Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Волгоградский государственный аграрный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

О.А. Заяц

для подготовки
бакалавров направления «Прикладная информатика»

Учебно-методическое пособие

Волгоград
Волгоградский ГАУ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций представляет собой комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами. Наряду с основной задачей – обоснованием оптимальных решений – к области исследования операций относятся и такие, как сравнительная оценка различных вариантов организации операций; оценка влияния на результат операции различных параметров; исследование элементов управляемой системы, нарушение работы которых особенно сказывается на успехе операции, и т. д.

Методология анализа сложных систем, их математическое моделирование и нахождение на этой основе оптимальных решений в общем виде изучается в направлении «Исследование операций». В его рамках изучаются математические «методы оптимизации» – методы нахождения экстремумов функций и функционалов.

Изучение методов исследования операций является важной составляющей при подготовке специалистов в области информационных технологий. Оно формирует определенную методологию совершенствования существующих и создания новых систем на основе современных компьютерных средств.

Одной из основных задач изучения дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации» является освоение основных идей методов, особенностей областей применения и методики использования их как готового инструмента практической работы при проектировании и разработке систем, математической обработке данных экономических и других задач, построении алгоритмов и организации вычислительных процессов на ПК.

Цель данного пособия – обучение студентов применению методов и моделей исследования операций в процессе подготовки и принятия управленческих решений в организационно-экономических и производственных системах, а также формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся использования методов математического моделирования и компьютерных технологий в различных сферах человеческой деятельности.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование (ЛП) - это область математического программирования, являющегося разделом математики и изучающего методы решения экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции конечного числа переменных, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Совокупность соотношений, состоящая из линейной целевой функции и линейных ограничений на ее переменные, называется математической моделью задачи линейного программирования. В общем виде математическая модель задачи ЛП записывается так:

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge)\, b_i, \quad i = \overline{1, m}; & (2.2) \\ x_j \ge 0,\ j = 1, n. & (2.3) \end{cases}$$

где x_j – переменные (неизвестные);

a_{ij}, b_i, c_j - коэффициенты задачи линейного программирования.

Линейная функция (2.1) называется целевой функцией. Систему ограничений (2.2) называют функциональными ограничениями задачи ЛП, а ограничения (2.3) – прямыми ограничениями. Необходимо найти такое решение $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющее ограничениям (2.2) и (2.3), при котором целевая функция (2.1) принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение.

Если все ограничения системы (2.2) заданы уравнениями, то модель такого вида называется канонической. Если все ограничения системы (2.2) заданы неравенством вида «≤», задача ЛП называется стандартной. Любая задача линейного программирования может быть сведена к канонической, стандартной или общей задаче:

1. Если требуется найти минимум функции

$$F(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n \to \min,$$

то можно перейти к нахождению максимума функции

$$F_1(\bar{x}) = -F(\bar{x}) = -c_1 \cdot x_1 - ... - c_n \cdot x_n \to \max.$$

2. Если ограничение-неравенство в исходной задаче ЛП имеет вид «≤», то в канонической задаче оно преобразуется в ограничение-равенство добавлением к левой части дополнительной неотрицательной переменной. Если же ограничение-неравенство имеет вид «≥», то

оно преобразуется в ограничение-равенство вычитанием из левой части дополнительной неотрицательной переменной.

2.1. Построение математической модели задачи

Процесс построения экономико-математической модели задачи (т.е. запись ее с помощью математических символов) начинается с разбора описанной в условии экономической ситуации. Для этого необходимо, с точки зрения экономики, а не математики, ответить на следующие вопросы:

1) что является искомыми величинами задачи?

2) какова цель решения? Какой параметр задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком направлении должно изменяться значение этого параметра (к максимуму или к минимуму) для достижения наилучших результатов?

3) какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Искомые величины являются переменными задачи, которые, как правило, обозначаются малыми латинскими буквами с индексами. Например, однотипные переменные удобно представлять в виде $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Цель решения записывается в виде целевой функции, обозначаемой $F(\bar{x})$. Математическая формула целевой функции отражает способ расчета значений параметра - критерия эффективности задачи.

Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ограничений. Левые и правые части ограничений отражают способ получения (расчет или численные значения, взятые из условия) значений тех параметров задачи, на которые были наложены соответствующие условия.

В процессе записи математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных задачи, целевой функции и всех ограничений. Следует всегда проверять размерность параметров левой и правой части каждого из ограничений, поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке при составлении ограничений.

Рассмотрим процесс построения моделей задач линейного программирования на примерах функционирования экономических объектов.

Пример 1. *Задача производственного планирования (задача об использовании ресурсов).*

Коммерческому отделу поручили проанализировать совместную деятельность подразделений фабрики по изготовлению и продаже двух видов продукции P_1 и P_2. Для производства продукции используют два вида сырья: А и В, максимально возможные суточные запасы которых составляют 3 и 4 т соответственно. Расход сырья на производство 1 т продукции приведен в таблице 2.1. Изучение конъюнктуры спроса на рынке сбыта показало, что суточный спрос на продукцию P_2 никогда не превышал спроса на продукцию P_1 более чем на 1,5 т, а спрос на продукцию P_2 не превышал 2 т в сутки.

Таблица 2.1

Сырье	Расход сырья на 1 т продукции	
	P_1	P_2
А	0,5	1,0
В	1,0	0,5

Какое количество продукции каждого вида необходимо производить предприятию, чтобы доход от ее реализации был максимальным? Цена 1 т продукции P_1 - 20 тыс. руб., продукции P_2 - 30 тыс. руб.

Решение: Построим модель задачи, используя представленную выше методику.

1. Переменные задачи.

В задаче требуется установить, сколько продукции каждого вида надо производить, поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются суточные объемы производства каждого вида продукции:

x_1 - суточный объем производства продукции P_1 (т/сутки);

x_2 - суточный объем производства продукции P_2 (т/сутки).

2. Целевая функция.

В условии задачи сформулирована цель - добиться максимального дохода от реализации продукции, т.е. критерием эффективности служит параметр суточного дохода, который должен стремиться к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи продукции обоих видов, необходимо знать объемы производства, т.е. x_1 и x_2 т продукции в сутки, а также цены на продукцию P_1 и P_2 - согласно условию 20 и 30 тыс. руб. за 1 т продукции соответственно. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства продукции P_1 равен $20x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи продукции P_2

- $30x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем целевую функцию в виде суммы дохода от продажи продукции P_1 и P_2.

$$F(\bar{x}) = 20x_1 + 30x_2 \to \max \text{ (тыс. руб./сутки).}$$

3. Ограничения.

Возможные объемы производства продукции x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество сырья A и B, израсходованного в течение суток на производство продукции обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;

- согласно результатам изучения рыночного спроса суточный объем производства продукции P_2 может превышать объем производства продукции P_1 не более чем на 1,5 т, а спрос на продукцию P_2 никогда не превышал 2 т в сутки;

- объем производства продукции не может быть выражен отрицательными значениями.

Запишем эти ограничения в математической форме.

Ограничение по расходу сырья A имеет вид:

$$0,5x_1 + 1x_2 \le 3 \text{ (т/сутки).}$$

Левая часть ограничения - это расчет суточного расхода ресурса A на производство продукции обоих видов. Расход сырья A на производство 1 т продукции P_1 - 0,5 т; на производство 1 т продукции P_2 - 1 т. Тогда на производство x_1 т продукции P_1 и x_2 т продукции P_2 потребуется ($0,5x_1 + 1x_2$) т сырья A. Правая часть ограничения - это величина суточного запаса сырья на складе - 3 т.

Аналогична запись ограничения по расходу сырья B:

$$1x_1 + 0,5x_2 \le 4 \text{ (т/сутки).}$$

Ограничение по суточному объему производства продукции P_1 по сравнению с объемом производства продукции P_2 имеет вид:

$$x_2 - x_1 \le 1,5 \text{ (т/сутки).}$$

Ограничение по суточному объему производства продукции P_2:

$$x_2 \le 2 \text{ (т/сутки).}$$

Неотрицательность объемов производства задается как

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$$F(\bar{x}) = 20x_1 + 30x_2 \to \max; \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 0,5x_2 \le 4, \\ x_2 - x_1 \le 1,5, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Экономико-математическая модель задачи состоит в том, чтобы найти такой план производства продукции $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (2.5), при котором целевая функция (2.4) принимает максимальное значение.

Пример 2. *Задача о составлении рациона (задача о диете).*

Для осуществления жизнедеятельности человеку среднего возраста ежедневно необходимо потреблять 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг продукта, а также стоимость этих продуктов в магазине приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продукта, г					
	мясо	рыба	масло	картофель	сыр	крупа
Белки	180	190	70	21	260	130
Жиры	20	3	865	2	310	30
Углеводы	0	0	6	200	20	650
Минеральные соли	9	10	12	70	60	20
Стоимость 1 кг продукта, руб.	200	150	120	25	220	30

Требуется составить суточный рацион, содержащий не менее указанного количества необходимых питательных веществ и обеспечивающий минимальную стоимость закупаемых продуктов.

Решение. Построим экономико-математическую модель задачи.

1. Искомыми величинами в задаче является количество покупаемого каждого вида продукта, входящего в суточный рацион человека (мясо, рыба, масло, картофель, сыр, крупа), поэтому переменными задачи выступают:

x_1 - количество мяса, кг/сутки;

x_2 - количество рыбы, кг/сутки;

x_3 - количество масла, кг/сутки;

x_4 - количество картофеля, кг/сутки;

x_5 - количество сыра, кг/сутки;

x_6 - количество крупы, кг/сутки.

2. Цель в задаче - обеспечение минимальной общей стоимости закупаемых продуктов. Тогда целевая функция выглядит так:

$$F(\bar{x}) = 200x_1 + 150x_2 + 120 \cdot x_3 + 25x_4 + 220x_5 + 30x_6 \to \min .$$

3. Возможный суточный рацион человека ограничивается двумя группами условий: расходом питательных веществ; неотрицательностью количества продуктов, входящих в рацион. Запишем эти ограничения в математической форме.

Ограничение

1) по количеству белков, г:

$$180x_1 + 190x_2 + 70x_3 + 21x_4 + 260x_5 + 130x_6 \ge 118;$$

2) по количеству жиров, г

$$20x_1 + 3x_2 + 865x_3 + 2x_4 + 310x_5 + 30x_6 \ge 56;$$

3) по количеству углеводов, г

$$6x_3 + 200x_4 + 20x_5 + 650x_6 \ge 500;$$

4) по количеству минеральных солей, г

$$9x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 20x_6 \ge 8;$$

5) неотрицательности переменных, кг

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

Таким образом, математическая модель задачи имеет вид:

$$F(\bar{x}) = 200x_1 + 150x_2 + 120 \cdot x_3 + 25x_4 + 220x_5 + 30x_6 \to \min \qquad (2.6)$$

$$\begin{cases} 180x_1 + 190x_2 + 70x_3 + 21x_4 + 260x_5 + 130x_6 \ge 118, \\ 20x_1 + 3x_2 + 865x_3 + 2x_4 + 310x_5 + 30x_6 \ge 56, \\ 6x_3 + 200x_4 + 20x_5 + 650x_6 \ge 500, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 20x_6 \ge 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Экономико-математическая модель задачи заключается в следующем: составить такой суточный рацион $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, удовлетворяющий системе ограничений (2.7), и при котором целевая функция (2.6) принимает минимальное значение.

2.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования был предложен симплекс-метод, разработанный в 1947-1949 гг. американским математиком Дж. Данцигом. Идея состоит в целенаправленном переборе вершин многогранника допустимых решений (опорных планов) в направлении «улучшения» значений целевой функции.

Допустимым решением (допустимым планом) задачи ЛП, данной в стандартной форме, называется упорядоченное множество чисел (x_1, x_2, …, x_n), удовлетворяющих ограничениям; это точка в n-мерном пространстве. Множество допустимых решений образует *область допустимых решений* (ОДР) задачи ЛП. ОДР представляет собой выпуклый многогранник (многоугольник).

Базисным называется решение, при котором все свободные переменные равны нулю. *Опорное* решение - это базисное неотрицательное решение. Опорное решение может быть невырожденным и вырожденным. Опорное решение называется невырожденным, если число его ненулевых координат равно рангу системы, в противном случае оно является вырожденным.

Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется *оптимальным* и обозначается $\overline{x}^*$.

Симплекс-метод - это универсальный метод решения задач ЛП, представляющий собой итерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимых решений до тех пор, пока не достигнет оптимального значения. Алгоритм реализации симплекс-метода сводится к поэтапному пересчету числовых значений компонент очередного анализируемого промежуточного решения (вектора $\overline{x}$) и проверки его на оптимальность. Результаты каждого этапа пересчета записываются в специальные таблицы (симплекс-таблицы).

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования стандартного вида:

$$F(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}; & (2.11) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. & (2.12) \end{cases}$$

Для применения симплекс-метода ограничения задачи ЛП должны быть приведены к каноническому виду, т.е. система ограничений должна быть представлена в виде уравнений.

Алгоритм симплекс-метода

Шаг 1. Определение исходного опорного плана и составление симплекс-таблицы проходит в два этапа:

а) если ограничения (2.11) имеют тип «≤», то вводим дополнительные неотрицательные переменные. Вектор-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.13}$$

где x_{n+i} – базисные переменные, $i=\overline{1,m}$;

x_j – свободные переменные (небазисные), $j=\overline{1,n}$.

Решим систему (2.13) относительно базисных переменных:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.14}$$

Чтобы решить систему (2.14), полагаем свободные переменные равными нулю: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Имеем:

$$x_{n+i} = b_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.15}$$

Тогда исходный опорный план будет выглядеть следующим образом: $\overline{x}_1 = (x_1 = 0,\, x_2 = 0, ...,\, x_n = 0,\, x_{n+1} = b_1,\, x_{n+2} = b_2, ...,\, x_{n+m} = b_m)$.

б) если исходная задача линейного программирования дана в каноническом виде, то базис выбираем из имеющихся переменных.

Базисная переменная - это переменная, встречающаяся только в одном из ограничений с коэффициентом 1 (или который можно привести к коэффициенту, равному 1).

Если нет естественных базисных переменных, вводятся искусственные переменные и переходят к М-задаче.

Составим исходную симплекс-таблицу для случая а). Решение приведено в таблице 2.4.

Таблица 2.4

c_i	*БП*	c_1	c_2	…	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+m}	b_i
		x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
c_{n+2}	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
Δ_j		Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	$F(\overline{x})$

Дадим описание этой таблицы и укажем порядок заполнения:

1) в первой строке c_j проставляются значения коэффициентов целевой функции при переменных канонической задачи;

2) заполняются столбцы $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$. В них заносятся коэффициенты ограничений канонической задачи, стоящие при переменных x_j образующие ее матрицу A;

3) определяются базисные переменные x_i и записываются в столбец БП;

4) в столбец b_i заносятся значения базисных переменных;

5) в столбец c_i записываются коэффициенты целевой функции при базисных переменных;

6) для перехода к следующему опорному решению, рассчитываются Δ_j – оценочные коэффициенты переменных

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \;\; j = \overline{1,n}\,.$$

В первой симплекс-таблице строка оценок (индексная строка) заполняется коэффициентами целевой функции, взятыми с противоположными знаками;

7) для ячейки $F(\bar{x})$ вычисляется значение целевой функции, соответствующее опорному плану $F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot b_i$.

Шаг 2. Проверка исходного опорного плана на оптимальность.

Решение задачи ЛП будет оптимальным, если все оценки свободных переменных неотрицательные (т.е. $\Delta_j > 0$) для задач на максимум и неположительные (т.е. $\Delta_j < 0$) для задач на минимум. Если условие оптимальности не выполняется, то решение не является оптимальным и его необходимо улучшить, перейдя к новому плану, которому соответствует большее (меньшее) значение целевой функции.

Шаг 3. Определение разрешающего (ключевого) столбца и разрешающей (ключевой) строки.

Из отрицательных оценок (для задач на максимум) или положительных оценок (для задач на минимум) выбираем наибольшую по абсолютной величине оценку:

$$\Delta_k = \max\left|\Delta_j\right|, \;\; j = \overline{1,(n+m)}\,.$$

Она будет определять разрешающий столбец (с номером k), который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные переменные.

