устройствах соответственно 64, 32, 41 и 52 часа. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить. Рынок сбыта каждого продукта неограничен. Рассмотреть задачу максимизации прибыли.

Вариант 8

Фирма, выпускающая трикотажные изделия, использует для производства продукции 2 вида сырья.

Сырье	Запас сырья	Затраты на единицу продукции		
		свитер	палантин	пуловер
Чистая шерсть	160	0,4	0,2	0,8
Полиамид	60	0,2	0,1	0,2
Прибыль за изделие, ден. ед.		160	50	120

Найти план выпуска готовой продукции, максимизирующий прибыль.

Вариант 9

Фирма занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1 л) имеющихся продуктов?

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

Вариант 10

В пекарне для выпечки 4 видов хлеба используются мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование позволяет переработать в сутки не более 250 кг муки I сорта, 200 кг муки II сорта, 60 кг маргарина и 1380 штук яиц.

Наименование	Нормы расхода на 1 кг хлеба по видам

продукта	1	2	3	4
Мука I (кг)	0,5	0,5	0	0
Мука II (кг)	0	0	0,5	0,5
Маргарин (кг)	0,125	0	0	0,125
Яйцо (шт)	2	1	1	1
Прибыль	14	12	5	6

Определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль.

Вариант 11

Прядильная фабрика для производства 2 видов пряжи использует три типа сырья – чистую шерсть, капрон, акрил.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на 1 т пряжи		Количество сырья
	Вид 1	Вид 2	
Шерсть	0,5	0,2	600
Капрон	0,1	0,4	620
Акрил	0,4	0,2	500
Прибыль от реализации пряжи	1100	900	

Требуется составить план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли.

Вариант 12

Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и В, смешивая 3 ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/т)		Объем запасов (т)
	сорт А	сорт В	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т продукции	320	290	

Требуется составить план производства чая, максимизирующий прибыль.

Вариант 13

Прибыль от изделий А, В, С составляет, соответственно, 13, 14, 15 единиц. Для каждого изделия требуется время использования станка I и II, которые доступны, соответственно, 11 и 14 часов в день:

	А	В	С

I	2	3	3
II	4	1	2

Найдите оптимальный план производства.

Вариант 14

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь четырех компонентов. Данные о ресурсах приведены в таблице:

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед./тонн	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Вариант 15

Из трех сортов бензина образуются две смеси. Первая состоит из 80% бензина первого сорта, 10% бензина 2-го сорта, 10% бензина 3-го сорта; вторая –20% – 1-го, 30% – 2-го, 50% – 3-го сорта. Цена 1-ой смеси – 305 у.е., второй – 200 у.е. за тонну. Сколько смеси первого и второго вида можно изготовить из 16 тонн 1-го сорта, 13 тонн 2-го сорта и 21 тонны 3-го сорта, чтобы получить максимальный доход?

Вариант 16

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В. Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.

Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Вариант 17

Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

Корма	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
А В	2 2	1 4
Цена 1 кг корма, т.руб.	0,2	0,3

Вариант 18

Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Вариант 19

На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед.. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Вариант 20

Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно. Расходы продуктов А и В на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т	Максимально возможный за-

	Краска E	Краска I	пас, т
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Вариант 21

Финансовый консультант фирмы «ABC» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25000$) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси». Анализируются акции «Дикси-E» и «Дикси-B». Цены на акции: «Дикси-E» – 5$ за акцию; «Дикси-B»– 3$ за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.

По оценкам «ABC» прибыль от инвестиций в эти две акции в следующем году составит: «Дикси-E»– 1,1$; «Дикси-B»– 0,9$. Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

Вариант 22

Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1,S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание питательных веществ каждого вида было бы не менее установленного предела.

Вариант 23

При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов.

Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед.

Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

Вариант 24

Фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно и распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника». Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?

Вариант 25

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Сформулируйте прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

Лабораторная работа №2

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Инструкция по использованию Microsoft Excel для решения ЗЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. **Ввести условие задачи:**

a) ***создать экранную форму для ввода условия задачи****:*

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

b) ввести исходные данные в экранную форму:

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) ввести зависимости из математической модели в экранную форму:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) задать ЦФ (в окне «Поиск решения»):

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

e) ввести ограничения и граничные условия (в окне «Поиск решения»):

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. **Решить задачу:**

a) установить параметры решения задачи (в окне ***«Поиск решения»);***

b) запустить задачу на решение (в окне ***«Поиск решения»);***

c) ***выбрать формат вывода решения (***в окне ***«Результаты поиска решения»****).*

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

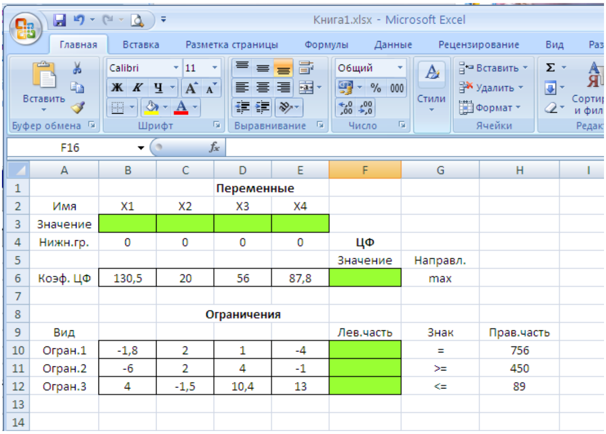
$$Z(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (1)$$

Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 1.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение								
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max		
7									
8				Ограничения					
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89	
13									
14									

Рис. 1. Экранная форма задачи (1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рисунке 1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130{,}5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87{,}8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу,** по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1) значение ЦФ определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4\,. \qquad (2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рисунок 1), формулу для расчета ЦФ (2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 . \qquad (3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **«Enter»**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), *(4)*

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ**:** означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рисунок 2).

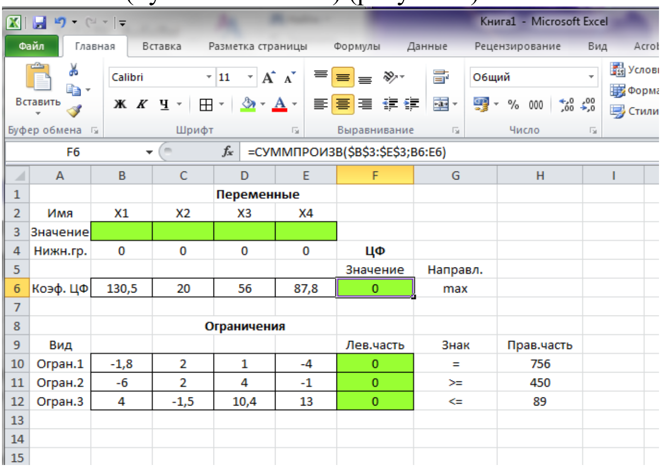


Рис. 2. Экранная форма задачи (1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **«Вставка функций»,** который можно вызвать из вкладки **«Формулы»** или при нажатии кнопки « f_x » на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6;**
- нажав кнопку « f_x » ,вызовите окно **«Мастер функций – шаг 1 из 2»;**
- выберите в окне **«Категория»** категорию **«Математические»;**
- в окне **«Функция»** выберите функцию **СУММПРОИЗВ*;***
- в появившемся окне **«СУММПРОИЗВ»** в строку **«Массив 1»** введите

выражение **B$3:E$3**, а в строку **«Массив 2»** – выражение **B6:E6** (рис. 3);

- после ввода ячеек в строки **«Массив 1»** и **«Массив 2»** в окне **«СУММПРОИЗВ»** появятся числовые значения введенных массивов (см. рисунок 3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

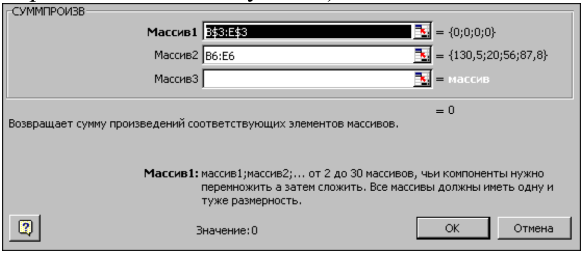


Рис. 3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно **«Мастер функций»**

<u>Зависимости для левых частей ограничений</u>

Левые части ограничений задачи (1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10 –** 1-е ограничение**; B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12 –** 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Формулы, описывающие ограничения модели (1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10\cdot B3 + C10\cdot C3 + D10\cdot D3 + E10\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)**
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $\mathrm{B11\cdot B3 + C11\cdot C3 + D11\cdot D3 + E11\cdot E3}$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)**
$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ или $B12\cdot B3 + C12\cdot C3 + D12\cdot D3 + E12\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)**

Как видно из таблицы 1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1), отличаются друг от друга и от формулы (4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и протянуть за маркер автозаполнения (черный крестик в правом нижнем углу ячейки);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рисунок 2).

<u>Проверка правильности введения формул</u>

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рисунки 4 и 5).

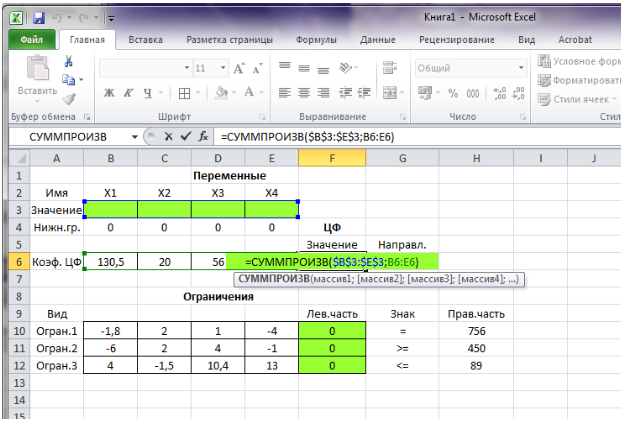


Рис. 4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**

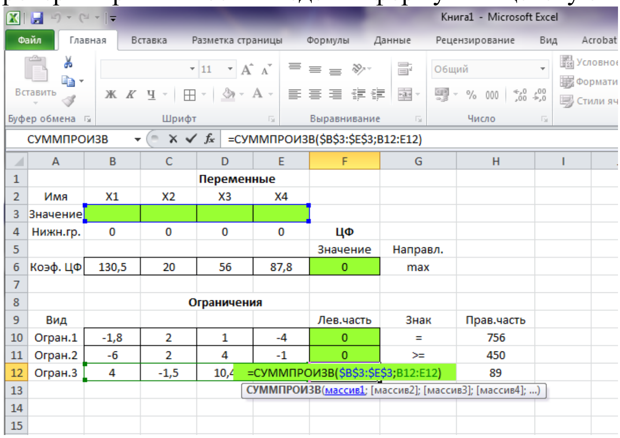


Рис. 5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12** для левой части ограничения 3

Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне **«Поиск решения»**, которое вызывается из вкладки **«Данные»** (рисунок 6):

*Проверьте, если у вас установлена надстройка **«Поиск решения»** (рис. 6), пропустите этот пункт.*

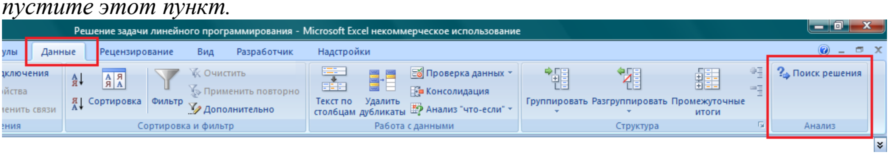


Рис. 6. Надстройка Поиск решения установлена;
вкладка «Данные», группа «Анализ»

Если надстройки «Поиск решения» вы на ленте Excel не обнаружили, щелкните на кнопку Microsoft Office, а затем Параметры Excel (рис. 7).

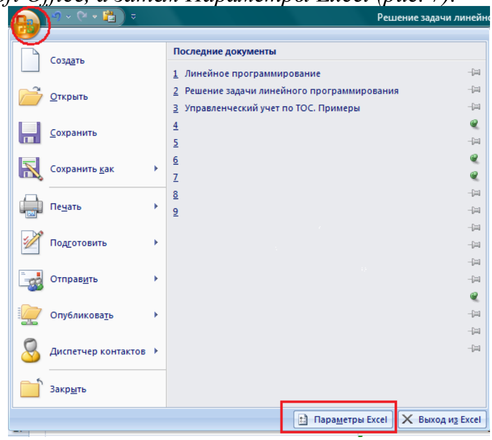


Рис. 7. Параметры Excel

Выберите строку Надстройки, а затем в самом низу окна «Управление надстройками Microsoft Excel» выберите «Перейти» (рис. 8).

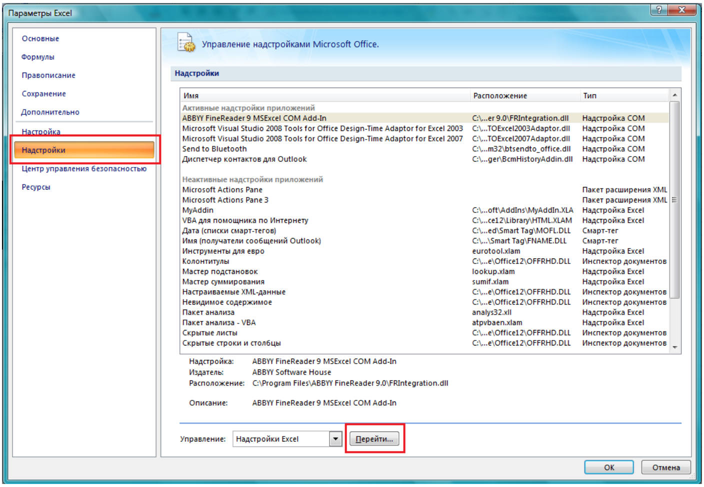


Рис. 8. Надстройки Excel

В окне «Надстройки» установите флажок «Поиск решения» и нажмите Ok (рис. 9). (Если «Поиск решения» отсутствует в списке поля «Надстройки», чтобы найти надстройку, нажмите кнопку Обзор. В случае появления сообщения о том, что надстройка для поиска решения не установлена на компьютере, нажмите кнопку Да, чтобы установить ее.)

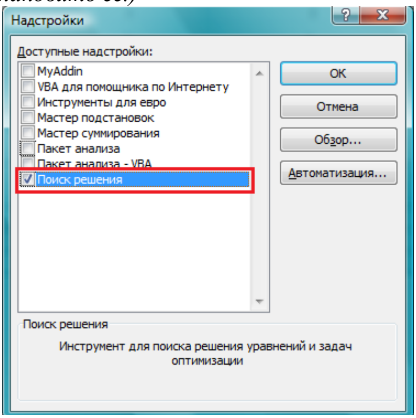


Рис. 9. Активация надстройки «Поиск решения»

После загрузки надстройки для поиска решения в группе Анализ на вкладке Данные становится доступна команда Поиск решения (рис. 6).

Вернемся к задаче:

- поставьте курсор в поле **«Установить целевую ячейку»**;
- введите адрес целевой ячейки **$F$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме – это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке **«максимальному значению».**

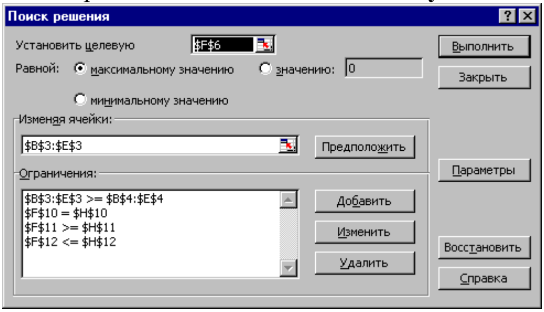


Рис. 10. Окно **«Поиск решения»** задачи (1)

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно **«Поиск решения»** в поле **«Изменяя ячейки»** впишите адреса **$B$3:$E$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле **«Изменяя ячейки»** и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рисунок 1).

- Нажмите кнопку **«Добавить»**, после чего появится окно **«Добавление ограничения»** (рисунок 11).
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$.
- В поле **«Ограничение»** введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$B$4:$E$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

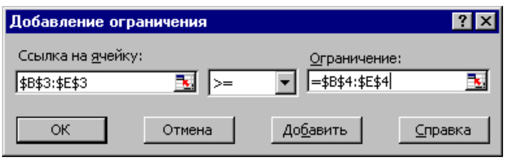


Рис. 11. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1)

Задание знаков ограничений $\leq$, $\geq$, $=$

- Нажмите кнопку **«Добавить»** в окне **«Добавление ограничения»**.
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **$F$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.
- В поле **«Ограничение»** введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **$H$10**.
- Аналогично введите ограничения: **$F$11>=$H$11**, **$F$12<=$H$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **OK**.

Окно **«Поиск решения»** после ввода всех необходимых данных задачи (1) представлено на рисунке 10.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки **«Изменить»** или **«Удалить»** (см. рисунок 10).

Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **«Поиск решения».** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **«Параметры»** и заполнить некоторые поля окна **«Параметры поиска решения»** (рисунок 12).

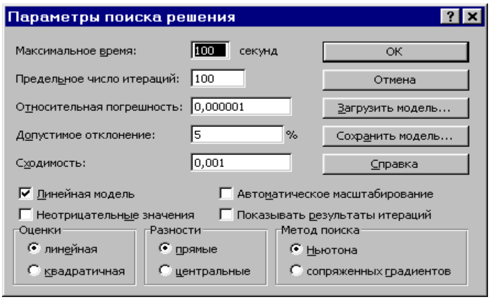


Рис. 12. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **«Максимальное время»** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **«Предельное число итераций»** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений.

В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **«Относительная погрешность»** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **«Допустимое отклонение»** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **«Сходимость»** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **«Линейная модель»** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **«OK»**.

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна **«Поиск решения»** путем нажатия кнопки **«Выполнить».**

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **«Результаты поиска решения»** с одним из сообщений, представленных на рисунках 13, 14 и 15.

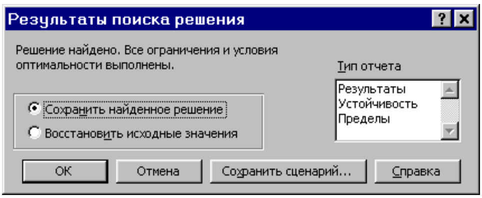


Рис. 13. Сообщение об успешном решении задачи

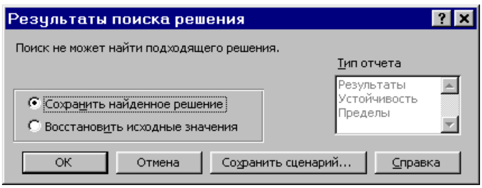


Рис. 14. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

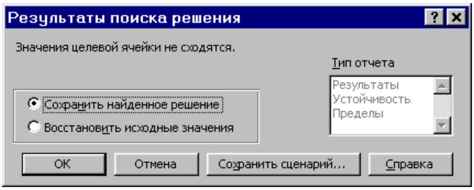


Рис. 15. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рисунках 14 и 15, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при заполнении полей окна **«Поиск решения»** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **«Относительная погрешность»** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **«Результаты поиска решения»** представлены названия трех типов отчетов: **«Результаты», «Устойчивость», «Пределы»**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **«ОК».** После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рисунок 16).

