

Равновесие тяжелой рамы

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир и наклонный невесомый стержень. К раме приложены внешние сосредоточенные силы и моменты. Учитывая погонный вес рамы, найти реакции опор.

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Согласно аксиоме о связях, освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями. Выбираем систему координат. В неподвижном шарнире имеются две неизвестные составляющие реакции (горизонтальная и вертикальная), а в невесомом опорном стержне — одна неизвестная реакция, направленная вдоль стержня. Все наклонные силы раскладываем на составляющие вдоль осей координат.

2. К центру каждого участка рамы прикладываем его вес, вычисленный по формуле $G_k = l_k \rho$, где l_k — длина участка, ρ — погонный вес рамы (вес единицы длины стержня, из которого составлена рама).

3. Составляем уравнение моментов всех сил, действующих на раму, относительно неподвижного шарнира. Определяем из этого уравнения реакцию опорного стержня.

4. Составляем уравнения проекций всех сил на оси x и y . Из этих уравнений определяем составляющие реакции неподвижного шарнира (горизонтальную и вертикальную).

5. Выполняем проверку решения, составляя уравнение моментов относительно какой-либо точки, не лежащей на линиях действия искомых реакций.

ПРИМЕР. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир A и наклонный невесомый стержень H . К раме приложены внешние сосредоточенные силы $P = 20$ кН, $Q = 10$ кН и момент $M = 100$ кНм. Дано: $\gamma = 60^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $AB = 2$ м, $BC = 4$ м, $CD = 6$ м, $DH = 4$ м, $KC = 2$ м (рис. 20). Учитывая погонный вес рамы $\rho = 4$ кН/м, найти реакции опор.

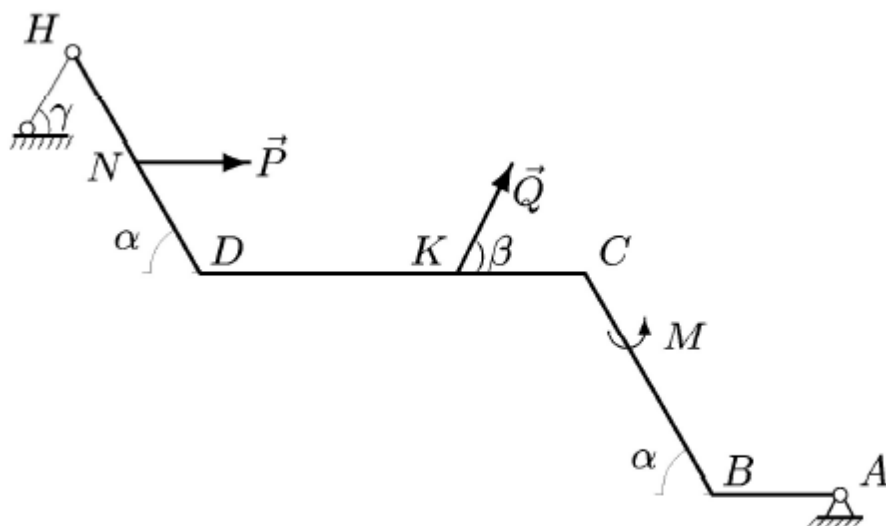


Рис. 20

РЕШЕНИЕ

1. Освобождаем раму от связей. Действие опор заменяем их реакциями (рис. 21). Выбираем систему координат с началом в точке A . В неподвижном шарнире A реакция R_A имеет две неизвестные компоненты X_A и Y_A . Невесомый опорный стержень в шарнире H заменяем на его реакцию, направленную по стержню (т.е. под углом γ к горизонту).

2. К центру каждого участка рамы (всего четыре прямолинейных участка) прикладываем его вес, вычисленный по формуле $G_k = l_k \rho$, где — l_k , $k = 1, \dots, 4$ — длины отрезков рамы AB , BC , CD и DH , ρ — погонный вес рамы.

