

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет «МЭИ»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсам

«Радиотехнические цепи и сигналы»
«Цепи и сигналы в медицинской электронике»

Кафедра Основ радиотехники

Авторский коллектив:

Профессор кафедры ОРТ _____ В.Г.Карташев

Доцент кафедры ОРТ _____ Е.В.Шалимова

Москва

2017

НИУ «МЭИ»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1.	5
1. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ	5
1.1. Классификация сигналов	5
1.2. Элементарные сигналы. Динамическое представление сигналов	6
1.3. Спектры периодических сигналов	10
Лекция 2.	17
1.4. Спектральное представление непериодических сигналов.....	17
1.4.1. Спектральная плотность непериодических сигналов	17
1.4.2. Свойства спектральной плотности	19
Лекция 3.	24
1.5. Примеры вычисления спектральной плотности конкретных импульсов.....	24
1.6. Спектры неинтегрируемых сигналов	29
1.7. Спектральная плотность импульсов с высокочастотным заполнением	32
1.8. Энергетический спектр	33
Лекция 4.	35
1.9. Корреляционный анализ сигналов.....	35
1.9.1. Автокорреляционная функция	35
1.9.2. Взаимно корреляционная функция	38
Контрольные вопросы.....	40
Лекция 5.	41
2. Модулированные сигналы.....	41
2.1. Амплитудно-модулированные сигналы	41
2.2. Сигналы с угловой модуляцией	46
Лекция 6.	49
2.3. Сигналы со сложной модуляцией.....	52
2.3.1. Импульсы с линейной частотной модуляцией	52
2.3.2. Фазоманипулированные сигналы	54
Лекция 7.	55
2.4. Узкополосные сигналы.....	55
2.4.1. Физическая огибающая и комплексная огибающая	55
2.4.2. Аналитический сигнал	57
Контрольные вопросы.....	60
Лекция 8.	61
3. Анализ прохождения радиотехнических сигналов через линейные цепи	61
3.1. Взаимосвязь различных методов анализа прохождения сигналов через линейные цепи	61
3.1.1. Метод дифференциальных уравнений	61
3.1.2. Интеграл Дюамеля	62
3.1.3. Операторный метод.....	62
3.1.4. Спектральный метод	62
3.1.5. Взаимосвязь различных методов анализа	64
3.2. Анализ воздействия амплитудно-модулированных сигналов на избирательные цепи	65
Лекция 9.	70

3.3. Анализ прохождения ЧМ сигналов через избирательные цепи.....	70
3.4. Анализ прохождения узкополосных сигналов через избирательные цепи методом низкочастотных эквивалентов	72
Лекция 10.	74
3.4.1. Подключение гармонического сигнала к последовательному колебательному контуру при совпадении частоты сигнала и резонансной частоты контура	74
3.4.2. Подключение гармонического сигнала к последовательному колебательному контуру при $\omega_0 \neq \omega_p$	77
Лекция 11.	79
3.4.3. Воздействие радиоимпульсов с прямоугольной огибающей на параллельный колебательный контур. ..	79
3.5. Прохождение фазоманипулированных сигналов через одноконтурные избирательные цепи	82
Контрольные вопросы.....	84
Лекция 12.	85
4. Нелинейные преобразования сигналов	85
4.1. Анализ воздействия гармонического сигнала на нелинейный элемент	85
4.1.1. Определение амплитуд гармоник тока при кусочно-линейной аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента	87
4.1.2. Определение амплитуд гармоник тока при аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента степенным рядом.....	89
Лекция 13.	92
4.2. Нелинейное резонансное усиление.....	92
4.3. Умножение частоты	98
Лекция 14.	100
4.4. Воздействие нескольких гармонических сигналов на нелинейные элементы. Теория комбинационных частот.....	100
4.5. Амплитудная модуляция	104
Лекция 15.	106
4.6. Детектирование АМ сигналов.....	106
4.6.1. Коллекторный детектор.....	106
4.6.2. Диодный детектор	110
Лекция 16.	114
4.7. Преобразование частоты.....	114
4.8. Синхронное детектирование	118
Контрольные вопросы.....	119
Часть 2	121
1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.....	121
1.1. Общее понятие о цифровой обработке сигналов	121
1.2. Z-преобразование и его свойства	125
1.2.1. Z-преобразование	125
1.2.2. Основные свойства z-преобразования	128
1.3. Цифровые фильтры и их характеристики	130
1.3.1. Универсальный алгоритм линейной цифровой фильтрации.....	130
1.3.2. Характеристики цифровых фильтров.....	131
1.3.3. Частотные характеристики цифровых фильтров.....	140
1.3.4. Сравнение характеристик рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров	142
1.3.5. Формы реализации цифровых фильтров.....	143
1.4. Основы синтеза цифровых фильтров	146

1.4.1. Метод инвариантной импульсной характеристики.....	146
1.4.2. Метод билинейного z-преобразования.....	147
Контрольные вопросы.....	152
2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ.....	153
2.1. Основы дискретизации сигналов. Теорема В.А.Котельникова.....	153
2.2. Спектры дискретных сигналов.....	157
2.3. Погрешности дискретизации и восстановления сигналов.....	161
2.4. Дискретизация в спектральной области.....	163
2.5. Число степеней свободы сигнала.....	164
2.6. Шум квантования, его характеристики. Эффекты квантования в ЦФ.....	165
2.6.1. Шум квантования.....	165
2.6.2. Погрешности, вызываемые квантованием входного сигнала.....	166
2.6.3. Влияние квантования результатов промежуточных вычислений.....	167
2.6.4. Ошибки, вызываемые неточными значениями коэффициентов фильтра.....	170
2.6.5. Предельные циклы низкого уровня.....	171
3. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ.....	172
3.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства.....	172
3.2. Быстрое преобразование Фурье.....	176
3.3. Применение быстрого преобразования Фурье.....	179
Контрольные вопросы.....	181
Литература.....	182

Лекция 1.

1. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

1.1. Классификация сигналов

Понятие "сигнал" – очень емкое, и в него в зависимости от контекста вкладывают различный смысл. В радиотехнике *сигналом* называется некоторая изменяющаяся во времени физическая величина, являющаяся переносчиком информации. Чаще всего это бывает напряжение или ток.

Изучение теории сигналов обычно начинают с терминологии и классификации.

Классификация сигналов может производиться по различным признакам.

Начнем с того, что сигналы подразделяются на детерминированные и случайные. *Детерминированными* называются сигналы, которые можно описать наперед известной функцией времени. В отличие от них *случайные* сигналы не могут быть заданы известной функцией, их можно описать лишь статистическими характеристиками. Случайные сигналы – это обычно помехи. Однако и сигналы, несущие информацию, если их форма заранее неизвестна, можно рассматривать как случайные.

Сигналы можно классифицировать по характеру их зависимости от времени. Они могут иметь бесконечную протяженность или быть ограниченными во времени. К бесконечно протяженным сигналам относятся, например, периодические сигналы, в том числе гармонический сигнал.

Сигналы, имеющие конечную протяженность, т. е. отличные от нуля на конечном интервале, называются *импульсами*. Различают видеоимпульсы и радиоимпульсы. *Радиоимпульсы* в отличие от *видеоимпульсов*, имеют высокочастотное заполнение (см. рис. 1.1).

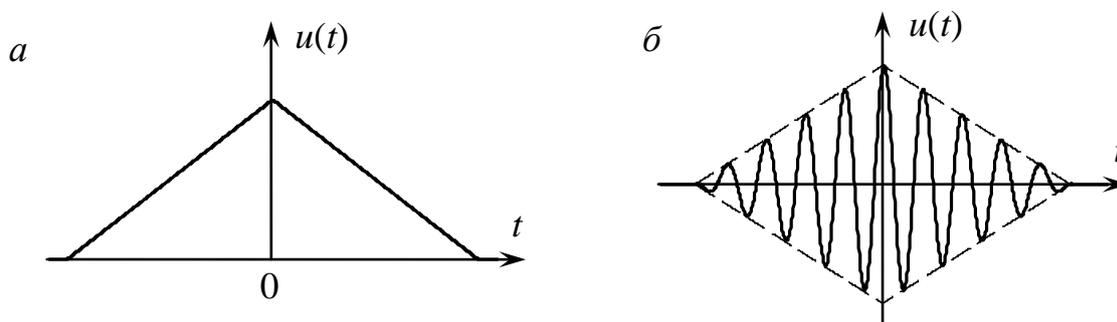


Рис. 1.1. *a* – видеоимпульс; *б* – радиоимпульс

Радиоимпульсы, со своей стороны, относятся к так называемым радиосигналам, которые могут быть описаны математическим выражением вида $u(t) = U_m(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, где $U_m(t)$ и $\varphi(t)$ – медленные функции времени; $U_m(t)$ называется *огibaющей*, ω_0 – *несущей частотой* радиосигнала. К радиосигналам кроме радиоимпульсов относятся модулированные сигналы.

Все перечисленные выше виды сигналов, и детерминированные, и случайные, являются аналоговыми, или континуальными. *Аналоговые* сигналы принимают какое-либо значение в любой момент времени. Кроме аналоговых, существуют еще дискретные и цифровые сигналы, которые в последнее время получили широкое распространение в связи с развитием цифровой обработки сигналов. *Дискретные* сигналы задаются лишь в определенные дискретные моменты времени, а *цифровые* сигналы представляют собой последовательность чисел, заданных обычно в кодах вычислительной машины.