Далее определяем минимальное симплексное отношение:

$$\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right), \;\; a_{ik} > 0\,.$$

Если этот минимум – конечное число, то строка, где этот минимум достигается, называется разрешающей (с номером s). Она определяет ту переменную, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной. Если конечный минимум достигается в нескольких строках, то за разрешающую строку можно принять любую из них. При этом в новом опорном плане значения некоторых базисных переменных с помощью преобразований станут равны 0, т.е. будет получен вырожденный опорный план.

Элемент симплекс-таблицы a_{sk}, находящийся на пересечении разрешающих столбца и строки, называется разрешающим элементом.

Шаг 4. Построение нового опорного плана.

Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплекс-таблицы.

Правила формирования новой симплекс-таблицы:

1) в столбцах «*БП*» и «c_i» в s-й строке записываем x_k и c_k

2) в столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1 - против «своей» базисной переменной; 0 - против «чужой» базисной переменной; 0 в последней строке для всех базисных переменных;

3) новую строку с номером s получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{sk}:

$$b_s^{'} = \frac{b_s}{a_{sk}}; \quad a_{sj}^{'} = \frac{a_{sj}}{a_{sk}}, \quad j = \overline{1,(n+m)}.$$

4) все остальные элементы новой таблицы вычисляем по правилу «прямоугольника»:

$$b_i^{'} = b_i - \frac{b_s \cdot a_{ik}}{a_{sk}}; \quad a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{sj} \cdot a_{ik}}{a_{sk}};$$

$$F(\overline{x})^{'} = F(\overline{x}) - \frac{b_s \cdot \Delta_k}{a_{sk}}; \quad \Delta_j^{'} = \Delta_j - \frac{a_{sj} \cdot \Delta_k}{a_{sk}}.$$

Шаг 5. Выполнение шага 2. И так далее, пока не будет найдено оптимальной решение.

При решении задач ЛП симплексным методом возможны следующие варианты, характеризующиеся определенными признаками:

1) признак альтернативности решения (задача имеет бесконечное множество оптимальных планов) - в симплексной таблице среди оценочных коэффициентов Δ_j небазисных переменных есть нулевые;

2) признак вырожденности решения – в симплексной таблице хотя бы один из свободных членов равен нулю;

3) признак неограниченности целевой функции (целевая функция не ограничена на области допустимых решений) – в разрешающем столбце среди a_{ik} отсутствуют строго положительные элементы;

4) признак несовместности системы ограничений – в симплексной таблице все элементы одной из строк, кроме свободного члена, отрицательные.

Пример 4. Для производства четырех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ используются три вида ресурсов. Затраты каждого из видов ресурсов на ед. продукции, запасы ресурсов и прибыль, получаемая с ед. продукции каждого вида, приведены в таблице 2.5.

Определить план производства, при котором обеспечивается максимальная прибыль.

Таблица 2.5

Ресурсы	Норма расхода ресурса на ед. продукции				Запас ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Оборудование	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	-

Решение. Обозначим через x_1 план производства продукции $П_1$, x_2 - продукции $П_2$, x_3 - продукции $П_3$, x_4 - продукции $П_4$.

Математическая модель задачи:

$$F(\bar{x}) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого в ограничения задачи введем дополнительные переменные x_5, x_6, x_7 и перепишем условие задачи в виде уравнений:

$$F(\bar{x}) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + x_7 = 100, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

В качестве базисных переменных возьмем x_5, x_6, x_7, тогда небазисные – x_1, x_2, x_3, x_4. Полагаем $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, тогда $x_5 = 16$, $x_6 = 110$, $x_7 = 100$.

1-я итерация.

Составляем первую симплексную таблицу, соответствующую исходному опорному решению (таблица 2.6):

$$\bar{x}_1 = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 16,\ x_6 = 110,\ x_7 = 100) \text{ или}$$

$$\bar{x}_1 = (0, 0, 0, 0, 16, 110, 100).$$

Таблица 2.6

c_i	БП	60	70	120	130	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1	1	1	1	1	0	0	16
0	x_6	6	5	4	3	0	1	0	110
0	x_7	4	6	10	13	0	0	1	100
Δ_j		- 60	- 70	-120	-130	0	0	0	0

Все строки таблицы, за исключением индексной, заполняем по данным системы ограничений и целевой функции. Элементы последней строки рассчитываем:

$$F(\overline{x}_1) = 0\cdot 16 + 0\cdot 110 + 0\cdot 100 = 0;$$

$$\Delta_1 = (0\cdot 1 + 0\cdot 6 + 0\cdot 4) - 60 = -60,$$

$$\Delta_2 = (0\cdot 1 + 0\cdot 5 + 0\cdot 6) - 70 = -70,$$

$$\Delta_3 = (0\cdot 1 + 0\cdot 4 + 0\cdot 10) - 120 = -120,$$

$$\Delta_4 = (0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 0\cdot 13) - 130 = -130,$$

$$\Delta_5 = (0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0) - 0 = 0 \text{ и т.д.}$$

В индексной строке четыре отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве разрешающего столбца следует принять столбец переменной x_4:

$$\Delta_k = \max\{|-60|;|-70|;|-120|;|-130|\} = 130, \text{ т.е. } k = 4.$$

За разрешающую строку принимаем строку переменной x_7:

$$\min\{16/1; 110/3; 100/13\} = 7,7, \text{ т.е. } s = 3.$$

Разрешающим является элемент a_{34}=13, т.е. вводим в базис переменную x_4, выводим x_7.

2-я итерация.

Формируем следующую симплексную таблицу (таблица 2.7), пересчитывая предыдущую по изложенному выше правилу формирования новой симплекс-таблицы.

Таблица 2.7

c_i	БП	60	70	120	130	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	9/13	7/13	3/13	0	1	0	- 1/13	108/13
0	x_6	66/13	47/13	22/13	0	0	1	- 3/13	1130/13
130	x_4	4/13	6/13	10/13	1	0	0	1/13	100/13
Δ_j		- 20	- 10	- 20	0	0	0	10	1000

Из таблицы 2.7 находим опорный план:

$$\overline{x}_2 = (0, 0, 0, 100/13, 108/13, 1130/13, 0), \quad F(\overline{x}_2) = 1000.$$

В индексной строке таблицы 2.7 имеется три отрицательные оценки. Полученное решение можно улучшить. Разрешающим элементом является a_{11}=9/13.

3-я итерация.

Формируем следующую симплексную таблицу (таблица 2.8).

Из таблицы 2.8 находим опорный план:

$$\bar{x}_3 = (12, 0, 0, 4, 0, 26, 0), \ F(\bar{x}_3) = 1240.$$

Таблица 2.8

c_i	БП	60	70	120	130	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
60	x_1	1	7/9	1/3	0	13/9	0	- 1/9	12
0	x_6	0	-1/3	0	0	- 22/3	1	1/3	26
130	x_4	0	2/9	2/3	1	- 4/9	0	1/9	4
Δ_j		0	50/9	-40/3	0	260/9	0	70/9	1240

В индексной строке таблицы 2.8 имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Разрешающим элементом является a_{33}=2/3.

4-я итерация.

Формируем следующую симплексную таблицу (таблица 2.9).

Таблица 2.9

c_i	БП	60	70	120	130	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
60	x_1	1	2/3	0	- 1/2	5/3	0	- 1/6	10
0	x_6	0	- 1/3	0	0	- 22/3	1	1/3	26
120	x_3	0	1/3	1	3/2	- 2/3	0	1/6	6
Δ_j		0	10	0	20	20	0	10	1320

Из таблицы 2.9 находим опорный план:

$$\bar{x}_4 = (10, 0, 6, 0, 0, 26, 0), \ F(\bar{x}_4) = 1320.$$

Так как все оценки свободных переменных положительные, найденное решение является оптимальным:

$$\bar{x}^* = (x_1 = 10, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 26, x_7 = 0),$$

$$F(\bar{x}^*) = 1320.$$

Максимальная прибыль составит 1320 ден. ед., при этом необходимо произвести 10 ед. продукции $П_1$ и 6 ед. продукции $П_3$. В оптимальном плане резервы трудовых ресурсов и оборудования равны нулю (x_5=x_7=0), так как они используются полностью. А резерв ресурсов сырья x_6=26, что свидетельствует о его излишках.

Увеличение количества трудовых ресурсов на 1 ед. приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства продукции, при котором общая прибыль возрастет на 20 д. е. и станет равной 1320 + 20 = 1340 д. е. Анализ полученных оптимальных значений новой прямой задачи показывает, что это увеличение общей прибыли достигается за счет увеличения производства продукции $П_1$ на 1,67 ед. (5/3) и сокращения выпуска продукции $П_3$ на 0,67 ед. (2/3) (таблица 2.9). Вследствие этого использование ресурса сырья увеличивается на 7,33 ед. (22/3).

Точно так же увеличение на 1 ед. количества оборудования позволит перейти к новому оптимальному плану производства, при котором прибыль возрастет на 10 д. е. и составит 1330 д. е., что достигается за счет уменьшения выпуска продукции $П_1$ на 0,17 ед. и увеличения выпуска продукции $П_3$ на 0,17 ед., причем объем используемого ресурса сырья уменьшается на 0,33 ед.

2.3. Симплексный метод с искусственным базисом (М-метод)

При решении задач линейного программирования симплексным методом иногда бывает достаточно сложно найти исходное опорное решение (в задачах, ограничения которых заданы неравенствами типа «≥» или равенствами). В этом случае применяют метод искусственного базиса (М-метод), который позволяет избежать затруднений, связанных с нахождением исходного опорного решения.

Алгоритм метода искусственного базиса

Шаг 1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

Шаг 2. Построить М-задачу. Для этого в каждое уравнение системы ограничений, не имеющее естественную базисную переменную, необходимо ввести искусственную переменную с коэффициентом 1, не меняя знак равенства. Искусственные переменные также вводятся и в целевую функцию с коэффициентом –М (если решается задача на максимум) или +М (если решается задача на минимум), где М - сколь угодно большое число.

Шаг 3. Выписать исходное опорное решение.

Шаг 4. Заполнить первую симплексную таблицу. При применении к М-задаче симплекс-метода оценки Δ_j теперь будут зависеть от «буквы М».

Шаг 5. Решить М-задачу симплексным методом. Критерий оптимальности проверяется по индексной строке так же, как и в обычном симплекс-методе. При сравнения оценок нужно помнить, что М - достаточно большое положительное число, поэтому из базиса в первую очередь будут выводиться искусственные переменные.

Учесть следующие возможные случаи:

а) если в оптимальном решении М-задачи все искусственные переменные равны 0, то соответствующее решение исходной задачи являет оптимальным;

б) если в оптимальном решении М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных не равна 0, то исходная задача не имеет оптимального решения из-за несовместности системы ограничений;

в) если М-задача не имеет оптимального решения, то исходная задача также не имеет оптимального решения.

Если искусственная переменная выводится из базиса, то в дальнейших расчетах она не участвует, то есть соответствующий ей столбец не пересчитывается.

Шаг 6. Когда все искусственные переменные будут выведены из базиса, а в индексной строке Δ_j не будет «буквы М», завершить решение задачи обычным симплексным методом.

Пример 5. Решить задачу линейного программирования:

$$F(\bar{x}) = 10x_1 - 5x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Домножив неравенство $x_1 + 2x_2 \geq -1$ на (-1), получим: $-x_1 - 2x_2 \leq 1$.

Приведем задачу к каноническому виду, перейдя к задаче на максимум:

$$F(\bar{x}) = -10x_1 + 5x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Для нахождения исходного опорного плана переходим к М-задаче:

$$F(\bar{x}, \bar{z}) = -10x_1 + 5x_2 - Mz_1 - Mz_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + z_1 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_4 + z_2 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = 1, \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0,\ \ z_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Дальнейшее решение проводим в симплексных таблицах (таблица 2.10).

Таблица 2.10

c_i	*БП*	- 10	5	0	0	0	- *M*	- *M*	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z_1	z_2	
- M	z_1	2	- 1	- 1	0	0	1	0	3
- M	z_2	1	1	0	- 1	0	0	1	2
0	x_5	- 1	- 2	0	0	1	0	0	1
Δ_j		-3M+10	- 5	M	M	0	0	0	- 5M
- 10	x_1	1	-1/2	-1/2	0	0		0	3/2
- M	z_2	0	3/2	1/2	-1	0		1	1/2
0	x_5	0	-5/2	-1/2	0	1		0	5/2
Δ_j		0	-3M/2	-M/2+5	M	0		0	-M/2-15
- 10	x_1	1	0	-1/3	-1/3	0			5/3
- 5	x_2	0	1	1/3	-2/3	0			1/3
0	x_5	0	0	0	-5/3	1			10/3
Δ_j		0	0	5	0	0			-15

В третьей симплекс-таблице получен опорный план исходной задачи ЛП.

Поскольку все оценки $\Delta_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}$, то это решение является и оптимальным, т.е. x_1=5/3, x_2=1/3 (основные переменные), x_3=0, x_4=0, x_5=10/3 (дополнительные переменные), при этом $\min F(\bar{x}) = -\max F(\bar{x}) = -(-15) = 15.$

2.4. Решение задач линейного программирования в табличном процессоре MS Excel

Для решения задач ЛП в Excel имеется надстройка *Поиск решения*, которая вызывается щелчком по вкладке ленты «Данные».

Если на вкладке «Данные» отсутствует команда *Поиск решения*, значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите из контекстного меню команду *Настройка панели быстрого доступа* => *Надстройки* => *Пакет анализа* => кнопка *Перейти* и активизируйте надстройку *Поиск решения*. Если же этой надстройки нет в диалоговом окне «Надстройки», то вам необходимо обратиться к панели управления Windows, щелкнуть на пиктограмме *Установка и удаление программ* и с помощью программы установки Excel (или Office) установить надстройку *Поиск решения*.

После выбора команды *Поиск решения* появится диалоговое окно «Поиск решения».

<u>Алгоритм решения задач ЛП в MS Excel 2007</u>

Шаг 1. Ввести условие задачи:

1) создать экранную форму для ввода условия задачи и ввести исходные данные (коэффициенты целевой функции, коэффициенты при переменных в ограничениях, правые части ограничений);

2) ввести зависимости из математической модели в экранную форму (формулу для расчета целевой функции, формулы для расчета значений левых частей ограничений);

3) задать целевую функцию (в окне «Поиск решения»): целевую ячейку, направление оптимизации целевой функции;

4) ввести ограничения (в окне «Поиск решения»): ячейки со значениями переменных, соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

Шаг 2. Решить задачу:

1) установить параметры решения задачи (в окне «Поиск решения»);

2) запустить задачу на решение (в окне «Поиск решения»);

3) выбрать формат вывода решения (в окне «Результаты поиска решения»).

Рассмотрим использование данного пакета для решения конкретного примера.

Пример 7.