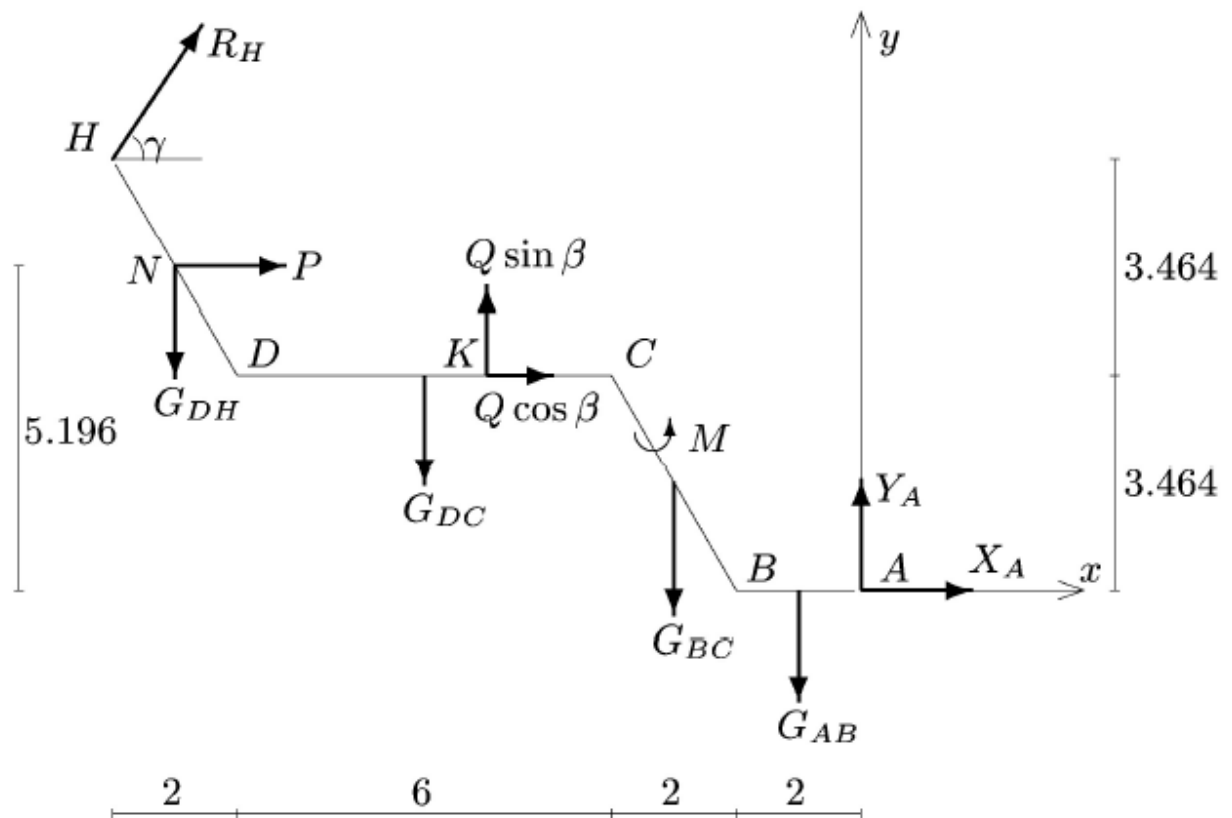


Рис. 21

3. Составляем уравнение моментов относительно шарнира A , выделяя в нем для удобства счета отдельные слагаемые:

$$\sum M_A = M_A(R_H) + M_A(P) + M_A(Q) + M_A(G_k) + M = 0. \quad (1)$$

Момент $M_A(R_H)$ реакции опоры

$$M_A(R_H) = R_H h = -R_H((HD + CB) \sin \alpha \cos \gamma + \\ + (HD \cos \alpha + DC + CB \cos \alpha + AB) \sin \gamma),$$

где h — плечо реакции R_H взятое со знаком момента.