1.2. Элементарные сигналы. Динамическое представление сигналов

При решении некоторых инженерных задач относительно сложные радиотехнические сигналы оказывается целесообразным представить в виде суммы (суперпозиции) более простых, так называемых, элементарных сигналов. Например, при анализе прохождения сигналов через линейные цепи необходимо бывает рассчитать форму сигнала на выходе цепи. Это можно сделать, представив входной сигнал в виде суммы очень простых элементарных сигналов, результат прохождения которых через исследуемую цепь известен или его легко найти. Наиболее употребительными *элементарными* сигналами являются функция включения (единичный скачок), дельта-функция и гармонический сигнал.

Функция включения (функция Хэвисайда) (рис.1.2 а) описывается выражением

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0. \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Ее можно рассматривать как предельный переход при $\theta \rightarrow 0$ функции $s(t)$, изображенной на рис. 1.2 б.

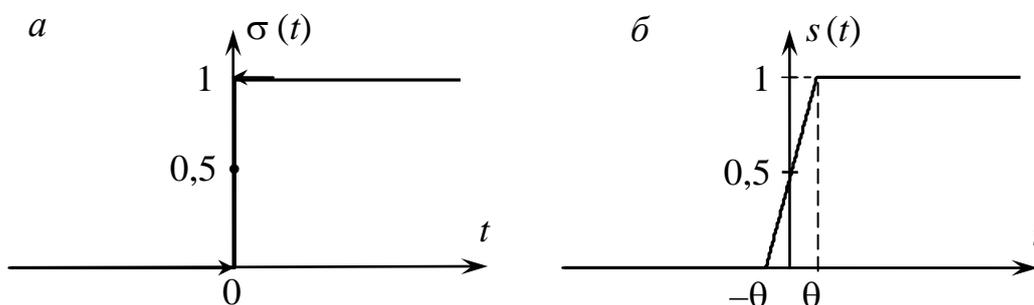


Рис. 1.2. Функция Хэвисайда (а) и ее приближение (б).

Произвольный сигнал можно представить в виде суперпозиции функций включения, как показано на рис. 1.3.

$$f(t) = f(0)\sigma(t) + [f(\Delta) - f(0)]\sigma(t - \Delta) + [f(2\Delta) - f(\Delta)]\sigma(t - 2\Delta) + \dots$$

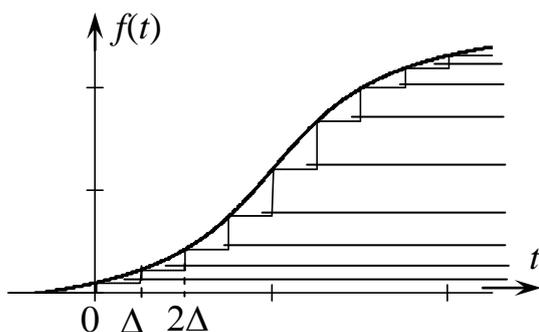


Рис. 1.3. Представление произвольного сигнала с помощью функций Хэвисайда.

Если теперь шаг Δ устремить к нулю, то дискретную переменную $k\Delta$ можно заменить непрерывной переменной τ , а скачки сигнала $f(k\Delta) - f((k-1)\Delta)$ превращаются в дифференциал $df = (df/d\tau)d\tau$, в результате чего получается формула представления сигнала в виде суперпозиции функций Хэвисайда:

$$f(t) = f(0)\sigma(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.2)$$

В курсе основ теории цепей вводится понятие **переходной** характеристики как реакции цепи на единичный скачок на входе. Иначе говоря, если на вход цепи подать сигнал в виде единичного скачка $\sigma(t)$, то на выходе получится сигнал в виде переходной характеристики $g(t)$. Зная переходную характеристику, легко найти сигнал на выходе цепи при действии на ее входе произвольного сигнала $f(t)$, например, представленного на рис. 1.3. В результате действия каждого элементарного скачка $\sigma(t - k\Delta)$, умноженного на высоту соответствующей ступеньки, на выходе будет получаться сигнал $g(t - k\Delta)$, умноженный на такую же высоту ступеньки. В итоге мы можем легко получить выражение для выходного сигнала, заменив в формуле (1.2) $\sigma(t)$ на $g(t)$:

$$f_{\text{вых}}(t) = f(0)g(t) + \int_0^{\infty} \frac{df}{d\tau} g(t - \tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Это выражение является хорошо известной формулой **интеграла Дюамеля**.

Дельта-функция (функция Дирака) – это очень своеобразный математический объект. Она равна нулю при всех значениях аргумента кроме $t = 0$, а при $t = 0$ она равна бесконечности:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Кроме того, δ -функция удовлетворяет дополнительному условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.5)$$

Дельта-функцию можно рассматривать как предельный случай очень короткого импульса единичной площади (рис. 1.4). Если устремить длительность

такого импульса к нулю при неизменной площади, то в пределе получим δ -функцию:

$$\delta(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} v(t)$$

Поскольку δ -функция имеет единичную площадь, ее размерность – $1/c$.

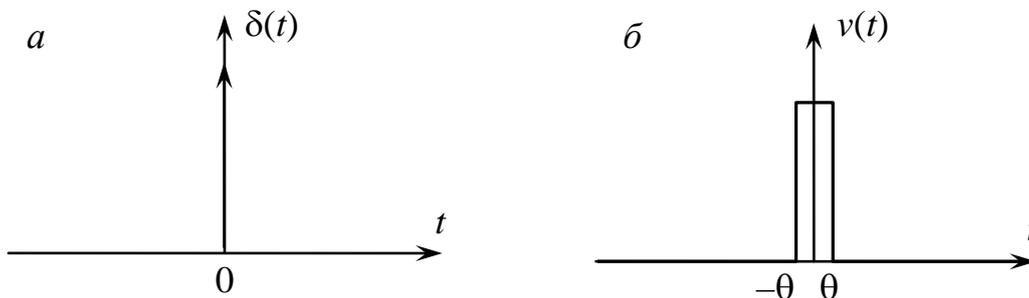


Рис. 1.4. Дельта-функция (а) и ее приближение (б)

Дельта-функция связана с функцией включения простым соотношением. Нетрудно видеть, что функция $v(t)$, изображенная на рис. 1.4, равна производной от функции $s(t)$ на рис. 1.2 б:

$$v(t) = ds(t)/dt.$$

Полагая $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\delta(t) = d\sigma(t)/dt. \tag{1.6}$$

Дельта-функцию принято изображать графически в виде вертикальной стрелки (см. рис. 1.4 а).

Очевидно, что сигнал в виде идеальной δ -функции реально существовать не может. Однако δ -функция оказывается очень удобной математической моделью при описании коротких импульсов. Произвольный сигнал можно рассматривать как суперпозицию коротких импульсов, как показано на рис. 1.5.

$$f(t) \approx \sum_k f(k\Delta)v(t - k\Delta)$$

Устремляя $\Delta \rightarrow 0$, получим:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau. \tag{1.7}$$

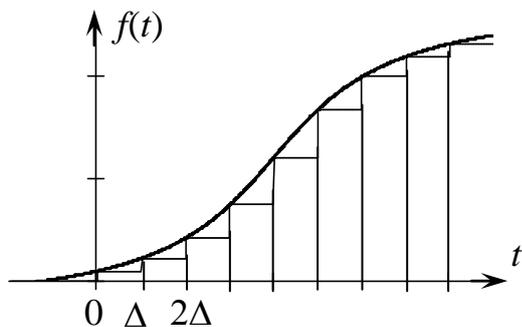


Рис.1.5. Представление произвольного сигнала в виде суперпозиции коротких импульсов

Если на вход линейной цепи подать δ -функцию, то сигнал на ее выходе называется **импульсной характеристикой** $h(t)$. Если же на вход подать произвольный сигнал (рис. 1.5), составленный из очень коротких импульсов, то каждый из этих коротких импульсов породит на выходе цепи сигнал, пропорциональный импульсной характеристике. В результате выходной сигнал может быть представлен в виде

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (1.8)$$

т.е. сигнал на выходе цепи равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики цепи.

Дельта-функция обладает еще одной примечательной особенностью, которую называют фильтрующим свойством. Если она входит в состав подынтегрального выражения, то такие интегралы очень легко вычисляются. Математически это выражается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a). \quad (1.9)$$

Интеграл от некоторой функции $f(t)$, умноженной на δ -функцию, равен значению подынтегральной функции $f(t)$ в той точке, где δ -функция обращается в бесконечность.

Гармонический сигнал (рис. 1.6) описывается математическим выражением

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

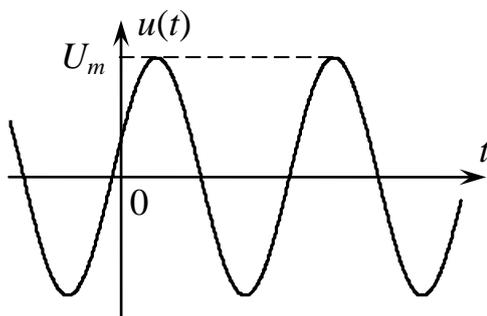


Рис. 1.6. Гармонический сигнал

Гармонические сигналы получили широкое распространение в радиотехнике благодаря следующим отличительным качествам.

1. Это единственный вид сигнала, который не изменяет своей формы при прохождении через любую линейную систему. Изменяется только амплитуда и фаза сигнала на выходе.

2. Собственные колебания колебательных контуров и других резонансных устройств имеют вид гармонической функции. Благодаря этому гармонические сигналы разных частот легко отфильтровывать друг от друга.

3. Гармонические сигналы можно генерировать с помощью относительно простых устройств.

В течение почти ста лет с момента изобретения радио гармонические сигналы были почти единственным видом сигналов, который использовался в качестве несущего колебания при передаче информации по радиоканалам. И хотя в последние годы в связи с развитием цифровой техники наряду с гармоническими сигналами стали использоваться другие виды сигналов, значение гармонических сигналов в радиотехнике по-прежнему остается чрезвычайно высоким.