Решение. Экономико-математическая модель задачи:

$$F(\bar{x}) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

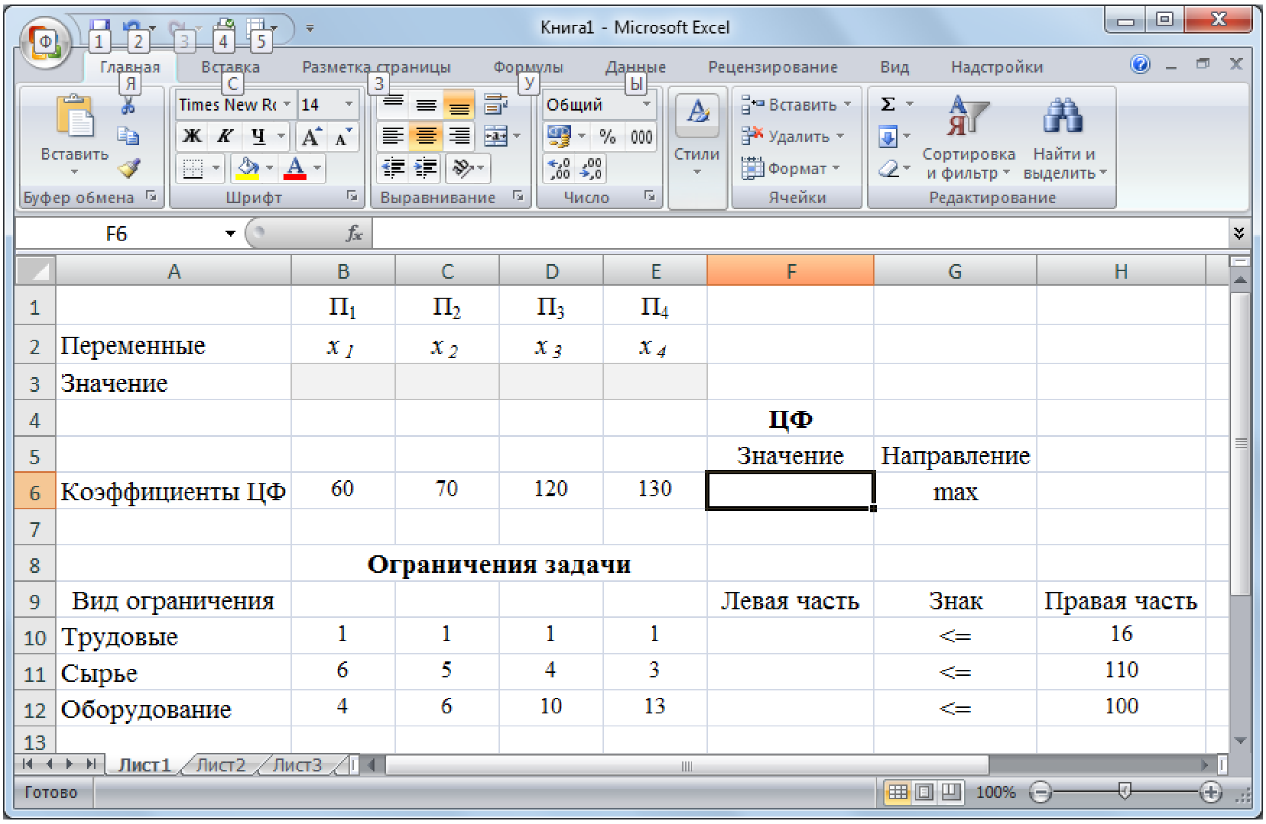
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Ввод исходных данных:

1) создание экранной формы и ввод в нее условия задачи.

Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 2.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		П1	П2	П3	П4			
2	Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4			
3	Значение							
4						**ЦФ**		
5						Значение	Направление	
6	Коэффициенты ЦФ	60	70	120	130		max	
7								
8			**Ограничения задачи**					
9	Вид ограничения					Левая часть	Знак	Правая часть
10	Трудовые	1	1	1	1		<=	16
11	Сырье	6	5	4	3		<=	110
12	Оборудование	4	6	10	13		<=	100
13								

Рисунок 2.1 – Экранная форма задачи

2) ввод зависимостей из математической модели в экранную форму:

а) зависимость для целевой функции. В ячейку F6, в которой будет отображаться значение целевой функции, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано: $60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4$.

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel, эту формулу для расчета целевой функции можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов целевой функции (ЦФ) (B6, C6, D6, E6), т.е. необходимо в ячейку F6 вставить функцию СУММПРОИЗВ. В диалоговом окне Аргументы функции в строку Массив 1 ввести B3:E3, в строку Массив 2 ввести B6:E6. Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку (рис. 2.2). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение).

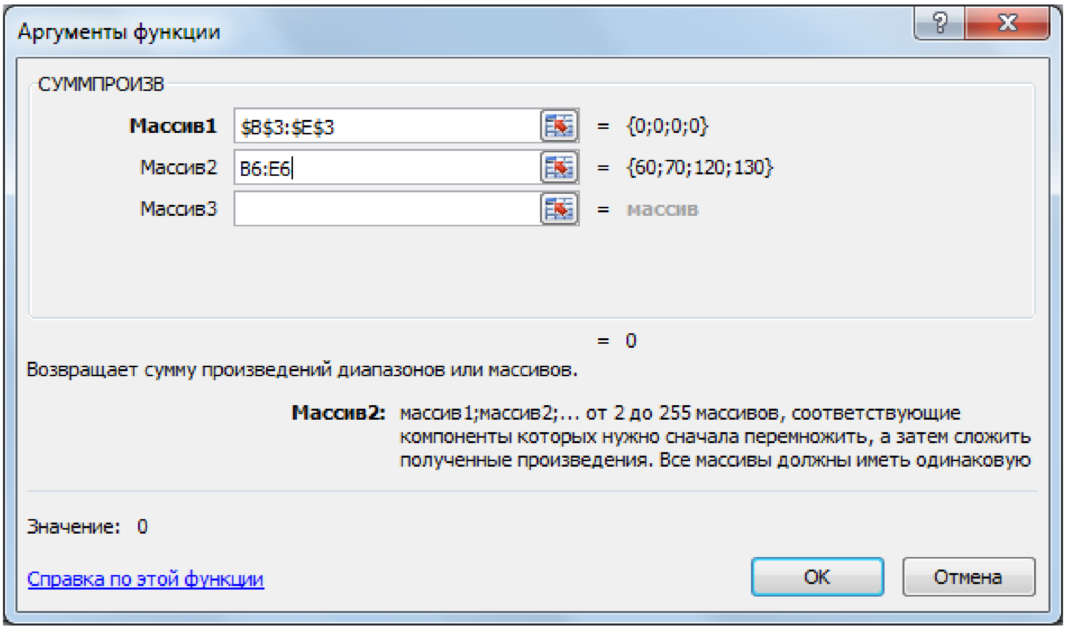


Рисунок 2.2 – Окно «Аргументы функции»

б) зависимости для левых частей ограничений. Левые части ограничений задачи представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – ограничение 1; B11, C11, D11, E11 – ограничение 2; B12, C12, D12, E12 – ограничение 3). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 2.14.

Таблица 2.14

Левая часть ограничения	Формула Excel
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ или B10·B3+C10·C3+D10·D3+E10·E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)
$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$ или B11·B3+C11·C3+D11·D3+E11·E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)
$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4$ или B12·B3+C12·C3+D12·D3+E12·E3	=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)

На экране в полях F10, F11 и F12 появится 0 (рис. 2.3).

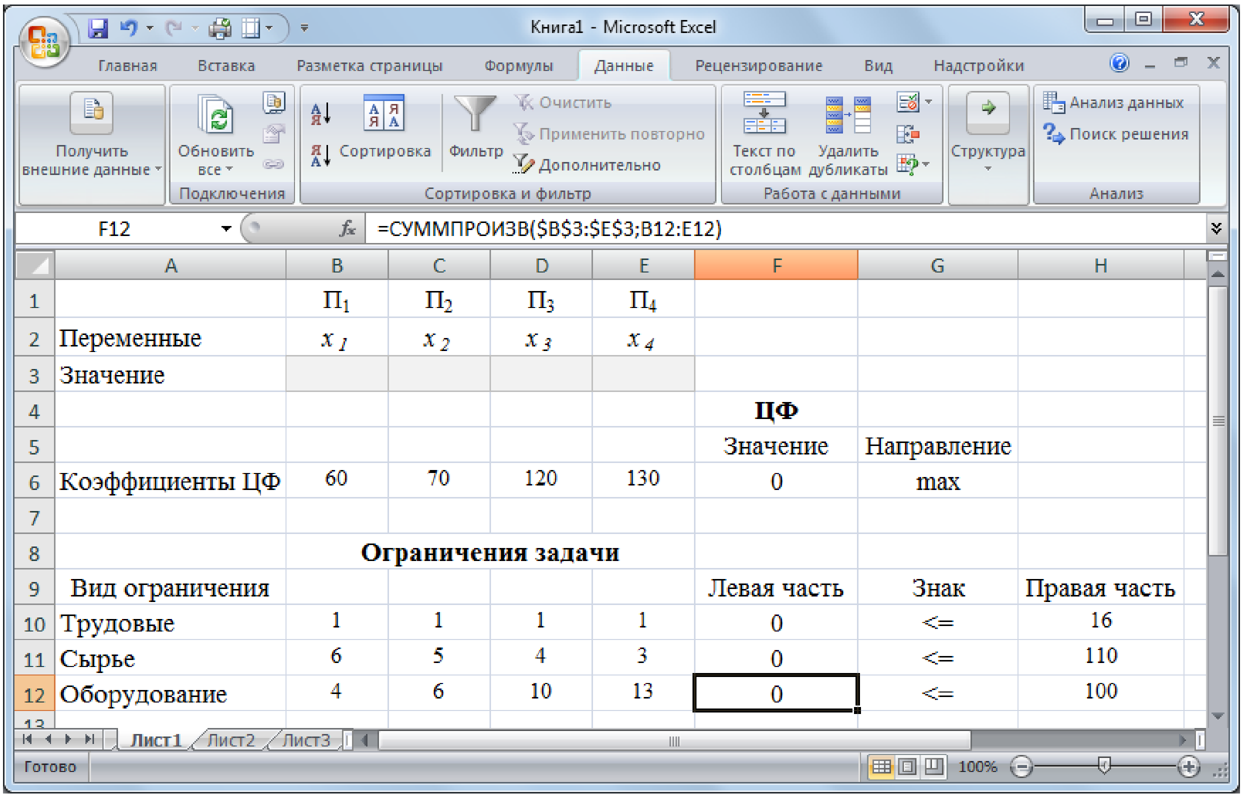


Рисунок 2.3 – Экранная форма после ввода всех необходимых формул

в) проверка правильности введения формул. Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши при указании на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 2.4);

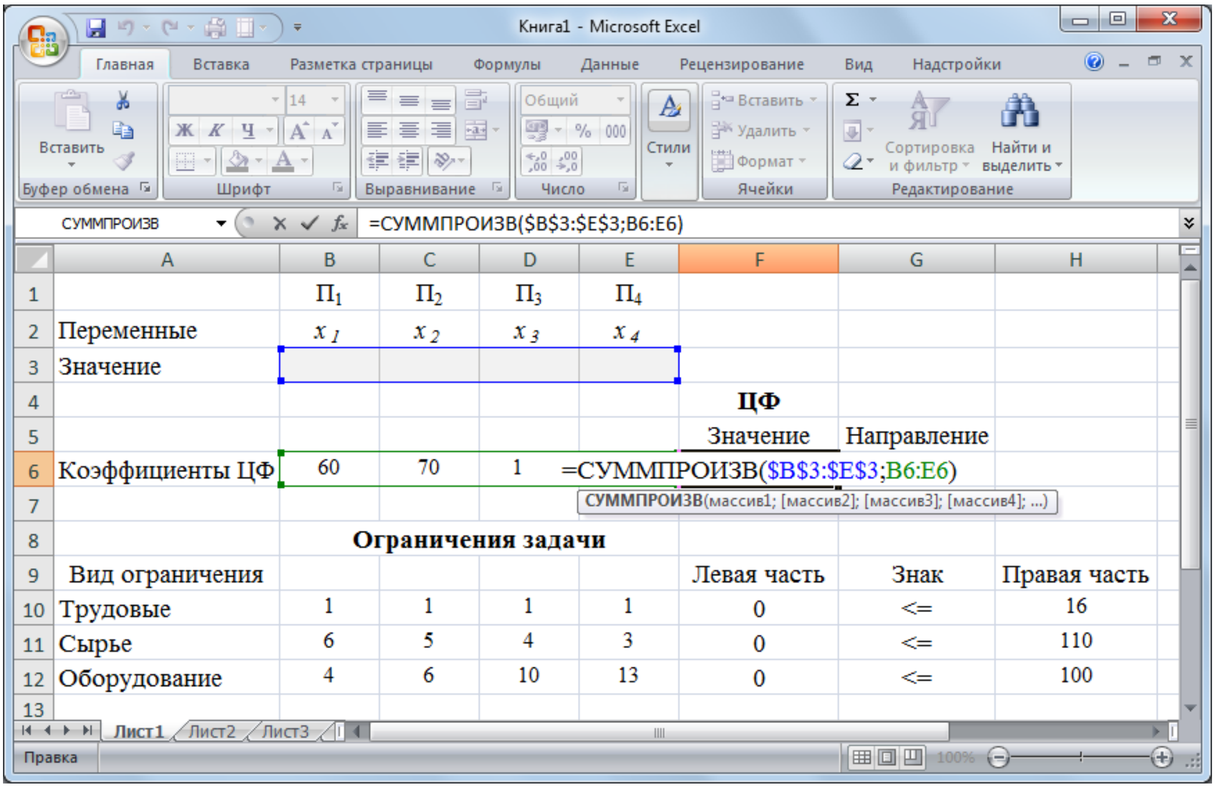


Рисунок 2.4 – Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку

3) задание ЦФ. Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения» (рис. 2.5):

а) поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;

б) введите адрес целевой ячейки $F$6;

в) введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «максимальному значению»;

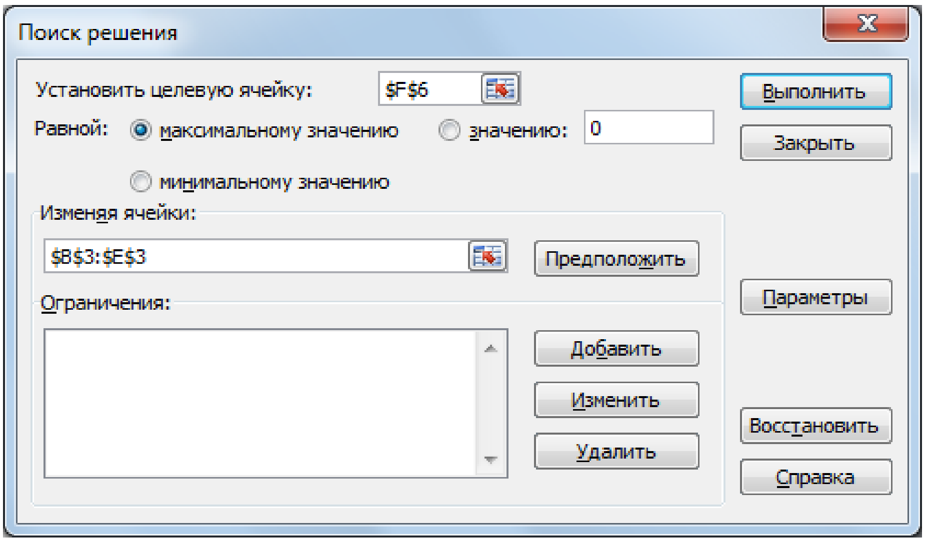


Рисунок 2.5. - Окно «Поиск решения»

4) ввод ограничений:

а) задание ячеек переменных. В окно «Поиск решения» (рис. 2.5) в поле «Изменяя ячейки» введите адреса $B$3:$E$3.

В поле «Изменяя ячейки» указываются ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке.

б) задание ограничений. Нажмите кнопку *Добавить* в окне «Поиск решения». Появляется диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. 2.6). В поле «Ссылка на ячейку» введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например $F$10. В соответствии с условием задачи выберите необходимый знак, например «<=». В поле «Ограничение» введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например, $H$10.

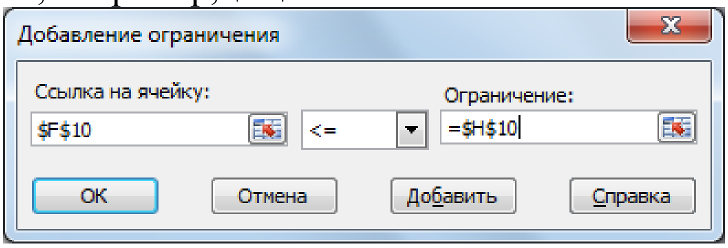


Рисунок 2.6 – Окно «Добавление ограничения»

Аналогично введите остальные ограничения: $F$11<=$H$11, $F$12<=$H$12. После введения последнего ограничения нажать на кнопку ОК. На экране появится диалоговое окно «Поиск решения» с введенными условиями (рис. 2.7).