Моменты сил P и Q и момент $M_A(G_k)$ сил тяжести участков:

$$M_A(P) = -P(ND + CB) \sin \alpha = -103.923 \text{ кНм},$$

$$M_A(Q) = -Q \cos \beta CB \sin \alpha - Q \sin \beta(KC + CB \cos \alpha + AB) = \\ = -69.282 \text{ кНм},$$

$$M_A(G_k) = G_{DH}((ND + CB) \cos \alpha + DC + AB) + \\ + G_{DC}(DC/2 + CB \cos \alpha + AB) + \\ + G_{CB}(CB/2 \cos \alpha + AB) + G_{AB}AB/2.$$

Вычисляя величины сил тяжести участков

$$G_{AB} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}, \quad G_{BC} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, \\ G_{DC} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН}, \quad G_{DH} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН},$$

получаем $M_A(G_k) = 400 \text{ кНм}$.

В итоге уравнение моментов (1) принимает вид

$$-13.856R_H - 103.923 - 69.282 + 400 + 100 = 0.$$

Отсюда находим реакцию стержня

$$R_H = \frac{326.795}{13.856} = 23.584 \text{ кН}.$$

4. Реакции X_A и Y_A определяем из уравнений проекций:

$$\sum X_i = X_A + Q \cos \beta + R_H \cos \gamma = 0,$$

$$X_A = -36.792 \text{ кН},$$

$$\sum Y_i = Y_A - G_{AB} - G_{BC} - G_{DC} - G_{DH} + Q \sin \beta + R_H \sin \gamma = 0,$$

$$Y_A = 34.915 \text{ кН}.$$

Ответы заносим в таблицу. Моменты — в кНм, силы — в кН.

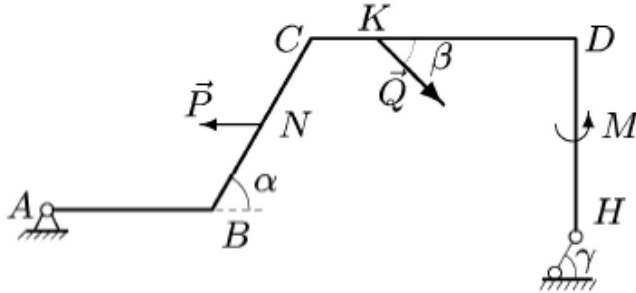
$M_A(Q)$	$M_A(P)$	$\sum_k M_A(G_k)$	h	X_A	Y_A	R_H
-69.282	-103.923	400	-13.856	-36.792	34.915	23.584

5. Проверка. Составляем сумму моментов всех сил, действующих на раму, включая найденные реакции опор, относительно произвольной точки, например, K . Этот выбор оправдывается тем, что в уравнение моментов войдут все найденные реакции, а известная сила Q не войдет (ее проверять не требуется), и уравнение будет на два слагаемых короче

$$\sum M_K = -R_H \cdot 3.464 \cos \gamma - R_H \cdot 6 \sin \gamma - P \cdot 1.732 + M + G_{DH} \cdot 5 + \\ + G_{DC} \cdot 1 - G_{BC} \cdot 3 - G_{AB} \cdot 5 + Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 3.464 = 0.$$

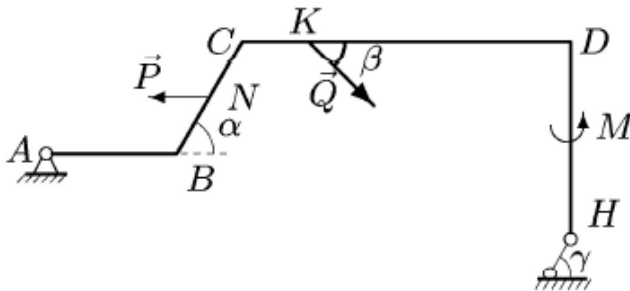
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Тяжелая однородная рама расположена в вертикальной плоскости и опирается на неподвижный шарнир A и наклонный невесомый стержень H . К раме приложены горизонтальная сила P , наклонная сила Q и момент M . Учитывая погонный вес рамы ρ , найти реакции опор.