1.3. Спектры периодических сигналов

Спектром называется представление сигнала в виде суперпозиции (суммы) гармонических составляющих с различной частотой.

Одна из важнейших причин широкого применения спектров в радиотехнике состоит в следующем. Гармонические сигналы обладают уникальным свойством: при прохождении через любую линейную систему (колебательный контур, любой фильтр, усилитель и т. п.) форма такого сигнала не изменяется, а изменяется только его амплитуда и фаза. Это позволяет, представив произвольный сигнал на входе линейной системы в виде суммы гармонических составляющих, рассмотреть прохождение каждой составляющей отдельно и затем, просуммировав эти составляющие на выходе линейной системы, найти вид выходного сигнала.

Есть и другие, не менее важные приложения спектральной теории сигналов, с которыми Вы познакомитесь в процессе обучения в вузе.

Спектральное представление сигналов очень широко применяется в инженерной практике. Квалифицированный инженер по виду спектра может легко определить вид сигнала и его характеристики. В некоторых случаях вид спектра сигнала несет более важную и более наглядную информацию о характеристиках сигнала, чем его временная зависимость. И наконец, в последние годы разработаны мощные компьютерные средства для решения различных радиотехнических задач, в том числе быстрое преобразование Фурье, с помощью которого можно легко переходить от временной зависимости сигнала к его спектру и обратно, решать другие инженерные задачи.

Наиболее просто можно определить спектр периодического сигнала (рис. 1.7) $\Phi(t) = \Phi(t + nT)$, где n – целое число, T – период повторения.

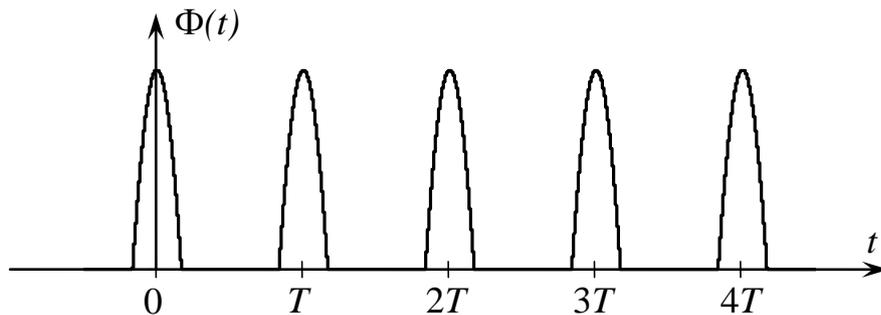


Рис. 1.7. Периодический сигнал

Из курса математики известно, что всякую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье:

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)] \quad (1.10)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Phi(t) \cos(k\Omega t) dt, \quad (1.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Phi(t) \sin(k\Omega t) dt, \quad (1.12)$$

где $\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T}}$ – частота первой гармоники (1.13).

Обычно используется более удобная форма записи ряда Фурье:

$$\Phi(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)] \quad (1.14)$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ (1.15)

Соответственно, $a_k = A_k \cos(\varphi_k)$, $b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$.

Сигнал в виде ряда Фурье удобно представить в виде спектральной диаграммы (рис. 1.8). Здесь каждая спектральная составляющая изображена вертикальной линией, высота которой пропорциональна амплитуде составляющей A_k , положение каждой составляющей на оси абсцисс определяется ее частотой $k\Omega$. В случае необходимости рядом с каждой составляющей можно записывать значение фазы φ_k .

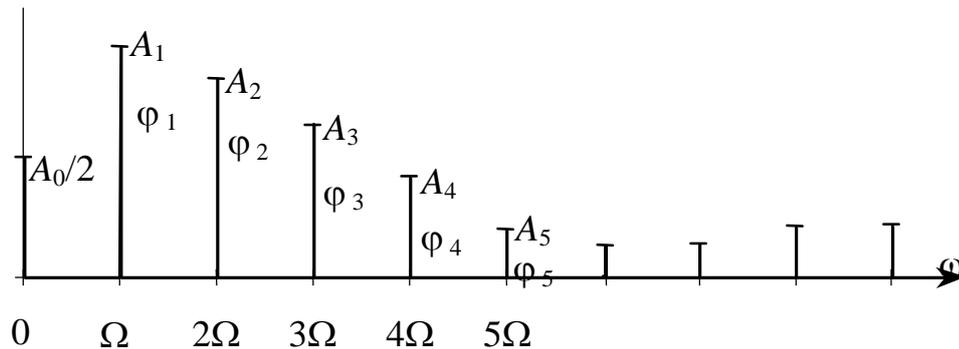


Рис. 1.8. Спектральная диаграмма периодического сигнала

Составляющая спектра с нулевой частотой называется **постоянной составляющей**; составляющая с частотой Ω (основной частотой) – **первой гармоникой**; составляющая с частотой 2Ω – второй гармоникой и так далее.

Ряд Фурье может быть записан в комплексной форме. Для этого в выражении (1.14) заменим косинус его представлением по формуле Эйлера:

$$\cos(k\Omega t + \varphi_k) = \frac{1}{2} [e^{j(k\Omega t + \varphi_k)} + e^{-j(k\Omega t + \varphi_k)}]$$

В результате получим $\Phi(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\Omega t} e^{j\operatorname{sign}(k)\varphi_k}$.

Перейдем к комплексным амплитудам. Обозначим

$\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k}$ – для положительных значений k ,

$\dot{A}_{-k} = A_k e^{-j\varphi_k}$ – для отрицательных значений k .

В результате получим окончательное выражение для **ряда Фурье в комплексной форме**:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega t} \quad (1.16)$$

Особенность ряда Фурье в комплексной форме состоит в том, что функция $\Phi(t)$ представлена в виде суммы составляющих вида $e^{jk\Omega t}$, причем каждому положительному значению k соответствует такое же по модулю отрицательное значение k . Линейная комбинация составляющих $e^{jk\Omega t}$ и $e^{-jk\Omega t}$ представляет собой гармонические функции $\cos(k\Omega t)$ и $\sin(k\Omega t)$, в соответствии с известными формулами Эйлера:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}.$$

Таким образом, ряд Фурье в комплексной форме также описывает разложение периодической функции на гармонические составляющие, только форма записи здесь иная.

Найдем выражение для определения комплексных амплитуд гармоник A_k . Для этого воспользуемся выражениями (1.11), (1.12):

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{j\varphi_k} = A_k \cos(\varphi_k) + jA_k \sin(\varphi_k) = a_k - jb_k = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \cos(k\Omega t) dt - j \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) \sin(k\Omega t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) [\cos(k\Omega t) - j \sin(k\Omega t)] dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi(t) e^{-jk\Omega t} dt. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Как будет видно из дальнейших примеров, комплексная форма ряда Фурье часто оказывается предпочтительной для вычисления спектров конкретных периодических сигналов.

Для удобства построения спектральной диаграммы вводится понятие **огибающей спектра**:

$$A(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.18)$$

Чтобы построить спектральную диаграмму с помощью огибающей спектра, нужно сначала с помощью формулы (1.18) найти функцию $\dot{A}(\omega)$, построить ее график, как показано на рис. 1.9, и затем расставить спектральные линии на расстоянии $\Omega = 2\pi/T$ друг от друга.

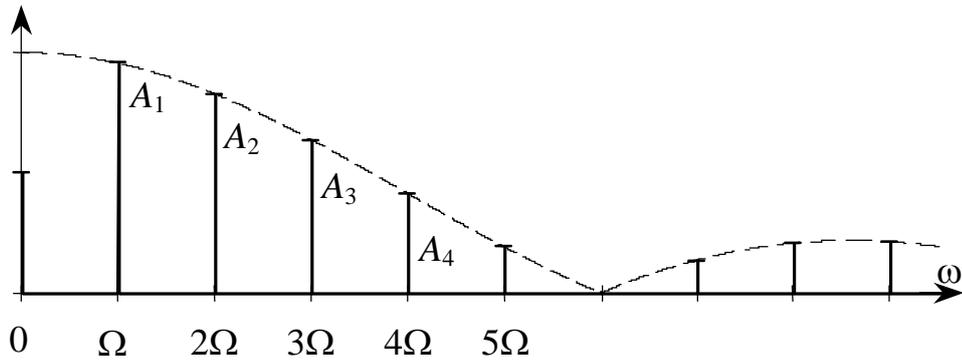


Рис. 1.9. Использование огибающей спектра $A(\omega)$ для построения спектральной диаграммы

Рассмотрим в качестве примера построение спектральной диаграммы периодической последовательности прямоугольных импульсов, длительностью T_n и амплитудой E (рис. 1.10).

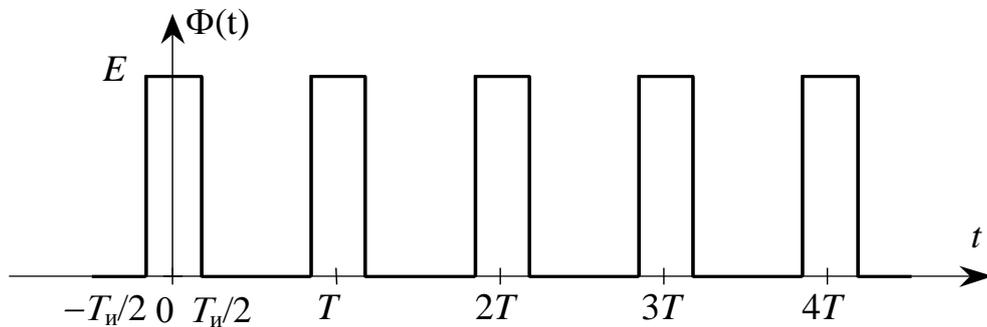


Рис. 1.10. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Найдем огибающую спектра:

$$\dot{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} E e^{-j\omega t} dt = \frac{2E}{-j\omega T} \left(e^{-j\omega T_n/2} - e^{j\omega T_n/2} \right) = \frac{4E}{\omega T} \sin\left(\omega \frac{T_n}{2}\right).$$

Для удобства построения графика огибающей спектра полученное выше выражение для $\dot{A}(\omega)$ преобразуем к следующему виду:

$$\dot{A}(\omega) = \frac{2ET_n}{T} \frac{\sin\left(\omega \frac{T_n}{2}\right)}{\omega \frac{T_n}{2}}. \quad (1.19)$$

Огибающая спектра $A(\omega)$ является вещественной функцией, ее график представлен на рис. 1.11 штриховой линией. Характерной точкой графика является значение частоты ω , при котором огибающая спектра впервые обращается в нуль. Это происходит, когда аргумент синуса равен π и, следовательно, частота $\omega = 2\pi/T_n$.