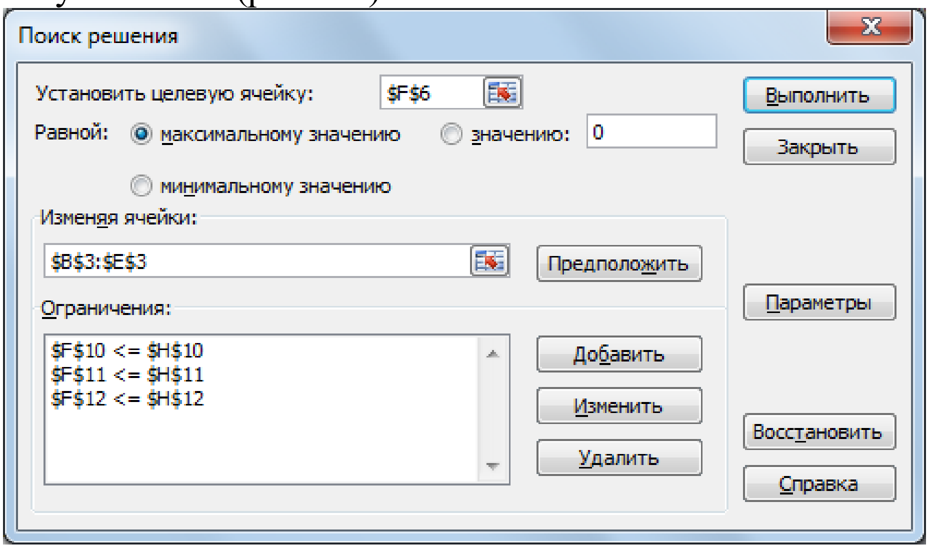


Рисунок 2.7 - Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений, то это делают, щелкнув по кнопкам *Изменить* или *Удалить*.

Шаг 2. Решение задачи:

1) установка параметров решения задачи. Задача запускается на решение в окне «Поиск решения», но предварительно, для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса, необходимо нажать на кнопку *Параметры* и заполнить некоторые поля окна «Параметры поиска решения» (рис. 2.8).

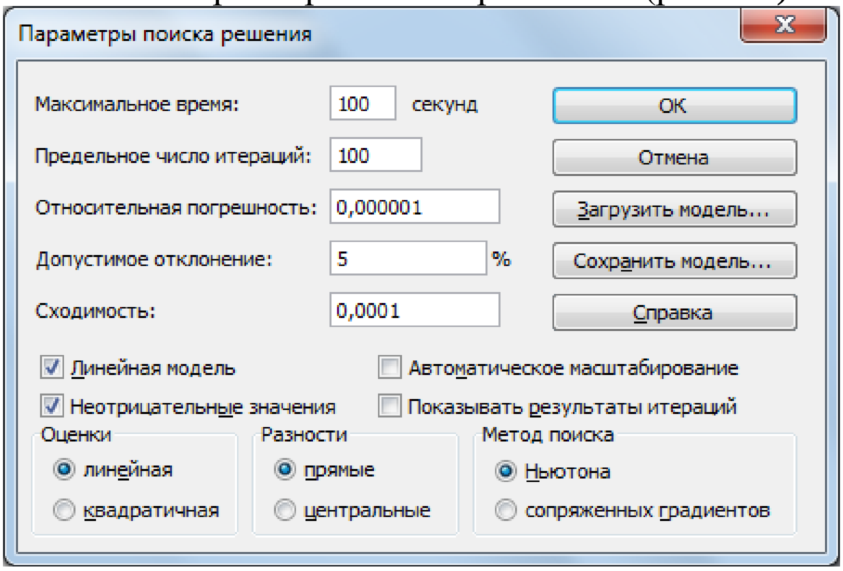


Рисунок 2.8 – Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр «Максимальное время» служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32767 с (более 9 ч).

Параметр «Предельное число итераций» служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32767.

Параметр «Относительная погрешность» служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем меньше количество десятичных знаков во введенном числе, тем ниже точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется, для того чтобы завершился процесс оптимизации.

Параметр «Допустимое отклонение» служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах.

Параметр «Сходимость» применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка «Линейная модель» обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода;

Установка флажка «Неотрицательные значения» обеспечивает выполнение условия неотрицательности, накладываемого на переменные.

2) запуск задачи на решение. Запуск задачи на решение производится из окна «Поиск решения» путем нажатия на кнопку *Выполнить*. После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно «Результаты поиска решения» с сообщением о найденном решении (рис. 2.9).

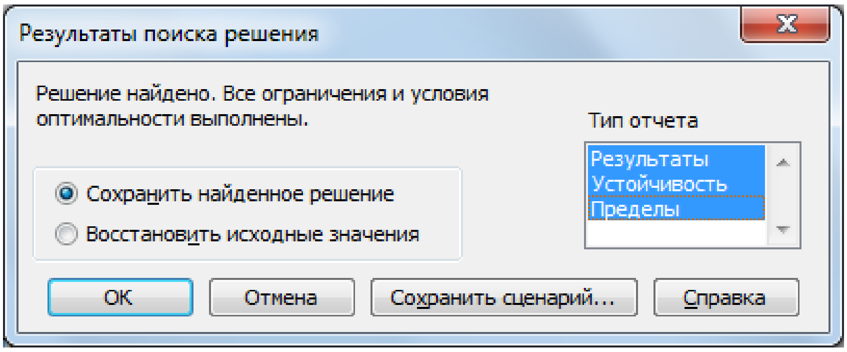
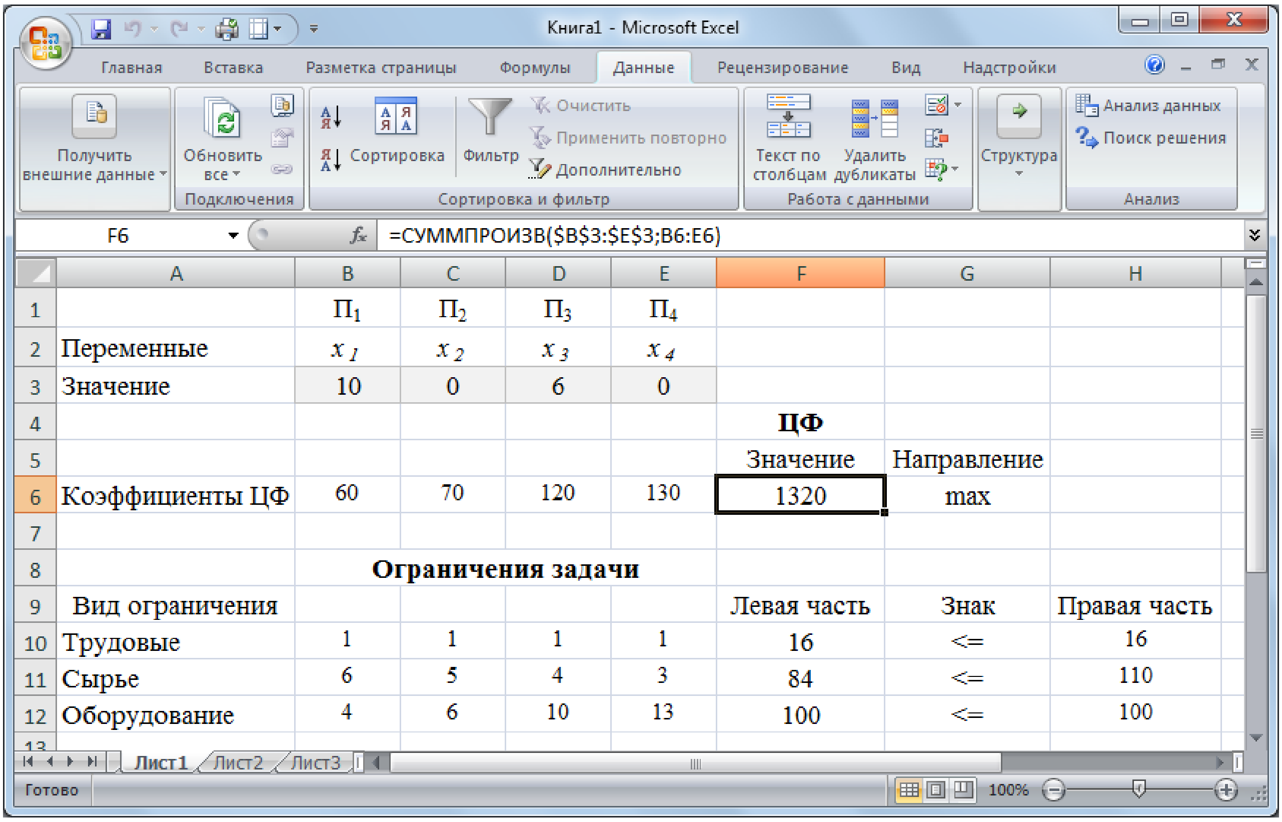


Рисунок 2.9 – Сообщение об успешном решении задачи

Иногда сообщения свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены ошибки, не позволяющие найти оптимальное решение, которое в действительности существует. Например, сообщение «Поиск не может найти подходящего решения» выводится при несовместной системе ограничений задачи; сообщение «Значения целевой ячейки не сходятся» выводится при неограниченности целевой функции в требуемом направлении.

Если при заполнении полей окна «Поиск решения» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено.

В окне «Результаты поиска решения» представлены названия трех типов отчетов: Результаты, Устойчивость, Пределы. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения ответа (значений переменных, целевой функции и левых частей ограничений) прямо в экранной форме нажмите на кнопку *ОК*. После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 2.10).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		П$_1$	П$_2$	П$_3$	П$_4$			
2	Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4			
3	Значение	10	0	6	0			
4						**ЦФ**		
5						Значение	Направление	
6	Коэффициенты ЦФ	60	70	120	130	1320	max	
7								
8		**Ограничения задачи**						
9	Вид ограничения					Левая часть	Знак	Правая часть
10	Трудовые	1	1	1	1	16	<=	16
11	Сырье	6	5	4	3	84	<=	110
12	Оборудование	4	6	10	13	100	<=	100

Рисунок 2.10 – Экранная форма после получения решения

Анализ оптимального решения с использованием MS Excel

Excel позволяет представить результаты поиска решения в форме отчета. Существует три типа таких отчетов:

1. *Результаты*. В отчет включаются исходные и конечные значения целевой и изменяемых ячеек, дополнительные сведения об ограничениях.

2. *Устойчивость*. Отчет, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в изменяемых ячейках или в формулах ограничений.

3. *Пределы*. Помимо исходных и конечных значений изменяемых и целевой ячеек, в отчет включаются верхние и нижние границы значений, которые могут принимать влияющие ячейки при соблюдении ограничений.

Для того чтобы получить отчеты для анализа оптимального решения, необходимо в окошке «Результаты поиска решения» добавить типы отчетов: Результаты, Устойчивость, Пределы (рис. 2.9).

В отчете по результатам (рис. 2.11) приведены сведения о целевой функции, значениях искомых переменных и результаты анализа оптимального решения для ограничений. В данном отчете в графах «Результат» выводятся значения целевой функции и оптимального плана, а также значения исходного опорного плана (графа «Исходное значение»).

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$5	Коэффициенты ЦФ Значение	0	1320

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	Значение x1	0	10
$C$2	Значение x2	0	0
$D$2	Значение x3	0	6
$E$2	Значение x4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$9	Труд Левая часть	16	$F$9<=$H$9	связанное	0
$F$10	Сырье Левая часть	84	$F$10<=$H$10	не связан.	26
$F$11	Оборудование Левая часть	100	$F$11<=$H$11	связанное	0

Рисунок 2.11 – Отчет по результатам

Для ограничений в столбце «Формула» приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно «Поиск решения»; в столбце «Разница» показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в столбце «Статус» указывается «связанное» (дефицитный ресурс); При неполном использовании ресурса в этом столбце указывается «не связанное» (недефицитный ресурс).

Отчет по устойчивости выводится в следующей форме (рис. 2.12).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Значение x1	10	0	60	40	12
$C$2	Значение x2	0	-10	70	10	1E+30
$D$2	Значение x3	6	0	120	30	13,33333333
$E$2	Значение x4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$9	Труд Левая часть	16	20	16	3,545454545	6
$F$10	Сырье Левая часть	84	0	110	1E+30	26
$F$11	Оборудование Левая часть	100	10	100	60	36

Рисунок 2.12 – Отчет по устойчивости

В первой таблице этого отчета выводится следующая информация:

- в первых двух столбцах перечислены ячейки, в которых вычисляются значения переменных, и их имена;

- в столбце «Результ. значение» - найденное оптимальное решение;

- в столбце «Нормир. стоимость» - двойственные оценки основных переменных. Такая оценка может быть отлична от 0 только для нулевой переменной и показывает, на какую величину в целевой функции следует изменить коэффициент этой переменной, чтобы в оптимальном плане она приняла положительное значение (например, на сколько увеличить цену изделия, чтобы его производить стало выгодно). Кроме того, эта оценка показывает, на какую величину ухудшится значение целевой функции, если уйти от оптимального плана, добавив в него единицу соответствующей продукции;

- в столбце «Целевой коэффициент» - коэффициенты целевой функции;

- в последних двух столбцах - допустимые приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется прежнее оптимальное решение.

Во второй таблице (рис. 2.12) выводится следующая информация:

- в первых двух столбцах перечислены ячейки, в которых вычисляются левые части ограничений, и их имена;

- в столбце «Результ. значение» - значения левых частей ограничений (для ограничений на ресурсы - их использованное количество, для граничных условий - значение переменных в оптимальном плане);

- в столбце «Теневая цена» - двойственные оценки, показывающие, на какую величину изменится целевая функция при увеличении на 1 ед. правой части ограничения, тогда как остальные данные неизменны (в частности, при добавлении единицы соответствующего ресурса). Теневая цена - это максимальная цена, которую стоит платить за дополнительное количество дефицитного ресурса, чтобы его приобретение было выгодным;

- в столбце «Ограничение. Правая часть» - правые части ограничений;

- в последних двух столбцах - допустимые приращения правых частей ограничений, при которых неизменны соответствующие теневые цены и в оптимальном решении сохраняется прежний набор ненулевых переменных.

В последней симплексной таблице оценочные коэффициенты Δ_j дополнительных переменных – это «Теневая цена»; оценки Δ_j основных переменных – это «Нормир. стоимость».

Отчет по пределам изменений представлен на рис. 2.13.

	Целевое	
Ячейка	Имя	Значение
$F$5	Коэффициенты ЦФ Значение	1320

	Изменяемое		Нижний	Целевой	Верхний	Целевой
Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат
$B$2	Значение x1	10	0	720	10	1320
$C$2	Значение x2	0	0	1320	2,36848E-15	1320
$D$2	Значение x3	6	0	600	6	1320
$E$2	Значение x4	0	0	1320	1,09314E-15	1320

Рис. 2.13 – Отчет по пределам

В отчете показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции (графы «Нижний предел» и «Верхний предел»), вошедший в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения. Там же даны соответствующие оптимальные значения целевой функции (графа «Целевой результат»).

Контрольные задания

Задание 1. Построить экономико-математическую модель и найти оптимальное решение задачи в симплексных таблицах и с помощью MS Excel. Провести экономический анализ полученных результатов.

1. Мебельная фабрика производит комоды и шкафы. Цена одного изделия: шкаф – 8 тыс. руб., комод – 6 тыс. руб. Расход ресурсов на производство одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов приведены в табл. 2.15.

Таблица 2.15

Ресурс	Расход на производство 1 ед. изделия		Общее количество ресурсов
	комод	шкаф	
Дуб, м^3	0,2	0,1	40
Сосна, м^3	0,1	0,3	45
Трудоемкость, чел.-ч	1,2	1,5	360

Считая, что сбыт готовой продукции, обеспечен, определить: сколько комодов и шкафов следует изготовить фабрике, чтобы доход от их реализации был максимальным. Также ответить на следующие вопросы: а) как изменится решение, если запас дуба увеличится на 10 м^3; б) изменится ли решение, если цена одного комода вырастет на 1 тыс. руб.?

2. Для производства двух сортов мороженого (сливочного и молочного) комбинат использует сахар и сливки. Затраты этих продуктов и их суточные запасы приведены в табл. 2.16. Цена реализации 1 кг сливочного мороженого - 75 руб., молочного - 60 руб.