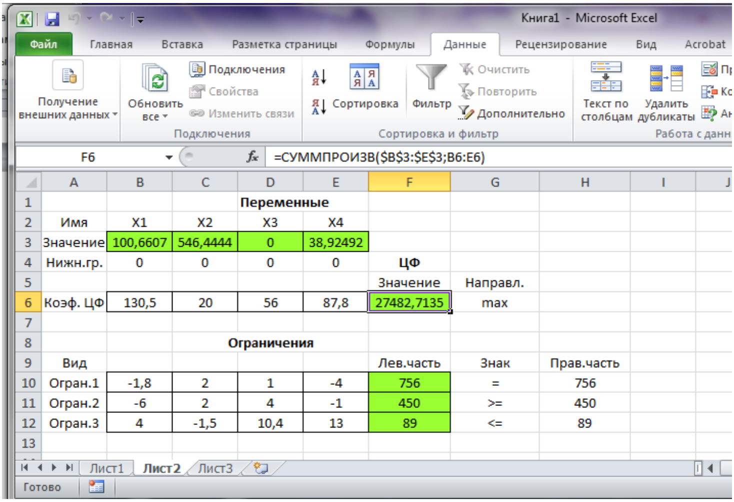


Рис. 16. Экранная форма задачи (1) после получения решения

Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рисунок 17).
- В окне **«Поиск решения»** (вкладка **«Данные»→«Поиск решения»**), нажмите кнопку **«Добавить»** и в появившемся окне **«Добавление ограничений»** введите ограничения следующим образом (рисунок 18):

– в поле **«Ссылка на ячейку»** введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **$B$3:$E$3**;

– в поле ввода знака ограничения установите **«целое»*;***

– подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки «**OK».**

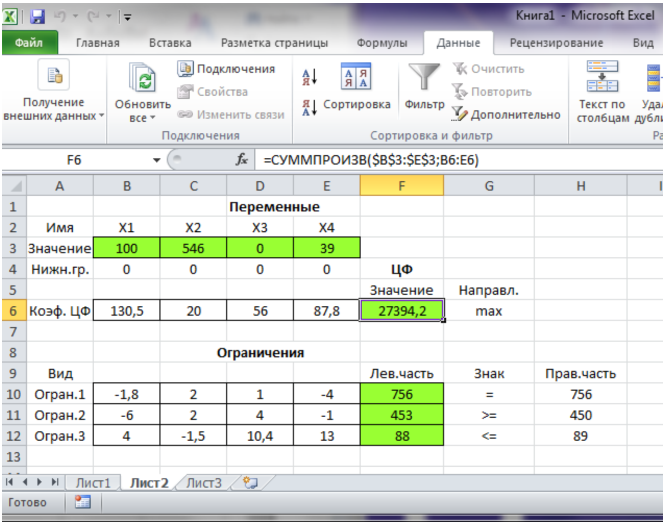


Рис. 17. Решение задачи (1) при условии целочисленности ее переменных

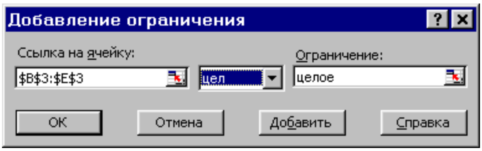


Рис. 18. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1)

На рисунке 17 представлено решение задачи (1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

Двухиндексные задачи ЛП

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара со складов в магазины (таблица 2).

Таблица 2

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$Z(X) = 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} +$$
$$+ 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\ \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \textit{целые} \left(\mathrm{i} = \overline{1,4};\ \mathrm{j} = \overline{1,3}\right). \end{cases} \qquad (5)$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (5) и ее решение представлены на рисунках 19, 20, 21 и в таблице 3.

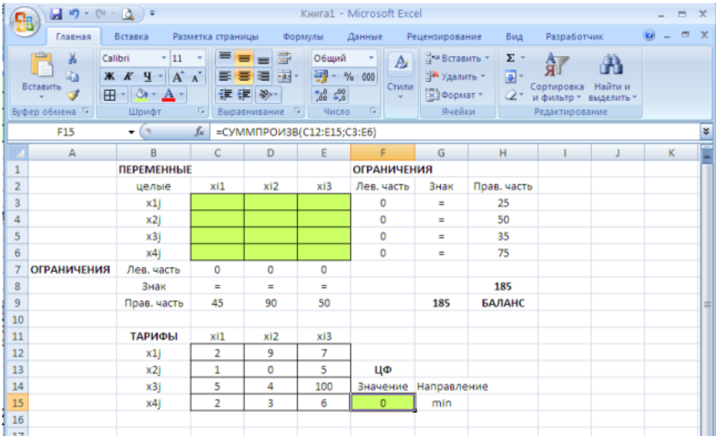


Рис. 19. Экранная форма двухиндексной задачи (5)
(курсор в целевой ячейке **F15**)

Таблица 3

Формулы экранной формы задачи (5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	**C3:E6**
Формула в целевой ячейке **F15**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)**
Ограничения по строкам в ячейках **F3, F4, F5, F6**	**=СУММ(C3:E3)** **=СУММ(C4:E4)** **=СУММ(C5:E5)** **=СУММ(C6:E6)**
Ограничения по столбцам в ячейках **C7, D7, E7**	**=СУММ(C3:C6)** **=СУММ(D3:D6)** **=СУММ(E3:E6)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **H8, G9**	**=СУММ(H3:H6)** **=СУММ(C9:E9)**

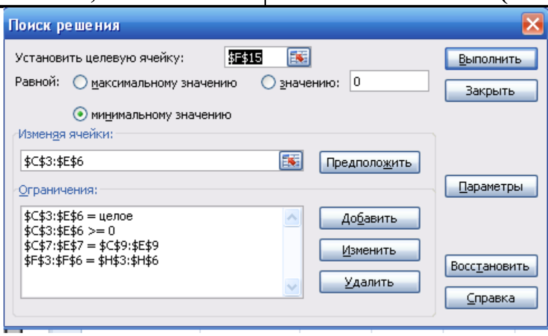


Рис. 20. Ограничения и граничные условия задачи (5)

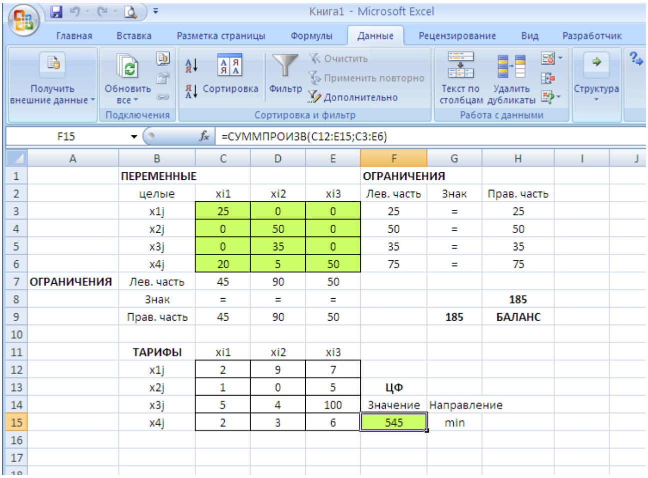


Рис. 21. Экранная форма после получения решения задачи (5)
(курсор в целевой ячейке **F15**)

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ № 2

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

Для модели ЛП, соответствующей номеру Вашего варианта, найдите оптимальное решение в табличном редакторе Microsoft Excel.

Таблица 5

№ варианта	Математическая модель
1	$Z(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000, \\ 0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}5x_3 + 1{,}3x_4 - 2{,}8x_5 \ge 32000, \\ 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2x_5 \le 40000, \\ 2{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}9x_4 = 15000, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right) \end{cases}$
2	$Z(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0{,}4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \le 460, \\ 0{,}5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \le 190, \\ 11x_1 - 8{,}5x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right) \end{cases}$

3	$Z(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}9x_4 + 4x_5 \leq 26, \\ 1{,}8x_1 - 42x_2 + 6{,}4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
4	$Z(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6{,}4x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 245, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}7x_2 - 0{,}2x_3 - 0{,}5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6{,}3x_5 \leq 54, \\ 8x_1 + 6{,}2x_2 - 4{,}8x_4 + 2{,}9x_5 \geq 17, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
5	$Z(X) = 46x_1 + 2{,}3x_2 + 9{,}4x_3 - 4x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7{,}8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 49, \\ 2{,}3x_2 + 5x_3 + 5{,}6x_4 - x_5 \leq 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
6	$Z(X) = 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 - 9{,}2x_4 + 14x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74, \\ 0{,}8x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 1{,}5x_4 - 6{,}3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
7	$Z(X) = 12x_1 + 89x_3 - 5x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73, \\ 0{,}9x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}3x_3 + 1{,}5x_4 + 6{,}4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_3 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_4 = 133, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$

8	$Z(X)=4x_1+6x_2-14x_3+49x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 21x_1+9x_2-2x_4-12x_5 \ge 58, \\ 110x_2-60x_3+80x_4-45x_5=290, \\ 5x_2+27x_3-14x_4+x_5 \le 72, \\ 87x_1-6{,}4x_2+130x_4=140, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
9	$Z(X)=-38x_1+60x_2+x_3+4x_4+8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 18x_1+4x_2+2x_3-12x_5 \le 86, \\ 2x_1+19x_3-7x_4+10x_5=130, \\ 0{,}4x_1+3x_2-4{,}2x_3+2x_4-5x_5 \le 34, \\ 2{,}1x_1+13x_2-20x_3+6x_4=18, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
10	$Z(X)=10x_1+40x_3+13x_4+56x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 7x_1+16x_2+5x_4+25x_5 \le 600, \\ 8x_1+1{,}7x_2-0{,}5x_4+4{,}7x_5=890, \\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5 \le 270, \\ 84x_1+62x_2+80x_3+14x_4 \ge 2300, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
11	$Z(X)=84x_1+5{,}7x_3+10x_4-3x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1+8{,}5x_2+16x_4+10x_5 \ge 50, \\ 10{,}4x_1+6x_3+2x_4+4x_5 \le 120, \\ 19x_1+18x_2-20x_4+30x_5=600, \\ 200x_1+45x_2-8x_3+3{,}4x_4 \ge 210, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
12	$Z(X)=0{,}84x_1-4x_3+3{,}8x_4+12x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 15x_1+9{,}6x_2+34x_4-8x_5 \le 180, \\ 0{,}6x_1+11{,}1x_2-2{,}6x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=68, \\ 14x_1+64x_2-38x_4+12x_5 \le 81, \\ 190x_1-148x_2-7x_3+84x_5 \ge 230, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

13	$Z(X)=6x_1+9x_2-6x_3+12x_4+10x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1+0{,}7x_2+1{,}9x_3+2{,}6x_4+1{,}9x_5 \le 250000, \\ 0{,}6x_1+1{,}6x_2-0{,}5x_3+1{,}9x_4-2{,}9x_5 \ge 322000, \\ 1{,}5x_1+1{,}9x_3+0{,}2x_4+3x_5 \le 6460000, \\ 2{,}6x_1-6{,}4x_2-6{,}8x_3+1{,}9x_4=415000, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
14	$Z(X)=6x_1+2x_3+3x_4-23x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3-16x_4=2500, \\ 0{,}6x_1+2x_2-6x_3+4x_4+10x_5 \le 4060, \\ 0{,}6x_1+13x_2-10x_3+3x_4+4x_5 \le 1900, \\ 16x_1-8{,}6x_2+6x_4+2x_5=2100, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
15	$Z(X)=-46x_1+36x_2+9x_4-5x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 15x_1+16x_2+6x_4-32x_5=560, \\ 21x_1+17x_2-14x_4+13x_5 \ge 910, \\ 0{,}6x_1+0{,}4x_2+1{,}9x_3+1{,}9x_4+4x_5 \le 260, \\ 1{,}9x_1-24x_2+6{,}6x_3+32x_5=150, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
16	$Z(X)=12x_1-23x_2-3x_4+6{,}9x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 2{,}9x_1+13x_2-38x_4+3x_5 \le 2450, \\ 0{,}2x_1+1{,}4x_2-0{,}6x_3-0{,}9x_4=90, \\ 4x_1+5x_3-2x_4+6{,}9x_5 \le 540, \\ 3x_1+6{,}6x_2-4{,}9x_4+3{,}9x_5 \ge 170, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
17	$Z(X)=23x_1+2{,}5x_2+9{,}9x_3-4x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1+7{,}9x_3+10x_4+5x_5 \ge 490, \\ 2{,}6x_2+4x_3+5{,}7x_4-2x_5 \le 860, \\ 17x_1-42x_4+20x_5=500, \\ 120x_1-45x_2-8x_4+142x_5 \ge 3500, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

18	$Z(X)=1,5x_1+1,6x_3-9,5x_4+10x_5\to\min;$ $\begin{cases}9,62_2+15,6x_3+14x_4+2x_5\le 740,\\ 0,8x_1+11,9x_2-4,5x_3+1,1x_4-6,6x_5=220,\\ 12x_1+23x_2-45x_4+12x_5\le 460,\\ 280x_1-148x_2-7x_3+95x_5\ge 13,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
19	$Z(X)=16x_1+29x_3-2x_5\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+9,6x_2+15,7x_3+22x_4-8x_5\le 24,\\ 1,9x_1+12,4x_2-4,3x_3+1,9x_4+6,4x_5=56,\\ 16x_1+24x_3-24x_4+26x_5\le 24,\\ 22x_1-155x_2+4x_3+56x_4=153,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
20	$Z(X)=6x_1+7x_2-44x_3+29x_5\to\min;$ $\begin{cases}22x_1+90x_2-20x_4-15x_5\ge 580,\\ 150x_2-20x_3+82x_4-44x_5=290,\\ 9x_2+35x_3-75x_4+5x_5\le 78,\\ 57x_1-6,8x_2+110x_4=140,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
21	$Z(X)=-23x_1+40x_2+2x_3+8x_4+4x_5\to\max;$ $\begin{cases}28x_1+14x_2+12x_3-2x_5\le 96,\\ 21x_1+9x_3-6x_4+12x_5=130,\\ 0,5x_1+2x_2-2,2x_3+3x_4-5x_5\le 54,\\ 2,9x_1+13x_2-20x_3+9x_4=26,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
22	$Z(X)=12x_1+4x_3+23x_4+26x_5\to\min;$ $\begin{cases}7x_1+16x_2+7x_4+25x_5\le 300,\\ 8x_1+1,8x_2-0,5x_4+4,7x_5=490,\\ 6x_1+2x_3-7x_4+6,3x_5\le 272,\\ 45x_1+62x_2+40x_3+14x_4\ge 230,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$

23	$Z(X)=12x_1+5{,}5x_3+14x_4-4x_5\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+8{,}9x_2+17x_4+15x_5\ge 500,\\ 10{,}9x_1+6x_3+2x_4+8x_5\le 1200,\\ 19x_1+19x_2-26x_4+24x_5=6000,\\ 22x_1+45x_2-5x_3+10{,}4x_4\ge 2100,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
24	$Z(X)=2{,}84x_1-6x_3+3{,}2x_4+19x_5\to\min;$ $\begin{cases}19x_1+2{,}6x_2+32x_4-8x_5\le 1890,\\ 8{,}6x_1+5{,}1x_2-2{,}7x_3+6{,}5x_4-3{,}3x_5=680,\\ 13x_1+61x_2-34x_4+12x_5\le 810,\\ 19x_1-15x_2-2x_3+80x_5\ge 250,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$
25	$Z(X)=-54x_1+23x_2+21x_3+18x_4+14x_5\to\max;$ $\begin{cases}21x_1+10x_2+22x_3-24x_5\le 960,\\ 22x_1+7x_3-5x_4+12x_5=110,\\ 5{,}5x_1+21x_2-1{,}2x_3+4x_4-2x_5\le 540,\\ 5{,}9x_1+18x_2-20x_3+5x_4=260,\\ x_j\ge 0\left(j=\overline{1,5}\right).\end{cases}$

Лабораторная работа №3
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков решения задач линейного программирования графическим методом.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Графическим методом целесообразно решать ЗЛП, содержащие не более двух переменных.

Алгоритм решения задачи:

1. Запись математических выражений, представляющих целевую функцию и ограничения, в виде равенств (уравнений);
2. Построение на графике прямых для уравнений, соответствующих ограничениям и полуплоскостей для соответствующих неравенств;
3. Определение области допустимых решений (ОДР – пересечение всех

полуплоскостей);

4. Построение на графике прямой, соответствующей целевой функции, в одну из крайних точек ОДР для получения оптимального решения.

Пример решения задачи производственного планирования графическим методом

Предприятие производит два вида продукции P_1 и P_2, используя для этого три вида сырья: S_1, S_2 и S_3. Нормы расхода сырья каждого вида приведены в таблице 1. Найти такой план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной.

Таблица 1

Продукция	**Расход сырья на единицу продукции**			**Прибыль от реализации ед. продукции**
	S_1	S_2	S_3	
P_1	1	2	1	3
P_2	1	1	2	4
Количество сырья в наличии	5	9	7	

Экономико-математическую модель данной задачи запишем следующим образом: определить производства продукции P_1 и P_2, при которых достигается максимизация целевой функции

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – количество продукции P_1 и P_2.

Решение.

В первую очередь, найдем область допустимых решений, т.е. точки x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений.

По условию задачи $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,т.е. мы рассматриваем только те точки, которые принадлежат первой четверти.

Шаг 1

Рассмотрим неравенство 1 системы ограничений $x_1 + x_2 \le 5$.

Построим прямую. Заменим знак неравенства на знак равенства $x_1 + x_2 = 5$:

при $x_1 = 0, x_2 = 5$,

при $x_2 = 0, x_1 = 5$, т.е. получим пару точек с координатами (0;5) и (5;0).

Соединяем полученные точки и получаем необходимую прямую.

Какие точки нас интересуют?

$x_1 + x_2 \le 5$,

$x_2 \le -x_1 + 5$.

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

Объединим полученную полуплоскость с ранее найденными ограничениями (см. рис. 1).

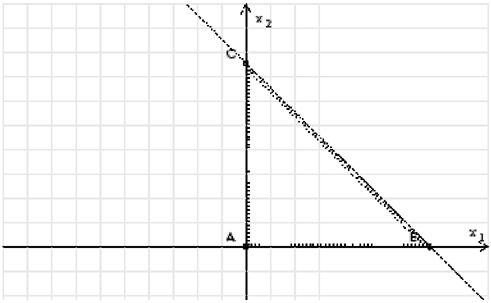


Рис. 1

Область допустимых решений выделена штриховкой.

Вершины области допустимых решений:

A (0, 0),

B (5, 0),

C (0, 5).

Шаг 2

Рассмотрим неравенство 2 системы ограничений $2x_1 + x_2 \le 9$.

Построим прямую. Заменим знак неравенства на знак равенства $2x_1 + x_2 = 9$.

Прямая при $x_1 = 0, x_2 = 9$,

при $x_2 = 0, x_1 = 4{,}5$, т.е. получим пару точек с координатами (0;9) и (4,5;0).

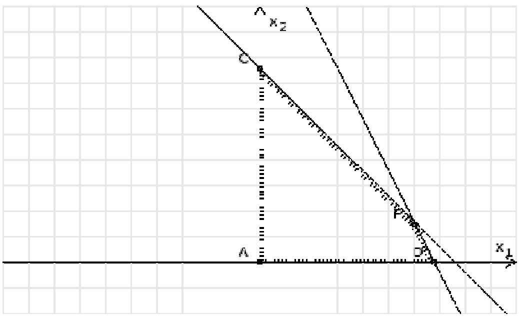


Рис. 2

Соединяем полученные точки и получаем необходимую прямую.

Какие точки нас интересуют?

$2x_1 + x_2 \le 9$,

$x_2 \le -2x_1 + 9$.

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

Объединим полученную полуплоскость с ранее найденными ограничениями (см. рис. 2).

Область допустимых решений выделена штриховкой.

Вершины области допустимых решений:

A (0, 0),

D (9/2, 0),

C (0, 5),

E (4, 1).

Шаг 3

Рассмотрим неравенство 3 системы ограничений $x_1 + 2x_2 \le 7$.

Построим прямую. Заменим знак неравенства на знак равенства $x_1 + 2x_2 = 7$.

Прямая при $x_1 = 0, x_2 = 3{,}5$,

при $x_2 = 0, x_1 = 7$, т.е. получим пару точек с координатами (0;3,5) и (7;0).

Соединяем полученные точки и получаем необходимую прямую.

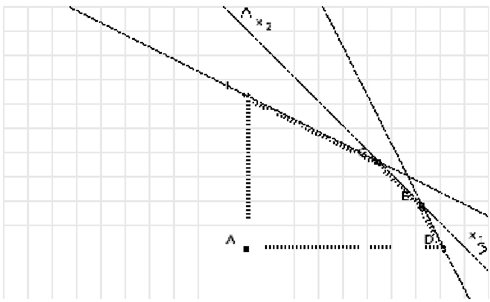


Рис. 3

Какие точки нас интересуют?

$x_1 + 2x_2 \le 7$,

$x_2 \le -\frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{2}$.

Знак неравенства меньше или равно нуля, следовательно, нас интересуют точки лежащие ниже построенной нами прямой.

Объединим полученную полуплоскость с ранее найденными ограничениями (см. рис. 3).

Область допустимых решений выделена штриховкой.

Вершины области допустимых решений:

A (0, 0),

D (9/2, 0),

F (0, 7/2),

E (4, 1),

G (3, 2).

Шаг 4

Вернемся к нашей исходной функции $Z = 3x_1 + 4x_2$.

Допустим значение функции Z равно 1 (абсолютно произвольно выбранное число), тогда $1 = 3x_1 + 4x_2$.

Данное уравнение является уравнением прямой на плоскости.