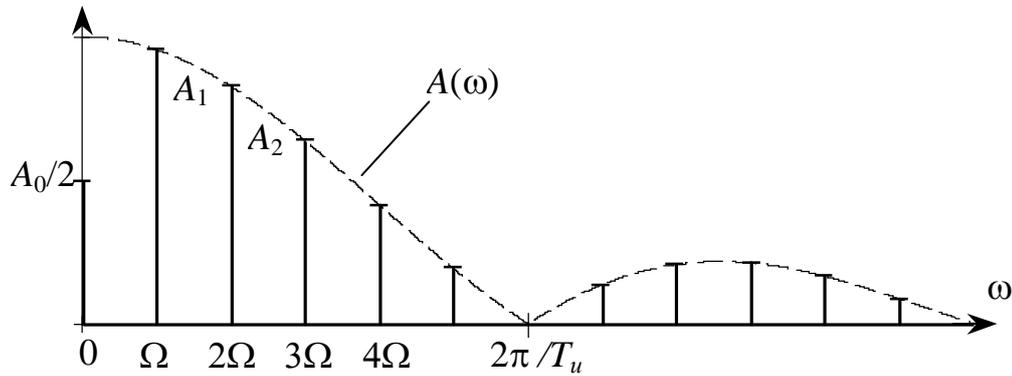


Рис. 1.11. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Подставив в (1.19) значение частоты первой гармоники $\Omega = 2\pi/T$, найдем амплитуду первой гармоники:

$$A_1 = \frac{2E}{\pi} \sin\left(\frac{\pi T_{\text{и}}}{T}\right).$$

Аналогично для k -й гармоники

$$A_k = \frac{2E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi T_{\text{и}}}{T}\right).$$

Величина постоянной составляющей $A_0/2$ вычисляется отдельно по формуле

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Phi(t) dt.$$

В нашем случае $\frac{A_0}{2} = \frac{ET_{\text{и}}}{T}$.

Нетрудно видеть, что величина постоянной составляющей не равна значению огибающей спектра при $\omega = 0$, она выпадает из общей тенденции изменения амплитуд гармоник. Такая особенность спектра характерна для большинства периодических сигналов.

Необходимо отметить, что спектральное представление сигналов – не математическая абстракция, а отражение реально существующего явления. Если взять реальные гармонические сигналы с соответствующими амплитудами и фазами и сложить их, то в результате суммирования получится исходный сигнал, например, периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Это легче всего продемонстрировать на примере периодической последовательности прямоугольных импульсов, у которой интервал между импульсами равен длительности импульсов, т. е. $T = 2T_{\text{и}}$. Такой сигнал, изображенный на рис. 1.12, называется **меандром**. Найдем амплитуды основных гармонических составляющих меандра:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{E}{2}; \quad A_1 = \frac{2E}{\pi}; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = \frac{2E}{3\pi}; \quad A_4 = 0; \quad A_5 = \frac{2E}{5\pi}; \dots$$

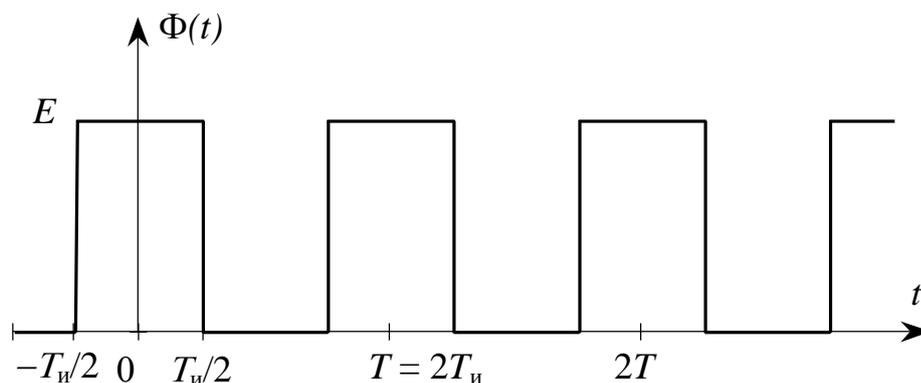


Рис. 1.12. Меандр

На рис. 1.13 а, б, в последовательно показаны постоянная составляющая плюс первая гармоника; сумма постоянной составляющей и первых трех гармоник; сумма постоянной составляющей и первых пяти гармоник. Хорошо видно, как с увеличением числа гармоник форма сигнала приближается к меандру.

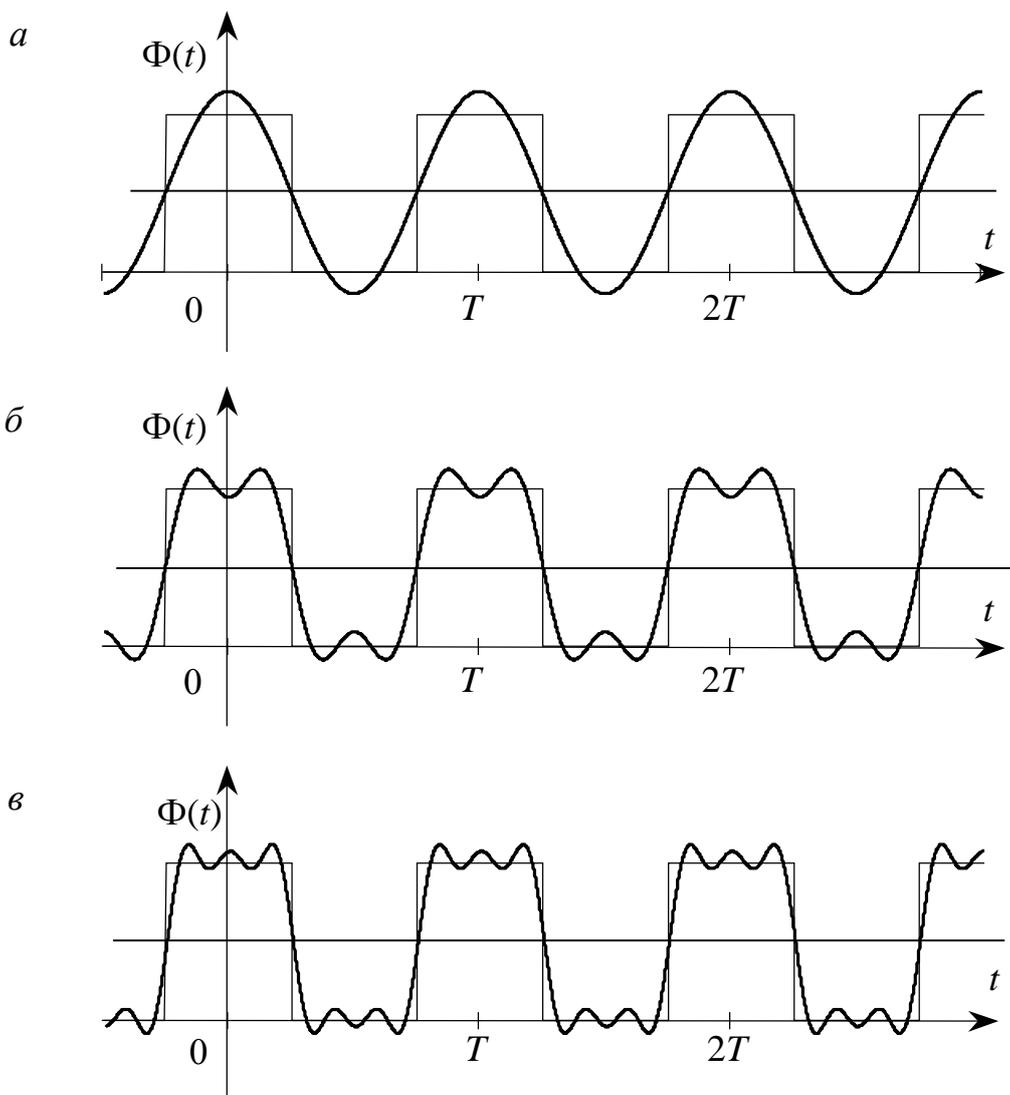


Рис. 1.13. Представление меандра суммой постоянной составляющей и первой гармоники (а), суммой постоянной составляющей и первых трех гармоник (б), суммой постоянной составляющей и первых пяти гармоник (в)

Рассмотрим, как зависит характер спектра от параметров периодической последовательности импульсов. Если увеличить (или уменьшить) длительность импульсов $T_{и}$, то сожмется (или вытянется) по частоте огибающая спектра; положение спектральных линий при этом не изменится. Если же увеличивать расстояние между импульсами, т. е. период повторения T , не изменяя размеров и формы каждого отдельного импульса, то расстояние между отдельными спектральными составляющими и их высота будут уменьшаться обратно пропорционально периоду повторения T (рис. 1.14). Эту закономерность мы будем использовать в дальнейшем для определения спектров отдельных импульсов.