Таблица 2.16

Ресурс	Расход на производство 1 кг мороженого		Общий запас ресурсов
	молочное	сливочное	
Сливки, кг	0,2	0,1	160
Сахар, кг	0,2	0,4	240
Трудоемкость, чел.-ч	2	3	1800

Считая, что сбыт мороженого полностью обеспечен, сколько сливочного и молочного мороженого должен выпускать в сутки комбинат, чтобы доход от реализации был максимальным? Также ответить на следующие вопросы: а) если фонд рабочего времени снизится на 300 чел.-ч., как это повлияет на решение? б) если цена 1 кг молочного мороженого возрастет до 90 руб., как это повлияет на определение суточного плана производства?

3. Для производства карамели двух видов А и В кондитерская фабрика использует сахар и фруктовое пюре. Нормы расхода этих продуктов, затраты труда на производство 1 кг карамели и общий запас производственных ресурсов указаны в табл. 2.17. Цена реализации 1 кг карамели А - 45 руб., В - 60 руб.

Таблица 2.17

Ресурс	Расход на производство 1 кг карамели		Общий запас ресурсов
	А	В	
Сахар, кг	0,2	0,6	180
Фруктовое пюре, кг	0,4	0,2	120
Трудоемкость, чел.-ч.	0,4	0,5	180

Считая, что сбыт обеспечен, определить, сколько карамели А и В надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным. Также ответить на следующие вопросы: а) если запас сахара увеличится до 200 кг, как это повлияет на решение? б) если цена 1 кг карамели вида А увеличится до 90 руб., как изменится решение?

4. Для выпуска двух сортов теста (бисквитное и песочное) кондитерская фабрика использует сахар и яйца. Расход этих ресурсов, а также затраты труда и общее количество имеющихся ресурсов приведены в табл. 2.18. Цена 1 кг теста: сорт 1 - 30 руб., сорт 2 - 20 руб. Считая, что сбыт теста полностью обеспечен, определить, сколько теста каждого сорта нужно производить, чтобы доход от реализации был максимальным.

Также ответить на следующие вопросы: а) если запас сахара снизится на 15 кг, как это повлияет на решение? б) если цена теста 1-го сорта увеличится до 40 руб. за 1 кг, как изменится оптимальное решение?

Таблица 2.18

Ресурс	Расход на производство 1 кг теста		Общий запас ресурсов
	сорт 1	сорт 2	
Яйца, шт.	5	2	1000
Сахар, кг	0,3	0,25	75
Трудоемкость, чел.-ч	0,25	0,5	125

5. Мебельная фабрика производит стулья и столы. Расход ресурсов на производство одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов приведены в табл. 2.19. Цена 1 ед. готовой продукции: стул – 18 тыс. руб., стол – 24 тыс. руб.

Таблица 2.19

Ресурс	Расход на производство 1 ед. изделия		Общее количество ресурсов
	стул	стол	
Древесина 1-й вид, $м^3$	1	3	360
Древесина 2-й вид, $м^3$	1	0,5	200
Трудоемкость, чел.-ч.	2,5	3	900

Считая, что сбыт готовой продукции обеспечен, определить, сколько стульев и столов надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным. Также ответить на следующие вопросы: а) если фонд рабочего времени снизится на 150 чел.-ч., как это повлияет на решение? б) если цена стула снизится на 10%, как изменится оптимальное решение?

6. Фабрика изготовляет краску двух видов: для внутреннего и наружного пользования, используя при этом сырье двух видов: А и В. Расход сырья на 1 т краски каждого вида и общее количество исходных продуктов приведены в табл. 2.20. Цена реализации 1 т краски: для внутреннего пользования – 30 тыс. руб., для наружного – 40 тыс. руб.

Установлено, что суточный спрос на краску для наружного пользования никогда не превышает 1,5 т. Определить, сколько краски каждого вида нужно производить фабрике, чтобы ее доход был максимальным. Также ответить на следующие вопросы: а) если запас сырья вида В снизится до 8 т, как это повлияет на выбор оптимального решения? б) если цена краски для наружного пользования вырастет до 50 тыс. руб. за 1 т, каким вследствие этого будет оптимальное решение?

Таблица 2.20

Сырье	Расход сырья на производство 1 т краски, т		Общий запас сырья
	для внутреннего пользования	для наружного пользования	
А	2	3	6
В	5	2	10

7. Составить математическую модель производства йогуртов молочным заводом по данным табл. 2.21. Найти оптимальный план производства йогурта, обеспечивающий максимальную выручку заводу от реализации. Цена 1 кг йогурта: сливочный - 50 руб., молочный - 30 руб. Также определить, как повлияет на решение изменение цены на молочный йогурт на 10%.

Таблица 2.21

Ресурс	Расход на производство 1 ед. йогурта		Объем ресурса
	сливочный	молочный	
Молочная закваска, кг	0,2	0,3	240
Сливки, кг	0,6	0,2	480
Оборудование, ч	1	0,3	900

8. Завод выпускает изделия двух типов: газовый котел и газовая колонка; при этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление 1 ед. продукции и запас сырья приведены в табл. 2.22. Цена одного готового газового котла – 9 тыс. руб., газовой колонки – 6 тыс. руб.

Таблица 2.22

Сырье	Расход сырья на производство 1 ед. изделия, кг		Запас сырья. кг
	газовый котел	газовая колонка	
I	2	3	21
II	1	0	4
III	0	1	6
IV	2	1	10

Считая, что сбыт готовой продукции полностью обеспечен, установить план производства газовых котлов и газовых колонок, обеспечивающий максимальный доход от реализации. Также определить: если цена одной газовой колонки возрастет до 7 тыс. руб., как это повлияет на выбор решения?

9. Фабрика выпускает два вида тканей: ситец и бязь. Суточные ресурсы фабрики: 600 ед. производственного оборудования, 800 ед. сырья и 600 ед. электроэнергии, расход которых на 1 м ткани представлен в табл. 2.23. Цена 1 м ситца равна 80 руб., бязи - 100 руб.

Таблица 2.23

Ресурс	Расход ресурса на производство 1 м ткани, ед.	
	ситец	бязь
Оборудование	2	3
Сырье	1	8
Электроэнергия	3	4

Установлено, что спрос на ткань первого вида никогда не превышает 180 м в сутки. Составить план производства тканей, при котором суточный доход фабрики будет максимальным. Также определить: если цена на ситец увеличится до 90 руб. за 1 м, то повлияет ли это на оптимальное решение?

10. Швейная фабрика выпускает юбки и брюки, используя имеющееся оборудование, электроэнергию и ткань. Расход ресурсов на производство 1 ед. продукции и запасы этих ресурсов приведены в табл. 2.24. Цена 1 ед. готовой продукции: юбка - 1000 руб., брюки - 1200 руб.

Таблица 2.24

Ресурс	Расход на производство одного изделия		Общий запас ресурсов
	юбка	брюки	
Обрудование, чел.-ч	2	3	600
Электроэнергия, кВт · ч	4	2,5	1000
Ткань, м	1,5	2	900

Зная, что суточный спрос на брюки никогда не превышает 150 шт., составить план производства швейной фабрики, обеспечивающий максимальный доход. Также определить: если цена одной юбки снизится до 900 руб., как это повлияет на выбор оптимального решения?

11. Три станка обрабатывают два вида деталей - А и В. Каждая деталь проходит обработку на всех трех станках. Известны: время обработки детали на каждом станке и время работы станков в течение одного цикла производства (табл. 2.25). Цена одной детали А – 4 тыс. руб., В – 6 тыс. руб.

Таблица 2.25

Станок	Время обработки одной детали, ч		Время работы станка за один цикл производства, ч
	А	В	
I	1	2	16
II	1	1	40
III	3	1	24

Составить план производства деталей А и В, обеспечивающий максимальный доход цеху. Также определить, как повлияет на решение: а) снижение цены детали В до 5 тыс. руб.; б) снижение времени работы третьего станка до 21 ч за один цикл производства?

12. Предприятие располагает ресурсами двух видов I и II в количестве 120 и 80 ед. соответственно. Эти ресурсы используют для выпуска продукции двух видов: $П_1$ и $П_2$. Расход на изготовление 1 ед. продукции $П_1$ составляет 2 ед. ресурса вида I и 2 ед. ресурса вида II; 1 ед. продукции $П_2$ - 3 ед. ресурса вида I и 1 ед. ресурса вида II. Цена 1 ед. продукции $П_1$ - 10 тыс. руб., продукции $П_2$ – 15 тыс. руб. Установлено, что спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает 22 ед. в сутки.

Составить план производства продукции обоих видов, максимизирующий доход предприятия. Также определить, как повлияет на решение: а) снижение спроса на продукцию $П_1$ до 15 ед. в сутки; б) снижение цены на продукцию $П_2$ до 8 тыс. руб.

13. Для производства трех изделий *A*, *B* и *C* используются три вида сырья. Каждый из видов сырья используется в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг соответственно. Нормы затрат каждого вида сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в табл. 2.26.

Таблица 2.26

Изделие	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Цена изделия, ден. ед.
	1-й вид сырья	2-й вид сырья	3-й вид сырья	
A	4	2	1	10
B	3	1	3	14
C	1	2	5	12

Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода. Также определить, как изменится решение при увеличении количества сырья 2 и 3 видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья 1 вида на – 10 кг.

14. Обработка деталей двух видов - А и В может производиться на трех станках, причем каждая деталь при изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом станке. Доход от реализации детали А составляет 10 тыс. руб., детали В - 16 тыс. руб. Исходные данные приведены в табл. 2.27.

Составить производственную программу, максимизирующую доход от реализации при условии, что спрос на детали В не превышает 200 шт. в сутки. Определить, фонд рабочего времени каких станков является излишним и на какую величину его можно уменьшить. Вычислить, увеличится ли доход от реализации, если фонд рабочего времени работы второго станка возрастет до 200 ч.

Таблица 2.27

Станок	Время обработки одной детали, ч		Время работы станка, ч
	A	B	
I	0,2	0,1	100
II	0,2	0,5	180
III	0,1	0,2	100

15. При продаже двух видов товаров А и В торговое предприятие использует четыре вида ресурсов. Расход ресурсов на реализацию 1 ед. товара и объем ресурсов приведены в таблице 2.28.

Доход от реализации 1 ед. товара А составляет 20 тыс. руб., товара В – 30 тыс. руб. Составить план реализации товара, обеспечивающий торговому предприятию максимальный доход. Также определить, как изменится решение при снижении цен на 10%.

Таблица 2.28

Ресурс	Расход на реализацию 1 ед. товара		Объем ресурсов на предприятии
	A	B	
I	2	2	12
II	1	2	8
III	4	0	16
IV	0	4	12

16. Хозяйство располагает следующими производственными ресурсами: площадь пашни - 600 га, количество человеко-дней труда - 4000. В табл. 2.29 приведена информация о данном хозяйстве.

Таблица 2.29

Ресурс	Расход ресурса	
	зерновые	кормовые
Труд, чел.-дн./га	5	10
Урожайность, ц/га	28	36

Определить наиболее эффективное сочетание зерновых и кормовых культур при условии, что под кормовые культуры должно быть занято не более 300 га пашни. Также вычислить, как повлияет на решение увеличение площади пашни до 800 га.

18. Фабрика по производству мягких игрушек выпускает собачек и мишек. Для их производства используются поролон и ткань. Расход этих материалов и их суточный запас приведены в табл. 2.30. Цена 1 ед. готовой продукции: собачка - 200 руб., мишка - 300 руб.

Установлено, что суточный спрос на игрушки не превышает 300 шт. Составить план производства фабрики игрушек, обеспечивающий максимальный доход от реализации. Также определить, как изменится решение, если: а) спрос на игрушки возрастет до 350 шт. в сутки; б) суточный запас поролона увеличится до 900 кг.

Таблица 2.30

Материал	Расход на производство одного изделия		Суточный запас материалов
	собачка	мишка	
Ткань, м	1	1,5	900
Поролон, кг	2	1	800

17. Определить оптимальный план производства мебели специализированным ателье по данным табл. 2.31, обеспечивающий максимальную выручку. Цена реализации 1 ед. продукции: стул - 900 руб., стол - 1500 руб. Также определить, как изменится решение при увеличении цены стула до 950 руб.

Таблица 2.31

Ресурс	Расход на производство 1 ед. продукции		Объем ресурсов
	стул	стол	
Древесина, кг	2,5	7,5	1250
Пластик, $м^2$	0,6	1,8	120
Трудоемкость, чел.-ч	2,4	3,6	1440

19. Найти оптимальный план производства мороженого городским хладокомбинатом, обеспечивающий наибольшую выручку от реализации мороженого (табл. 2.32). Цена 1 кг пломбира - 60 руб., крем-брюле — 55 руб. Также определить, как повлияет на решение снижение цены на крем-брюле до 45 руб.

Таблица 2.32

Ресурс	Расход на производство 1 кг продукции		Объем ресурса
	пломбир	крем-брюле	
Сливки, кг	0,6	0,4	360
Сахар, кг	0,4	0,3	240
Морозильник, ч	1	1,5	450

20. По данным таблицы 2.33 определить оптимальный план производства конфет кондитерской фабрикой «Заря», при котором фабрика получит наибольшую прибыль. Цена 1 кг конфет «Ромашка» - 90 руб., «Василек» - 120 руб. Также определить, как повлияет на решение изменение цены на конфеты «Василек» на 10%.

Таблица 2.33

Ресурс	Расход на производство 1 кг продукции		Объем ресурса
	«Ромашка»	«Василек»	
Сахар, кг	0,4	0,3	120
Шоколад, кг	0,3	0,5	150
Орехи, кг	0,3	0,2	120

Задание 2. Решить М-методом следующие задачи.

1. $F(\bar{x}) = 150x_1 + 35x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 150x_1 + 200x_2 \geq 200, \\ 14x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $F(\bar{x}) = 35x_1 + 50x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 200x_1 + 150x_2 \geq 200, \\ 14x_1 + 4x_2 \leq 14, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $F(\bar{x}) = 10x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 33, \\ x_1 + x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \ge 5, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $F(\bar{x}) = -3x_1 + 12x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $F(\bar{x}) = 3x_1 - x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ -5x_1 - 4x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $F(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

7. $F(\bar{x}) = -x_1 + 2x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $F(\bar{x}) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_4 = 8, \\ -x_1 + 4x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

9. $F(\bar{x}) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

10. $F(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

11. $F(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \le 16, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $F(\bar{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

13. $F(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

14. $F(\bar{x}) = 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

15. $F(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

16. $F(\bar{x}) = x_1 - 5x_2 - x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 \le 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

17. $F(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 \le 2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

18. $F(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

19. $F(\bar{x}) = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

20. $F(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Транспортная задача (задача оптимального планирования перевозок груза)

Имеется m пунктов отправления (производства, поставщиков): $A_1, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы некоего однородного груза в объемах $a_1, ..., a_m$ соответственно. Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Кроме того, имеется n пунктов назначения (потребления): $B_1 ..., B_n$, которые подали заявки на поставку груза в объемах $b_1, ..., b_n$ соответственно. Величины b_j определяют максимально возможные размеры ввоза груза в пункты назначения. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимость перевозки 1 ед. груза от поставщика A_i к потребителю B_j – c_{ij} ден. ед. (транспортный тариф).

Требуется разработать оптимальный план перевозок таким образом, чтобы общая стоимость всех перевозок груза была минимальной при условии, что весь груз от поставщиков будет вывезен и все заявки потребителей удовлетворены.

В общем виде модель задачи оптимального планирования перевозок груза можно записать следующим образом:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

где x_{ij} - количество однородного груза, перевозимого от поставщика A_i к потребителю B_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, необходимо составить такой план перевозки груза, при котором целевая функция (3.1) принимала бы наименьшее значение и выполнялись бы условия (3.2).

Любое неотрицательное решение системы ограничений (3.2), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$, называется допустимым планом транспортной задачи. Допустимый план транспортной задачи, имеющий не более $n+m-1$ отличных от 0 величин x_{ij}, называется опорным. Если в опорном плане число отличных от 0 компонент равно в точности $n+m-1$, то план является невырожденным; если меньше этого числа, то план является вырожденным.

Условия транспортной задачи можно записать в виде распределительной таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

A_i \ B_j		B_1	B_2	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

В моделях оптимального планирования перевозок груза должно выполняться балансовое равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (3.3)$$

Равенство (3.3) означает, что суммарный запас груза должен равняться суммарным потребностям. Модели, в которых выполняется балансовое равенство, называются закрытыми, в которых не выполняется - открытыми.