Из курса аналитической геометрии известно, что данная прямая перпендикулярна вектору, координатами которого являются коэффициенты функции, а именно вектору $\overline{ON} = (3,4)$.

Следовательно, с геометрической точки зрения, функция Z изображается как множество прямых перпендикулярных вектору $\overline{ON} = (3,4)$.

Построим вектор $\overline{ON} = (3,4)$.

Вектор $\overline{ON}$ изображен красным цветом (см. рис.4).

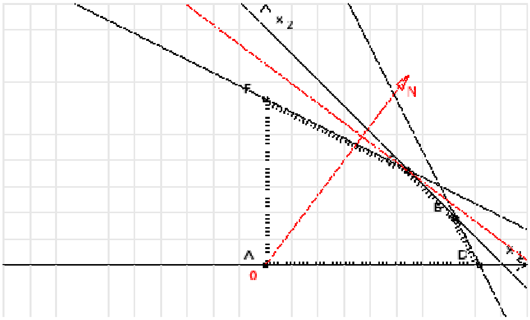


Рис. 4

Значение функции Z будет возрастать при перемещении прямой в направлении вектора $\overline{ON}$.

Диапазон перемещения прямой НЕ от точки O до точки N, а именно, в направлении от точки O к точке N.

Будем перемещать прямую, перпендикулярную вектору $\overline{ON}$, до тех пор, пока она полностью не пройдет область допустимых решений.

В нашем случае, касание прямой, перед выходом из области допустимых решений, произойдет в вершине G (3,2).

В точке G значение функции Z будет наибольшим.

Таким образом, оптимальный план для данной задачи составит 3 единицы P_1 и 2 единицы продукции P_2, от реализации которых предприятие получит максимум прибыли, равный 17 денежным единицам.

Возможные варианты получения ответа ЗЛП графическим методом:

1 вариант – функция достигает минимального значения в точке:

Будем перемещать прямую, перпендикулярную вектору ON, до тех пор, пока она не коснется области допустимых решений.

В нашем случае, ***первое*** касание прямой области допустимых решений произойдет в вершине G (см. рис. 5).

В точке G значение функции Z будет наименьшим.

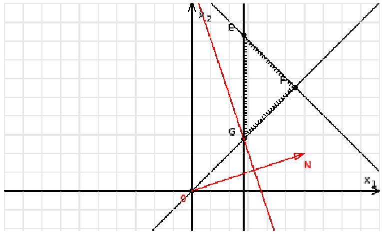


Рис. 5

2 вариант – функция достигает максимального (минимального) значения на отрезке:

$Z = 8x_1 + 4x_2 \to \max$

В нашем случае, касание прямой, перед выходом из области допустимых решений, произойдет в отрезке FG , например, пусть F(6,6), G (7,4) (см. рис. 6).

В любой точке отрезка FG значение функции L будет наибольшим.

Ответ:

$Z_{\max} = 72$,

$x_1 = 6t + 7(1-t)$,

$x_2 = 6t + 4(1-t)$,

где $0 \le t \le 1$.

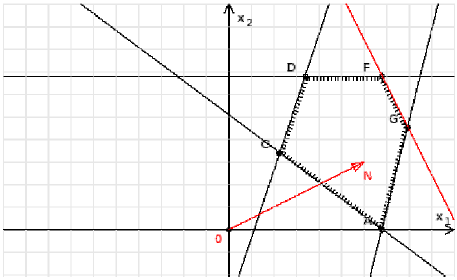


Рис. 6

3 вариант – функция достигает максимального (минимального) значения на луче:

$Z = -x_1 + x_2 \to \max$.

Будем перемещать прямую, перпендикулярную вектору ON, до тех пор, пока она полностью не пройдет область допустимых решений.

В нашем случае, касание прямой, перед выходом из области допустимых решений, произойдет на луче, имеющим свое начало в точке $C\left(\frac{10}{7}, \frac{3}{7}\right)$ (см. рис. 7).

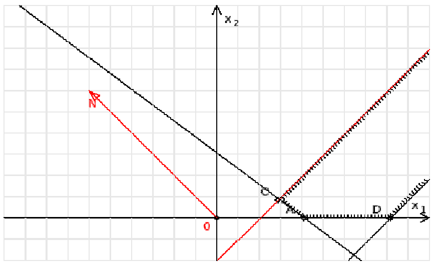


Рис. 7

Ответ:

$Z_{\max} = -1$,

$$x_1 = \frac{10}{7}t + t,$$

$$x_2 = \frac{3}{7}t + t,$$

где $t \geq 0$.

4 вариант – функция не является ограниченной

Мы не можем найти положение прямой, перпендикулярной вектору ON, при котором прямая пересечет область допустимых значений непосредственно перед выходом из нее (см. рис. 8).

Функция Z не является ограниченной, т.е. не обладает набольшим значением.

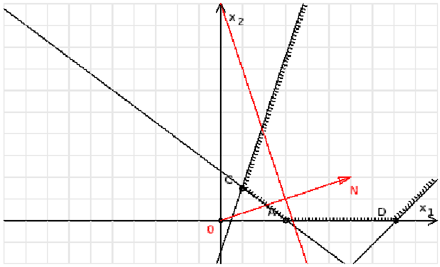


Рис. 8

Ответ: Функция Z не является ограниченной, т.е. не обладает набольшим значением.

5 вариант – ОДР состоит из одной единственной точки (см. рис. 9)**.**

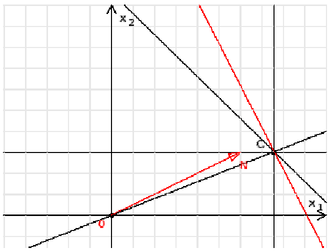


Рис. 9

6 вариант – отсутствие ОДР

Ответ: ОДР не существует, следовательно, задача не имеет решения.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ №3

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

Решите графическим методом задачу линейного программирования, соответствующей номеру Вашего варианта.

1 вариант

$$Z(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2 вариант

$$Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3 вариант

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4 вариант

$$Z(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5 вариант

$$Z(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6 вариант

$$Z(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7 вариант

$$Z(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \le 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8 вариант

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 11, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11 вариант

$$Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12 вариант

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13 вариант

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14 вариант

$$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15 вариант

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16 вариант

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17 вариант

$$Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

18 вариант

$$Z(X) = 3x_1 - 4x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19 вариант

$$Z(X) = x_1 - x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20 вариант

$$Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

21 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22 вариант

$$Z(X) = -2x_1 - x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 2x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 + 3x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

26 вариант

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 - x_2 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОДНОИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков анализа чувствительности задач ЛП на основе различных типов отчетов, выдаваемых Microsoft Excel, о результатах поиска решения.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Для задачи, решенной в лабораторной работе №3, получите в Excel все типы отчетов по результатам поиска решения, необходимые для анализа чувствительности.
2. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.
3. Результаты анализа задачи на чувствительность внесите в общий отчет по лабораторной работе №3.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задачи анализа оптимального решения на чувствительность

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача **анализа чувствительности** задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рисунок 1). **Связывающие** ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2). **Несвязывающие** ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5). Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным,** а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением, – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5). Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас **дефицитного** ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас **недефицитного** ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рисунке 1 – многоугольник OABCDE. Если *связывающее* ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F, то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника OABCFE и к получению нового оптимального решения в точке F. При этом ограничение (2) станет избыточным. Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рисунок 2).

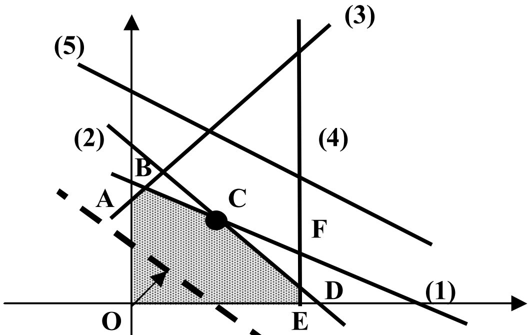


Рис. 1. Исходная задача ЛП для графического анализа чувствительности

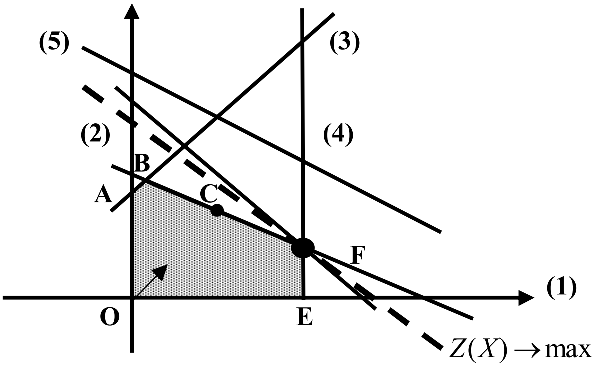


Рис. 2. Анализ максимального изменения запаса
дефицитного ресурса (2) с целью улучшения оптимального решения $C \to F$

Таким образом, ***чтобы*** *графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение,* ***необходимо*** *передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.*

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рисунке 3. Передвинем несвязывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке С.

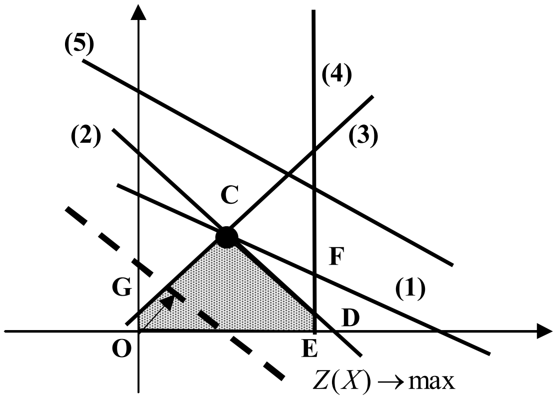


Рис. 3. Анализ максимального изменения запаса
недефицитного ресурса (3), не изменяющего оптимальное решение С

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке С исходной задачи (см. рисунок 1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник OGCDE. Оптимальное решение останется прежним (точка С). Таким образом, ***чтобы*** *графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения,* ***необходимо*** *передвигать соответствующую прямую до пересечения с* *<u>оптимальной точкой</u>.*

Для того чтобы выяснить, запас какого из *дефицитных* ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие **ценности дополнительной единицы i-го ресурса** (теневая цена):

$$y_i = \frac{\text{max\_ приращение\_оoптималь ого\_значения\_Z(X)}}{\text{max\_дах\_допустимый\_ прирост\_объема\_i - го\_ресурса}}.$$

То есть сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i, затем – второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке. Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2, то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рисунок 4).

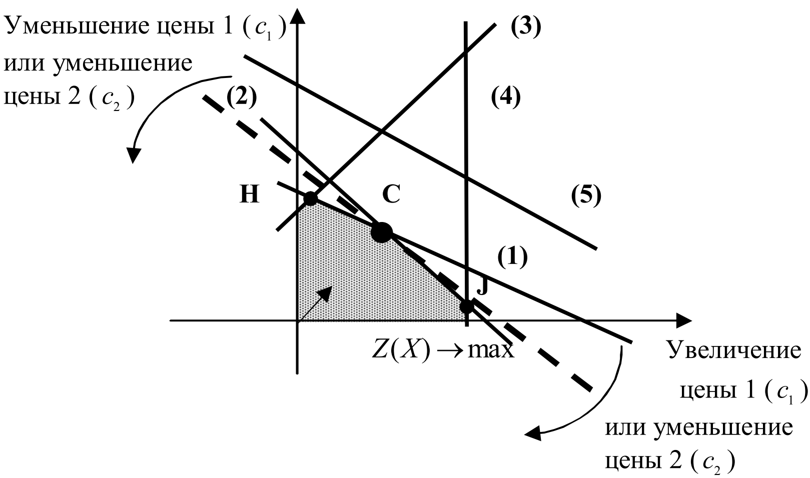


Рис. 4. Анализ изменения коэффициентов c_1 и c_2 ЦФ

Зафиксируем значение c_2. Оптимальное решение в точке С не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке С не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

При таких поворотах точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и (2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка H или J.

Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1, при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel

Проведем анализ чувствительности задачи о мебельном комбинате из лабораторной работы №2 (часть I). Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне **«Результаты поиска решения»** выделить с помощью мыши два типа отчетов: **«Результаты»** и **«Устойчивость»** (рисунок 5).

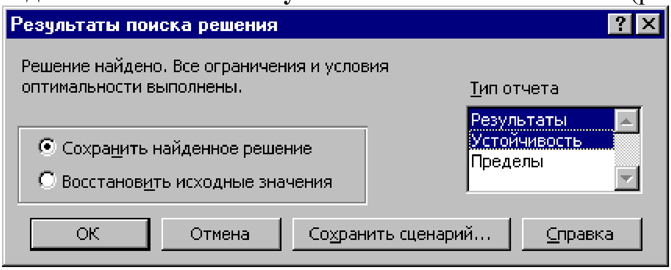


Рис. 5. Выделение типов отчетов требуемых для анализа чувствительности

Отчет по результатам

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рисунок 6):

1) таблица 1 содержит информацию о ЦФ;

2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;

3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Целевая ячейка (Максимум)						
2		**Ячейка**	**Имя**	**Исходно**	**Результат**		
3		$F$6	Коэф. ЦФ Значение	0	106200		
4	Изменяемые ячейки						
5		**Ячейка**	**Имя**	**Исходно**	**Результат**		
6		$B$3	Значение XA	0	1100		
7		$C$3	Значение XB1	0	0		
8		$D$3	Значение XB2	0	120		
9	Ограничения						
10		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**формула**	**Статус**	**Разница**
11		$F$21	Заказ на полки В2 Лев. часть	120	$F$21>=$H$21	не связан.	70
12		$F$22	Доля продаж Лев. часть	488	$F$22>=$H$22	не связан.	468
13		$F$10	ФВ по столярн.раб. Лев. часть	4400	$F$10<=$H$10	не связан.	2640
14		$F$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	$F$11<=$H$11	не связан.	2370,666667
15		$F$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	$F$12<=$H$12	не связан.	44
16		$F$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	$F$13<=$H$13	не связан.	152,8
17		$F$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	$F$14<=$H$14	не связан.	122,8
18		$F$15	По компл. раскроя ДСП (Y) Лев. часть	120	$F$15<=$H$15	не связан.	3267
19		$F$16	Расход ДВП Лев. часть	120	$F$16<=$H$16	не связан.	3100
20		$F$17	Расход стекла Лев. часть	2440	$F$17<=$H$17	не связан.	160
21		$F$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	$F$18<=$H$18	связанное	0
22		$F$19	Емкость склада Лев. часть	1220	$F$19<=$H$19	связанное	0
23		$F$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	$F$20<=$H$20	не связан.	4080
24		$B$3	Значение XA	1100	$B$3>=$B$4	не связан.	1100
25		$C$3	Значение XB1	0	$C$3>=$C$4	связанное	0
26		$D$3	Значение XB2	120	$D$3>=$D$4	не связан.	70

Лист1 | Отчет по результатам 8 | Отчет по устойчивости 5

Рис. 6. Лист отчета по результатам

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе **«Статус» («Состояние»)** соответствующее ограничение указывается как **«связанное»**; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс недефицитный) в этой графе указывается **«не связан»**. В графе **«Значение»** приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий (строки 24, 25, 26 на рисунке 6) в графе **«Разница»** показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов *недефицитных* ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе **«Разница»** дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма. Например, анализ строки 26 (см. рисунок 6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что полок выпущено на 70 шт. больше, чем было заказано. То есть из 120 полок только 70 шт. пойдут в свободную продажу. Таким образом, можно дать следующий ответ на вопрос об изменении запаса недефицитного ресурса «Значение XB2»: *обязательный заказ на производство полок* B_2 *можно* ***увеличить на 70 шт.****, то есть заказывать до 120 шт., и при этом оптимальное решение (рисунок 6) задачи не изменится.*

Если на ресурс наложено ограничение типа $\leq$, то в графе **«Разница»** дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Так, анализ строки 13 (см. рисунок 6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что время столярных работ составило 4440 ч. Неизрасходованным остается 2640 ч из общего фонда времени, отведенного на столярные работы. Из этого следует, что *запас недефицитного ресурса «Фонд времени по столярным работам» можно* ***уменьшить на 2640 ч*** *и это никак не повлияет на оптимальное решение (рисунок 6).* Отсюда следует, что количество столяров можно уменьшить на 15 человек

$$\frac{2640\ \text{ч}/\text{мес.}}{8\,\text{ч}/(\text{чел.}\cdot\text{см.})\cdot 1\,\text{см.}/\text{дн.}\cdot 22\,\text{дн.}/\text{мес.}} = 15\ \text{чел.}$$

или перевести их на выпуск другой продукции.

Анализ строки 23 показывает, что общее количество выпускаемых полок составляет 1220 шт., что меньше предполагаемой емкости рынка на 4080 шт. *То есть запас недефицитного ресурса «Емкость рынка» может быть* ***уменьшен до 1220 полок*** *и это никак не повлияет на оптимальное решение (рисунок 6).* Другими словами, уменьшение спроса до 1220 полок в месяц никак не скажется на оптимальных объемах выпуска полок.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее количество полок и получать большую прибыль. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рисунок 7).

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным.

1. Результат решения задачи.

2. Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. рисунок 7) нормированная стоимость для полок $В_1$ равна –20 руб./шт. (строка 5). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (рисунок 6), потребуем включить в план выпуска 1 полку $В_1$, то новый план выпуска ($x_A = 1100;\ x_{B_1} = 1;\ x_{B_2} = 119$) принесет нам прибыль 106 180 руб./мес., что на 20 руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. Коэффициенты ЦФ.

4. Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δc_j, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, *допустимое увеличение цены на полки $В_1$ равно 20 руб./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено* (строка 5 на рисунке 7). Это означает, что если цена на полки $В_1$ возрастет более чем на 20 руб./шт., например станет равной 61 руб./шт., то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск $В_1$ в количестве 70 шт. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (рисунок 6) останется прежним.

Примечание. При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значение XA	1100	0	90	1E+30	30
$C$3	Значение XB1	0	-20	40	20	1E+30
$D$3	Значение XB2	120	0	60	30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$21	Заказ на полки B2 Лев. часть	120	0	50	70	1E+30
$F$22	Доля продаж Лев. часть	488	0	20	468	1E+30
$F$10	ФВ по столярн.раб. Лев. часть	4400	0	7040	1E+30	2640
$F$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	0	2464	1E+30	2370,666667
$F$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	0	154	1E+30	44
$F$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	0	165	1E+30	152,8
$F$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	0	162,8	1E+30	122,8
$F$15	По компл. раскроя ДСП (Y) Лев. часть	120	0	3387	1E+30	3267
$F$16	Расход ДВП Лев. часть	120	0	3220	1E+30	3100
$F$17	Расход стекла Лев. часть	2440	0	2600	1E+30	160
$F$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	30	1100	70	368,4
$F$19	Емкость склада Лев. часть	1220	60	1220	80	70
$F$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	0	5300	1E+30	4080

Рис. 7. Отчет по устойчивости для задачи о мебельном комбинате

Таблица 2 (см. рисунок 7) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке **«Результ. значение»**.

2. Предельные значения приращения ресурсов Δb_i. В графе **«Допустимое Уменьшение»** показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов, так как анализ *недефицитных* ресурсов был дан ранее. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее, чем в оптимальном решении, количество полок и получать более высокую прибыль. В рассматриваемой задаче такими ограничениями *являются дефицитные* ресурсы «Емкость сушилки» и «Емкость склада готовой продукции». Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид $\leq$, то возникает вопрос, на сколько максимально должна возрасти емкость этих помещений, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе **«Допустимое Увеличение»**. Емкость сушилки имеет смысл увеличить самое большее на 70 полок, а емкость склада готовой продукции – на 80 полок. Это приведет к новым оптимальным решениям, увеличивающим прибыль по сравнению с (рисунок 6). Дальнейшее увеличение емкостей сушилки и склада сверх указанных пределов не будет больше улучшать решение, т.к. уже другие ресурсы станут связывающими.

3. Ценность дополнительной единицы *i*-го ресурса (теневая цена) рассчитывается только для *дефицитных* ресурсов. После того как мы установили, что увеличение емкостей сушилки и склада приведет к новым планам выпуска, обеспечивающим более высокую прибыль, возникает следующий вопрос. Что выгоднее в первую очередь расширять: сушилку или склад? Ответ на этот вопрос дает графа **«Теневая цена»**. Для емкости сушилки она равна 30 руб./шт., а для склада – 60 руб./шт. (см. рисунок 7), то есть каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить в сушилку, увеличит прибыль на 30 руб., а каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить на склад, увеличит прибыль на 60 руб. Отсюда вывод: *в первую очередь выгодно увеличивать емкость склада готовой продукции.*

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков решения ЗЛП симплекс-методом.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для решения ЗЛП существует универсальный метод – метод последовательного улучшения плана или симплекс-метод.