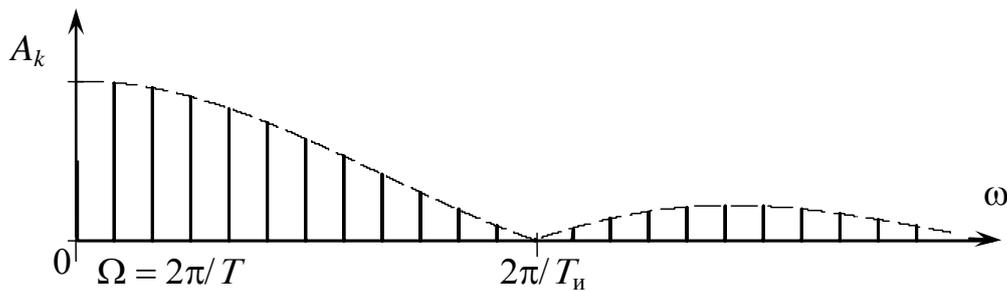


Рис. 1.14. Спектр периодического сигнала при увеличенном периоде повторения T

Распределение мощности периодического сигнала по спектру

Вычислим среднюю за период мощность периодического сигнала, выделяемую на резисторе с единичным сопротивлением:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt. \quad (1.20)$$

Подставим в (1.20) представление сигнала $u(t)$ в виде ряда Фурье (1.16), раскроем скобки внутри интеграла и частично преобразуем это выражение:

$$P = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{T} \int_0^T \cos^2(k\Omega t + \varphi_k) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_0 A_k}{T} \int_0^T \cos(k\Omega t + \varphi_k) dt + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2A_k A_l}{T} \int_0^T \cos(k\Omega t + \varphi_k) \cos(l\Omega t + \varphi_l) dt.$$

Второе слагаемое в этом выражении содержит интегралы от квадрата косинуса за целое число периодов, каждый из которых равен $T/2$. Третье слагаемое состоит из интегралов от косинуса за целое число периодов и поэтому равно нулю. И, наконец, последнее слагаемое содержит произведения косинусов с разными частотами и фазами, которые можно заменить косинусами суммы и

разности частот и фаз, интегралы от которых также равны нулю. В результате получается простое выражение

$$P = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}. \quad (1.21)$$

Средняя за период мощность периодического сигнала равна сумме мощностей постоянной составляющей и всех гармоник.

Лекция 2.

1.4. Спектральное представление непериодических сигналов

1.4.1. Спектральная плотность непериодических сигналов

Чтобы получить спектральное представление непериодических сигналов, будем безгранично увеличивать расстояние между импульсами, устремляя период повторения T к бесконечности, так, чтобы в пределе остался один импульс. При этом расстояние между соседними спектральными составляющими и амплитуда каждой составляющей будут уменьшаться, стремясь к нулю (см. рис. 1.15). При этом спектр становится сплошным и его описание с помощью обычной спектральной диаграммы оказывается невозможным. Однако если взять небольшой интервал частот, например, шириной 1 Гц, то суммарная амплитуда всех спектральных составляющих внутри этого интервала будет оставаться неизменной. Эту суммарную амплитуду называют спектральной плотностью импульса.



Рис. 1.15. Характер изменения спектра периодического сигнала при $T \rightarrow \infty$

Переход к спектру одиночного импульса можно математически описать следующим образом.

Запишем выражение (1.18) для огибающей спектра периодической последовательности импульсов:

$$\dot{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt$$

Если период повторения импульсов T достаточно большой, функцию $\Phi(t)$ в подынтегральном выражении можно заменить на функцию $f(t)$, описывающую один импульс последовательности:

$$\dot{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Для функции $f(t)$ пределы интегрирования можно заменить на бесконечные:

$$\dot{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{T} \dot{S}(\omega), \quad (1.22)$$

где

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.23)$$

– **спектральная плотность** импульса $f(t)$.

Выражение (1.22) позволяет связать огибающую спектра периодической последовательности импульсов со спектральной плотностью одного импульса.

Выражение вида (1.23) называется **прямым преобразованием Фурье**. Из курса математики известно, что если две функции связаны прямым преобразованием Фурье, то для них справедливо **обратное преобразование Фурье**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} dt \quad (1.24)$$

Происхождение формулы обратного преобразования Фурье можно качественно объяснить следующим образом. Возьмем выражение (1.16) для ряда Фурье в комплексной форме и положим $T \rightarrow \infty$. При этом интервал между соседними спектральными составляющими Ω будет стремиться к нулю, а спектр – становиться непрерывным. Поэтому в выражении (1.16) дискретные значения частоты $k\Omega$ можно заменить непрерывными ω , дискретные спектральные составляющие A_k – непрерывной огибающей спектра $A(\omega)$, которую в свою очередь выразим через спектральную плотность импульса $S(\omega)$, в результате чего получим:

$$\Phi(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t}.$$

Далее, учитывая, что при $T \rightarrow \infty$ интервал между соседними спектральными составляющими Ω становится бесконечно малым, заменим его на $d\omega$, сумму заменим на интеграл, периодическую функцию $\Phi(t)$ – на одиночный импульс $f(t)$, в результате получим формулу обратного преобразования Фурье (1.24).

Физический смысл преобразования Фурье состоит в том, что любую непериодическую функцию $f(t)$ можно представить в виде суперпозиции составляющих вида $e^{j\omega t}$ и $e^{-j\omega t}$, которые вместе образуют гармонические функции $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$. В отличие от ряда Фурье, описывающего дискретный спектр,

преобразование Фурье описывает непрерывный, сплошной спектр. Иначе говоря, в спектре непериодического сигнала могут присутствовать гармонические составляющие с любыми значениями частоты; частотный интервал между соседними составляющими бесконечно мал, и амплитуда каждой составляющей тоже бесконечно мала. Именно поэтому спектр непериодического сигнала описывается не амплитудами отдельных спектральных составляющих, а спектральной плотностью, которая пропорциональна суммарной амплитуде спектральных составляющих в единичной полосе частот.

Понятие спектральной плотности схоже с хорошо известным понятием плотности масс. Если взять бесконечно малый объем любого тела, то сосредоточенная в нем масса бесконечно мала. Поэтому для описания распределения массы тела используется понятие плотности, т. е. массы, заключенной в единице объема.

Преобразование Фурье может быть применено, строго говоря, не для любой функции, а только для такой, которая удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (1.25)$$

Этому условию соответствуют импульсные сигналы, которые равны нулю как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow \infty$, а также все реальные сигналы, имеющие начало и конец. Однако радиоинженеру часто приходится иметь дело с неинтегрируемыми сигналами, которые не удовлетворяют условию (1.25). К неинтегрируемым сигналам относятся, например, постоянный сигнал, импульс включения, гармонический сигнал и другие. Для неинтегрируемых сигналов разработаны специальные приемы, позволяющие в обход математических ограничений находить спектральные плотности этих сигналов.

1.4.2. Свойства спектральной плотности

Линейность

Если имеется линейная комбинация сигналов $af_1(t) + bf_2(t)$, то ее спектральная плотность равна $a\dot{S}_1(\omega) + b\dot{S}_2(\omega)$, где $\dot{S}_1(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f_1(t)$, а $\dot{S}_2(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f_2(t)$. Это свойство легко доказать, если подставить линейную комбинацию сигналов в формулу преобразования Фурье (1.23).

Свойства вещественной и мнимой частей, модуля и аргумента спектральной плотности

Пусть $f(t)$ – сигнал, принимающий вещественные значения. Запишем его спектральную плотность, заменив в формуле преобразования Фурье множитель $e^{-j\omega t}$ комбинацией косинуса и синуса:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt = A(\omega) - jB(\omega),$$

где $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$ – вещественная часть,

$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$ – мнимая часть спектральной плотности.

Нетрудно видеть, что функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ обладают следующими свойствами.

$A(\omega)$ – четная функция частоты, т. е. $A(-\omega) = A(\omega)$;

$B(\omega)$ – нечетная функция частоты, т. е. $B(-\omega) = -B(\omega)$.

Если $f(t)$ – четная функция, то $B(\omega) = 0$, и спектральная плотность импульса $f(t)$ – четная вещественная функция, т. е. $S(\omega) = A(\omega)$.

Если $f(t)$ – нечетная функция, то $A(\omega) = 0$, и спектральная плотность импульса $f(t)$ – оказывается чисто мнимой нечетной функцией, т. е. $S(\omega) = jB(\omega)$.

Интересным свойством обладает спектральная плотность на нулевой

частоте: $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$, т. е. **на нулевой частоте спектральная плотность**

равна площади импульса.

Спектральную плотность сигнала можно записать с помощью модуля и аргумента:

$$\dot{S}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad \text{причем} \quad |\dot{S}(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Очевидно, что модуль спектральной плотности является четной функцией, а аргумент – нечетной функцией частоты.

Теорема о запаздывании

Пусть $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность импульса $f(t)$. Найдем спектральную плотность импульса $f(t - t_0)$ (рис. 1.16), смещенного по времени по отношению к импульсу $f(t)$ на величину t_0 :

$$\dot{S}_{t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Введем новую переменную $x = t - t_0$, и соответственно $t = x + t_0$. В результате получим

$$\dot{S}_{t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \cdot e^{-j\omega t_0} = \dot{S}(\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (1.26)$$

т. е. запаздывание сигнала на время t_0 соответствует умножению спектральной плотности на множитель $e^{-j\omega t_0}$.