1. Мырзаев Бейбарс Гаухарбекұлы



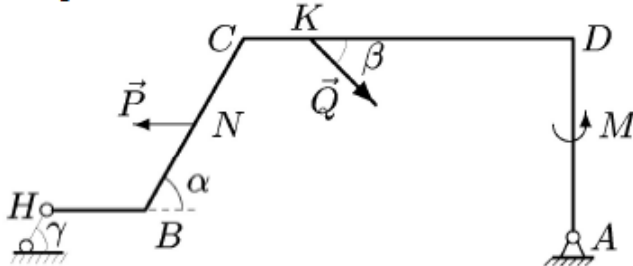
$\rho = 1$ кН/м, $P = 5$ кН,
 $Q = 11$ кН, $M = 30$ кНм,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 5$ м, $BC = 6$ м,
 $CD = 8$ м, $DH = 6$ м,
 $CK = 2$ м, $CN = 3$ м.

2. Умаров Эмиль Фархатович



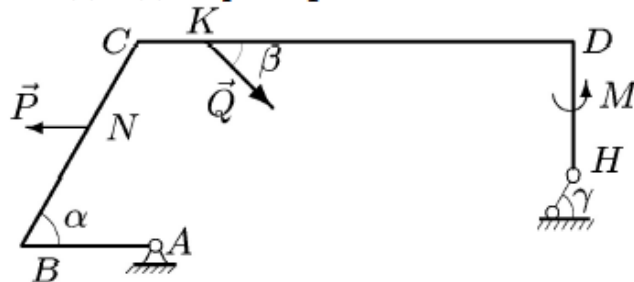
$\rho = 2$ кН/м, $P = 6$ кН,
 $Q = 12$ кН, $M = 50$ кНм,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 4$ м, $BC = 4$ м,
 $CD = 10$ м, $DH = 6$ м,
 $CK = 2$ м, $CN = 2$ м.

3. Прокопьева Оксана Константиновна



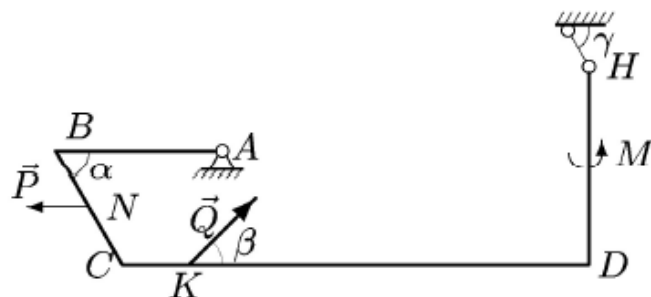
$\rho = 3$ кН/м, $P = 8$ кН,
 $Q = 13$ кН, $M = 70$ кНм,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 3$ м, $BC = 6$ м,
 $CD = 10$ м, $DA = 6$ м,
 $CK = 2$ м, $CN = 3$ м.

4. Сәнді Әділ Ержанұлы



$\rho = 1$ кН/м, $P = 6$ кН,
 $Q = 14$ кН, $M = 30$ кНм,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 4$ м, $BC = 7$ м,
 $CD = 13$ м, $DH = 4$ м,
 $CK = 2$ м, $CN = 3$ м.