Симплекс-метод осуществляется после приведения исходной ЗЛП к *каноническому виду.*

В канонической форме:

1. Все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
2. Все переменные неотрицательны;
3. Целевая функция подлежит максимизации.

Таким образом, каноническая задача линейного программирования имеет вид:

$$Z(\overline{X}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n},$$

$$b_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Любую ЗЛП можно привести к каноническому виду, используя следующие ***правила***:

1. Максимизация целевой функции $Z(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ равносильна минимизации целевой функции $-Z(\overline{X}) = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$;

2. Ограничение в виде неравенства, например, $3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$, может

быть приведено к стандартной форме $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$, где новая переменная x_4 неотрицательна.

Ограничение $x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10$ может быть приведено к стандартной форме $x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 10$, где новая переменная x_5 неотрицательна.

Ограничение $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -50 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 50 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 50$, где новая переменная x_6 неотрицательна.

3. Если некоторая переменная x_k может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду $x_k = x_k^I - x_k^{II}$, где $x_k^I \geq 0$ и $x_k^{II} \geq 0$.

Пример решения ЗЛП симплекс-методом

Рассмотрим следующую задачу, пусть предприятие производит два вида продукта A, B, используя при этом в каждом продукте три вида сырья – I, II и III. Нормы расхода видов сырья на единицу продукта задаются в виде таблицы,

	A	B	
I	2	1	64
II	1	3	72
III	0	1	20
	4	6	

где нормы расхода I сырья на продукты A, B составляют соответственно 2 ед. и 1 ед.; для II сырья – 1 ед. и 3 ед.; для III сырья – 0 ед. и 1 ед. Количество I, II и III видов сырья ограничены в 64, 72 и 20 ед. прибыль получаемая предприятием от реализации единицы продукта A составляет 4 ден.ед., для продукта B – 6 ден.ед. Каков объем производства продуктов предприятием доставляющий максимальную прибыль?

Решение

Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2 неизвестные объемы выпуска продуктов A, B соответственно.

$$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 64, \\ x_1 + 3x_2 \leq 72, \\ x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем задачу в канонической форме, т.е. ограничения-неравенства перепишем в виде равенств, добавляя балансовые переменные:

$$Z(X) - 4x_1 - 6x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 64, \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 72, \\ x_2 + s_3 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система является системой с базисом (базис s_1, s_2, s_3 каждая из них входит только в одно уравнение системы с коэффициентом 1), x_1 и x_2 – свободные переменные. Задачи, при решении которых применяется симплекс-метод, должны обладать следующими двумя свойствами:

- система ограничений должна быть системой уравнений с базисом;
- свободные члены всех уравнений в системе должны быть неотрицательны.

Полученная система – система с базисом и ее свободные члены неотрицательны, поэтому можно применить симплекс-метод. Составим первую симплекс-таблицу (Итерация 0), т.е. таблицу коэффициентов целевой функции и системы уравнений при соответствующих переменных. Здесь «БП» означает столбец базисных переменных, «Решение» – столбец правых частей уравнений системы. Решение не является оптимальным, т.к. в *Z* – строке есть отрицательные коэффициенты.

Итерация 0

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
s_1	2	1	1	0	0	64	64/1=64
s_2	1	3	0	1	0	72	72/3=24
s_3	0	1	0	0	1	20	20/1=20
Z	-4	-6	0	0	0	0	-

Для улучшения решения перейдем к следующей итерации, получим следующую симплекс-таблицу. Для этого надо выбрать разрешающий столбец, т.е. переменную, которая войдет в базис на следующей итерации. Он выбирается по наибольшему по модулю отрицательному коэффициенту в *Z*-строке (в задаче на максимум) – в начальной итерации это столбец x_2 (коэффициент –6).

Затем выбирается разрешающая строка, т.е. переменная, которая выйдет из базиса на следующей итерации. Она выбирается по наименьшему отношению столбца «Решение» к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца (столбец «Отношение») – в начальной итерации это строка s_3 (коэффициент 20).

Разрешающий элемент находится на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, его ячейка выделена цветом, он равен 1.

Следовательно, на следующей итерации переменная x_2 заменит в базисе s_3. Заметим, что в Z-строке отношение не ищется, там ставится прочерк «–». В случае если есть одинаковые минимальные отношения, то выбирается любое из них. Если в разрешающем столбце все коэффициенты меньше или равны 0, то *решение задачи бесконечно*.

Заполним следующую таблицу «Итерация 1». Её мы получим из таблицы «Итерация 0». Цель дальнейших преобразований – превратить разрешающий столбец x_2 в единичный (с единицей вместо разрешающего элемента и нулями вместо остальных элементов).

1) Вычисление строки x_2 таблицы «Итерация 1». Сначала делим все члены разрешающей строки s_3 таблицы «Итерация 0» на разрешающий элемент (он равен 1 в данном случае) этой таблицы, получим строку x_2 в таблице «Итерации 1». Т.к. разрешающий элемент в данном случае равен 1, то строка s_3 таблицы «Итерация 0» будет совпадать со строкой x_2 таблицы «Итерация 1». Строку x_2 таблицы «Итерации 1» мы получили ***0 1 0 0 1 20***, остальные строки таблицы «Итерация 1» будут получены из этой строки и строк таблицы «Итерация 0» следующим образом:

2) Вычисление Z-строки таблицы «Итерация 1». На месте -6 в первой строке (Z-строке) в столбце x_2 таблицы «Итерация 0» должен быть 0 в первой строке таблицы «Итерация 1». Для этого все элементы строки x_2 таблицы «Итерация 1» ***0 1 0 0 1 20*** умножим на 6, получим ***0 6 0 0 6 120*** и сложим эту строку с первой строкой (Z-строкой) таблицы «Итерация 0» ***-4 -6 0 0 0 0***, получим ***-4 0 0 0 6 120***. В столбце x_2 появился ноль 0, цель достигнута. Элементы разрешающего столбца x_2.

3) Вычисление строки s_1 таблицы «Итерация 1». На месте 1 в s_1 строке таблицы «Итерация 0» должен быть 0 в таблице «Итерация 1». Для этого все элементы строки x_2 таблицы «Итерация 1» ***0 1 0 0 1 20*** умножим на -1, получим ***0 -1 0 0 -1 -20*** и сложим эту строку с s_1 – строкой таблицы «Итерация 0» ***2 1 1 0 0 64***, получим строку ***2 0 1 0 -1 44***. В столбце x_2 получен необходимый 0.

4) Вычисление строки s_2 таблицы «Итерация 1». На месте 3 в s_2 строке таблицы «Итерация 0» должен быть 0 в таблице «Итерация 1». Для этого все элементы строки x_2 таблицы «Итерация 1» ***0 1 0 0 1 20*** умножим на -3, получим ***0 -3 0 0 -3 -60*** и сложим эту строку с s_2 – строкой таблицы «Итерация 0» ***1 3 0 1 0 72***, получим строку ***1 0 0 1 -3 12***. В столбце x_2 получен нужный 0. Столбец x_2 в таблице «Итерация 1» стал единичным, он

содержит одну 1 и остальные 0.

Строки таблицы «Итерация 1» получаем по следующему правилу:

Новая строка = Старая строка – (Коэффициент разрешающего столбца старой строки)*(Новая разрешающая строка).

Например для Z-строки имеем:

Старая z-строка	***(-4 -6 0 0 0 0)***
-(-6)*Новая разрешающая строка	***-(0 -6 0 0 -6 -120)***
=Новая z-строка	***(-4 0 0 0 6 120)***.

Для следующих таблиц пересчет элементов таблицы делается аналогично, поэтому мы его опускаем.

Итерация 1

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
s_1	2	0	1	0	-1	44	44/2=22
s_2	1	0	0	1	-3	12	12/1=12
x_2	0	1	0	0	1	20	-
Z	-4	0	0	0	6	120	-

Разрешающий столбец x_1, разрешающая строка s_2, s_2 выходит из базиса, x_1 входит в базис. Совершенно аналогично получим остальные симплекс-таблицы, пока не будет получена таблица со всеми положительными коэффициентами в Z-строке. Это признак оптимальной таблицы.

Итерация 2

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
s_1	0	0	1	-2	5	20	20/5=4
x_1	1	0	0	1	-3	12	-
x_2	0	1	0	0	1	20	20/1=20
Z	0	0	0	4	-6	168	-

Разрешающий столбец s_3, разрешающая строка s_1, s_1 выходит из базиса, s_3 входит в базис.

Итерация 3

БП	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Решение	Отношение
s_3	0	0	1/5	-2/5	1	4	-
x_1	1	0	3/5	-1/5	0	24	-
x_2	0	1	-1/5	2/5	0	16	-
Z	0	0	6/5	8/5	0	192	-

В Z-строке все коэффициенты неотрицательны, следовательно, получено оптимальное решение $x_1 = 24$, $x_2 = 16$, $Z_{\max} = 192$.

Для того, чтобы предприятие получило максимальную прибыль равной 192 ден.ед., необходимо производить продукцию видов А – 24 ед., В – 16 ед.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ № 5

Предприятие имеет возможность производить три вида продукции А, В и С, используя при этом три вида сырья I, II и III. Расход сырья на единицу продукции задается параметрами a_{ij}. Имеющееся количество сырья задается значениями b_j. Прибыль получаемая от реализации единицы продукции равна c_i.

Условия задачи представляются следующим образом:

	A	B	C	
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	c_1	c_2	c_3	

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

1. Составить экономико-математическую модель определения выпуска продукции, обеспечивающей предприятию максимальную прибыль;
2. Методом симплекс-процедуры найти объемы производства максимизирующие прибыль предприятию, сделать вывод;
3. Решить с помощью надстройки «Поиск решения» в приложении MS Excel.

1	A	B	C	
I	4	5	8	336
II	1	9	5	259
III	3	2	3	173
	42	60	66	

2	A	B	C	
I	5	5	8	553
II	8	6	1	428
III	2	3	1	158
	73	75	80	

3	A	B	C	
I	4	8	7	530
II	8	4	5	454
III	7	7	2	484
	108	80	67	

4	A	B	C	
I	8	1	4	373
II	9	1	2	340
III	9	5	6	608
	163	47	82	

5	A	B	C	

6	A	B	C	

I	7	9	8	788
II	9	1	7	546
III	1	6	9	551
	126	81	138	

I	7	6	3	340
II	8	4	2	270
III	1	7	7	398
	76	109	86	

7	A	B	C	
I	5	4	6	394
II	4	6	3	323
III	8	4	7	487
	66	54	66	

8	A	B	C	
I	4	2	3	153
II	1	9	4	410
III	6	2	3	169
	67	37	46	

9	A	B	C	
I	2	9	2	330
II	7	2	7	447
III	9	2	7	501
	156	90	138	

10	A	B	C	
I	3	3	2	247
II	2	3	1	171
III	4	4	3	342
	72	81	48	

11	A	B	C	
I	2	3	1	130
II	8	1	5	288
III	1	8	8	372
	35	50	42	

12	A	B	C	
I	6	7	1	178
II	7	9	3	229
III	9	5	1	219
	141	131	31	

13	A	B	C	
I	4	9	2	386
II	7	6	9	468
III	5	2	4	215
	93	86	90	

14	A	B	C	
I	6	3	1	188
II	1	5	3	252
III	7	5	4	359
	106	101	63	

15	A	B	C	
I	7	6	1	465
II	8	6	4	516
III	9	4	7	491
	140	100	60	

16	A	B	C	
I	5	5	9	507
II	1	5	5	291
III	8	9	1	532
	89	99	83	

17	A	B	C	
I	2	3	2	157
II	4	3	1	200
III	7	1	3	238
	47	33	26	

18	A	B	C	
I	3	3	1	149
II	4	4	1	194
III	9	9	9	531
	110	110	82	

19	A	B	C	

20	A	B	C	

I	3	5	5	368	I	2	8	1	135
II	7	6	1	346	II	9	7	8	312
III	3	1	4	202	III	5	7	5	219
	77	63	38			99	131	88	
21	A	B	C		***22***	A	B	C	
I	9	9	2	301	I	1	8	9	440
II	8	6	3	237	II	7	9	5	425
III	9	9	5	334	III	3	9	2	265
	137	123	57			58	120	91	
23	A	B	C		***24***	A	B	C	
I	4	7	1	189	I	2	2	4	176
II	3	7	9	251	II	5	7	8	478
III	5	4	6	184	III	2	6	7	343
	38	74	72			22	34	46	
25	A	B	C		***26***	A	B	C	
I	4	8	6	432	I	7	6	5	608
II	9	6	9	486	II	4	4	5	420
III	4	6	9	396	III	5	6	6	556
	65	66	81			53	54	62	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА (МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА)

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков применения модели межотраслевого баланса.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, называемую еще моделью Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на n отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.д.).

Рассмотрим отрасль i, $i = 1, 2,\ldots, n$. Она выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме x_i, который еще называют валовым выпуском. Часть объема продукции x_i , произведенная i-ой отраслью используется для собственного производства в объеме x_{ii} , часть – поступает в остальные отрасли $j = 1, 2,\ldots, n$ для потребления при производстве в объемах x_{ij}, и некоторая часть объемом y_i – для потребления в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления. Перечисленные сферы распределения валового продукта i-ой отрасли приводят к соотношению баланса

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Введем *коэффициенты прямых затрат* a_{ij}, которые показывают, сколько единиц продукции i-ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли j. Тогда можно записать, что количество продукции, произведенной в отрасли i в объеме x_{ij} и поступающей для производственных нужд в отрасль j, равно

$$x_{ij} = a_{ij} x_j$$

Считаем сложившуюся технологию производства во всех отраслях неизменной (за рассматриваемый период времени), означающую, что коэффициенты прямых затрат a_{ij} постоянны. Тогда получаем следующее соотношение баланса, называемого моделью Леонтьева

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + y_i , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Введя вектор валового выпуска X, матрицу прямых затрат A и вектор конечного потребления Y

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

модель Леонтьева (1) можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y . \qquad (2)$$

Матрица $A \geq 0$, у которой все элементы$a_{ij} \geq 0$ (неотрицательны), называется $X \geq 0$, для которого выполняется неравенство

$$X > AX.$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше, чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт $Y = X - AX > 0$.

Модель Леонтьева с продуктивной матрицей A называется продуктивной моделью.

Для проверки продуктивности матрицы A достаточно существования обратной матрицы $B = (E - A)^{-1}$ с неотрицательными элементами, где матрица E – единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью модели Леонтьева (2) можно выполнить три вида плановых расчетов, при условии соблюдения условия продуктивности матрицы A:

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей X можно определить объемы конечной продукции всех отраслей Y

$$Y = (E - A)X.$$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей Y можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{3}$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица

$$B = (E - A)^{-1}$$

называется матрицей полных материальных затрат. Ее смысл следует из матричного равенства (3), которое можно записать в виде $X = BY$. Элементы матрицы B показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в i-ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли j.

Рассмотрим пример.

Задача. Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B.

2) Проверить продуктивность матрицы A.

2) Вектор валового выпуска X.

3) Межотраслевые поставки продукции x_{ij}.

Математическая модель и последовательность расчетов

Модель Леонтьева имеет вид

$$X = AX + Y.$$

Матрица полных материальных затрат B равна

$$B = (E - A)^{-1}.$$

Продуктивность матрицы A проверяется, по вычисленной матрице B. Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица A продуктивна.

Вектор валового выпуска X рассчитывается по формуле

$$X = BY.$$

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij}x_{j.}$$

Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

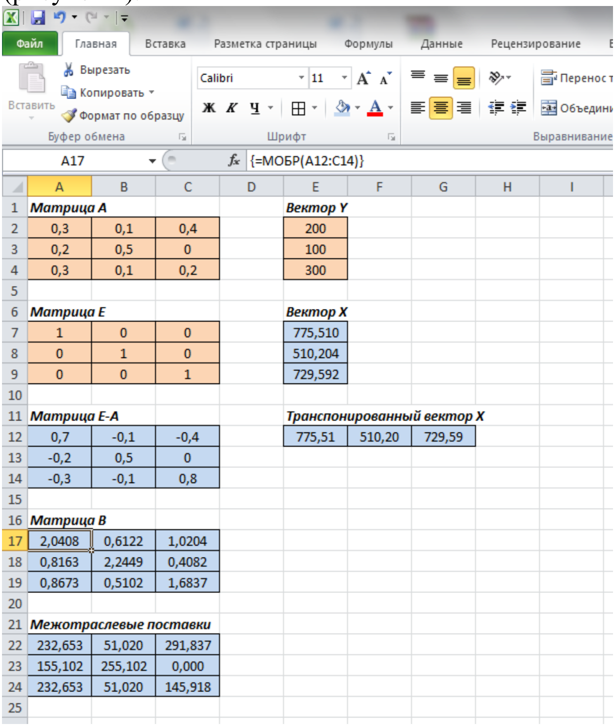
Для решения задачи межотраслевого баланса необходимо уметь выполнять с помощью Excel следующие операции над матрицами:

- Умножение матрицы на вектор;
- Умножение двух матриц;
- Транспонирование матрицы или вектора;
- Сложение двух матриц.

1. Задание Исходных данных задачи

Вызовите Microsoft Excel.

Введите матрицу A в ячейки с адресами A2:C4 и вектор Y в ячейки с адресами E2:E4 (рисунок 1).



	A	B	C	D	E	F	G
1	*Матрица A*				*Вектор Y*		
2	0,3	0,1	0,4		200		
3	0,2	0,5	0		100		
4	0,3	0,1	0,2		300		
5							
6	*Матрица E*				*Вектор X*		
7	1	0	0		775,510		
8	0	1	0		510,204		
9	0	0	1		729,592		
10							
11	*Матрица E-A*				*Транспонированный вектор X*		
12	0,7	-0,1	-0,4		775,51	510,20	729,59
13	-0,2	0,5	0				
14	-0,3	-0,1	0,8				
15							
16	*Матрица B*						
17	2,0408	0,6122	1,0204				
18	0,8163	2,2449	0,4082				
19	0,8673	0,5102	1,6837				
20							
21	*Межотраслевые поставки*						
22	232,653	51,020	291,837				
23	155,102	255,102	0,000				
24	232,653	51,020	145,918				

Рис. 1. Задание исходных данных
и последовательное выполнение плановых расчетов

2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат B.

2.1. Введите единичную матрицу E в ячейки с номерами A7:C9.

2.2. Вычислите матрицу Е – А. Матрица Е – А является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее:

- установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом А12) результирующей матрицы Е – А, которая будет расположена в ячейках с адресами А12:С14;

- введите формулу =А7-А2 для вычисления первого элемента результирующей матрицы Е – А, предварительно установив английскую раскладку клавиатуры;

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы. Для этого, установите курсор мыши в ячейку А12; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки С12, а затем так же протяните указатель мыши до ячейки С14.

В результате в ячейках А12:С14 появится искомая матрица, равная разности двух исходных матриц Е и А.

2.3. Вычислите матрицу В = $(E – A)^{-1}$, являющейся обратной по отношению к матрице Е – А. Матрица Е – А расположена в ячейках с адресами А12:С14. Для вычисления матрицы В необходимо проделать следующее:

- выделите диапазон ячеек А17:С19 для размещения матрицы В;

- нажмите на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле **Категория** выберите **Математические**, а в поле **Выберите функцию** – имя функции **МОБР**. Щелкните на кнопке **ОК;**

- появившееся диалоговое окно **МОБР** мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы Е – А и введите диапазон матрицы Е – А (диапазон ячеек А12:С14) в рабочее поле **Массив** (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки А12 до ячейки С14);

- нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу **ОК**(!), а именно комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

В диапазоне ячеек А17:С19 появится искомая обратная матрица $(E – A)^{-1}$, равная матрице В.

3. Проверка продуктивности матрицы А.

Поскольку матрица В найдена, следовательно она существует. Все элементы матрицы В неотрицательны, поэтому матрица В – продуктивна.

4. Вычисление вектора валового выпуска Х.

Вычисление вектора валового выпуска Х находим по матричной формуле Х = ВY, в которой матрица В вычислена, а вектор Y задан.