Уравнение баланса (3.3) выступает обязательным условием решения закрытой транспортной задачи; поэтому, когда в исходных условиях дана открытая задача, ее необходимо привести к закрытой форме.

Транспортные задачи могут решаться симплексным методом, однако перечисленные особенности позволяют применять для транспортных задач более простые методы решения.

Наиболее распространенным графо-аналитическим методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

<u>Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов</u>

Шаг 1. Проверка балансового равенства (3.3).

Шаг 2. Разработка исходного опорного плана (опорного решения). Существуют два метода построения исходного опорного плана:

1) *Метод северо-западного угла*. Заполнение таблицы начинается с левой верхней ячейки, куда дается максимально возможная поставка. Объем поставки выбирается так, чтобы полностью закрыть либо потребность по столбцу b_j либо запас по строке a_i, т.е. в качестве x_{ij} выбирается минимум между запасами груза на первом складе и потребностями в грузе у первого потребителя: $x_{11}=\min(a_1;\ b_1)$. Дальнейшее заполнение таблицы происходит слева направо, сверху вниз;

2) *Метод наименьшего тарифа*. Заполнение таблицы начинается с ячейки с наименьшим тарифом. Если таких ячеек несколько, то заполняется та, у которой объем перевозок больше. Объем поставки определяется так же, как и в методе северо-западного угла. Заполнив первую ячейку, среди оставшихся ячеек снова выбираем ячейку с наименьшим тарифом и т.д.

Если транспортная задача является открытой и введены фиктивные поставщики или фиктивные потребители, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей.

Шаг 3. Проверка вырожденности плана. Если число занятых ячеек в опорном плане меньше, чем $m+n-1$, т.е. план является вырожденным, то не будет хватать количества уравнений для определения потенциалов. В этом случае целесообразно поменять местами поставщиков и потребителей или ввести в свободную ячейку с наименьшим тарифом нулевую (фиктивную) поставку.

Фиктивная перевозка может появиться также при перераспределении поставок, если окажется, что существует несколько наименьших объемов перевозок, стоящих в «минусовых» ячейках цикла. Тогда любую одну ячейку считаем свободной, а остальные - занятыми фиктивными объемами перевозок.

Шаг 4. Определение значения целевой функции путем суммирования произведений тарифов на объем перевозимого груза по всем занятым ячейкам распределительной таблицы.

Шаг 5. Проверка опорного плана на оптимальность:

1) расчет потенциалов. Для каждой занятой объемами перевозок клетки распределительной таблицы записываем уравнение

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (3.4)$$

Получим систему уравнений относительно чисел u_i и v_j, называемых потенциалами. Эта система имеет $m+n-1$ уравнений с $m+n$ переменными. Так как число уравнений меньше числа переменных, то система является неопределенной и имеет бесконечное число решений. Поэтому полагаем $u_1 = 0$;

2) расчет оценок свободных ячеек. Для ячеек, не занятых объе-

мами перевозок (свободные ячейки), считаем оценки:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \qquad (3.5)$$

Если все $\Delta_{ij} < 0$, то опорный план является оптимальным. Если хотя бы одна оценка свободной ячейки положительна, то план не является оптимальным. Тогда необходимо осуществить перераспределение поставок груза, чтобы построить новый опорный план.

Шаг 6. Перераспределение груза.

Из ячейки, которой соответствует наибольшая положительная оценка, начинаем строить цикл, поставив в этой ячейке знак «+». Цикл - это замкнутая ломаная линия, звенья которой параллельны строкам и столбцам таблицы, а вершины лежат в занятых ячейках. Вершинам цикла поочередно присваиваем знаки «+» и «–». Из объемов груза, стоящих в «минусовых» ячейках, выбирают наименьший и обозначают d. В новой таблице прибавляют d к объемам груза в «плюсовых» ячейках и вычитают d из объемов «минусовых» ячеек.

Шаг 7. Получение нового опорного плана. Описанная процедура повторяется несколько раз (итераций), пока не будет найдено оптимальное решение. Если в оптимальном плане среди оценок свободных ячеек нет нулевых оценок, то найденный оптимальный план является единственным. Если же среди оценок свободных ячеек есть нулевая оценка, то задача имеет множество оптимальных планов (множество решений). Для ячейки с нулевой оценкой можно построить цикл и перераспределить груз. В результате полученный оптимальный план будет иметь то же значение целевой функции.

Пример 1. По данным о запасах груза на трех складах, потребностях в грузе у четырех магазинов и тарифах на перевозки, приведенных в таблице 3.2, определить оптимальный план перевозок груза с наименьшей стоимостью.

Таблица 3.2

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4
		3	6	7	5
A_1	7	7	1	7	4
A_2	8	2	5	8	8
A_3	6	6	1	6	8

Решение. Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j, где $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Балансовое равенство выполняется (суммарная потребность в грузе равняется суммарным запасам: 7 + 8 + 6 = 3 + 6 + 7 + 5), значит, транспортная задача - закрытая. Тогда экономико-математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$F(X)=7x_{11}+x_{12}+7x_{13}+4x_{14}+2x_{21}+5x_{22}+$$
$$+8x_{23}+8x_{24}+6x_{31}+x_{32}+6x_{33}+8x_{34}\to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=8, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=6, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=3, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=6, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=7, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=5, \\ x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Вариант 1. Построим исходный опорный план методом северо-западного угла. В левую верхнюю ячейку делаем максимально возможную поставку x_{11} =min(a_1; b_1) = min(7; 3) = 3. Тем самым на первом складе остается 4 ед. груза, а потребности первого магазина удовлетворены полностью, поэтому следующую перевозку будем осуществлять с первого склада ко второму потребителю: x_{12} = min(a_1– 3; b_2) = min(4; 6) = 4. Так как при этом на первом складе запас груза исчерпан, а потребности второго магазина удовлетворены не полностью, то производим поставку со второго склада второму магазину: x_{22} = min(a_2; b_2– 4) = min(8; 2) = 2. Продолжаем до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а потребности магазинов не удовлетворены полностью. В итоге получаем (табл. 3.3).

Таблица 3.3

a_i \ b_j	3	6	7	5
7	7 3	1 4	7 -	4 -
8	2 -	5 2	8 6	8 -
6	6 -	1 -	6 1	8 5

или

$$X_1^{\text{сзу}}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проверим найденный опорный план на вырожденность. Вычислим $m+n-1$= 3+4–1 = 6; число занятых ячеек равно 6. Так как эти значения совпадают, то найденный опорный план является невырожденным. Посчитаем стоимость перевозки:

$$F(X)=7\cdot 3+1\cdot 4+5\cdot 2+8\cdot 6+6\cdot 1+8\cdot 5=129 \text{ ден. ед.}$$

Вариант 2. Построим исходный опорный план методом наименьшего тарифа. На первом шаге заполняется ячейка с наименьшим тарифом 1. Заметим, что таких ячеек две, но, так как максимальные объемы поставок в обе ячейки одинаковы, заполнение таблицы можно начать как с той, так и с другой ячейки. Будем осуществлять поставку с первого склада ко второму потребителю: x_{12}=min(a_1;b_2)=min(7;6) =6. Тем самым на первом складе осталась 1 ед. груза, а потребности второго магазина удовлетворены полностью. Поэтому далее выбираем ячейку с наименьшим тарифом из первого, третьего и четвертого столбцов таблицы. Будем осуществлять поставку со второго склада к первому потребителю: x_{21} = min(a_2;b_1) = min(8;3)=3. Далее заполнение таблицы происходит следующим образом:

$$x_{13} = \min(a_1-6;b_3) = \min(1;5) = 1;$$
$$x_{33} = \min(a_3;b_3) = \min(6;7) = 6;$$
$$x_{23} = \min(a_2-3;b_3-6) = \min(5;1) = 1;$$
$$x_{24} = \min(a_2-3-1;b_4-1) = \min(4;4) = 4.$$

Исходный опорный план, построенный методом наименьшего тарифа, следующий (табл. 3.4).

Таблица 3.4

a_i \ b_j	3	6	7	5
7	7 -	1 6	7 -	4 1
8	2 3	5 -	8 1	8 4
6	6 -	1 -	6 6	8 -

или

$$X_1^{\text{нт}} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим найденный опорный план на вырожденность. Вычислим $m+n-1$=6; число занятых ячеек равно 6. Так как эти значения совпадают, то найденный опорный план является невырожденным.

Стоимость перевозки:

$$F(X)=1\cdot 6+4\cdot 1+2\cdot 3+8\cdot 1+8\cdot 4+6\cdot 6=92 \text{ ден. ед.}$$

Практически всегда метод наименьшего тарифа дает более приближенный к оптимальному опорный план, чем метод северо-западного угла. Проверим план, построенный методом наименьшего тарифа, на оптимальность. Для этого по занятым объемами перевозок ячейкам составим систему уравнений по формуле (3.4):

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_4 = 4, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_2 + v_4 = 8, \\ u_3 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Неизвестные потенциалы u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4 находим из этой системы уравнений, полагая u_1=0. Тогда из первого и второго уравнений: v_2=1, v_4=4; далее из предпоследнего: u_2=4; затем из третьего и четвертого уравнений: v_1=–2, v_3=4; наконец, из последнего уравнения: u_3=2. Перепишем матрицу перевозок, добавив справа столбец с потенциалами u_i, а внизу - строку с потенциалами v_j (табл. 3.5).

Таблица 3.5

a_i \ b_j	3	6	7	5	u_i
7	7 -	1 6	7 -	4 1	0
8	2 3	5 -	8 1	8 4	4
6	6 -	1 -	6 6	8 -	2
v_j	-2	1	4	4	

Посчитаем оценки свободных ячеек по формуле (3.6):

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 - 2 - 7 = -9 < 0;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 7 = -3 < 0;$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + 1 - 5 = 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 - 2 - 6 = -6 < 0;$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + 1 - 1 = 2 > 0;$$

$$\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 2 + 4 - 8 = -2 < 0.$$

План не оптимальный, так как оценка Δ_{32} положительна, поэтому ставим в этой ячейке знак «+» и строим цикл (табл. 3.6). Заметим, что такой цикл всегда существует и он единственный.

Таблица 3.6

a_i \ b_j	3	6	7	5	u_i
7	7 -	1 6 (-)	7 -	4 1 (+)	0
8	2 3	5 -	8 1 (+)	8 4 (-)	4
6	6 -	1 - (+)	6 6 (-)	8 -	2
v_j	-2	1	4	4	

Наименьший объем груза в «минусовых» ячейках: $d = 4$. Новую таблицу перевозок составляем с учетом следующих изменений: в ячейках со знаком «+» объем перевозок увеличится на 4 ед., в ячейках со знаком «–» уменьшится на 4 ед., а в остальных останется без изменений (табл. 3.7).

Таблица 3.7

a_i \ b_j	3	6	7	5	u_i
7	7 -	1 2	7 -	4 5	0
8	2 3	5 -	8 5	8 -	2
6	6 -	1 4	6 2	8 -	0
v_j	0	1	6	4	

или

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки полученного плана на оптимальность по формуле (3.4) составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_4 = 4, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Решив систему, получаем новые значения для потенциалов u_i, v_j, которые заносим в таблицу перевозок (таблица 3.7).

По формуле (3.5) определим оценки свободных ячеек:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 7 = -7 < 0; \quad \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 6 - 7 = -1 < 0;$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 2 + 1 - 5 = -2 < 0; \quad \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 2 + 4 - 8 = -2 < 0;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 0 - 5 = -5 < 0; \quad \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 0 + 4 - 8 = -4 < 0.$$

Проверяя план на оптимальность, замечаем, что все оценки свободных ячеек не положительны, т.е. полученный план перевозок является оптимальным. Стоимость перевозки: $\min F(X^*) = 84$ ден. ед.

Открытая транспортная задача

В открытой транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то объем запасов превышает объем потребления, все потребители будут удовлетворены полностью и часть запасов останется невывезенной. Для решения задачи вводят фиктивного (n+1)-го потребителя, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1, n+1}; \\ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n+1}. \end{cases}$$

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то объем потребления превышает объем запасов, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи вводим фиктивного (m+1)-го поставщика:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1, m+1}; \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1, m+1}; \ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

После введения фиктивного поставщика (потребителя) открытая транспортная задача становится закрытой и решается по рассмотренному алгоритму для закрытых транспортных задач, причем тариф, соответствующий фиктивному поставщику (потребителю), принимается больше или равным максимальному из всех транспортных тарифов, иногда его считают равным нулю. В значении целевой функции фиктивный поставщик (потребитель) не учитывается.

Пример 2. Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимость перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю c_{ij} задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Равенство (3.3) не выполняется, поэтому задача открытая, так как суммарная потребность в грузе превышает суммарный запас на 60 т. Для решения этой задачи вводим фиктивного поставщика с запасом груза 60 т.

Модель задачи запишется следующим образом: x_{ij} - количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j, где $i = \overline{1, 4}, \ \ j = \overline{1, 4}$.

$$F(X) = 7x_{11} + 13x_{12} + 9x_{13} + 8x_{14} + 14x_{21} + 8x_{22} +$$
$$+7x_{23} + 10x_{24} + 3x_{31} + 15x_{32} + 20x_{33} + 6x_{34} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 240, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 60, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 90, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 190, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 130, \\ x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1, 4}; \ j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Построение исходного опорного плана, проверка плана на оптимальность и переход в случае неоптимального плана к новому для открытой транспортной задачи осуществляются точно так же, как и для закрытой.

Исходное опорное решение, найденное методом наименьшего тарифа, следующее (табл. 3.8).

Таблица 3.8

a_i \ b_j	90	190	40	130
240	7 -	13 130	9 -	8 110
40	14 -	8 0	7 40	10 -
110	3 90	15 -	20 -	6 20
60	20 -	20 60	20 -	20 -

или

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 130 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим исходный опорный план на вырожденность. Вычислим m+n–1= 4+4–1 = 7; число занятых ячеек равно 6. Так как эти значения не совпадают, найденный опорный план является вырожденным. Для исключения вырожденности поместим нулевую поставку в ячейку (2,2).

Оценки свободных ячеек равны:

$$\Delta_{11} = -2 < 0;\ \ \Delta_{13} = 3 > 0;\ \ \Delta_{21} = -14 < 0;\ \ \Delta_{24} = -7 < 0;\ \ \Delta_{32} = -4 < 0;$$
$$\Delta_{33} = -10 < 0;\ \ \Delta_{41} = -8 < 0;\ \ \Delta_{43} = -1 < 0;\ \ \Delta_{44} = -5 < 0.$$

План не оптимальный, так как оценка Δ_{13} больше нуля, перераспределим грузы (табл. 3.9).

Таблица 3.9

a_i \ b_j	90	190	40	130	u_i
240	7 -	13 130 -	+ 9 -	8 110	0
40	14 -	+ 8 0	- 7 40	10 -	- 5
110	3 90	15 -	20 -	6 20	- 2
60	20 -	20 60	20 -	20 -	7
v_j	5	13	12	8	

Запишем полученное перераспределение грузов в таблицу 3.10.

Оценки свободных ячеек: $\Delta_{11} = -2 < 0$; $\Delta_{21} = -14 < 0$; $\Delta_{23} = -3 < 0$; $\Delta_{24} = -7 < 0$; $\Delta_{32} = -4 < 0$; $\Delta_{33} = -13 < 0$; $\Delta_{41} = -8 < 0$; $\Delta_{43} = -4 < 0$; $\Delta_{44} = -5 < 0$.

Таблица 3.10

a_i \ b_j	90	190	40	130	u_i
240	7 -	13 90	9 40	8 110	0
40	14 -	8 40	7 -	10 -	- 5
110	3 90	15 -	20 -	6 20	- 2
60	20 -	20 60	20 -	20 -	7
v_j	5	13	9	8	

или

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все оценки свободных ячеек положительные, получили оптимальное решение. Чтобы получить оптимальный план исходной задачи, нужно отбросить последнюю строку, соответствующую фиктивному поставщику:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Отброшенная строка плана X^* означает, сколько единиц груза недополучат потребители, а именно второй потребитель недополучит 60 т груза.

