***2. Принятие решений в условиях риска***

Принятие решений в условиях риска (или в вероятностных условиях) характеризуется тем, что при выборе альтернативы ЛПР имеет информацию о распределении вероятностей на множестве состояний среды. Каждое состояние среды *Xj*, *j*=1,…,*n*, может появиться с некоторой вероятностью *pj*, 0≤*pj*≤1, *p*1+…+*pn*=1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *X*1 | … | *Xj* | … | *Xn* |
|  | *p*1 | … | *pj* | … | *pn* |
| *A*1 | *a*11 | … | *a*1*j* | … | *a*1*n* |
| … | … |  | … |  | … |
| *Ai* | *ai*1 | … | *aij* | … | *ain* |
| … | … |  | … |  | … |
| *Am* | *am*1 | … | *amj* | … | *amn* |

Табл. 2.1. Матрица решений и строка вероятностей появления состояний среды

Две альтернативы *Ai* и *Ak* сравниваются по случайным величинам

$ξ\_{i}=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{i1}\\p\_{1}\end{matrix}&\begin{matrix}…\\…\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{ij}\\p\_{j}\end{matrix}&\begin{matrix}…\\…\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{in}\\p\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ и $ξ\_{k}=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{k1}\\p\_{1}\end{matrix}&\begin{matrix}…\\…\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{kj}\\p\_{j}\end{matrix}&\begin{matrix}…\\…\end{matrix}&\begin{matrix}a\_{kn}\\p\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$.

Оценочная функция *f*(*x*1,…,*xn*) теперь должна учитывать не только значения эффективности *aij*, но и вероятности появления состояний среды *pj*. Эффективность (полезность) матрицы решений ||*aij*|| определяется по-прежнему как максимум (минимум) оценок строк, если матрица ||*aij*|| – матрица доходов (затрат).

При использовании некоторых критериев принятия решений предпочтительнее применяются матрица решений, сопровождаемая не строкой вероятностей, а матрицей вероятностей ||*pij*||, где *pij* – вероятность эффективности *aij*, т.е. вероятность выбора альтернативы *Ai* при появлении состояния среды *Xj*, где *pi*1+…+*pin*=1 для всех *p*1+…+*pn*=1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *X*1 | … | *Xj* | … | *Xn* |  | *X*1 | … | *Xj* | … | *Xn* |
| *A*1 | *a*11 | … | *a*1*j* | … | *a*1*n* | *A*1 | *p*11 | … | *p*1*j* | … | *p*1*n* |
| … | … |  | … |  | … | … |  |  |  |  |  |
| *Ai* | *ai*1 | … | *aij* | … | *ain* | *Ai* | *pi*1 | … | *pij* | … | *pin* |
| … | … |  | … |  | … | … |  |  |  |  |  |
| *Am* | *am*1 | … | *amj* | … | *amn* | *Am* | *pm*1 | … | *pmj* | … | *pmn* |

Табл. 2.2. Матрица решений ||*aij*|| и матрица вероятностей ||*pij*||

Определение оценочных функций может идти двумя путями:

1) использование оценочных функций принятия решений в условиях неопределенности, примененных к значениям *p*1*a*i1, …, *pjaij*, …, *pnain* случайной величины ξ*i*;

2) применение теоретико-вероятностных характеристик.

На первом пути можно найти max{*p*1*a*i1,…,*pnain*} (критерий крайнего оптимизма), min{*p*1*a*i1,…,*pnain*} (критерий крайнего пессимизма), среднее значение *p*1*a*i1, …, *pnain* (критерий Лапласа) и их линейные комбинации.

*Критерий Гермейера* сформулируем для матрицы выигрышей с положительными числами, а не для матрицы затрат с отрицательными числами, как у автора критерия. Определим оценочную функцию: *f*(*x*1,…,*xn*)=min{*p*1*x*1,…,*pnxn*}.

На втором пути используются математическое ожидание и дисперсия.

*Критерий Байес*а основан на оценочной функции, которая является математическим ожиданием *M*ξ*i* случайной величины ξ*i*: *f*(*x*1,…,*xn*)=*p*1*x*1+…+*pnxn*. Критерий Лапласа является частным случаем критерия Байеса при *p*1=…=*pn*=1/*n*.

*Критерий Ходжа – Лемана* соединяет по одному критерию в условиях риска и в условиях неопределенности. Его оценочная функция выглядит следующим образом:

*f*(*x*1,…,*xn*)=ν(*p*1*x*1+…+*pnxn*)+(1−ν)min{*x*1,…,*xn*}, где 0≤ν≤1.

Дисперсия *D*ξ=*M*(ξ−*M*ξ)2 – это мера отклонения случайной величины от среднего.

*Критерий минимума дисперсии*. Оптимальная альтернатива определяется как альтернатива с минимальным значением ее дисперсии.

*Критерий максимума вероятности для получения заданной эффективности*.

Пусть min*i,j*{*aij*}≤*aij*\*≤max*i,j*{*aij*}, ||*aij*|| *–* матрица затрат. Допустим, что ЛПР считает, что эффективность *aij*≥*aij*\* является достаточной. Тогда для каждой альтернативы *Ai* суммируются все вероятности *pj* или *pij*, для которых *aij*≥*aij*\*, и альтернатива с максимальной суммой вероятностей становится оптимальным решением.

***Задание***. Фирма может выпускать одну из семи летних товаров, которые обозначим *A*1 – *A*7. Владелец фирмы решает, который из этих товаров выпускать на лето. Прибыль зависит от того, каким будет лето, дождливым, жарким и т.д. (даны всего четыре состояния среды *X*1 – *X*4). Заданы выигрыш *aij* альтернативы *Ai* при состоянии среды *Xj* и вероятность появления *pj* состояния среды *Xj* (табл. 2.3.). Найдите оптимальное решение по критериям Байеса, Ходжа – Лемана (ν=0,4), минимума дисперсии.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *X*1 | *X*2 | *X*3 | *X*4 |
| *pj* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |
| *A*1 | 22 | 24 | 22 | 16 |
| *A*2 | 25 | 20 | 35 | 15 |
| *A*3 | 28 | 28 | 24 | 22 |
| *A*4 | 25 | 30 | 30 | 20 |
| *A*5 | 16 | 26 | 30 | 28 |
| *A*6 | 30 | 22 | 25 | 20 |
| *A*7 | 24 | 22 | 26 | 10 |

Табл. 2.3. Матрица доходов и строка вероятностей состояний среды к задаче 2.1