5. Өтесін Айжан Сәрсенғалиқызы



$$\rho = 2 \text{ кН/м}, P = 7 \text{ кН},$$

$$Q = 15 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм},$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ,$$

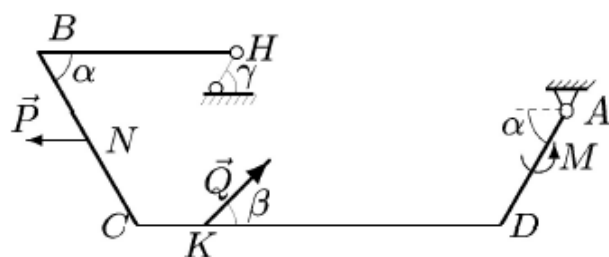
$$AB = 5 \text{ м}, BC = 4 \text{ м},$$

$$CD = 14 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$$

$$CK = 2 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}.$$

Төрехан Бекжан Ғалымжанұлы

6.



$$\rho = 3 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$$

$$Q = 16 \text{ кН}, M = 70 \text{ кНм},$$

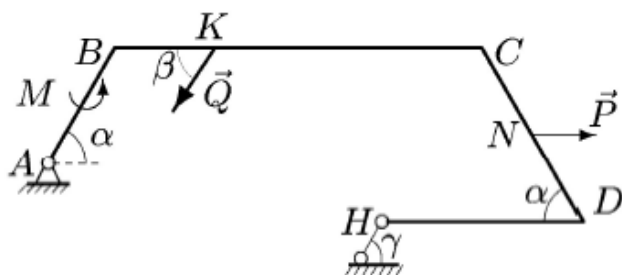
$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ,$$

$$HB = 6 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$$

$$CD = 11 \text{ м}, DA = 4 \text{ м},$$

$$CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$$

7. Рыскулбеков Нариман Ануарович



$$\rho = 1 \text{ кН/м}, P = 7 \text{ кН},$$

$$Q = 17 \text{ кН}, M = 30 \text{ кНм},$$

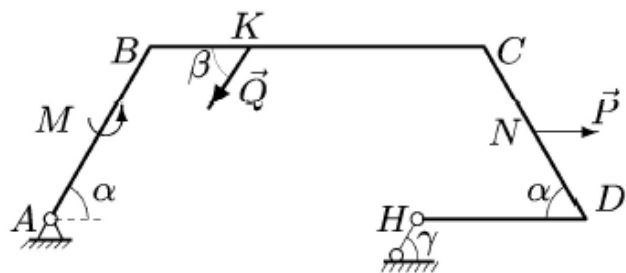
$$\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ,$$

$$AB = 4 \text{ м}, BC = 11 \text{ м},$$

$$CD = 6 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$$

$$BK = 3 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$$

8. Батырбек Шыңғыс Ерланұлы



$$\rho = 2 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$$

$$Q = 18 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм},$$

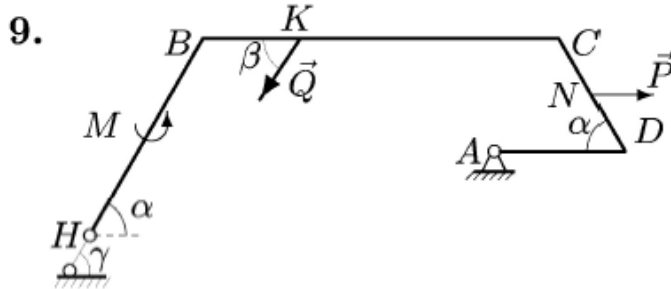
$$\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ,$$

$$AB = 6 \text{ м}, BC = 10 \text{ м},$$

$$CD = 6 \text{ м}, DH = 5 \text{ м},$$

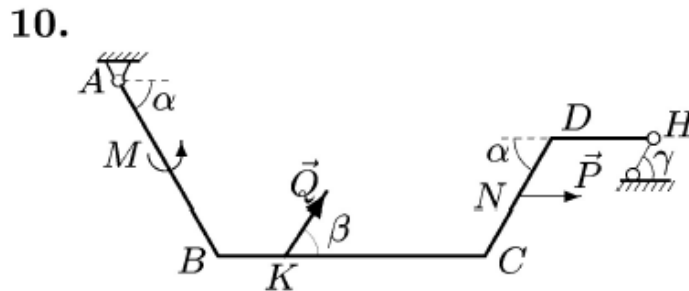
$$BK = 3 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$$