Решение транспортных задач с использованием MS Excel

Решим задачу **примера 1** в MS Excel.

Экранная форма, задание переменных, целевой функции и ограничений задачи и ее решение представлены на рис. 3.1-3.3 и в таблице 3.11.

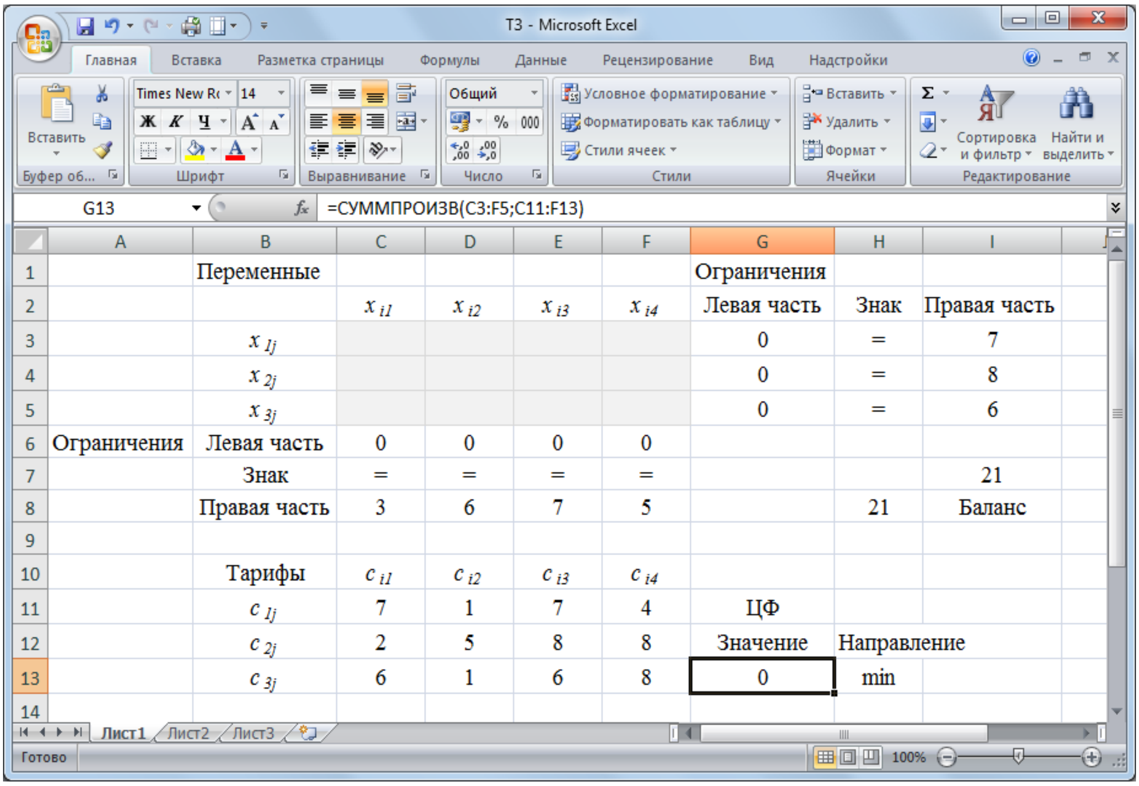


Рисунок 3.1 – Экранная форма

Таблица 3.11

Объект математической модели	Выражение в MS Excel
Переменные задачи	C3:F5
Формула в целевой ячейке G13	=СУММПРОИЗВ(C3:F5;C11:F13)
Ограничения по строкам в ячейках G3, G4, G5	=СУММ(C3:F3) =СУММ(C4:F4) =СУММ(C5:F5)
Ограничения по столбцам в ячейках C6, D6, E6, F6	=СУММ(C3:C5) =СУММ(D3:D5) =СУММ(E3:E5) =СУММ(F3:F5)
Суммарные запасы и суммарные потребности в ячейках I7, H8	=СУММ(I3:I5) =СУММ(C8:F8)

Ограничения неотрицательности переменных ($x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}$) можно задать в виде ограничения $C$3:$F$5>=0 или установить флажок «Неотрицательные значения» в окне «Параметры поиска решения».

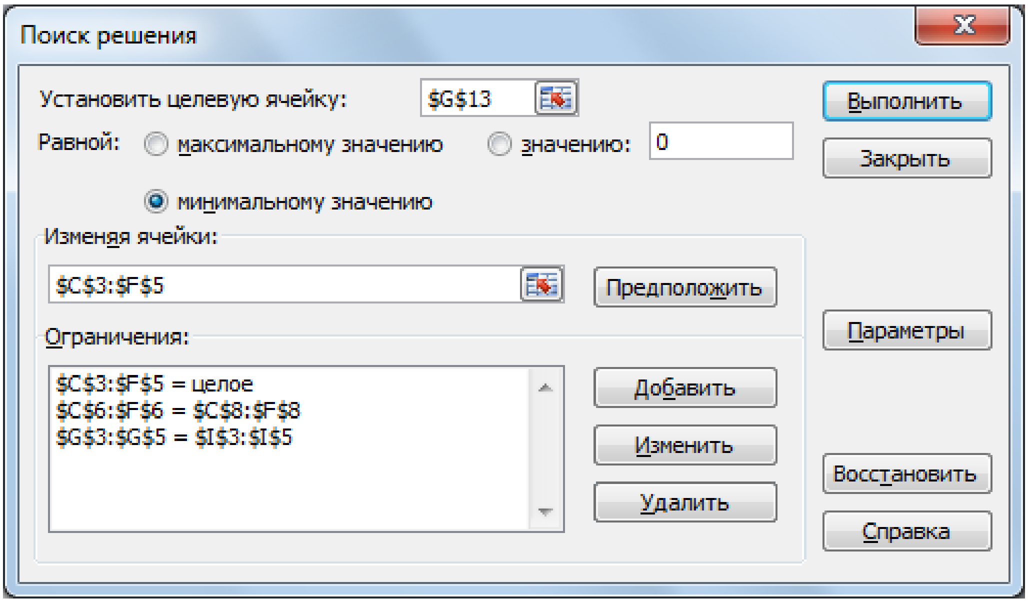


Рисунок 3.2 – Ограничения

Требование целочисленности ($C$3:$F$5=целое) задается, если это требуется по условию задачи.

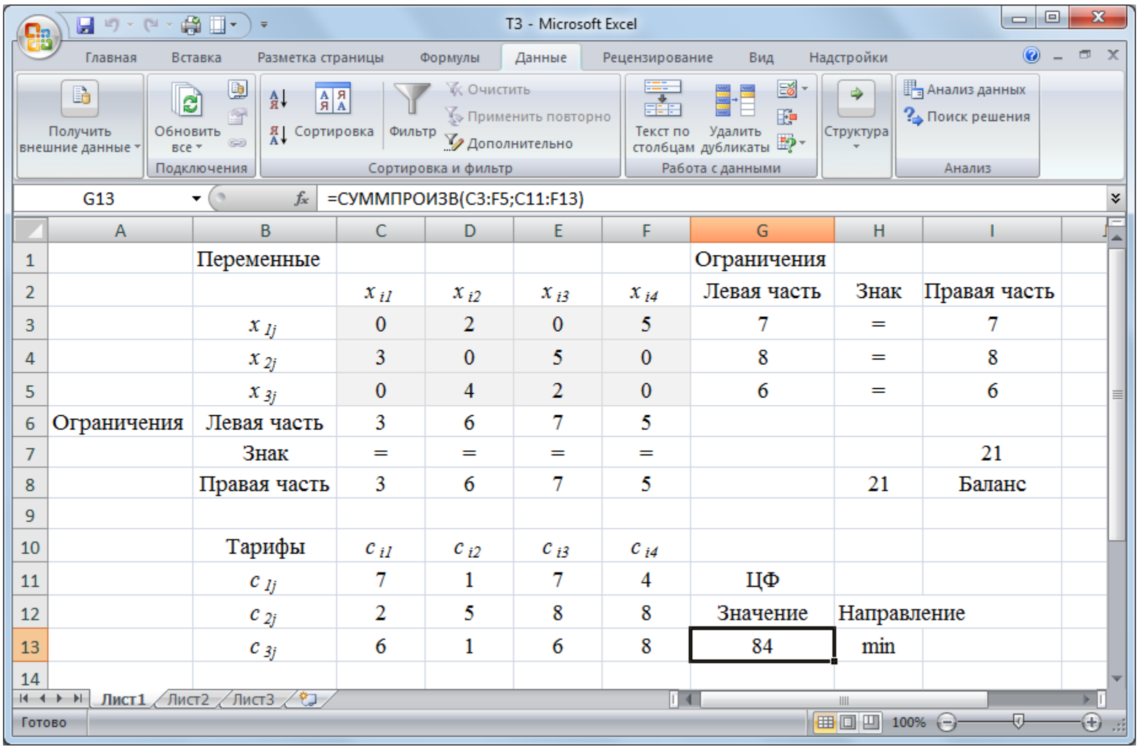


Рисунок 3.3 – Экранная форма после получения решения

3.2. Целочисленное программирование

Под задачей целочисленного программирования понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

В случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют целочисленной задачей линейного программирования. Если хотя бы одна зависимость будет нелинейной, такая задача формулируется как целочисленная задача нелинейного программирования.

Модель целочисленной задачи линейного программирования:

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge)\, b_i, \quad i = \overline{1, m}; & (3.7) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; & (3.8) \\ x_j \in Z, \quad j = 1, 2, ..., n_1 \le n. & (3.9) \end{cases}$$

Условие $x_j \in Z$ - условие целочисленности. Если $n_1 = n$, то задачу называют полностью целочисленной; если $n_1 < n$, то - частично целочисленной.

В ряде случаев задачу целочисленного программирования решают как непрерывную задачу линейного программирования, т.е. без условия целочисленности. Затем округляют переменные и проверяют допустимость округленного решения. Если решение допустимое, то оно принимается как целочисленное.

При необходимости точного решения применяют специальные методы, где учитывается, что число возможных решений любой целочисленной задачи - конечно. Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: методы отсечения, комбинаторные методы и приближенные методы.

Решение целочисленных задач с использованием MS Excel

Пример 3. Решить задачу целочисленного программирования.

$$F(\bar{x}) = 7x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

Решение: Решение целочисленных задач с использованием MS Excel осуществляется аналогично, как и решение задач линейного программирования, с использованием пакета «Поиск решения». Отличие состоит в том, что для данного типа задач необходимо добавить ограничение целочисленности на используемые в задаче переменные. Это делается при добавлении ограничений (рис. 3.5). В диалоговом окне «Добавление ограничения» в поле «Ссылке на ячейку» ввести адреса ячеек, рядом ввести *цел*.

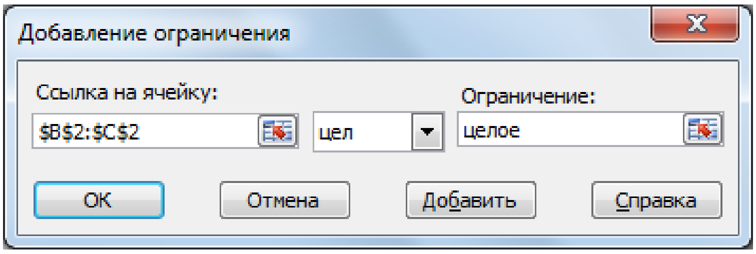


Рисунок 3.5 – Добавление условия целочисленности переменных

В диалоговом окне «Поиск решения», нажать кнопку *Параметры*, поставить флажок на *Показывать результаты итераций* (рис. 3.6), затем *Выполнить*.

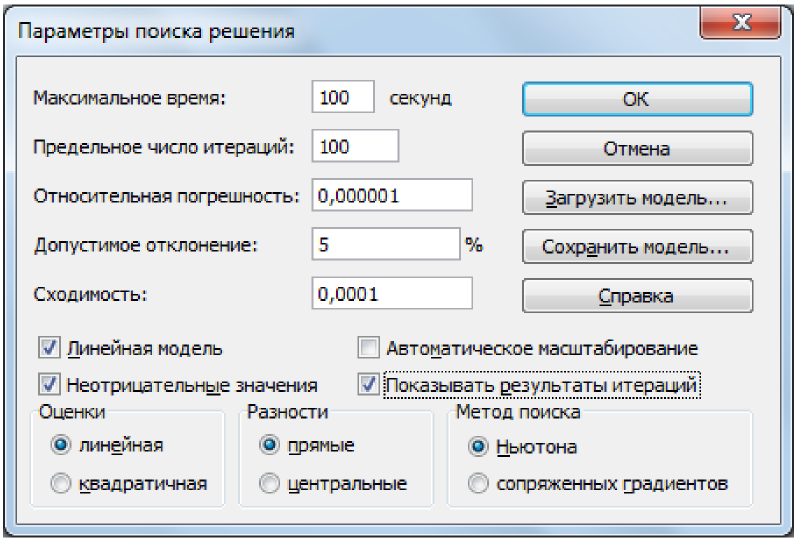


Рисунок 3.6– Окно «Параметры поиска решения»

На экране появится результат решения на первой итерации и диалоговое окно «Текущее состояние поиска решения» (рис. 3.7).

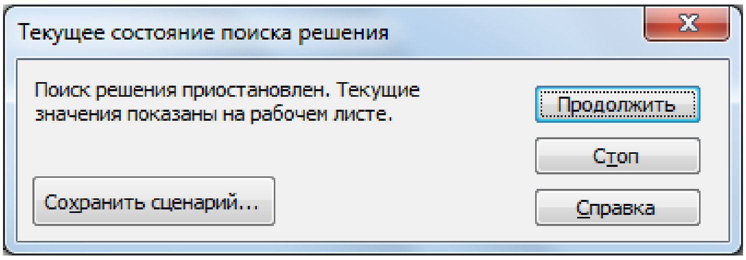


Рисунок 3.7 – Окно «Текущее состояние поиска решения»

Щелкнуть *Сохранить сценарий*, затем *Продолжить*, ввести номер итерации как имя сценария, повторять до появления диалогового окна «Результат поиска решения» (рис. 3.8).

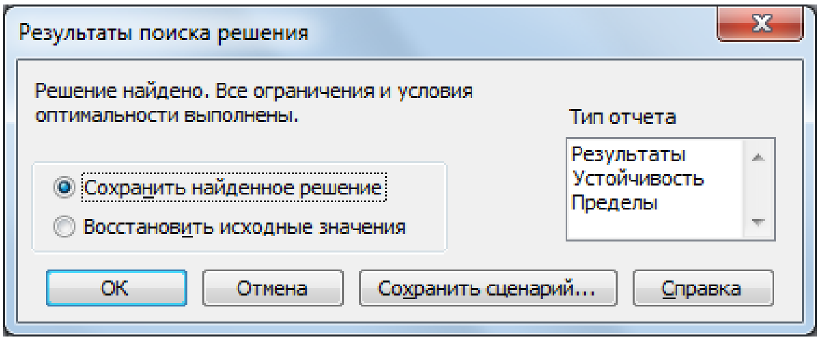


Рисунок 3.8 – Окно «Результаты поиска решения»

Для целочисленных задач возможен только Отчет по результатам (рис. 3.9).

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$5	Коэффициенты ЦФ Значение	29	29

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	Значение x1	2	2
$C$2	Значение x2	5	5

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$9	Левая часть	20	$D$9<=$F$9	связанное	0
$D$10	Левая часть	36	$D$10<=$F$10	не связан.	2
$B$2	Значение x1	2	$B$2=целое	связанное	0
$C$2	Значение x2	5	$C$2=целое	связанное	0

Рисунок 3.9 – Отчет по результатам

Контрольные задания

Задание 1. Решить задачи методом потенциалов. Сравнить найденное решение с решением, полученным в MS Excel.

1. Фирма, обслуживающая туристов прибывающих на отдых, должна разместить их в четырех отелях: «Морской», «Солнечный», «Слава» и «Уютный», в которых забронировано соответственно 5, 15, 15 и 10 мест. По железной дороге прибывают 15 туристов, очередным рейсом в аэропорт прилетают 25, а на морской вокзал прибудут на теплоходе 5 чел. Транспортные расходы (ден. ед. на 1 чел.) при перевозке из пунктов прибытия в отели приведены в табл. 3.12.