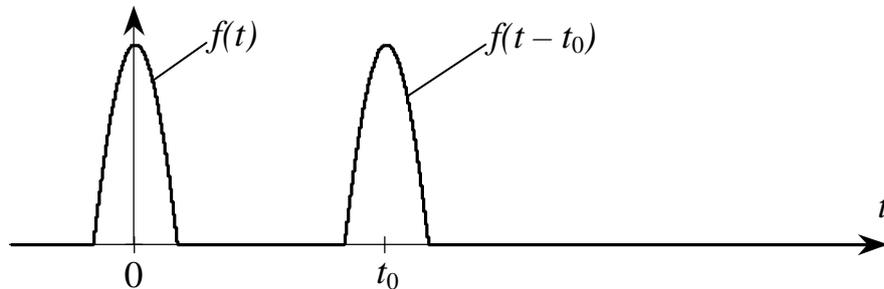


Рис. 1.16. К выводу теоремы о запаздывании

Теорема о смещении спектра

Теореме о запаздывании соответствует парная ей теорема о смещении спектра. Пусть $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$. Определим, какому сигналу будет соответствовать спектральная плотность $\dot{S}(\omega - \omega_0)$. Для этого используем формулу обратного преобразования Фурье:

$$f_{\omega_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega.$$

Проводя замену переменной $u = \omega - \omega_0$, получаем

$$f_{\omega_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(u) e^{j(u+\omega_0)t} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(u) e^{jut} du \cdot e^{j\omega_0 t} = f(t) e^{j\omega_0 t}, \quad (1.27)$$

т. е. смещение спектра на величину ω_0 соответствует умножению сигнала на $e^{j\omega_0 t}$. Получающийся при этом сигнал оказывается комплексным, в то время как все реально существующие сигналы являются вещественными. Теорема о смещении спектра оказывается полезной в тех случаях, когда реальный вещественный сигнал оказывается удобным представить в виде суммы комплексных составляющих.

Теорема о смещении спектра весьма схожа с теоремой о запаздывании. Это обусловлено схожестью прямого и обратного преобразований Фурье, или, иначе говоря, симметрией преобразований Фурье. Вследствие симметрии преобразований Фурье каждая теорема о спектральной плотности имеет парную теорему, в чем Вы сможете убедиться в дальнейшем.

Теорема подобия

Пусть $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$. Сожмем сигнал $f(t)$ во времени в m раз, т. е. рассмотрим сигнал $f(mt)$. Найдём его спектральную

плотность: $\dot{S}_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(mt) e^{-j\omega t} dt.$

Вводя новую переменную $x = mt$, после несложных преобразований получаем

$$\dot{S}_m(\omega) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/m} dx = \frac{1}{m} \dot{S}\left(\frac{\omega}{m}\right). \quad (1.28)$$

Изменение спектральной плотности при сжатии импульса проиллюстрировано на рис. 1.17. Если $m > 1$, то график спектральной плотности расширяется в m раз и во столько же раз уменьшается по высоте. Иначе говоря, если длительность импульса уменьшается, то спектр его во столько же раз расширяется. Отсюда следует, что для формирования более короткого импульса требуются более высокочастотные составляющие.

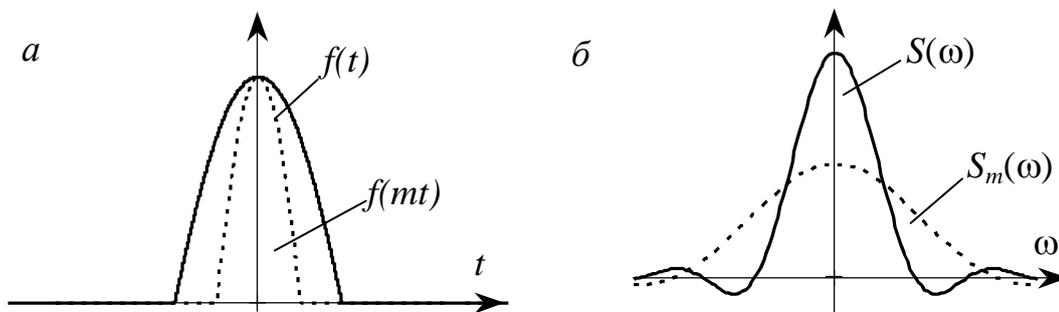


Рис. 1.17. Импульс, сжатый во времени, (а) и его спектральная плотность (б)

Рассуждая аналогично, можно сделать вывод, что уменьшение ширины спектра соответствует увеличению длительности импульса. Это происходит, например, при прохождении импульса через устройство с относительно небольшой полосой пропускания. При этом происходит сглаживание импульса, и его длительность увеличивается.

Спектральная плотность производной

Пусть $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$. Определим спектральную плотность производной этого сигнала, т. е. спектральную плотность сигнала $f'(t)$:

$$\dot{S}_{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Вычислим этот интеграл по частям, обозначая $u = e^{-j\omega t}$, $v = f'(t)dt$:

$$\dot{S}_{f'}(\omega) = f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если сигнал $f(t)$ как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ стремится к нулю, то, пренебрегая первым слагаемым, окончательно получим

$$\dot{S}_f(\omega) = j\omega \dot{S}(\omega), \quad (1.29)$$

т.е. дифференцирование сигнала соответствует умножению спектральной плотности на $j\omega$.

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает, сигнал как бы "обостряется". Соответственно модуль спектральной плотности производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению со спектральной плотностью исходного сигнала.

Формулу (1.29) можно обобщить на случай производной n -го порядка. Легко показать, что для производной n -го порядка

$$\dot{S}_{f^{(n)}}(\omega) = (j\omega)^n \dot{S}_f(\omega). \quad (1.30)$$

Спектральная плотность интеграла

Теорема о спектральной плотности производной может быть использована для определения спектральной плотности интеграла. Если функция $g(t)$ равна производной от функции $f(t)$, т.е. $g(t) = df(t)/dt$, то функция $f(t)$ является первообразной (неопределенным интегралом) по отношению к функции $g(t)$:

$$f(t) = \int g(t) dt.$$

Из выражения (1.29) формально следует, что спектр первообразной

$$\dot{S}_f(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}_g(\omega). \quad (1.31)$$

В радиотехнической практике чаще приходится иметь дело с определенным интегралом вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx. \quad (1.32)$$

Определенный интеграл (1.32) равен разности двух значений первообразной сигнала $g(t)$, одно из которых вычисляется при аргументе t , а другое – при аргументе $-\infty$. Полагая, что первообразная является абсолютно интегрируемой функцией и при значении аргумента $-\infty$ она равна нулю, получим выражение (1.31).

Из-за наличия множителя $j\omega$ в знаменателе спектральная плотность уменьшается с ростом частоты. Это обусловлено тем, что сигнал при интегрировании сглаживается, и высокочастотные составляющие спектра в нем ослабляются.

Спектральная плотность свертки двух функций

Пусть сигнал $g(t)$ равен свертке двух сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.33)$$

Обозначим спектральную плотность сигнала $f_1(t)$ через $\dot{S}_1(\omega)$, а спектральную плотность сигнала $f_2(t)$ – через $\dot{S}_2(\omega)$. Найдем спектральную плотность сигнала $g(t)$:

$$\dot{S}_g(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau.$$

Введем новую переменную $x = t - \tau$, тогда $t = x + \tau$.

$$\begin{aligned} \dot{S}_g(\omega) &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-j\omega x} e^{-j\omega \tau} dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-j\omega x} dx = S_1(\omega) S_2(\omega). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Свертка временных функций соответствует произведению их спектральных плотностей.

Спектральная плотность произведения двух функций

Пусть $\dot{S}_1(\omega)$ и $\dot{S}_2(\omega)$ – спектральные плотности сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда спектральная плотность произведения этих двух сигналов равна:

$$\dot{S}_g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.35)$$

Подставим в (1.35) вместо $f_1(t)$ его выражение как обратное преобразование Фурье от соответствующей спектральной плотности и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \dot{S}_g(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(u) e^{jut} du dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j(\omega-u)t} \dot{S}_1(u) du dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(u) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j(\omega-u)t} dt du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(u) \dot{S}_2(\omega - u) du. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Произведению временных функций соответствует свертка их спектров.

Лекция 3.

1.5. Примеры вычисления спектральной плотности конкретных импульсов

Спектральная плотность прямоугольного импульса

Прямоугольный видеоимпульс (рис. 1.18) наиболее часто используется в радиотехнической практике. Найдем его спектральную плотность.

$$\dot{S}_f(\omega) = \int_{-T_n/2}^{T_n/2} E \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-T_n/2}^{T_n/2} = \frac{E}{-j\omega} \cdot (e^{-j\omega T_n/2} - e^{j\omega T_n/2}) = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega T_n}{2}.$$

Получившийся результат можно использовать для расчетов, однако, для анализа и построения графика спектральной плотности целесообразно преобразовать это выражение к виду $(\sin x)/x$. Для этого домножим числитель и знаменатель на T_n , в результате чего получим:

$$\dot{S}_f(\omega) = ET_n \frac{\sin \frac{\omega T_n}{2}}{\frac{\omega T_n}{2}}. \quad (1.37)$$

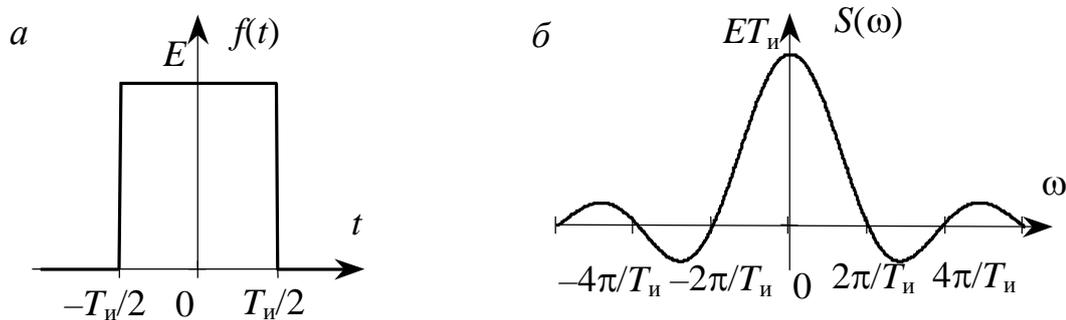


Рис. 1.18. Прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

График спектральной плотности прямоугольного импульса приведен на рис. 1.18 б, а на рис. 1.19 – график модуля. Отметим его характерные особенности. Спектральная плотность впервые обращается в нуль, когда аргумент синуса $\omega T_n/2 = \pi$. Это соответствует значению частоты $\omega = 2\pi/T_n$. Следующий нуль спектральной плотности находится при $\omega = 4\pi/T_n$, третий – при $\omega = 6\pi/T_n$ и т. д. Значение первого бокового лепестка функции $|\dot{S}_f(\omega)|$ составляет примерно $1/5$ от главного максимума, второго – $1/8$, третьего – $1/11$ и т. д. В свою очередь, высота главного максимума при $\omega=0$ равна ET_n , т. е. площади импульса. Прямоугольный импульс, изображенный на рис. 1.18 а, является четной функцией, поэтому его спектральная плотность – вещественная.