Байбеков Әділет Серікұлы



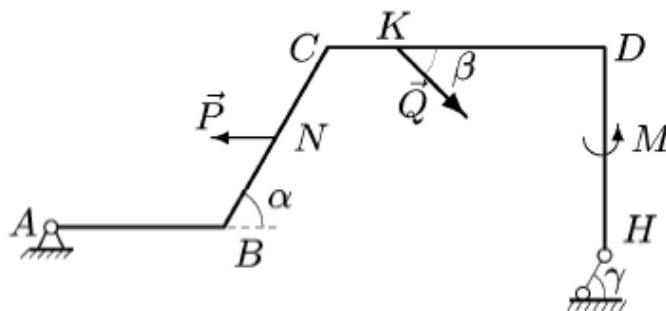
$\rho = 3 \text{ кН/м}$, $P = 9 \text{ кН}$,
 $Q = 19 \text{ кН}$, $M = 70 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 7 \text{ м}$, $BC = 11 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DA = 4 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

Китабанова Ясмينا Дандыбаевна



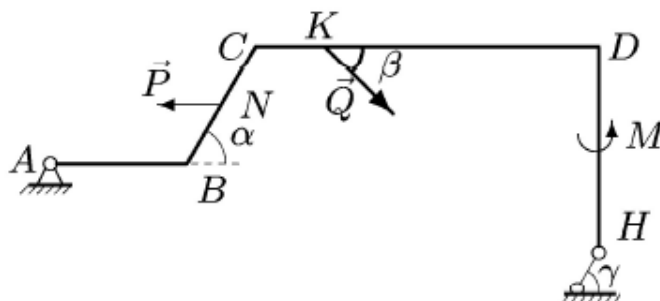
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 20 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 8 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DH = 3 \text{ м}$,
 $BK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

11. Талгаткызы Галия



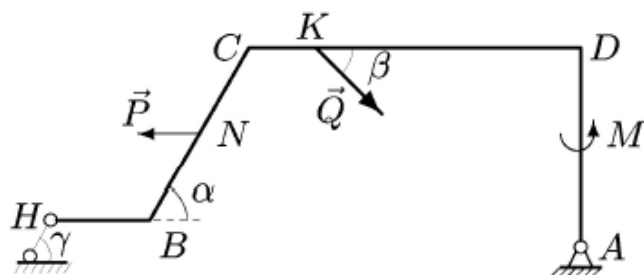
$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 5 \text{ кН}$,
 $Q = 11 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$,
 $CD = 8 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

12. Мисирова Диана Дамировна



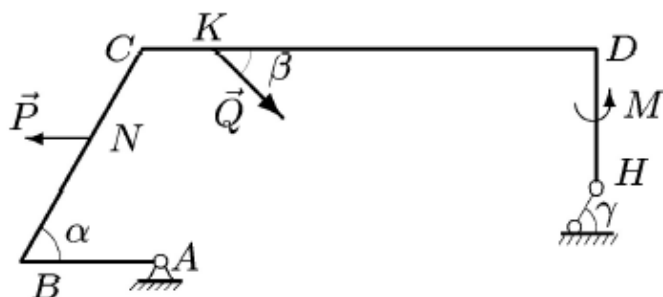
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 6 \text{ кН}$,
 $Q = 12 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$,
 $CD = 10 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