Вычисление вектора Х = ВY производится с помощью операции умножения матриц, а в данном случае – умножения матрицы В на вектор Y. Для этого необходимо:

- выделить диапазон ячеек E7:E9, где будет расположен вектор X. Обратите внимание, что по правилам умножения матриц, размерность результирующей матрицы X должна быть равна количеству строк матрицы B на количество столбцов матрицы Y. В нашем случае, размерность вектора X равна: три строки на один столбец;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле **Категория** выберите **Математические**, а в поле **Выберите функцию** – имя функции **МУМНОЖ**. Щелкните на кнопке **ОК;**

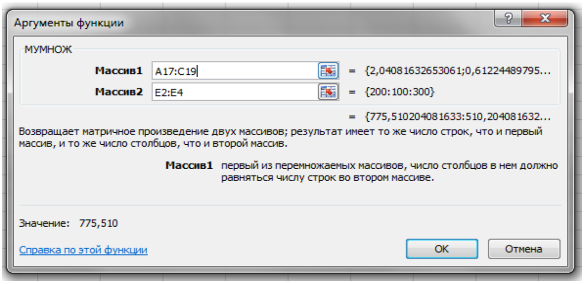


Рис. 2. Диалоговое окно умножения матриц **МУМНОЖ**

- появившееся диалоговое окно **МУМНОЖ** мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц B и Y и введите диапазон матрицы **B** (диапазон ячеек A17:C19) в рабочее поле **Массив 1** (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки A17 до ячейки C19), а диапазон вектора Y (ячейки E2:E4) в рабочее поле **Массив 2** (рисунок 2);

- нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу **ОК**(!), а именно комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

В диапазоне ячеек E7:E9 появится искомый вектор *X*.

5. Вычисление межотраслевых поставок продукции x_{ij}

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij}x_j ,$$

где a_{ij} – элементы исходной матрицы A, расположенной в ячейках A2:C4, x_j – элементы вектора *X*, найденного выше в п. 4 и расположенные в ячейках E7:E9.

Для проведения вычислений x_{ij} необходимо проделать следующее.

5.1. Вычислить транспонированный вектор X^T относительно вектора *X*. При этом вектор-столбец X станет вектором-строкой X^T. Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

С этой целью:

- выделить указателем мыши при нажатой левой кнопке ячейки E12:G12, в которых будет располагаться транспонированный вектор X^T;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле **Категория** выберите **Ссылки и массивы**, а в поле **Выберите функцию** – имя функции **ТРАНСП** (рис. 3). Щелкните на кнопке **ОК;**

- появившееся диалоговое окно **ТРАНСП** мышью отодвиньте в сторону от исходного вектора X и введите диапазон вектора X (диапазон ячеек E7:E9) в рабочее поле **Массив** (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки E7 до ячейки E9);

- нажмите сочетание клавиш ***Ctrl+Shift+Enter***.

В результате в поле ячеек E12:G12 расположится транспонированный вектор X^T.

5.2. Вычислить межотраслевые поставки продукции x_{ij}. Для этого проделать следующие операции:

- поставить курсор мыши в ячейку A22, в которой будет расположено значение x_{11}. В этой ячейке набрать формулу =A2*E$12, которая означает, что $x_{11} = a_{11}x_1$.

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки (в ячейки A22:C24, протащив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки A22 при нажатой левой кнопке мыши, до ячейки C24). При этом будут вычислены $x_{12} = a_{12}x_2$, …, $x_{22} = a_{22}x_2$ и т.д.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположатся в матрице с ячейками A22:C24.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ №6

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат *A* и вектор конечного продукта *Y* известны.

Определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат *B*.
2) Проверить продуктивность матрицы *A*.
3) Вектор валового выпуска *X*.
4) Межотраслевые поставки продукции x_{ij}.

Номера вариантов	Матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y

Вариант 1	$A=\begin{pmatrix}0.33 & 0.32 & 0.21\\ 0.22 & 0.31 & 0.0\\ 0.11 & 0.25 & 0.35\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}200\\150\\250\end{pmatrix}$
Вариант 2	$A=\begin{pmatrix}0.12 & 0.20 & 0.3\\ 0.25 & 0.35 & 0.15\\ 0.33 & 0.00 & 0.45\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}300\\150\\450\end{pmatrix}$
Вариант 3	$A=\begin{pmatrix}0.55 & 0.20 & 0.15\\ 0.15 & 0.35 & 0.25\\ 0.00 & 0.25 & 0.15\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}400\\150\\550\end{pmatrix}$
Вариант 4	$A=\begin{pmatrix}0.40 & 0.25 & 0.00\\ 0.14 & 0.52 & 0.15\\ 0.17 & 0.20 & 0.3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}830\\620\\280\end{pmatrix}$
Вариант 5	$A=\begin{pmatrix}0.05 & 0.22 & 0.26\\ 0.58 & 0.11 & 0.0\\ 0.17 & 0.34 & 0.37\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}430\\650\\910\end{pmatrix}$
Вариант 6	$A=\begin{pmatrix}0.11 & 0.25 & 0.10\\ 0.12 & 0.16 & 0.40\\ 0.11 & 0.28 & 0.33\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1200\\1150\\2350\end{pmatrix}$
Вариант 7	$A=\begin{pmatrix}0.17 & 0.23 & 0.31\\ 0.27 & 0.13 & 0.03\\ 0.17 & 0.23 & 0.53\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}2500\\1650\\2950\end{pmatrix}$
Вариант 8	$A=\begin{pmatrix}0.31 & 0.22 & 0.11\\ 0.23 & 0.31 & 0.10\\ 0.41 & 0.20 & 0.13\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}6600\\3150\\3950\end{pmatrix}$
Вариант 9	$A=\begin{pmatrix}0.00 & 0.52 & 0.00\\ 0.27 & 0.31 & 0.33\\ 0.63 & 0.12 & 0.00\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}9800\\450\\150\end{pmatrix}$
Вариант 10	$A=\begin{pmatrix}0.21 & 0.42 & 0.00\\ 0.32 & 0.31 & 0.20\\ 0.41 & 0.21 & 0.23\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1200\\6150\\7250\end{pmatrix}$

Вариант 11	$A=\begin{pmatrix} 0.17 & 0.12 & 0.19 \\ 0.28 & 0.21 & 0.08 \\ 0.19 & 0.32 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 500 \\ 750 \\ 350 \end{pmatrix}$
Вариант 12	$A=\begin{pmatrix} 0.21 & 0.42 & 0.21 \\ 0.32 & 0.31 & 0.10 \\ 0.41 & 0.12 & 0.13 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 2900 \\ 1950 \\ 2950 \end{pmatrix}$
Вариант 13	$A=\begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}24 & 0{,}56 \\ 0{,}32 & 0{,}78 & 0{,}25 \\ 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}56 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 5680 \\ 8740 \\ 6840 \end{pmatrix}$
Вариант 14	$A=\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}24 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}25 \\ 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}50 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 1680 \\ 2740 \\ 5840 \end{pmatrix}$
Вариант 15	$A=\begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}24 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 0{,}88 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}57 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 3280 \\ 2570 \\ 5350 \end{pmatrix}$
Вариант 16	$A=\begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}34 & 0{,}16 \\ 0{,}45 & 0{,}48 & 0{,}15 \\ 0{,}37 & 0{,}65 & 0{,}77 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 2280 \\ 3570 \\ 6850 \end{pmatrix}$
Вариант 17	$A=\begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}31 & 0{,}16 \\ 0{,}25 & 0{,}18 & 0{,}05 \\ 0{,}17 & 0{,}15 & 0{,}17 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 2470 \\ 3580 \\ 6650 \end{pmatrix}$
Вариант 18	$A=\begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}31 & 0{,}56 \\ 0{,}35 & 0{,}38 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}57 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 2440 \\ 3500 \\ 6000 \end{pmatrix}$
Вариант 19	$A=\begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}31 & 0{,}06 \\ 0{,}45 & 0{,}48 & 0{,}31 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}17 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 7840 \\ 8600 \\ 9800 \end{pmatrix}$
Вариант 20	$A=\begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}31 & 0{,}06 \\ 0{,}15 & 0{,}08 & 0{,}01 \\ 0{,}50 & 0{,}05 & 0{,}17 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 7230 \\ 8450 \\ 9890 \end{pmatrix}$

Вариант 21	$A=\begin{pmatrix}0{,}04 & 0{,}24 & 0{,}42\\ 0{,}05 & 0{,}23 & 0{,}75\\ 0{,}23 & 0{,}57 & 0{,}61\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}4530\\ 3250\\ 2890\end{pmatrix}$
Вариант 22	$A=\begin{pmatrix}0{,}24 & 0{,}34 & 0{,}22\\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}31\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}4120\\ 4580\\ 8790\end{pmatrix}$
Вариант 23	$A=\begin{pmatrix}0{,}45 & 0{,}56 & 0{,}45\\ 0{,}23 & 0{,}58 & 0{,}05\\ 0{,}78 & 0{,}35 & 0{,}01\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}2580\\ 6580\\ 9570\end{pmatrix}$
Вариант 24	$A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}26 & 0{,}35\\ 0{,}03 & 0{,}38 & 0{,}15\\ 0{,}70 & 0{,}05 & 0{,}61\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1450\\ 4580\\ 5670\end{pmatrix}$
Вариант 25	$A=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}06 & 0{,}37\\ 0{,}23 & 0{,}08 & 0{,}16\\ 0{,}40 & 0{,}45 & 0{,}21\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1570\\ 4860\\ 5360\end{pmatrix}$

Лабораторная работа №7
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ (ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА)

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков применения модели международной торговли для решения задач.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим бюджеты n стран, которые обозначим как x_1, x_2, x_3, x_4.

Предположим, что национальный доход x_j страны *j* затрачивается на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран.

Обозначим через x_{ij} количество средств страны *j* расходуемое на закупку товаров из страны *i*, при этом x_{ij} – затраты на закупку товаров внутри страны *j*. Тогда сумма всех затрат страны *j*, идущее на закупку товаров как внутри страны, так и на импорт из других стран должна равняться национальному доходу страны x_j, т.е.

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{jj} + \ldots + x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_j,\ j = 1,2,\ldots,n\,. \tag{4}$$

Разделив обе части равенства (4) на x_j и введя коэффициенты $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, j = 1,2,...,n \ . \qquad (5)$$

Коэффициенты a_{ij} равны доли национального дохода страны *j* расходуемую на закупку товаров у страны *i*.

Матрица А коэффициентов a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

называется структурной матрицей торговли. Понятно, что сумма элементов каждого столбца равна единице.

С другой стороны, количество средств страны *j* расходуемое на закупку товаров из страны *i* и равное x_{ij}, является выручкой для страны *i* за свой товар, который у нее закупила страна *j*. Суммарная выручка i-ой страны p_i равна

$$p_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{ij} + ... + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, i = 1,2,...,n \qquad (7)$$

Так как $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, то $x_{ij} = a_{ij} x_j$ и равенство (7) можно записать в виде

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2,...,n \ . \qquad (8)$$

Международная торговля называется сбалансированной, если сумма платежей (затрат) каждого государства равна его суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, другими словами, у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода, т.е.

$$p_i \geq x_i, i = \overline{1,n} \ .$$

Одновременное выполнение этих неравенств может иметь место только в том случае, если

$$p_i = x_i, i = \overline{1,n} \ , \qquad (9)$$

т.е. у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом.

Равенства (9), с использованием (8), можно записать в матричном виде

$$AX = X, \qquad (10)$$

где A – структурная матрица (6) международной торговли; X – вектор национальных доходов стран

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (10) соответствует задаче на собственное значение и собственный вектор матрицы A. Очевидно, что собственное значение матрицы A, согласно уравнению (10), равно 1, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, равен X.

Таким образом, баланс в международной торговле достигается тогда, когда собственное значение структурной матрицы международной торговли равно единице, а вектор национальных доходов торгующих стран является собственным вектором, соответствующим этому единичному собственному значении.

С помощью линейной модели международной торговли можно, зная структурную матрицу международной торговли A найти такие величины национальных доходов торгующих стран (вектор X), чтобы международная торговля была сбалансированной.

Моделирование с использованием технологии Excel

Определение собственного вектора X матрицы A с помощью средств Microsoft Excel невозможно.

Поэтому математическую модель международной торговли сводят к задаче линейного программирования. Для этого, систему уравнений

$$(A - E)X = 0,$$

где E – единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

которая получается из уравнений (10) переносом правой части в левую, трактуют как ограничения-равенства.

Кроме того, вводят новое ограничение-неравенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \le S,$$

отражающее условие, по которому сумма бюджетов всех стран должна быть не больше заданной величины S.

В качестве целевой функции вводится сумма бюджетов всех стран, которая должна достигать максимума:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \to \max .$$

Итак, математическая модель сбалансированной международной торговли сводится к следующей оптимизационной задаче линейного программирования. Необходимо найти максимум целевой функции

$$F = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - 1)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - 1)x_n = 0, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le S. \end{cases}$$

Пример с использованием технологии Excel

Задача. Найти национальные доходы x_1, x_2, x_3, x_4 четырех торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли, если структурная матрица торговли этих четырех стран равна

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix},$$

а сумма бюджетов стран не превышает 7680 млн. ден. ед.

Математическая модель

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 = 0, \\ 0{,}3x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}4x_4 = 0, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 - 0{,}7x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 7680. \end{cases}$$

Методика решения задачи линейного программирования с помощью средств Поиска решения Excel подробно рассматривалась в Лабораторной работе №2 и поэтому здесь уже рассматриваться не будет.

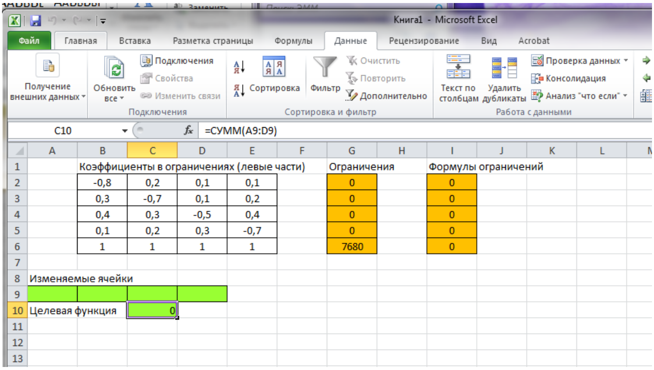


Рис. 4. Исходные данные в Excel

Задание исходных данных на рабочем листе Excel приведено на рис.4.

В ячейки B2:E6 занесены коэффициенты при системе ограничений, в ячейках G2:G6 содержатся ограничения в правых частях, в ячейки I2:I6 занесены формулы левых частей ограничений, ячейки B9:E9 содержат изменяемые переменные x_1, x_2, x_3, x_4. Например, в ячейке I2 записана формула ограничений =СУММПРОИЗВ(B2:E2;B9:E9). Аналогичные формулы записаны в ячейках I3:I6. Формула целевой функции =СУММ(B9:E9) занесена в ячейку C10.

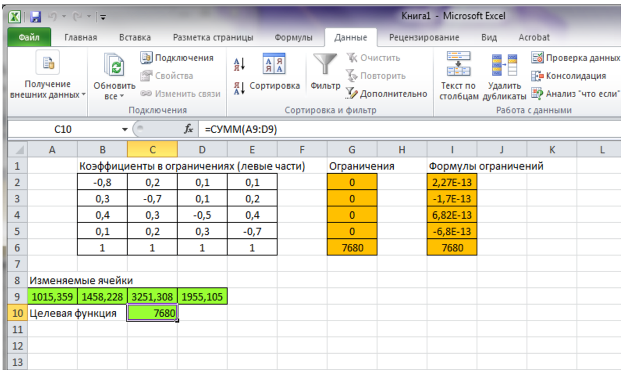


Рис. 5.Решение задачи средствами Excel

Процесс решения – занесение в окно **Поиск решения** ячейки с формулой целевой функции, занесение изменяемых ячеек, внесение ограничений приведено на рис. 5. В окне Параметры необходимо отметить: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**.

На рис. 5 приведены также результаты решения, согласно которым национальные доходы четырех стран x_1, x_2, x_3, x_4 равны соответственно 1015,359; 1458,228; 3251,308; 1955,105 млн. ден. ед. Из содержимого ячеек I2:I6 видно, что все ограничения выполнены. Значение целевой функции (ячейка C10) равно 7680 млн. ден. ед.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ №7

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

По номеру Вашего варианта найдите национальные доходы x_1, x_2, x_3, x_4 четырех торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли, если структурная матрица торговли этих четырех стран равна *A,* а сумма бюджетов стран не превышает определенной суммы.

Номера вариантов	Структурная матрица торговли четырех стран *A*	**Предел суммы бюджетов стран**
Вариант 1	$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	4590 млн. ден. ед.
Вариант 2	$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}44 & 0{,}15 \\ 0{,}75 & 0{,}55 & 0{,}36 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}45 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}$	15055 млн. ден. ед.
Вариант 3	$A = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}15 & 0{,}6 & 0{,}22 \\ 0{,}34 & 0{,}35 & 0{,}2 & 0{,}28 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	9000 млн. ден. ед.
Вариант 4	$A = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}5 & 0{,}35 & 0{,}1 \\ 0{,}34 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}23 & 0{,}05 & 0{,}18 & 0{,}4 \\ 0{,}27 & 0{,}15 & 0{,}22 & 0{,}3 \end{pmatrix}$	59550 млн.ден.ед.
Вариант 5	$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}15 & 0{,}26 & 0{,}2 \\ 0{,}72 & 0{,}13 & 0{,}34 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}67 & 0{,}16 & 0{,}3 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}24 & 0{,}4 \end{pmatrix}$	15590 млн. ден. ед.

Вариант 6	$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,15 & 0,62 & 0,32\\ 0,2 & 0,15 & 0,18 & 0,1\\ 0,3 & 0,27 & 0,13 & 0,1\\ 0,3 & 0,43 & 0,07 & 0,48\end{pmatrix}$	51503 млн. ден. ед.
Вариант 7	$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,52 & 0,16 & 0,22\\ 0,2 & 0,18 & 0,44 & 0,38\\ 0,3 & 0,13 & 0,26 & 0,32\\ 0,1 & 0,17 & 0,14 & 0,08\end{pmatrix}$	25590 млн. ден. ед.
Вариант 8	$A=\begin{pmatrix}0,81 & 0,15 & 0,51 & 0,12\\ 0,12 & 0,23 & 0,24 & 0,31\\ 0,03 & 0,47 & 0,06 & 0,42\\ 0,04 & 0,15 & 0,19 & 0,15\end{pmatrix}$	83355 млн. ден. ед.
Вариант 9	$A=\begin{pmatrix}0,56 & 0,02 & 0,26 & 0,32\\ 0,48 & 0,12 & 0,12 & 0,21\\ 0,26 & 0,15 & 0,23 & 0,54\\ 0,98 & 0,23 & 0,57 & 0,65\end{pmatrix}$	23555 млн. ден. ед.
Вариант 10	$A=\begin{pmatrix}0,06 & 0,52 & 0,36 & 0,32\\ 0,08 & 0,12 & 0,12 & 0,21\\ 0,06 & 0,55 & 0,53 & 0,14\\ 0,08 & 0,23 & 0,57 & 0,05\end{pmatrix}$	65755 млн. ден. ед.
Вариант 11	$A=\begin{pmatrix}0,06 & 0,52 & 0,26 & 0,32\\ 0,18 & 0,12 & 0,12 & 0,01\\ 0,16 & 0,25 & 0,54 & 0,14\\ 0,28 & 0,23 & 0,57 & 0,45\end{pmatrix}$	25685 млн. ден. ед.
Вариант 12	$A=\begin{pmatrix}0,06 & 0,22 & 0,26 & 0,32\\ 0,38 & 0,12 & 0,32 & 0,09\\ 0,36 & 0,25 & 0,44 & 0,14\\ 0,28 & 0,53 & 0,37 & 0,45\end{pmatrix}$	65855 млн. ден. ед.
Вариант 13	$A=\begin{pmatrix}0,06 & 0,02 & 0,26 & 0,52\\ 0,18 & 0,12 & 0,32 & 0,29\\ 0,36 & 0,15 & 0,14 & 0,14\\ 0,18 & 0,53 & 0,37 & 0,25\end{pmatrix}$	98745 млн. ден. ед.