Таблица 3.12.

Пункт прибытия	Транспортные расходы при перевозке в отели, ден. ед.			
	«Морской»	«Солнечный»	«Слава»	«Уютный»
Железнодорожный вокзал	10	0	20	11
Аэропорт	12	7	9	20
Морской вокзал	10	14	16	18

В условиях жесткой конкуренции фирма должна минимизировать свои расходы, значительную часть которых составляет именно расходы на транспорт. Требуется определить такой план перевозки туристов из пункта прибытия в отели, при котором суммарные транспортные расходы будут минимальны и все туристы будут размещены в отелях.

2. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно, на 17, 12 и 32 т; овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 т. Транспортные тарифы за перевозку картофеля от овощехранилища до магазина (ден. ед. за 1 т) указаны в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Овощехранилище	Расход на перевозку до магазина, ден. ед. за 1 т		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

3. Имеются два склада готовой продукции: A_1 и A_2 с запасами однородного груза 200 и 300 т. Этот груз необходимо доставить трем потребителям: B_1, B_2, B_3 в количестве 100, 150, 250 т соответственно.

Стоимость перевозки 1 т груза из склада A_1, потребителям B_1, B_2 и B_3 равна 5, 3, 6 ден. ед., а из склада A_2 тем же потребителям - 3, 4, 2 ден. ед. соответственно. Определить план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

4. Заводы 1, 2, 3 производят однородную продукцию в количестве соответственно 500, 400 и 510 ед. Себестоимость производства 1 ед. продукции на заводе 1 составляет 25 ден. ед., на заводе 2 - 20 ден. ед., на заводе 3 - 23 ден. ед. Продукция отправляется в пункты A, B, C, потребности которых равны 310, 390 и 450 ед. Минимизировать издержки, если стоимость перевозок 1 ед. продукции задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Имеются три специализированные мастерские - I, II, III по ремонту двигателей. Их производственные мощности равны соответственно 100, 700, 980 ремонтов в год. В пяти районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соответственно 90, 180, 150, 120, 80 двигателей в год. Затраты на перевозку одного двигателя из районов к мастерским приведены в табл. 3.14. Спланируйте количество ремонтов каждой мастерской для каждого из районов, минимизирующее суммарные транспортные расходы.

Таблица 3.14

Район	Расход на перевозку к мастерским, ден. ед.		
	I	II	III
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

6. Имеются 3 элеватора (I, II, III), в которых сосредоточено соответственно 1000, 2000 и 1600 т зерна. Зерно необходимо перевезти на два хлебозавода в количестве 4200 и 1200 т каждому. Расстояние от элеватора до хлебозавода (км) указано в табл. 3.15. Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км составляют 25 ден. ед. Спланируйте перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

Таблица 3.15

Хлебозавод	Расстояние от элеватора до завода, км		
	I	II	III
1	20	30	50
2	60	20	40

7. На строительство четырех объектов кирпич поступает с трех (I, II, III) заводов. Заводы имеют на складах соответственно 50, 100 и 50 тыс. шт. кирпича. Объекты требуют соответственно 50, 70, 40, 40 тыс. шт. кирпича. Тарифы (ден. ед./ тыс. шт.) приведены в табл. 3.16.

Таблица 3.16

Завод	Тариф, ден. ед./тыс. шт.			
	1	2	3	4
I	2	6	2	3
II	5	2	1	7
III	4	5	7	8

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

8. Для полива трех участков сада (I, II, III), на которых растут сливы, яблони и груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно 180, 90 и 40 ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно 100, 120 и 90 ведер воды. Расстояние (в метрах) от колодца до участка сада указано в табл. 3.17. Как лучше организовать полив?

Таблица 3.17

Колодец	Расстояние от колодца до участка, км		
	I	II	III
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	40	39

9. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготовляемый на трех заводах. Ежедневно каждый завод может изготовлять 100, 150 и 50 ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом строящемся объекте соответственно равны 75, 80, 60 и 85 ед. Известны также тарифы перевозок 1 ед. кирпича с каждого завода к каждому строящемуся объекту:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

10. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

11. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Стоимость перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составить план поставок бензина заправочным станциям с минимальной стоимостью.

12. Три молочные фермы (I, II, III) с суточным производством 40, 25 и 35 тыс. л молока снабжают четыре молокозавода, спрос которых: 15, 40, 30 и 15 тыс. л молока в сутки. Молоко доставляется на заводы одинаковыми по вместимости молоковозами. Стоимость перевоза молока на расстояние 1 км составляет 3 ден. ед. Расстояние от фермы до молокозавода приведено в табл. 3.18.

Таблица 3.18

Ферма	Расстояние от фермы до молокозавода, км			
	1	2	3	4
I	10	5	7	4
II	7	4	9	10
III	6	14	8	7

Найти оптимальный план поставки молока с ферм на молокозаводы с минимальными транспортными издержками. Рассчитать стоимость доставки молока от каждой фермы до молокозавода.

13. Четыре бензохранилища (I, II, III, IV) с суточным объемом хранения 60, 40, 100 и 50 тыс. т авиационного бензина снабжают пять аэропортов, спрос на бензин которых составляет 30, 80, 65, 35 и 40 тыс. т бензина в сутки. Бензин транспортируется в аэропорты одинаковыми по вместимости бензозаправщиками. Стоимость провоза бензина бензозаправщиком на расстояние 1 км составляет 7 ден. ед. Расстояние от бензохранилища до аэропорта дано в табл. 3.19.

Найти оптимальный план поставки бензина с минимальными транспортными издержками. Рассчитайте стоимость доставки бензина от каждого аэропорта до хранилища.

Таблица 3.19

Бензохранилище	Расстояние от бензохранилища до аэропорта, км				
	1	2	3	4	5
I	8	12	4	9	10
II	7	5	15	3	6
III	9	4	6	12	7
IV	5	3	2	6	4

14. Торговая фирма «Весна и осень» включает четыре предприятия (I, II, III, IV) и шесть складов в различных регионах страны. Каждый месяц предприятия фирмы производят 100, 15, 90 и 55 ед. продукции. Вся производимая продукция направляется на склады, вместимость которых соответственно 30, 40, 55, 80, 45 и 10 ед. продукции. Денежные издержки на транспортировку продукции от предприятий до складов (ден. ед.) даны в табл. 3.20.

Таблица 3.20

Предприятие	Расход на транспортировку до склада, ден. ед.					
	1	2	3	4	5	6
I	1	5	2	2	1	6
II	3	6	2	4	3	3
III	8	10	4	5	6	8
IV	7	3	7	9	1	2

Распределите план перевозок исходя из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

15. Деревообрабатывающий комбинат имеет три цеха: А, В, С и четыре склада. Цеха и склады находятся на разных территориях. Цех А производит 40 тыс. м^3 материала, цех В – 30 тыс. м^3; цех С – 20 тыс. м^3 материала. Пропускная способность складов за то же время следующая: склад 1 – 30 тыс. м^3 материала, склад 2 – 25 тыс. м^3, склад 3 – 15 тыс. м^3 и склад 4 – 20 тыс. м^3 материала. Стоимость перевозки 1 м^3 материала из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 соответственно: 10, 20, 60, 40 ден. ед., из цеха В - соответственно 30, 10, 30, 20, а из цеха С - соответственно 50, 70, 50, 10 ден. ед.

Составьте план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку материала были бы наименьшими.

16. Для строительства четырех участков дорожной магистрали необходимо завозить песок. Песок может быть поставлен из трех карьеров (I, II, III). Перевозка песка от карьера до участка осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояния от карьеров до участков и количество песка в каждом карьере приведены в табл. 3.21. Потребность в песке на каждом участке дороги: 1 – 15 тыс. т, 2 – 15 тыс. т, 3 – 40 тыс. т, 4 – 30 тыс. т.

Таблица 3.21

Карьер	Расстояние от карьера до участка, км				Количество песка в карьере, тыс. т
	1	2	3	4	
I	1	8	2	3	30
II	4	7	5	1	50
III	5	3	4	4	20

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

17. Имеются четыре овощехранилища (I, II, III, IV), расположенные в разных районах города, в которых сосредоточено соответственно 10, 20, 35 и 45 т овощей. Овощи необходимо перевезти четырем потребителям в количестве соответственно 25, 30, 40 и 15 т. Расстояния от хранилищ до потребителей (км) даны в табл. 3.22. Затраты на перевозку 1 т овощей на 1 км постоянны и равны 20 руб.

Таблица 3.22

Хранилище	Расстояние от хранилища до потребителя, км			
	1	2	3	4
I	7	3	3	8
II	7	6	2	7
III	4	7	7	3
IV	5	2	4	5

Определить план перевозок продукта от хранилищ до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

18. Четыре растворных узла (I, II, III, IV) поставляют раствор четырем строительным фирмам. Для перевозки раствора используются однотипные автомашины. Объем производства растворных узлов в день равен 30, 20, 40, 50 т. Потребности строительных фирм в день: 35, 20, 55, 30 т. Расстояния в километрах от растворных узлов до строительных объектов указаны в табл. 3.23.

Таблица 3.23

Растворный узел	Расстояние от узла до строительной фирмы, км			
	1	2	3	4
I	2	4	1	3
II	5	6	3	4
III	3	6	7	5
IV	1	2	9	3

Определить, в каком объеме, из каких растворных узлов и куда должен доставляться раствор, чтобы транспортные издержки по его доставке автотранспортом были минимальными.

19. Требуется спланировать перевозку строительного материала с трех заводов на четыре строительные площадки с минимальными затратами, используя железнодорожную сеть. В течение каждого квартала на четырех площадках требуется соответственно 5,10, 20,15 вагонов строительных материалов. Возможности трех заводов равны соответственно 10, 15 и 25 вагонов в квартал. Стоимость перевозки одного вагона (ден. ед.) приведена в табл. 3.24.

Таблица 3.24

Заводы	Строительные площадки			
	1	2	3	4
1	8	3	5	2
2	4	1	6	4
3	1	9	4	3

20. Организация получила заказы на три вида выпускаемой ею продукции (бокалы, чашки и вазы), которые необходимо изготовить в течение недели. Размеры заказов: бокалы - 4000 шт., чашки - 2400 шт., вазы - 1000 шт. Участок по изготовлению имеет три станка. Производственные мощности 2-го и 3-го станков на эту неделю составят по 3000 шт., а 1-го станка - 2000 шт. Единичные затраты (ден. ед.) по каждому виду продукции различны в зависимости от используемого станка и приведены в табл. 3.25.

Таблица 3.25

Станок	Бокалы	Чашки	Вазы
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

Найти план производства для заказанных видов продукции с наименьшей стоимостью.

Задание 2. Решить задачи при условии целочисленности компонент в оптимальном плане методом ветвей и границ. Сравнить найденное решение с решением, найденным в MS Excel.

1. $F(\bar{x}) = 2x_1 - 8x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 40, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

2. $F(\bar{x}) = -x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

3. $F(\overline{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 3,2, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

4. $F(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0,75, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

5. $F(\overline{x}) = 10x_1 + x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 + 0,5x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

6. $F(\overline{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

7. $F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 10, \\ x_1 \le 20, \\ x_2 \le 30, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

8. $F(\overline{x}) = 30x_1 + 44x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 580, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 680, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 380, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

9. $F(\overline{x}) = 3x_1 - x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 \le 2,25, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 3,5, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

10. $F(\overline{x}) = 52x_1 + 39x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 300, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 477, \\ 5x_1 + x_2 \le 441, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

11. $F(\overline{x}) = -2x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_1 - x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

12. $F(\overline{x}) = 33x_1 + 24x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 330, \\ 2x_1 + 8x_2 \le 800, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 740, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

13. $F(\overline{x}) = 42x_1 + 26x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 600, \\ 3x_1 + x_2 \le 350, \\ x_1 + 5x_2 \le 600, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

14. $F(\overline{x}) = 34x_1 + 36x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 810, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 980, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 786, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

15. $F(\overline{x}) = x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 0{,}5x_2 \le 0{,}5, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

16. $F(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

17. $F(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

18. $F(\overline{x}) = 5x_1 + 7x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

19. $F(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 24, \\ -3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

20. $F(\overline{x}) = 6x_1 + x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, \text{ целые.} \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учебное пособие / Е.С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 192 с.

2. Вуколов, Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL: учебное пособие / Э.А. Вуколов. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 462 с.

3. Глухов, В.В. Математические методы и модели для менеджмента: учебное пособие / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – 3-е изд., стер. – Спб.: Издательство «Лань», 2007. – 528 с.

4. Давыдов, Е.Г. Элементы исследования операций: учебное пособие / Давыдов Е.Г. – М.: КНОРУС, 2010. – 160 с.

5. Есипов, Б.А. Методы исследования операций: учебное пособие / Б.А. Есипов. – Спб.: Издательство «Лань», 2010. – 256 с.

6. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам: учебное пособие / А.Н. Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Кагакина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. – 288 с.

7. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.

8. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, 2009. – 365 с.

9. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 144 с.

10. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 2-е изд., исправл. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.

11. Ширяев, В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации: учебное пособие / В.И. Ширяев. – 3-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2007. – 216 с.

12. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / под ред. С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой. – 2-е изд., перераб. – М.: КНОРУС, 2009. – 208 с.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Варианты заданий для студентов заочного отделения

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
1	1 1 1 1	2 2 2 2	3 3 3 3	4 4 4 4	5 5 5 5	6 6 6 6	7 7 7 7	8 8 8 8	9 9 9 9	10 10 10 10
2	11 11 11 11	12 12 12 12	13 13 13 13	14 14 14 14	15 15 15 15	16 16 16 16	17 17 17 17	18 18 18 18	19 19 19 19	20 20 20 20
3	1 2 4 1	2 3 5 2	3 4 6 3	4 5 7 4	5 6 8 5	6 7 9 6	7 8 10 7	8 9 11 8	9 10 12 9	10 11 13 10
4	11 12 14 11	12 13 15 12	13 14 16 13	14 15 17 14	15 16 18 15	16 17 19 16	17 18 20 17	18 19 1 18	19 20 2 19	20 1 3 20
5	1 3 7 1	2 4 8 2	3 5 9 3	4 6 10 4	5 7 11 5	6 8 12 6	7 9 13 7	8 10 14 8	9 11 15 9	10 12 16 10
6	11 13 17 11	12 14 18 12	13 15 19 13	14 16 20 14	15 17 1 15	16 18 2 16	17 19 3 17	18 20 4 18	19 1 5 19	20 2 6 20
7	1 4 10 1	2 5 11 2	3 6 12 3	4 7 13 4	5 8 14 5	6 9 15 6	7 10 16 7	8 11 17 8	9 12 18 9	10 13 19 10
8	11 14 20 11	12 15 1 12	13 16 2 13	14 17 3 14	15 18 4 15	16 19 5 16	17 19 6 17	18 20 7 18	19 1 8 19	20 2 9 20
9	1 5 13 1	2 6 14 2	3 7 15 3	4 8 16 4	5 9 17 5	6 10 18 6	7 11 19 7	8 12 20 8	9 13 1 9	10 14 2 10
0	11 15 3 11	12 16 4 12	13 17 5 13	14 18 6 14	15 19 7 15	16 20 8 16	17 1 9 17	18 2 10 18	19 3 11 19	20 4 12 20

Вариант контрольной работы для студентов заочного отделения содержит 4 задания: по темам «Линейное программирование» и «Специальные задачи линейного программирования». Задания контрольной работы должны выбираться студентами по двум последним цифрам его учебного номера (номер студенческого билета) в соответствии с таблицей выбора вариантов. В первой колонке таблицы по вертикали расположены цифры от 1 до 0, и каждая из них – предпоследняя цифра личного номера. В первой строке таблицы по горизонтали также расположены цифры от 1 до 0, и каждая из них – последняя цифра личного номера Пересечения вертикальных (А) и горизонтальных (Б) линий определяют номера заданий контрольной работы, записанные столбиком. Например, если личный шифр студента имеет две последние цифры 75, то он должен выполнить номера 5 (тема 1, задание 1), 8 (тема 1, задание 2), 14 (тема 2, задание 1), 5 (тема 2, задание 2).