13. Утепов Булат Ерланович



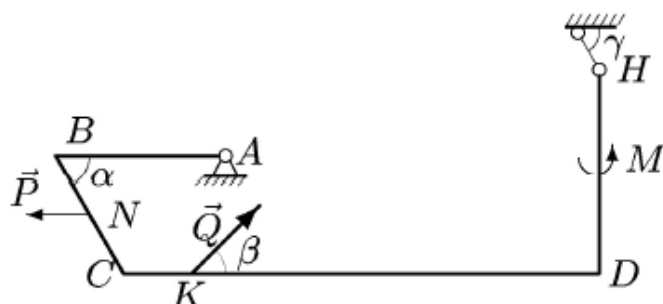
$\rho = 3 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$
 $Q = 13 \text{ кН}, M = 70 \text{ кНм},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ,$
 $HB = 3 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$
 $CD = 10 \text{ м}, DA = 6 \text{ м},$
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

14. Толегенова Сабина Толегеновна



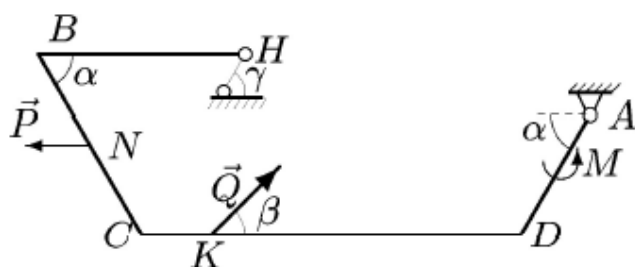
$\rho = 1 \text{ кН/м}, P = 6 \text{ кН},$
 $Q = 14 \text{ кН}, M = 30 \text{ кНм},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 30^\circ,$
 $AB = 4 \text{ м}, BC = 7 \text{ м},$
 $CD = 13 \text{ м}, DH = 4 \text{ м},$
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

15. Мұстахан Әділхан



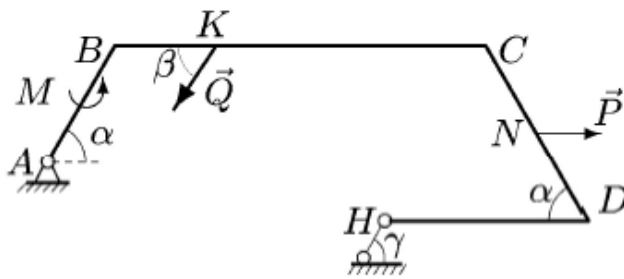
$\rho = 2 \text{ кН/м}, P = 7 \text{ кН},$
 $Q = 15 \text{ кН}, M = 50 \text{ кНм},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ,$
 $AB = 5 \text{ м}, BC = 4 \text{ м},$
 $CD = 14 \text{ м}, DH = 6 \text{ м},$
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 2 \text{ м}.$

16. Даулетбай Бейбіт Мұхамбетұлы



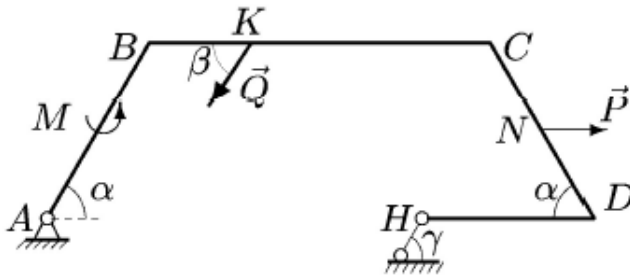
$\rho = 3 \text{ кН/м}, P = 8 \text{ кН},$
 $Q = 16 \text{ кН}, M = 70 \text{ кНм},$
 $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ,$
 $HB = 6 \text{ м}, BC = 6 \text{ м},$
 $CD = 11 \text{ м}, DA = 4 \text{ м},$
 $CK = 2 \text{ м}, CN = 3 \text{ м}.$