Вариант 14	$A=\begin{pmatrix}0{,}36 & 0{,}22 & 0{,}56 & 0{,}53\\ 0{,}18 & 0{,}42 & 0{,}52 & 0{,}29\\ 0{,}46 & 0{,}55 & 0{,}54 & 0{,}34\\ 0{,}18 & 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}15\end{pmatrix}$	65895 млн. ден. ед.
Вариант 15	$A=\begin{pmatrix}0{,}26 & 0{,}22 & 0{,}56 & 0{,}33\\ 0{,}28 & 0{,}32 & 0{,}52 & 0{,}22\\ 0{,}06 & 0{,}35 & 0{,}44 & 0{,}34\\ 0{,}28 & 0{,}73 & 0{,}17 & 0{,}15\end{pmatrix}$	32655 млн. ден. ед.
Вариант 16	$A=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}22 & 0{,}6 & 0{,}33\\ 0{,}28 & 0{,}2 & 0{,}52 & 0{,}22\\ 0{,}26 & 0{,}35 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}73 & 0{,}17 & 0{,}5\end{pmatrix}$	87545 млн. ден. ед.
Вариант 17	$A=\begin{pmatrix}0{,}62 & 0{,}26 & 0{,}6 & 0{,}36\\ 0{,}28 & 0{,}21 & 0{,}52 & 0{,}22\\ 0{,}26 & 0{,}35 & 0{,}41 & 0{,}41\\ 0{,}81 & 0{,}73 & 0{,}67 & 0{,}51\end{pmatrix}$	68575 млн. ден. ед.
Вариант 18	$A=\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}6 & 0{,}36\\ 0{,}21 & 0{,}26 & 0{,}42 & 0{,}72\\ 0{,}16 & 0{,}55 & 0{,}21 & 0{,}71\\ 0{,}11 & 0{,}71 & 0{,}27 & 0{,}51\end{pmatrix}$	98545 млн. ден. ед.
Вариант 19	$A=\begin{pmatrix}0{,}16 & 0{,}16 & 0{,}56 & 0{,}26\\ 0{,}51 & 0{,}16 & 0{,}32 & 0{,}32\\ 0{,}46 & 0{,}45 & 0{,}21 & 0{,}21\\ 0{,}11 & 0{,}71 & 0{,}67 & 0{,}41\end{pmatrix}$	52355 млн. ден. ед.
Вариант 20	$A=\begin{pmatrix}0{,}46 & 0{,}36 & 0{,}46 & 0{,}26\\ 0{,}31 & 0{,}16 & 0{,}32 & 0{,}42\\ 0{,}46 & 0{,}35 & 0{,}41 & 0{,}41\\ 0{,}11 & 0{,}74 & 0{,}67 & 0{,}46\end{pmatrix}$	65784 млн. ден. ед.

Вариант 21	$A=\begin{pmatrix} 0,26 & 0,16 & 0,46 & 0,36 \\ 0,1 & 0,16 & 0,12 & 0,42 \\ 0,46 & 0,5 & 0,41 & 0,1 \\ 0,1 & 0,74 & 0,7 & 0,46 \end{pmatrix}$	98755 млн. ден. ед.
Вариант 22	$A=\begin{pmatrix} 0,36 & 0,1 & 0,6 & 0,36 \\ 0,1 & 0,16 & 0,72 & 0,62 \\ 0,46 & 0,65 & 0,41 & 0,41 \\ 0,21 & 0,74 & 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}$	58745 млн. ден. ед.
Вариант 23	$A=\begin{pmatrix} 0,26 & 0,1 & 0,6 & 0,06 \\ 0,11 & 0,06 & 0,02 & 0,62 \\ 0,16 & 0,05 & 0,41 & 0,01 \\ 0,01 & 0,74 & 0,07 & 0,04 \end{pmatrix}$	987582 млн. ден. ед.
Вариант 24	$A=\begin{pmatrix} 0,46 & 0,17 & 0,76 & 0,06 \\ 0,11 & 0,06 & 0,42 & 0,62 \\ 0,36 & 0,35 & 0,21 & 0,24 \\ 0,01 & 0,84 & 0,07 & 0,34 \end{pmatrix}$	87655 млн. ден. ед.
Вариант 25	$A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,07 & 0,76 & 0,26 \\ 0,61 & 0,06 & 0,42 & 0,32 \\ 0,6 & 0,35 & 0,81 & 0,14 \\ 0,01 & 0,84 & 0,27 & 0,44 \end{pmatrix}$	65875 млн. ден. ед.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
РЕШЕНИЕ ДВУХИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков решения транспортных задач.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

К ЗЛП траснпортного типа (транспортной задаче – ТЗ) приходят при рассмотрении различных практических ситуаций, связанных с составлением наиболее экономичного плана перевозок продукции, управления запасами, назначением персонала на рабочие места, оборотом наличного капитала и многими другими.

Цель ТЗ – поиск низкозатратных схем транспортировки товарных запасов или поставок от многих поставщиков (пункты отправления) ко многим потребителям (пункты назначения). Поставщиками могут быть фабрики, склады, отделы или другие места, из которых отправляются товары. Потребителями также могут быть фабрики, скады, отделы или любые другие места, которые получают товары.

Информация, необходимая для использования модели ТЗ, включает следующее:

1. Список пунктов отправления (ПО) и пропускная способность каждого из них или количество поставок за определенный период.
2. Список пунктов назначения (ПН) и их показатели спроса за определенный период.
3. Стоимость транспортировки единицы товара из каждого ПО в ПН.

Эта информация представляется в виде так называемой ***транспортной таблицы.***

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2	3	4	2	4	*140*
A_2	8	4	1	4	1	*180*
A_3	9	7	3	7	2	*160*
Потребности	*60*	*70*	*120*	*130*	*100*	**480**

Стоимость транспортировки одной ед. товара из ПО A_1 в ПН B_1

Запас товара в ПО A_2

Потребность в товаре в ПН B_1

Рис. 1. Пример транспортной таблицы

Экономико-математическая модель ТЗ

Постановка задачи. Некоторый однородный товар (продукт, груз), находящейся у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц ($i = 1,2,...,m$) необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j единиц ($j = 1,2,...,n$). Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить план перевозки, имеющий минимальную стоимость. Основное преположение, используемое при построении модели, состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна количеству единиц перевозимого товара.

Обозначим через x_{ij} количество единиц товара, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда *математическая модель ТЗ формулируется следующим образом:*

$$Z(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, (i = 1,2,...,m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, (j = 1,2,...,n) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Ограничения (2) означают, что суммарный объем перевозок от i-го поставщика не может превышать имеющегося у него запаса товара. Ограничения (3) означают, что суммарные перевозки товара j-му потребителю должны полностью удовлетворить его потребности в товаре. Ограничения (4) исключают обратные перевозки.

Из ограничений (2) и (3) следует, что $\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Если имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (5)$$

то модель называется ***сбалансированной транспортной моделью.*** В сбалансированной модели ограничения (2), (3) имеют вид равенств. В реальных условиях товара не ввсегда равен спросу (потребности), но транспортную модель всегда можно сбалансировать.

В случае превышения запаса над спросом, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится *фиктивный* $(n+1)$*-й потребитель* со спросом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а соответствующие стоимости $c_{i,n+1} (i = 1,2,...,m)$ считаются равными нулю.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится *фиктивный* $(m+1)$*-й поставщик* с запасом товара $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а соответствующие стоимости $c_{m+1,j} (j = 1,2,...,n)$ считаются равными нулю.

Таким образом, исходная задача сводится к сбалансированной ТЗ, из оптимального плана которой получается оптимальный план несбалансированной ТЗ.

Примечание 1. Несбалансированную ТЗ называют открытой ТЗ, тогда как сбалансированную ТЗ – закрытой ТЗ.

Примечание 2. Стремление сбалансировать ТЗ обусловлено возможностью применить в этом случае эффективный вычислительный метод.

Рассмотрим пример решения ТЗ.

Задача. На трех базах (ПО) A_1, A_2, A_3 находится горючее (однородный груз) в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 тонн. Это горючее требуется перевезти в пять ПН B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 тонн, стоимости перевозки одной тонны горючего из кааждого ПО в соответствующие ПН указаны в таблице 1.

Таблица 1

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 x_{11}	3 x_{12}	4 x_{13}	2 x_{14}	4 x_{15}	*140*
A_2	8 x_{21}	4 x_{22}	1 x_{23}	4 x_{24}	1 x_{25}	*180*
A_3	9 x_{31}	7 x_{32}	3 x_{33}	7 x_{34}	2 x_{35}	*160*
Потребности	*60*	*70*	*120*	*130*	*100*	***480***

Решение.

Построим математическую модель данной ТЗ. Обозначим через x_{ij} количество тонн горючего, запланированных к перевозке от ПО A_i ($i = 1,2,...,m$) в ПН B_j ($j = 1,2,...,n$).

Тогда *целевая функция для ТЗ запишется как*

$$\begin{aligned} Z(\overline{X}) = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 4x_{15} + \\ + 8x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + x_{25} + \\ + 9x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + 7x_{34} + 2x_{35} \to \min \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 140, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 180, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 100, \\ x_{ij} \ge 0 (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Число неизвестных переменных x_{ij} в ТЗ с m поставщиками и n потребителями равно $m \cdot n$, а число уравнений в системе (2)-(3) равно $m+n$. Так как ТЗ является сбалансированной, т.е. выполняется условие (5), число линейно независимых уравнений равно $m+n-1$. Следовательно, опорный план ТЗ может иметь не более $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных.

Рассмотрим несколько схем построения первоначального опорного плана: метод «северо-западного угла» (СЗУ), метод наименьшей стоимости.

Следует помнить, что *перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть сбалансирована.*

Построение опорного плана ТЗ методом СЗУ

В данной ТЗ $m=3, n=5$, следовательно, опорный план должен иметь не более $m+n-1=3+5-1=7$ отличных от нуля переменных. Следуя методу СЗУ, начинают с того, что приписывают переменной x_{11}, расположенной в верхней левой клетке (СЗУ) таблицы, максимально возможное значение.

После этого вычеркивают соответствующий столбец (строку), фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными 0. Если ограничения, представляемые столбцом и строкой, выполняются одновременно, то вычеркивают либо столбец, либо строку.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будут удовлетворены все потребители за счет запасов поставщиков. Применительно к данной ТЗ эта процедура приводит к виду, представленному в таблице 2.

Таблица 2

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 **60**	3 **70**	4 **10**	2 -	4 -	***(140)*** ***(80)*** ***(10)***
A_2	8 -	4 -	1 **110**	4 **70**	1 -	***(180)*** ***(70)***
A_3	9 -	7 -	3 -	7 **60**	2 **100**	***(160)*** ***(100)***
Потребности	***(60)***	***(70)***	***(120)*** ***(110)***	***(130)*** ***(60)***	***(100)***	***480***

В результате получаем опорный план $\overline{X}_0$ (7 занятых клеток таблицы):

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} \text{ (т).}$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$$Z(\overline{X}_0) = 2\cdot 60 + 3\cdot 70 + 4\cdot 10 + 1\cdot 110 + 4\cdot 70 + 7\cdot 60 + 2\cdot 100 = 1380 \text{ (ден. ед.).}$$

Примечание. Если одновременно и столбец, и строка удовлетворяют ограничениям, очередная переменная, включаемая в базисное решение, обязательно имеет нулевое значение.

Построение начального опорного плана ТЗ методом наименьшей стоимости

Согласно данному методу, выбирается переменная x_{ij}, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки во всей таблице, и ей придается возможно большее количество перевезенного груза. Вычеркивается соответствущий столбец или строка. Если ограничения по столбцу (потребности, спрос) и строке (запасы, предложение) выполняются одновременно, то вычеркивается либо столбец, либо строка. После вычисления новых значений потребностей и запасов для всех невычеркнутых строк и столбцов процесс повторяется при возможно большем значении той переменной x_{ij}, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки среди невычеркнутых. Процедура завершается, когда остается одна строка или один столбец (таблице 3).

Таблица 3

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 **60**	3 **-**	4 **-**	2 **80**	4 **-**	***(140)*** ***(80)***
A_2	8 **-**	4 **-**	1 **120**	4 **-**	1 **60**	***(180)*** ***(60)***
A_3	9 **-**	7 **70**	3 **-**	7 **50**	2 **40**	***(160)*** ***(120)*** ***(50)***
Потребности	***(60)***	***(70)***	***(120)***	***(130)*** ***(50)***	***(100)*** ***(40)***	***480***

В результате получаем опорный план $\overline{X}_0$ (7 занятых клеток таблицы):

$$\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 0 & 70 & 0 & 50 & 40 \end{pmatrix} \text{ (т).}$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$$Z(\overline{X}_0) = 2\cdot 60 + 2\cdot 80 + 1\cdot 120 + 1\cdot 60 + 7\cdot 70 + 7\cdot 50 + 2\cdot 40 = 1380 \text{ (ден. ед.)}$$

Определение оптимального плана ТЗ методом потенциалов

Подобну тому, как ТЗ – частный случай ЗЛП, так и метод потенциалов является разновидностью симплекс-метода. Он представляет собой итеративный процесс, на каждом шаге которого рассматривается некоторый текущий базисный план, проверяется его оптимальность и, если необходимо, определеяется переход к следующему – лучшему базисному плану.

Теорема. Если для некоторого опорного плана ТЗ $\overline{X}^* = \left(x_{ij}^*\right)_{\min}$ существут такие числа $u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*, v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$, что $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ – для базисных переменных (занятых клеток), $u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ – для остальных переменных (свободных клеток), то $\overline{X}^* = \left(x_{ij}^*\right)_{\min}$ – оптимальный план ТЗ.

Числа u_i^* и v_j^* называются ***потенциалами поставщиков и потребителей*** соответственно.

Данная теорема позволяет получить решение ТЗ. После нахождения опорного плана необходимо вычислить значения потенциалов u_i^* и v_j^*. Так как для базисных переменных имеет место система $m+n-1$ уравнений с $m+n$ неизвестными

$$\Delta_{ij}^* = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*) = 0,$$

то одну из неизвестных переменных можно приравнять к нулю и затем последовательно найти значения остальных неизвестных.

Далее вычисляют ***симплексные разности (оценки)*** для всех остальных переменных по формуле

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Если среди них нет отрицательных значений, то найденный опорный план является оптимальным.

В противном случае выбирают $\Delta_{lk} = \min\{\Delta_{ij}\}$ и переменную x_{lk} включают в базис. Для определения переменной, исключаемой из базиса, строят замкнутый цикл и перераспределяют поставки.

Определение. ***Циклом*** называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы (рис. 2).

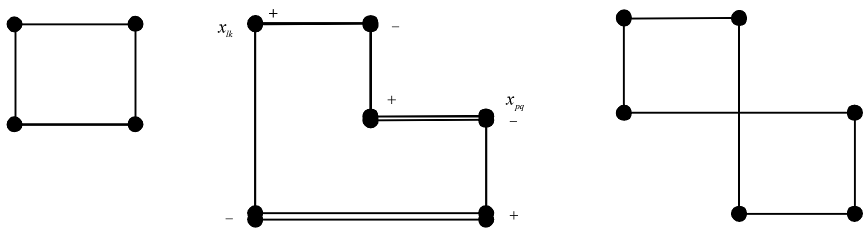


Рис. 2. Примеры циклов

Цикл начинается и заканчивается клеткой, соответствующей включаемой в базис переменной x_{lk}. Перемещение поставок в цикле производится по следующему правилу:

1. Заполняемой клетке, соответствующей переменной x_{lk}, приписываются знак «+», а всем остальным клеткам – поочередно знаки «–» и «+».

2. В заполняемую клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках со знаком «–». Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в клетках со знаком «+», и вычитают из чисел, стоящих в клетках со знаком «–».

3. Клетка со знаком «–», в которой стояло минимальное число, считается свободной, а соответствующая ей переменная x_{pq} исключается из базиса.

Примечание. Если минимальное число x_{pq} достигается более чем в одной клетке, то освобождают лишь одну из них, а остальные оставляют занятыми нулевыми поставками.

Поиск оптимального плана ТЗ.

Итерация 1.

Пусть получен первоначальный опорный план, полученный методом северо-западного угла. В соответствии с количеством поставщиков и потребителей рассмотрим три переменные u_1, u_2, u_3 – потенциалы поставщиков и пять переменных v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 – потенциалы потребителей.

Для каждой **занятой клетки** в таблице 3 запишем уравнения вида

$$u_i + v_j = c_{ij}:$$

$$u_1 + v_1 = 2; u_1 + v_2 = 3; u_1 + v_3 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = 1; u_2 + v_4 = 4;$$

$$u_3 + v_4 = 7; u_3 + v_5 = 2.$$

Полагая $u_1 = 0$ (т.к. имеются 8 переменных и 7 уравнений), получаем $u_2 = -3; u_3 = 0; v_1 = 2; v_2 = 3; v_3 = 4; v_4 = 7; v_5 = 2.$

Далее вычисляем симплексные разности **для свободных** **переменных** (свободных клеток) по следующей формуле:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

$$\Delta_{14} = 2 - (0 + 7) = -5; \Delta_{15} = 4 - (0 + 2) = 2;$$

$$\Delta_{21} = 8 - (-3 + 2) = 9; \Delta_{22} = 4 - (-3 + 3) = 4; \Delta_{25} = -1 - (-3 + 2) = 2;$$

$$\Delta_{31} = 9 - (0 + 2) = 7; \Delta_{32} = 7 - (0 + 3) = 4; \Delta_{33} = 3 - (0 + 4) = -1.$$

Среди полученных симплексных разностей имеются отрицательные значения, следовательно, найденный опорный план не оптимальный.

Имеем следующие значения симплексных разностей:

$$\Delta_{ij} = \{-5;2;9;4;2;7;4;-1\}.$$

$$\Delta_{lk} = \max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{14} = -5,$$

$$x_{lk} = x_{14} = 10.$$

Подставлем полученные значения в таблицу с опорным планом и получаем таблицу 4.

Таблица 4

ПН / ПО	B_1 $v_1 = 2$	B_2 $v_2 = 3$	B_3 $v_3 = 4$	B_4 $v_4 = 7$	B_5 $v_5 = 2$	Запасы
A_1 $u_1 = 0$	2 **60**	3 **70**	4 **10** –	2 +	4	***140***
A_2 $u_2 = -3$	8	4	1 **110** +	4 **70** –	1	***180***
A_3 $u_3 = 0$	9	7	3	7 **60**	2 **100**	***160***
Потребности	***60***	***70***	***120***	***130***	***100***	***480***

Пометим заполняемую клетку (1,4) знаком «+», а затем поочередно клетки (2,4), (2,3), (1,3) – соответственно знаками «+», «–», «+». Среди клеток таблицы, образующих цикл и помеченных знаком «–», меньшее значение (10) содержится в клетке (1,3). Прибавим это значение к соответствующим числам, стоящим в клетках цикла, помеченных знаком «+», и вычтем из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком «–».

Освободим клетку (1,3), в которой стояло минимальное число, а соответствующую ей переменную x_{13} исключим из базиса. Получаем новый опорный план ТЗ:

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} \text{ (т).}$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$$Z(\overline{X}_1) = 2 \cdot 60 + 3 \cdot 70 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 120 + 4 \cdot 60 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 1330 \text{ (ден. ед.).}$$

Итерация 2.

<u>Для каждой занятой клетки</u> последней таблицы (с учетом перестановки) снова рассчитаем значения потенциалов поставщиков и потребителей.

$$u_1 + v_1 = 3; u_1 + v_2 = 3; u_1 + v_4 = 2;$$
$$u_2 + v_3 = 1; u_2 + v_4 = 4;$$
$$u_3 + v_4 = 7; u_3 + v_5 = 2.$$

Полагая $u_1 = 0$, получаем $u_2 = 2; u_3 = 5; v_1 = 2; v_2 = 3; v_3 = -1; v_4 = 2; v_5 = -3.$

Для свободных клеток определяем симплексные разности:

$$\Delta_{13} = 5; \Delta_{15} = 7; \Delta_{21} = 4; \Delta_{22} = -1; \Delta_{25} = 2; \Delta_{31} = 2; \Delta_{32} = -1; \Delta_{33} = -1.$$

Среди полученных симплексных разностей имеются отрицательные значения, следовательно, найденный опорный план не оптимальный.

Имеем следующие значения симплексных разностей:

$$\Delta_{ij} = \{5;7;4;-1;2;2;-1;-1\}.$$

$$\Delta_{lk} = \max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{22} = -1,$$

$$x_{lk} = x_{22} = 60.$$

Подставлем полученные значения в таблицу с опорным планом и получаем таблицу 5.