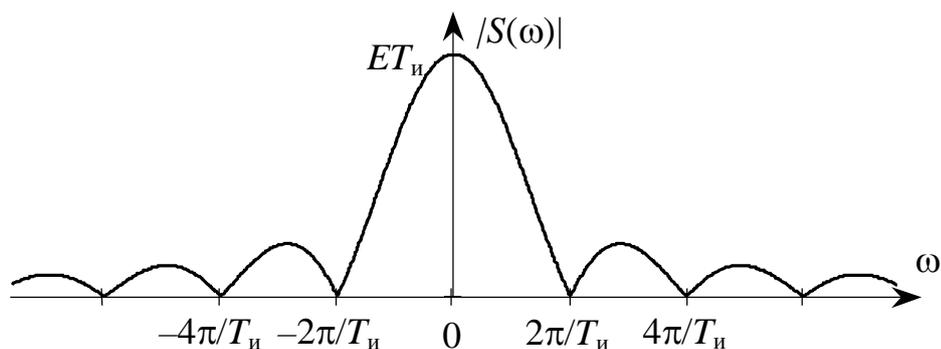


Рис. 1.19. Модуль спектральной плотности прямоугольного импульса

Спектральная плотность δ -функции

Спектральная плотность δ -функции вычисляется очень просто:

$$\dot{S}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (1.38)$$

Спектральная плотность δ -функции равна единице на всех частотах вплоть до бесконечно высоких. Естественно, сигнал с таким спектром реально существовать не может. Тем не менее δ -функция очень часто используется в радиотехнических расчетах как идеализированная замена очень короткого импульса. В качестве примера возьмем короткий прямоугольный импульс длительностью $T_{\text{и}} = 1 \text{ нс} = 10^{-9} \text{ с}$. Его спектральная плотность изображена на рис. 1.20. Хорошо видно, что в диапазоне частот $0 \div 100 \text{ МГц}$ спектральная плотность практически постоянна, и рассматриваемый импульс вполне может быть заменен δ -функцией.

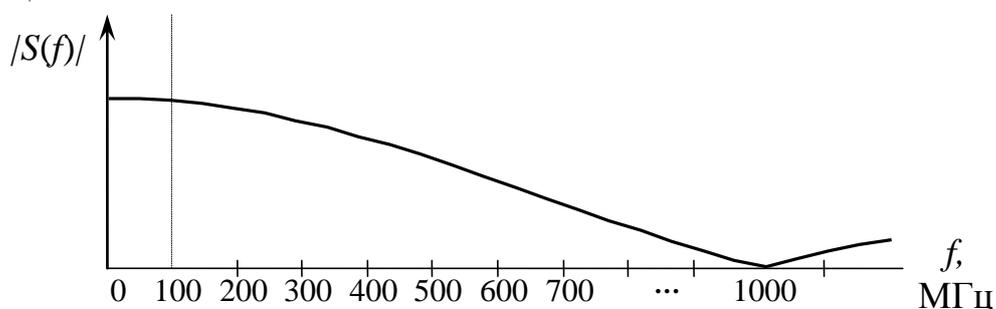


Рис.1.20. Спектральная плотность прямоугольного импульса длительностью 1 нс

Спектральная плотность треугольного импульса

Найдем спектральную плотность треугольного импульса, изображенного на рис. 1.21,а. Ее можно вычислить путем непосредственного применения преобразования Фурье (1.23), однако это несколько громоздко, так как получающиеся при этом интегралы приходится вычислять по частям. Значительно проще и изящнее оказывается метод, основанный на применении теорем о спектрах.

Продифференцируем треугольный импульс один раз (рис. 1.21,б) и затем еще один раз (рис. 1.21,в). Получающийся при этом сигнал состоит из трех δ -функций, причем каждая из них умножается на высоту соответствующего скачка первой производной исходного сигнала:

$$f''(t) = \frac{2E}{T_{\text{и}}} \delta\left(t + \frac{T_{\text{и}}}{2}\right) - \frac{4E}{T_{\text{и}}} \delta(t) + \frac{2E}{T_{\text{и}}} \delta\left(t - \frac{T_{\text{и}}}{2}\right). \quad (1.39)$$

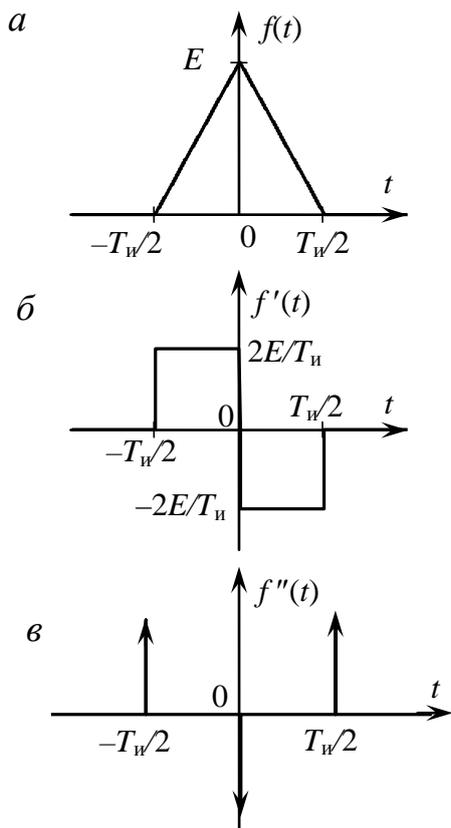


Рис. 1.21. *a* – треугольный импульс, *б* – его первая производная, *в* – его вторая производная

Зная спектральную плотность δ -функции и используя теорему о запаздывании, запишем выражение для спектральной плотности второй производной треугольного импульса:

$$\dot{S}_{f''}(\omega) = \frac{2E}{T_n} e^{j\omega T_n/2} - \frac{4E}{T_n} + \frac{2E}{T_n} e^{-j\omega T_n/2}. \quad (1.40)$$

Используя формулу Эйлера, получим:

$$\dot{S}_{f''}(\omega) = \frac{4E}{T_n} \left(\cos \frac{\omega T_n}{2} - 1 \right).$$

Чтобы определить искомую спектральную плотность треугольного импульса, нужно спектральную плотность второй производной разделить на $(j\omega)^2$:

$$\dot{S}_f(\omega) = \frac{\dot{S}_{f''}(\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{4E}{\omega^2 T_n} \left(1 - \cos \frac{\omega T_n}{2} \right). \quad (1.41)$$

Преобразуем выражение (1.41) к виду, более удобному для анализа:

$$\dot{S}_f(\omega) = \frac{ET_n}{2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T_n}{4}}{\frac{\omega T_n}{4}} \right)^2 \quad (1.42)$$

График спектральной плотности треугольного импульса изображен на рис. 1.22.

По сравнению со спектральной плотностью прямоугольного импульса спектральная плотность треугольного импульса имеет более низкий уровень боковых лепестков: первый лепесток равен 0,04 от максимума по сравнению с 0,2 для прямоугольного импульса, и с повышением частоты уровень боковых лепестков убывает как $1/\omega^2$ (для прямоугольного импульса – как $1/\omega$). Это объясняется тем, что треугольный импульс имеет более гладкий характер, чем прямоугольный, в нем отсутствуют вертикальные фронты, для формирования которых нужен достаточно высокий уровень высокочастотных составляющих спектра.

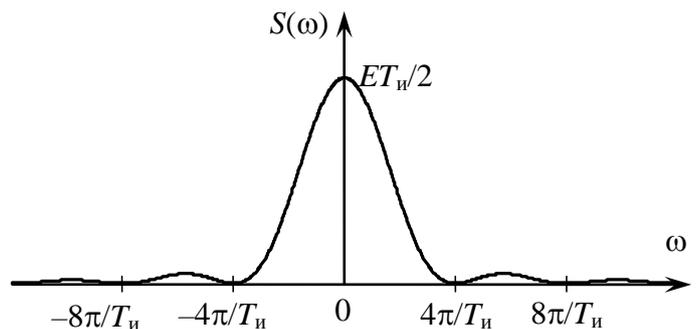


Рис. 1.22. Спектральная плотность треугольного

Спектральная плотность экспоненциального импульса

Найдем спектральную плотность экспоненциального импульса (рис. 1.23,а):

$$f(t) = Ee^{-\alpha t} \sigma(t) \quad (1.43)$$

путем непосредственного применения преобразования Фурье:

$$\dot{S}_f(\omega) = \int_0^{\infty} Ee^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-\alpha - j\omega} e^{(-\alpha - j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + j\omega}. \quad (1.44)$$

Получившееся выражение является существенно комплексным. Это объясняется тем, что рассматриваемый экспоненциальный импульс не является ни четной, ни нечетной функцией. Чтобы построить график спектральной плотности, нужно вычислить ее модуль:

$$|\dot{S}_f(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}. \quad (1.45)$$

График модуля спектральной плотности экспоненциального импульса изображен на рис. 1.23,б. Экспоненциальный импульс имеет вертикальный передний фронт, и поэтому его спектральная плотность убывает с ростом частоты медленно, пропорционально $1/\omega$.