17. Толаходжаев Икрамхон Юлдашович



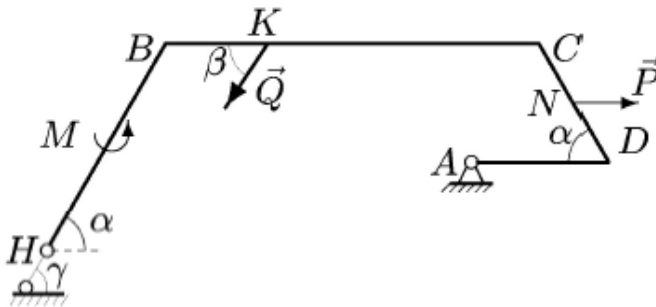
$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 7 \text{ кН}$,
 $Q = 17 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 11 \text{ м}$,
 $CD = 6 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

18. Сәлім Нұр Камельұлы



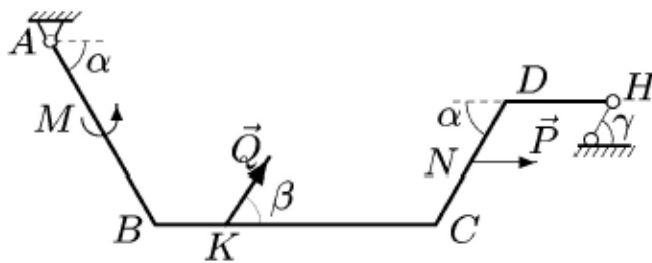
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 18 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 10 \text{ м}$,
 $CD = 6 \text{ м}$, $DH = 5 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

19. Берушев Камилъ Рамильевич



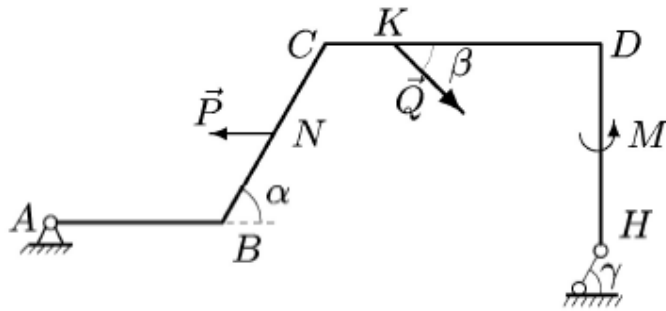
$\rho = 3 \text{ кН/м}$, $P = 9 \text{ кН}$,
 $Q = 19 \text{ кН}$, $M = 70 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $HB = 7 \text{ м}$, $BC = 11 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DA = 4 \text{ м}$,
 $BK = 3 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

20. Султанова Руфина Майдановна



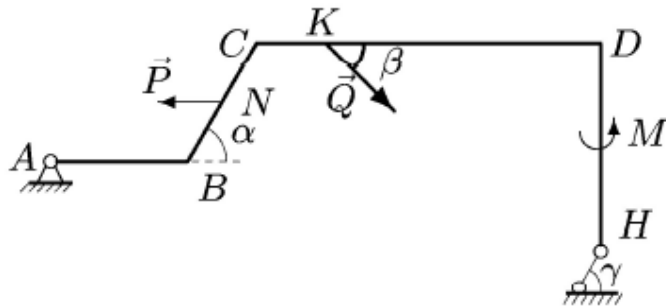
$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 8 \text{ кН}$,
 $Q = 20 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 8 \text{ м}$,
 $CD = 4 \text{ м}$, $DH = 3 \text{ м}$,
 $BK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.

21. Тұраш Бекболат Серікұлы



$\rho = 1 \text{ кН/м}$, $P = 5 \text{ кН}$,
 $Q = 11 \text{ кН}$, $M = 30 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$,
 $CD = 8 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 3 \text{ м}$.

22. Аликулова Медина Сабыровна



$\rho = 2 \text{ кН/м}$, $P = 6 \text{ кН}$,
 $Q = 12 \text{ кН}$, $M = 50 \text{ кНм}$,
 $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$,
 $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$,
 $CD = 10 \text{ м}$, $DH = 6 \text{ м}$,
 $CK = 2 \text{ м}$, $CN = 2 \text{ м}$.