Таблица 5

ПН ПО	B_1 $v_1 = 2$	B_2 $v_2 = 3$	B_3 $v_3 = -1$	B_4 $v_4 = 2$	B_5 $v_5 = -3$	Запасы
A_1 $u_1 = 0$	2 **60**	3 **70** –	4	2 **10** +	4	***140***
A_2 $u_2 = 2$	8	4 +	1 **120**	4 **60** –	1	***180***
A_3 $u_3 = 5$	9	7	3	7 **60**	2 **100**	***160***
Потребности	***60***	***70***	***120***	***130***	***100***	***480***

Пометим заполняемую клетку (2,2) знаком «+», а затем поочередно клетки (1,2), (1,4), (2,4) – соответственно знаками «+», «–», «+». Среди клеток таблицы, образующих цикл и помеченных знаком «–», меньшее значение (60) содержится в клетке (2,4). Прибавим это значение к соответствующим числам, стоящим в клетках цикла, помеченных знаком «+», и вычтем из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком «–».

Освободим клетку (2,4), в которой стояло минимальное число, а соответствующую ей переменную x_{24} исключим из базиса. Получаем новый опорный план ТЗ:

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 60 & 10 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 60 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} \text{ (т).}$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$$Z(\overline{X}_2) = 2 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 4 \cdot 60 + 1 \cdot 120 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 1270 \text{ (ден.ед.).}$$

Аналогично, проделав еще 3 итерации, на последней 5-ой итерации получим, что все симплексные разности неотрицательны. Следовательно, найденный в итерации 4 опорный план является оптимальным. Таким образом, оптимальный план перевозок груза от поставщиков к потребителям имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 70 & 60 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{(т)}.$$

Изменение суммарной стоимости перевозок по мере приближения к оптимальному плану показано в таблице 6.

Таблица 6

Целевая функция	$Z(\overline{X}_0)$	$Z(\overline{X}_1)$	$Z(\overline{X}_2)$	$Z(\overline{X}_3)$	$Z(\overline{X}_4)$
Стоимость перевозки	1380	1330	1270	1250	1200

Примечание. В некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта отправления A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в B_j является сколь угодно большой величиной *M*, при этом условии известными методами находят решение ТЗ. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется ***запрещением перевозок***.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ № 8

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

Для транспортной задачи под номером Вашего варианта:

1. Составить математическую модель распределения перевозок от поставщиков к потребителям;

Найти:

2. Начальный опорный план методами северо-западного угла, наименьшей стоимости;
3. Оптимальный план методом потенциалов (в качестве начального опорного плана воспользуйтесь решением метода наименьшей стоимости);
4. Оптимальный план в приложении Microsoft Excel (пример решения разобран в лабораторной работе № 2).

Постановка задачи:

Имеются шесть поставщиков I, II, III, IV, V и VI и шесть потребителей A, B, C, D, E и F однородной продукции. Возможности поставщиков задаются параметрами a_i желания потребителей величинами b_j. Стоимости перевозок от поставщиков к потребителям определяются значениями c_{ij}.

1 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	3	9	7	12	6	12	108
II	12	6	11	15	4	13	90
III	3	8	8	6	6	16	52
IV	9	11	11	8	12	15	62
V	17	12	21	16	8	14	100
VI	10	14	11	19	9	12	169
Потребности	42	65	173	93	102	106	

2 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	12	6	15	9	6	106
II	10	12	18	22	20	20	123
III	8	14	14	13	23	20	46
IV	9	14	14	10	16	10	124
V	11	15	7	13	14	20	104
VI	9	7	8	9	13	13	112
Потребности	97	105	23	168	102	120	

3 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	12	9	4	15	4	3	99
II	9	3	5	15	3	10	134
III	6	4	4	16	6	5	81
IV	10	5	9	17	10	8	35
V	16	14	10	14	8	12	139
VI	13	13	12	16	19	15	82
Потребности	79	106	110	105	149	21	

4 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	10	16	8	5	15	5	120
II	20	16	20	15	19	9	72
III	15	20	17	15	17	17	146
IV	9	16	10	5	11	9	43
V	10	12	12	15	18	6	67
VI	18	13	10	13	12	4	214
Потребности	102	106	98	123	163	70	

5 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	12	10	17	3	2	11	137
II	9	19	20	5	12	14	121
III	23	15	22	18	9	21	58
IV	14	15	10	11	6	9	115
V	12	15	15	14	16	17	105
VI	16	9	16	12	11	12	31

Потребности	59	55	168	161	98	26	

6 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	11	15	11	5	15	7	80
II	7	14	11	12	14	12	121
III	7	9	10	7	16	13	158
IV	13	11	10	10	21	17	81
V	8	17	8	15	13	13	100
VI	14	21	13	18	23	15	155
Потребности	53	167	110	115	132	118	

7 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	14	14	10	16	10	18	142
II	22	15	21	13	23	14	141
III	9	8	13	7	9	9	89
IV	13	15	10	15	16	10	88
V	20	23	17	10	22	20	84
VI	23	19	17	10	13	15	83
Потребности	35	114	76	124	132	146	

8 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	16	12	7	9	3	8	74
II	10	11	14	9	13	12	78
III	17	13	20	14	14	19	46
IV	11	5	7	9	7	9	102
V	18	16	18	15	5	8	72
VI	9	5	8	17	7	13	55
Потребности	88	98	77	70	58	36	

9 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	9	10	7	5	14	3	110
II	23	20	13	9	15	9	107
III	16	12	11	14	19	4	139
IV	19	16	17	7	16	13	30
V	19	24	14	17	18	13	112
VI	17	25	12	12	22	8	100
Потребности	45	146	58	92	128	129	

10 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	10	3	9	9	10	7	85
II	12	11	16	18	14	13	29
III	20	13	15	9	6	11	95
IV	10	3	7	15	7	11	73
V	8	10	7	6	11	13	149

VI	18	20	14	18	11	15	193
Потребности	99	112	37	137	107	132	

11 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	9	14	2	14	6	12	139
II	9	17	3	15	11	10	102
III	16	18	13	8	9	14	145
IV	8	8	8	11	16	18	101
V	17	15	14	19	23	17	42
VI	19	15	14	9	16	15	86
Потребности	46	76	136	151	164	42	

12 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	9	3	16	11	7	96
II	11	12	12	11	6	8	76
III	10	5	10	18	7	14	22
IV	12	9	11	12	8	17	84
V	14	7	5	19	13	16	75
VI	8	13	5	21	11	19	99
Потребности	104	63	57	26	84	118	

13 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	6	7	9	13	3	13	102
II	18	13	20	19	7	15	102
III	14	19	15	12	15	23	131
IV	14	13	23	13	15	22	26
V	19	12	23	19	10	26	128
VI	11	9	21	15	15	21	174
Потребности	143	162	98	105	130	25	

14 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	15	12	10	3	12	10	151
II	10	7	18	8	16	14	124
III	14	17	16	14	11	13	153
IV	14	13	23	10	16	17	119
V	12	8	15	5	5	6	143
VI	20	10	17	14	14	18	38
Потребности	76	123	158	155	152	64	

15 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	14	5	12	8	9	11	87
II	13	12	10	9	23	15	55
III	8	6	5	5	12	14	79
IV	18	7	16	4	14	15	88

V	13	13	14	10	15	18	134
VI	21	17	16	7	21	15	50
Потребности	58	95	107	58	119	56	

16 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	10	15	10	3	9	98
II	21	18	19	24	19	15	30
III	14	17	10	19	6	12	71
IV	16	19	15	18	13	20	67
V	18	18	13	25	14	14	83
VI	10	13	18	21	7	16	145
Потребности	119	24	90	91	100	70	

17 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	19	21	10	12	14	14	32
II	25	17	10	15	12	14	139
III	15	11	14	19	7	11	125
IV	15	15	12	13	4	2	106
V	15	13	16	16	14	10	94
VI	10	9	3	11	9	3	110
Потребности	136	82	106	111	108	63	

18 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	8	5	7	15	12	10	147
II	14	17	11	18	12	22	162
III	16	14	15	13	16	26	58
IV	18	14	11	21	14	20	110
V	15	8	9	11	12	19	74
VI	215	11	13	22	15	18	100
Потребности	150	102	49	97	139	114	

19 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	10	4	18	18	9	116
II	16	19	14	14	16	9	152
III	12	13	14	17	13	15	118
IV	18	18	9	18	24	9	77
V	5	15	12	14	11	11	102
VI	7	16	13	11	19	10	45
Потребности	46	122	95	130	100	117	

20 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	8	11	2	16	9	14	111
II	12	11	11	11	12	11	76
III	18	12	13	19	16	14	83

IV	15	13	10	25	26	18	90
V	4	11	11	16	9	15	70
VI	12	6	7	10	19	11	87
Потребности	24	67	89	102	131	104	

21 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	2	15	12	3	9	7	81
II	11	14	13	18	18	22	160
III	5	10	6	7	13	6	97
IV	6	16	18	6	9	12	113
V	7	16	19	15	15	14	64
VI	17	15	15	16	14	18	72
Потребности	117	135	111	90	77	57	

22 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	10	10	9	11	15	91
II	9	21	12	11	6	20	87
III	14	24	19	18	8	15	110
IV	15	12	13	15	12	16	74
V	8	14	15	10	12	11	78
VI	6	17	5	17	3	16	158
Потребности	117	100	43	108	120	110	

23 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	14	12	16	12	18	11	48
II	21	16	18	14	16	11	93
III	17	22	17	14	16	21	109
IV	12	13	14	3	9	6	94
V	14	19	17	16	25	19	152
VI	8	20	16	9	13	6	168
Потребности	165	120	123	31	123	102	

24 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	4	12	18	8	8	13	129
II	7	11	13	15	10	17	150
III	13	6	17	15	12	12	38
IV	12	15	24	22	13	12	118
V	12	8	14	16	21	17	51
VI	12	10	12	11	14	14	114
Потребности	131	59	115	109	135	5	

25 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	21	16	21	20	14	14	111
II	12	11	10	4	9	15	89

III	5	16	10	7	16	14	86
IV	7	15	14	5	15	8	73
V	13	8	14	12	10	8	63
VI	12	13	24	11	12	18	116
Потребности	47	115	91	76	87	122	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Приобретение навыков использования модели Уилсона и ее адаптации к ситуации с ограниченной грузоподъемность транспортных средств.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов, например, в производственном процессе, торговле, медицинском обслуживании и т.д. В зависимости от ситуации под запасами могут подразумеваться: готовая продукция, сырье, полуфабрикаты, станки, инструмент, транспортные средства, наличные деньги и др. Неверный расчет необходимых запасов может привести как к незначительному ущербу (потеря части дохода от дефицита товара), так и к катастрофическим последствиям (при ошибочной оценке запасов топлива на самолете).

К экономическому ущербу приводит как чрезмерное наличие запасов, так и их недостаточность. Так, если некоторая компания имеет товарные запасы, то капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается. Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для компании потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей инвестирования. Кроме того, запасы, особенно скоропортящиеся продукты, требуют создания специальных условий для хранения. Для этого необходимо выделить определенные площади, нанять персонал, застраховать запасы. Все это влечет определенные издержки. С другой стороны, чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность возникновения дефицита, что может принести убытки вследствие потери клиентов, остановки производственного процесса и т.д. Кроме того, при малом уровне запасов приходится часто поставлять новые партии товара, что приводит к большим затратам на доставку заказов.

Отсюда следует важность разработки и использования математических моделей, позволяющих найти оптимальный уровень запасов, минимизирующий сумму различных видов издержек.

Основные понятия и определения.

Любая модель управления запасами (УЗ) в конечном счете, должна давать ответ на два вопроса:

1) Какое количество продукции заказывать?
2) Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос дается с помощью понятия **размера заказа**, т.е. количества ресурсов, которое необходимо поставлять для пополнения запасов.

Ответ на второй вопрос связан с понятием **точки заказа,** т.е. критический уровень запасов, при котором следует подавать заказ на поставку очередной партии ресурса.

Большое значение имеют различные виды затрат на УЗ. **Затраты на приобретение ресурса** являются важным фактором в тех случаях, когда действует система оптовых скидок, зависящих от размера заказа. **Затраты на осуществление заказа** включают в себя **затраты на оформление заказа** и **затраты на доставку заказа**. При частой подаче заказов на мелкие партии товара сумма этих затрат возрастает по сравнению со случаем более редкой подачи заказов на крупные партии. Если запас пополняется не готовым ресурсом со склада, а производится, то затраты на осуществление заказа идут на организацию производственного процесса по выпуску партии ресурса. В этом случае затраты на приобретение ресурса эквивалентны издержкам производства ресурса.

Затраты на хранение запаса представляют собой расходы на физическое содержание запаса на складе и возрастают с увеличением уровня запасов. **Потери от дефицита** представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции. Они могут быть вызваны более высокой платой за срочную доставку товара, ухудшением репутации у потребителя, потенциальной потерей прибыли.

Модель УЗ не обязательно должна включать все перечисленные виды затрат, т.к. некоторые из них могут быть незначительными или отсутствовать.

Основная модель управления запасами

Существует множество моделей УЗ той или иной степени сложности. Наиболее простой является так называемая основная модель управления запасами (модель Уилсона, система с фиксированным размером заказа). Эта модель несколько оторвана от действительности, но является полезной для понимания существа предмета, проблем, основных закономерностей и подходов в области УЗ.

1. *Входные параметры:*

1) ν – интенсивность потребления запаса, [ед. товара / ед. времени];
2) s – затраты на хранение запаса, [ден. ед. / ед. товара $\cdot$ ед. времени];
3) K – затраты на осуществление заказа, [ден. ед.].

2. Выходные параметры:

1) Q – размер заказа, [ед. тов.];
2) τ – период поставки, [ед. времени];
3) L – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден. ед./ ед. времени].

<u>Допущения модели Уилсона</u>

1. Интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной, $\nu = const$.
2. Время поставки заказа $T_д$ является известной и постоянной величиной.
3. Каждый заказ поставляется в виде одной партии.
4. Затраты на осуществление заказа K не зависят от размера заказа.
5. Отсутствие запаса является недопустимым.

Эта модель наиболее близка к следующим реальным ситуациям:

1) потребление основных продуктов питания, например, хлеба, молока, в санатории (оно в течение смены остается постоянным);

2) использование осветительных ламп в здании;

3) использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмой;

4) использование в производственном процессе для сборки изделий покупных комплектующих, например, гаек и болтов.

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рисунке 1. Все циклы изменения запасов являются одинаковыми, максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа Q .

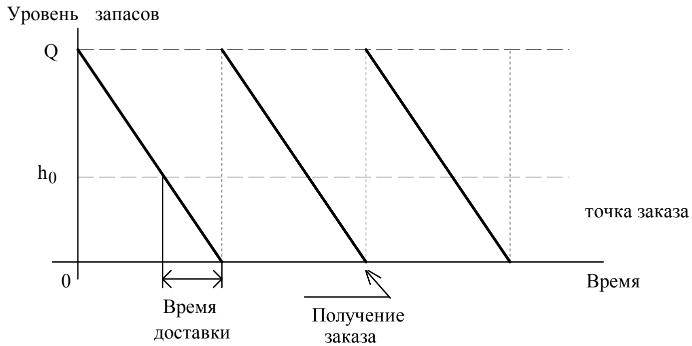


Рис.1. Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона

Формулы модели Уилсона

$$Q_W^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}$$

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2}$$

$$h_0 = \nu T_Д$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu}$$

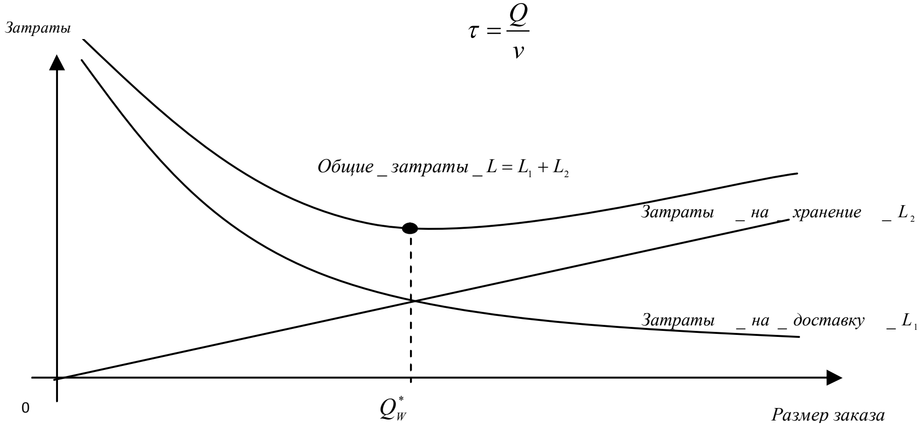


Рис.1.3. График затрат на управление запасами

Существуют следующие ***разновидности модели*** управления запасами (построенные на основе модели Уилсона):

– модели, учитывающие скидки (учитывает вариант, когда на заказы большого объема предоставляются скидки);

– модели планирования экономичного размера партии (последовательной производство: один станок производит детали с интенсивностью α , следующий станок использует продукцию первого с интенсивностью β);

– модели планирования дефицита (в случаях, когда издержки хранения продукции являются гораздо более высокими, чем издержки, связанные с отсутствием запаса в течение небольшого промежутка времени. Такие модели предусматривают два вида ситуаций: «при наличии дефицита заказы покупателей не выполняются и никак не учитываются на будущее» и «заказы покупателей «задалживаются», т.е. выполняются после получения очередного заказа»).

Пример использования модели Уилсона

Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. Цена покупки одного пакета равна 2 руб. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 руб. Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней (при 6-дневной рабочей неделе). По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 20% среднегодовой стоимости запасов. Необходимо определить: 1) сколько пакетов должен заказывать владелец магазина для одной поставки; 2) частоту заказов; 3) точку заказа. Известно, что магазин работает 300 дней в году.

Решение.

Плановым периодом является год, $\nu = 500$ пакетов в год, $K = 10$ рублей, затраты на хранение одной единицы продукции в год составляют 20% от стоимости запаса в одну упаковку, т.е. $s = 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ рубля. Тогда

$$Q_W^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \text{ пакетов.}$$

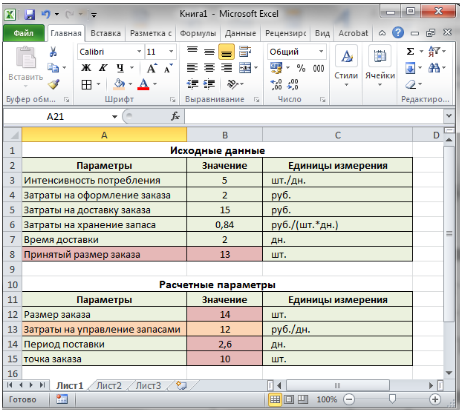
Поскольку число пакетов должно быть целым, то будем заказывать по 158 пакетов. При таком заказе годовые затраты равны

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25 \text{ рублей в год.}$$

Подачу каждого нового заказа владелец магазина должен осуществлять через $\tau = \frac{Q}{\nu} = \frac{158}{500} = 0{,}316$ года. Поскольку известно, что в данном случае год равен 300 рабочих дней, то $\tau = 0{,}316 \cdot 300 = 94{,}8 \approx 95$ рабочих дней. Заказ следует подавать при уровне запаса равном $h_0 = \nu T_Д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20$ пакетам, т.е. эти 20 пакетов будут проданы в течение 12 дней, пока будет доставляться заказ.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ УИЛСОНА В MS EXCEL

Экранная форма для расчета параметров модели Уилсона должна состоять из двух частей: блока исходных данных и расчетных формул (см. рисунок 3).

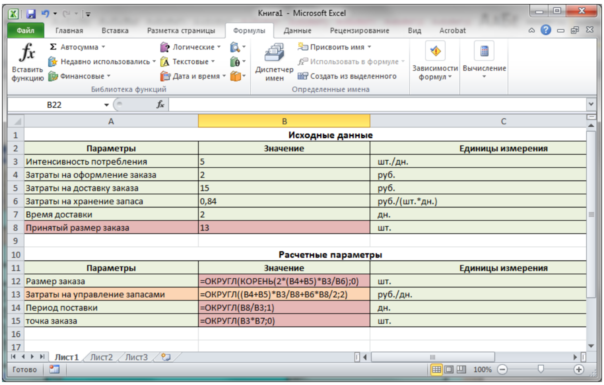


	Исходные данные	
Параметры	Значение	Единицы измерения
Интенсивность потребления	5	шт./дн.
Затраты на оформление заказа	2	руб.
Затраты на доставку заказа	15	руб.
Затраты на хранение запаса	0,84	руб./(шт.*дн.)
Время доставки	2	дн.
Принятый размер заказа	13	шт.
	Расчетные параметры	
Параметры	Значение	Единицы измерения
Размер заказа	14	шт.
Затраты на управление запасами	12	руб./дн.
Период поставки	2,6	дн.
точка заказа	10	шт.

Рис. 3. Экранная форма расчета параметров модели Уилсона

Размер реально подаваемого заказа Q может не совпадать с Q^*, вычисленным по формуле Уилсона. Поэтому в блок исходных данных помимо параметров, заданных в условии задачи, необходимо ввести **Принятый размер заказа**, который будет использоваться при вычислении расчетных параметров.

Формулы, вводимые в блок расчетных параметров, представлены на рисунке 4.



	Исходные данные	
Параметры	Значение	Единицы измерения
Интенсивность потребления	5	шт./дн.
Затраты на оформление заказа	2	руб.
Затраты на доставку заказа	15	руб.
Затраты на хранение запаса	0,84	руб./(шт.*дн.)
Время доставки	2	дн.
Принятый размер заказа	13	шт.
	Расчетные параметры	
Параметры	Значение	Единицы измерения
Размер заказа	=ОКРУГЛ(КОРЕНЬ(2*(B4+B5)*B3/B6);0)	шт.
Затраты на управление запасами	=ОКРУГЛ((B4+B5)*B3/B8+B6*B8/2;2)	руб./дн.
Период поставки	=ОКРУГЛ(B8/B3;1)	дн.
точка заказа	=ОКРУГЛ(B3*B7;0)	шт.

Рис. 4. Формулы блока расчетных параметров модели Уилсона

Для рассмотрения различных вариантов управления запасами удобно использовать несколько листов, содержащих одну и ту же экранную форму, но различные значения исходных данных. Для этого необходимо скопировать **Лист1** с помощью контекстного меню, вызываемого правой клавишей мыши на названии листа.

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.

2. Используя общие рекомендации по решению задачи (см. ниже), определите наиболее выгодный режим доставки заказов.

Постановка задачи

При строительстве участка железной дороги длиной $D=1440$ *м* используют стальной рельс в виде брусков, длиной $d=6$ *м* каждый. Вес одного метра рельса равен p=93 кг. Затраты на хранение рельсов на складе дороги составляют в сутки s=1 рубль за тонну. Затраты на оформление одного заказа равны $K_{оф} =1,20$ *руб*. Доставка грузов на склад дороги может осуществляться железнодорожным вагоном, вмещающим в себя до $m_1=40$ *т* груза, либо грузовыми машинами, каждая из которых рассчитана max на $m_2 =8,5$ *т* груза. Затраты на использование одного рейса вагона составляют K_1 =35 руб., а стоимость одного рейса грузовой машины – $K_2 =9$ *руб*. Доставка вагоном занимает $T_{д1}=1,5$ *дня*, а доставка грузовыми машинами – $T_{д2} =0,5$ *дня*. Стройка должна быть закончена не позднее, чем за $T_{max} =19$ *дней*.

Определите:

1) размер заказа рельса;

2) каким видом транспорта выгоднее доставлять заказы;

3) с какой периодичностью подавать заказ;

4) при каком уровне запаса подавать заказ;

5) затраты на УЗ в течение всего периода строительства.

6) постройте график циклов изменения запасов за весь период стройки.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

1) При решении данной задачи параметры s, ν и Q необходимо измерять в рельсах, количество которых должно быть целым числом.

2) Затраты на осуществление заказа включают затраты на оформление заказа и на доставку.

3) Если в транспортное средство (вагон или машину) не вмещается объем заказа, найденный по формуле Уилсона, то необходимо рассмотреть следующие варианты доставки:

a) доставлять такое количество рельс, которое вмещается в транспортное средство;

b) использовать для доставки не одно, а несколько транспортных средств (например, два), но при этом измениться затраты на доставку (увеличатся в 2 раза), а значит и изменится Q^*.

4) Основная идея решения заключается в рассмотрении нескольких вариантов доставки и выбора минимального по затратам на управление запасами.

5) При построении графика циклов изменения запасов, особое внимание следует уделить размеру последней поставки рельс, которая может отличаться от доставляемого прежде размера заказа.

Пример преобразования единиц измерения задачи

Т.к. железная дорога проходит в две линии: необходимая длина для строительства: $D = 1440м \cdot 2 = 2880м$.

Посчитаем необходимое количество рельсов на все строительство: $2880м/6м = 480шт.$

Посчитаем *интенсивность потребления*, т.к. стройка должна быть закончена не позднее, чем за T_{max} *=19 дней*, следовательно, $\nu = 480шт./19дн. = 25{,}26шт./дн. \approx 26шт./дн.$

Затраты на хранение рельсов на складе дороги составляют в сутки s=1 *руб./т.*

Вес одного рельса $1шт. = 93кг = 0{,}093т.$, следовательно, $1т. = 1/0{,}093шт.$ Найдем затраты на хранение

$s = 1руб./т. = 1руб./(1/0{,}093шт.) = 0{,}093руб./шт.$

Вместимость одного железнодорожного вагона

$m_1 = 40т. = 40 \cdot 1/0{,}093шт. = 430{,}11шт. \approx 430шт.$

Вместимость одной грузовой машины

$m_2 = 8{,}5т. = 8{,}5 \cdot 1/0{,}093шт. = 91{,}39шт. \approx 91шт.$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ № 9

Номер варианта	D	d	p	s	$K_{оф}$	m_1	m_2	K_1	K_2	$T_{д1}$	$T_{д2}$	T_{max}
1	700	5	110	1	2	40	4	40	5	2	1	15
2	800	6	100	2	3	50	5	30	6	3	2	16
3	900	7	120	1	2	60	6	50	7	2	1	17
4	1000	5	110	2	3	70	7	60	8	3	2	18
5	1100	6	100	1	2	80	4	20	9	2	1	19
6	1200	7	120	2	3	40	5	30	5	3	2	20
7	1300	5	110	1	2	50	6	40	6	2	1	21
8	1400	6	120	2	3	60	7	50	7	3	2	22
9	1500	7	100	1	2	70	4	60	8	2	1	23
10	1600	5	110	2	3	80	5	70	9	3	2	24
11	1700	6	110	1	2	40	6	60	5	3	2	25
12	1800	7	100	2	3	50	7	30	6	2	1	26
13	1900	5	120	1	2	60	4	40	7	3	2	27
14	2000	6	110	2	3	70	5	50	8	2	1	28

15	2100	7	100	1	2	80	6	40	9	3	2	29
16	2200	5	120	2	3	40	7	30	5	2	1	30
17	2300	6	110	1	2	50	4	50	6	3	2	31
18	2400	7	120	2	3	60	5	60	7	2	1	32
19	2500	5	100	1	2	70	6	20	8	3	2	33
20	2600	6	110	2	3	80	7	60	9	2	1	34
21	2700	7	120	1	2	40	4	40	5	3	2	35
22	2800	5	100	2	3	50	5	30	6	2	1	36
23	2900	6	120	1	2	60	6	50	7	3	2	37
24	3000	7	110	2	3	70	7	60	8	2	1	38
25	3100	5	100	1	2	80	4	20	9	3	2	39

ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Контрольная работа для студентов заочного отделения содержит ***4 задания по темам лабораторных работ (№ 1, 2, 3 и 8)***, описанных выше в данном методическом пособии. Задачи должны выполняться на основании учебных материалов, учебной литературы, учебно-методических пособий.

Контрольная работа выполняется в программной среде MS Office с поэтапным описанием выполненных действий со скриншотами. Листы в документе должны быть пронумерованы. Каждое задание следует начинать с новой страницы. Шрифт – Times New Roman, Courier New, размер 14 пт. Выравнивание по ширине. Межстрочный интервал – полуторный. Решение задач выполнять вручную и в MS Excel (через надстройку «Поиск решения»), а также предоставлять на электронном носителе.

На второй странице в содержании следует указать страницу, на которой начинается каждое из заданий, а также другие структурные единицы.

Завершается работа списком использованных источников.

Вариант контрольной работы выбирается ***по двум последним номерам*** зачетки.

Студент, не сдавший контрольную работу в срок или не получивший зачет по контрольной работе, к зачету (экзамену) по дисциплине не допускается.

ТЕСТЫ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ»

1. Социально-экономическая система не является

- вероятностной системой
- динамической системой
- детерминированной системой
- кибернетической системой

2. Выберите неверное утверждение

- ЭММ позволяют выявить и формально описать связи между переменными, которые характеризуют исследования
- ЭММ позволяют выявить оптимальный способ действия
- ЭММ позволяют управлять объектом
- ЭММ позволяют сделать вывод о поведении объекта в будущем

3. Какими признаками не обладает система?

- целостность
- наличие цели
- наличие более крупной, внешней по отношению к данной системе среды
- подобие составляющих подсистем
- наличие взамосвязанных частей (подсистем)

4. Под моделью понимается

- образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме, отражающий существенные свойства моделируемого объекта (процесса)
- образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме, отражающий все свойства моделируемого объекта (процесса)
- образ реального объекта (процесса) в идеальной форме, отражающий свойства моделируемого объекта (процесса)

5. Какие требования предъявляются к математической модели?

- адекватность, универсальность, экономичность
- адекватность, универсальность, открытость, экономичность
- адекватность, иерархичность, экономичность

6. Модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления, – это

- оптимизационные модели
- балансовые модели
- трендовые модели

▪ имитационные модели

7. Детерминированные модели – это модели, в которых

▪ при задании на входе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты в зависимости от действия случайного фактора

▪ все зависимости отнесены к одному моменту времени

▪ результаты на выходе однозначно определяются управляющими воздействиями

8. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса – это

▪ макроэкономическая, детерминированная, имитационная, матричная модель

▪ макроэкономическая, детерминированная, балансовая, матричная модель

▪ макроэкономическая, вероятностная, имитационная, матричная модель

▪ микроэкономическая, детерминированная, балансовая, регрессионная модель

9. Что является целью регрессионного анализа?

▪ восстановление вида связи между входными и выходными переменными, описывающими исследуемый объект или процесс

▪ определение степени связи между входными переменными

▪ определение степени связи между выходными переменными

▪ восстановление вида связи между входными и выходными переменными объекта в результате исследования физических процессов, происходящих в объекте

10. Оценка результатов регрессионного анализа включает

▪ нахождение экстремумов регрессионной функции

▪ проверку целостности исследуемой системы

▪ проверку адекватности уравнения регрессии

▪ оценку компонентов системы

11. Дисперсионный анализ – это

▪ статистический метод, выявляющий степень связи факторов и результативных признаков, характеризующих исследуемый процесс

▪ статистический метод, выявляющий влияние отдельных факторов на результативный признак, характеризующий исследуемый процесс, и дающий оценку этого влияния

▪ статистический метод, устанавливающий вид зависимости между факторами и результативными признаками, характеризующими исследуемый процесс

12. Что не может выступать в качестве критерия оптимальности производственного процесса?

▪ объём производства
▪ объем продаж
▪ длительность процесса изготовления одного изделия
▪ потребления электроэнергии
▪ производственные затраты
▪ прибыль

13. Основная цель оптимизации заключается

▪ в нахождении оптимального решения
▪ в нахождении оптимального решения кратчайшим способом
▪ в нахождении всех возможных решений

14. Если целевая функция и все ограничения выражаются с помощью линейных уравнений, то рассматриваемая задача является

▪ задачей нелинейного программирования
▪ задачей целочисленного программирования
▪ задачей линейного программирования
▪ задачей динамического программирования

15. Какая из перечисленных задач является задачей линейного программирования?

▪ транспортная
▪ накопительная
▪ переместительная
▪ вытеснительная
▪ все перечисленные

16. Задача о планировании производства заключается

▪ в минимизации суммарной стоимости перевозок грузов по всем направлениям
▪ в получении максимальной прибыли при ограниченных ресурсах
▪ в получении максимальной прибыли (доходности) от размещения средств

17. Найти такой план перевозок продукции, чтобы суммарная стоимость перевозок по всем направлениям была минимальной, – это

- распределительная задача
- задача о назначениях
- задача о планировании производства
- транспортная задача

18. Какое условие задачи о планировании производства должны обеспечивать ограничения, накладываемые на параметры задачи?

- затраты на перевозку продукции не должны превышать заданного значения
- потребитель заинтересован в получении того количества продукции, которое соответствует его потребностям
- расход ресурсов на производство продукции не должен превышать его запасов

19. Если x_{ij} - это назначение *i*-го работника на *j*-ое рабочее место, то какими математическими выражениями описываются ограничения в распределительной задаче?

- $\sum_i x_{ij} \le a_j$, $\sum_j x_{ij} \le b_i$
- $\sum_i x_{ij} = 1$, $\sum_j x_{ij} = 1$
- $\sum_i \sum_j x_{ij} \to \min$

20. Анализ решения задачи линейного программирования позволяет ответить на вопрос

- «На сколько можно снизить запас дефицитного ресурса при сохранении оптимального значения целевой функции»
- «Для чего необходимо увеличивать запас дефицитного ресурса?»
- «Хватит ли запаса дефицитного ресурса для получения оптимального решения?»

21. Какой ресурс называется недефицитным?

- ресурс, запасы которого не влияют на оптимальное значение целевой функции
- ресурс, запасы которого в незначительной степени влияют на оптимальное значение целевой функции
- ресурс, запасы которого влияют на оптимальное значение целевой функции

22. В задачах линейного программирования теневая цена показывает

- на сколько увеличивается себестоимость продукции при увеличении запасов ресурсов на 1 единицу
- на сколько изменяется значение целевой функции при увеличении запасов ресурсов на 1 единицу
- на сколько изменяется запас ресурсов при изменении их стоимости на 1 единицу

23. Какой ресурс является более предпочтительным в задачах линейного программирования?

- недефицитный ресурс, теневая цена которого равна 0
- дефицитный ресурс, теневая цена которого будет наибольшей
- дефицитный ресурс, теневая цена которого будет наименьшей

24. Выберите неверное утверждение

- Сетевое планирование и управление применяется при разработке и освоении сложных объектов, при реконструкции предприятий, разработке новой технологии производства продукции
- Основой сетевого планирования и управления является сетевой график, с помощью которого задается последовательность и длительность выполнения работ
- Сетевой график представляет собой замкнутый контур, в котором все события взаимозависимы
- Основные понятия сетевого планирования – событие, работа, путь

25. В сетевом планировании и управлении под фиктивной работой понимается

- работа, которая требует только затрат времени
- работа, связывающая два фиктивных события
- работа, которая не требует затрат времени и труда, а подразумевает логическую связь между событиями

26. Табличный метод расчета сетевого графика в сетевом планировании и управлении позволяет рассчитать

- последовательность событий в сетевом графике
- сроки свершения работ
- длину пути

27. Основой дисперсионного анализа является

- теорема аддитивности
- правило расчета коэффициента корреляции
- теория проверки статистических гипотез

28. В модели поведения потребителей соответствие потребностей и уровня дохода потребителя отражается в

- функции потребления
- кривой безразличия
- бюджетном ограничении
- целевой функции

29. Предельные полезные эффекты потребительских благ выражаются

- целевой функцией потребления
- частными производными функции потребления
- функцией Лагранжа
- коэффициентами Лагранжа

30. Каким условием описывается тактика выбора товаров потребителями?

- отношение предельной полезности к цене товара должно быть одинаковым для всех приобретаемых товаров
- предельные полезности выбираемых товаров должны быть равны ценам
- предельные полезности выбираемых товаров не должны превышать цены

31. На какой вопрос не дает ответ модель управления запасами?

- «Какое количество продукции заказывать?»
- «Какую продукцию заказывать?»
- «Когда заказывать?»

32. В модели Уилсона затраты на приобретение ресурсов складываются из

- затрат на осуществление заказа и затрат на хранение запасов
- затрат на производство и хранение продукции
- затрат на осуществление заказа, на хранение запасов и издержек от снижения запасов

33. Если размер заказа превышает оптимальный размер, то

- доминирующими являются затраты на осуществление заказа
- доминирующими являются затраты на хранение запасов
- затраты на осуществление заказа и на хранение запасов равны

34. Как определяются затраты на осуществление всех заказов в течение планового периода в модели управления запасами? (*K* – затраты на

осуществление заказа; *v* – интенсивность потребления запасов; *Q* – размер заказа)

- Kv/Q
- $(2Kv/s)^{1/2}$
- $Qs/2$

35. К какому типу систем массового обслуживания относится телефонная станция?

- СМО с ожиданием
- СМО с потерями
- комбинированная СМО

36. Время обслуживания требования в СМО является

- фиксированной величиной
- случайной величиной
- регулируемой величиной

37. Ординарность потока – это

- свойство потока, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени, постоянно
- свойство потока, которое означает, что число требований, поступивших в систему до момента t, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до $t + \Delta t$
- свойство потока, которое означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований

38. Этапы экономико-математического моделирования

- постановка экономической проблемы, построение математической модели, численное решение, оценка адекватности модели
- постановка экономической проблемы, построение математической модели, численное решение, оценка адекватности, оценка значимости коэффициентов модели
- постановка экономической проблемы, построение математической модели, численное решение, оценка адекватности, применение численных результатов моделирования

39. Если X – регрессионная матрица,Y – вектор-столбец наблюдаемых значений, A – вектор-столбец коэффициентов, то модель множественной регрессии в матричном виде

- $X^TXA = X^TY$
- $XY = A$
- $A = X^TXY^{-1}$

40. Для чего применяется нормированный коэффициент детерминации?

- для определения адекватности уравнения регрессии в случае небольших объемов выборки
- для определения значимости коэффициентов уравнения регрессии в случае небольших объемов выборки
- для определения адекватности уравнения регрессии в случае больших объемов выборки
- для определения значимости коэффициентов уравнения регрессии в случае больших объемов выборки

41. Какой вид изменчивости результативного признака не рассматривается в дисперсионной модели?

- изменчивость, обусловленная действием каждого фактора
- изменчивость, обусловленная взаимодействием фактора и результативного признака
- изменчивость, обусловленная взаимодействием факторов
- изменчивость, обусловленная наличием уровней каждого фактора
- случайную изменчивость, обусловленную всеми неучтенными обстоятельствами

42. Выполнение какого требования дает возможность применять метод «золотого сечения» для нахождения наибольшего значения функции на отрезке?

- дифференцируемость функции
- многомерность функции
- унимодальность функции

43. Выполнение какого условия является критерием остановки вычислений в алгоритме поиска оптимального решения методами одномерной оптимизации?

- если отношение длины текущего интервала неопределенности к длине первоначального интервала будет больше заданной величины ε;
- если значение ЦФ, вычисленное в текущей точке, меньше значений ЦФ, вычисленных в последующей и в предыдущей точках
- если отношение длины текущего интервала неопределенности к длине первоначального интервала будет меньше заданной величины ε

ЛИТЕРАТУРА

1. Алесинская, Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу «Экономико-математические методы и модели» / Т.В. Алесинская. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
2. Математические методы исследования операций : учебное пособие / Н.Ю.Грызина [и др.]. – М. : МЭСИ, 2004. – 156 с.
3. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование : практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, 2004.
4. Решение задач оптимизации в Excel : учебно-методическое пособие / http://www.allmath.ru/appliedmath/operations/excel.
5. Мунипов, Р. Симплекс-процедура решения задач линейного программирования : уч.-мет. пособие / Р. Мунипов, Ж.Ж. Сайгитбаталов. – Нижнекамск : Таглимат, 2003. – 59.
6. Стариков, А.В. Экономико-математическое и компьютерное моделирование : учебное пособие / А.В. Стариков, И.С. Кущева. – Воронеж : ГОУ ВПО «ВГЛТА». - 2008. – 132 с.

Приложение

Отчет по лабораторным работам необходимо оформлять в отдельной тетради (18 л.) в клетку.

Образец оформления титульного листа:

Министерство образования и науки РФ
НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Отчет по лабораторным работам
по дисциплине «Экономико-математические методы»

Выполнил: № группы
ФИО
Проверил: доцент кафедры ИСТ
Вотякова Л.Р.

Отметка о защите лабораторных работ

№ Лаб. работы	Дата	Защита
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		

Нижнекамск, 2014

Учебное издание

Вотякова Лилия Радисовна
кандидат педагогических наук

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 29.05.2014
Подписано в печать 01.07.2014.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,5. Тираж 100.
Заказ №34.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».
г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а.