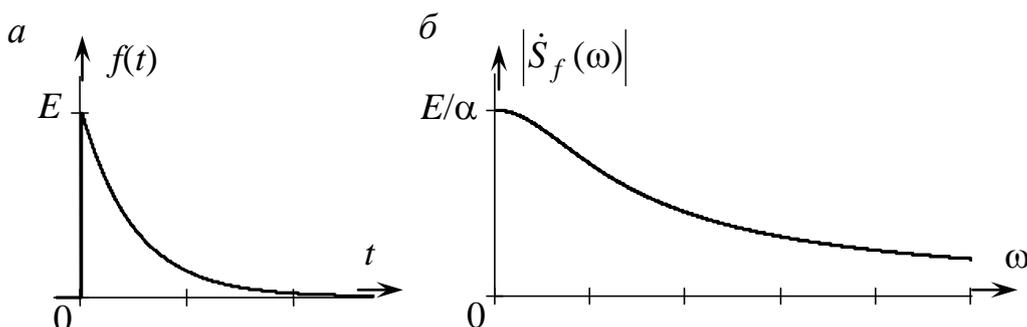


Рис. 1.23. Экспоненциальный импульс (а) и график модуля его спектральной плотности (б)

Спектральная плотность гауссова импульса

Гауссов (колокольный) импульс (рис. 1.24,а) описывается выражением

$$f(t) = Ee^{-t^2/\tau^2}. \quad (1.46)$$

Найдем его спектральную плотность:

$$\dot{S}_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ee^{-t^2/\tau^2} e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2} + j\omega t\right)} dt. \quad (1.47)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, дополним выражение в показателе степени до полного квадрата:

$$\frac{t^2}{\tau^2} + j\omega t = \left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2\tau^2}{4}.$$

Введем новую переменную $x = \frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}$ и преобразуем выражение (1.47) к виду:

$$\dot{S}_f(\omega) = E\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot e^{-\omega^2\tau^2/4}.$$

Используем табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

В результате получим:

$$\dot{S}_f(\omega) = E\tau\sqrt{\pi} \cdot e^{-\omega^2\tau^2/4}. \quad (1.48)$$

Примечательно, что спектральная плотность гауссова импульса (рис. 1.24,б) тоже описывается гауссовой кривой. Среди всех рассмотренных импульсов гауссов импульс является самым гладким, и соответственно его спектральная плотность убывает с ростом частоты наиболее быстро, как $\exp(-\omega^2)$.

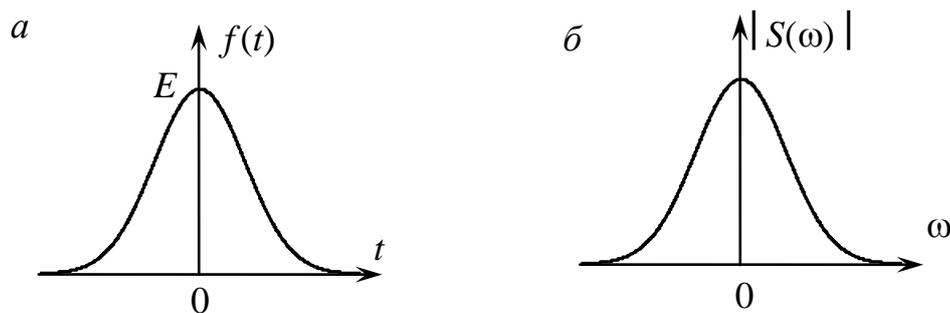


Рис. 1.24. Гауссов импульс и его спектральная плотность.

1.6. Спектры неинтегрируемых сигналов

Неинтегрируемыми называются сигналы, для которых не выполняется условие абсолютной интегрируемости (1.25) и непосредственное применение формулы преобразования Фурье (1.23) не приводит к успеху. Однако, понятие спектральной плотности можно ввести и для неинтегрируемых сигналов, используя для этого специальные математические приемы. Ниже мы рассмотрим спектральные плотности некоторых неинтегрируемых сигналов.

Спектральная плотность постоянного сигнала

Рассмотрим постоянный сигнал, равный E при любых значениях времени t . Легко убедиться в том, что непосредственное применение преобразования Фурье (1.23) к такому сигналу не приводит к определенному результату:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = ?$$

Поэтому придется воспользоваться искусственным приемом. Вспомним, чему равнялась спектральная плотность δ -функции (см. выражение (1.38)).

Для δ -функции мы можем записать обратное преобразование Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega.$$

По аналогии с этим выражением, используя симметрию прямого и обратного преобразований Фурье, получим:

$$\dot{S}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega). \quad (1.49)$$

Несмотря на искусственность полученного выражения (1.49), оно имеет простой физический смысл. Спектральная плотность сигнала характеризует суммарную амплитуду спектральных составляющих, приходящуюся на единичный частотный интервал. Для постоянного сигнала конечная постоянная составляющая, т. е. спектральная составляющая на нулевой частоте занимает бесконечно малый частотный интервал, т. е. спектральная плотность на нулевой частоте бесконечно велика, а на других частотах равна нулю, т. е. описывается выражением с δ -функцией (1.49).

Спектральная плотность гармонического сигнала

Гармонический сигнал также относится к числу неинтегрируемых и для нахождения его спектральной плотности используем определенную ранее спектральную плотность постоянного сигнала.

Представим гармонический сигнал в виде суммы комплексных составляющих:

$$f(t) = E \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{E}{2} \left(e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 t} e^{-j\varphi} \right).$$

Применим к этому сигналу преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{S}_f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E}{2} e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{E}{2} e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{E}{2} e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В соответствии с выражением (1.49), первый из интегралов в (1.50) равен $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, второй равен $2\pi\delta(\omega + \omega_0)$. Таким образом, спектральная плотность гармонического сигнала может быть представлена в виде:

$$\dot{S}_f(\omega) = \pi E e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + \pi E e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0). \quad (1.51)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что на частотах ω и $-\omega$ в бесконечно узкой полосе частот сосредоточена конечная амплитуда спектральных составляющих, следовательно, спектральная плотность на этих частотах бесконечно велика.

Спектральная плотность произвольного периодического сигнала

Рассмотрим произвольный периодический сигнал $\Phi(t)$, который может быть разложен в ряд Фурье (1.14). Запишем выражение для спектральной плотности каждой составляющей этого ряда. Для постоянной составляющей $A_0/2$ в соответствии с (1.49) спектральная плотность равна

$$\dot{S}_{A_0/2}(\omega) = \pi A_0 \delta(\omega). \quad (1.52)$$

Для каждой из гармоник, входящей в состав суммы:

$$\dot{S}_{A_k}(\omega) = \pi A_k e^{j\varphi_k} \delta(\omega - k\Omega) + \pi A_k e^{-j\varphi_k} \delta(\omega + k\Omega). \quad (1.53)$$

Переходя к комплексным амплитудам, получим выражение для спектральной плотности периодического сигнала

$$\dot{S}_{\Phi}(\omega) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k \delta(\omega - k\Omega). \quad (1.54)$$

Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала состоит из δ -функций, каждая из которых располагается на частоте соответствующей гармоники.

Спектральная плотность единичного сигнала

Непосредственное интегрирование функции единичного скачка (рис. 1.25) не приводит к результату.

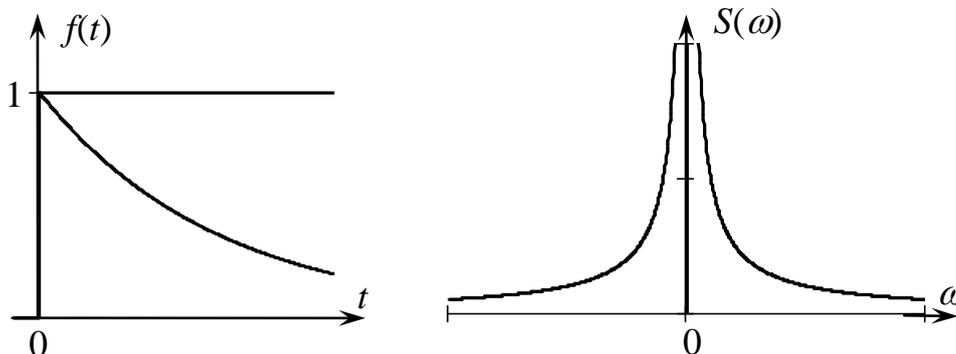


Рис. 1.25. Единичный скачок и его спектральная плотность

Возникающие трудности можно обойти, если рассматривать скачок как предел экспоненциального импульса $e^{-\alpha t} \sigma(t)$ при $\alpha \rightarrow 0$, т. е.

$$\sigma(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} \sigma(t). \quad (1.55)$$

Воспользуемся выражением (1.44) для спектральной плотности экспоненциального импульса и положим $\alpha \rightarrow 0$:

$$\dot{S}_{\sigma}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}. \quad (1.56)$$

Можно приравнять $\alpha = 0$ непосредственно в выражении (1.56), но это будет некорректно, так как получающийся при этом результат неправильно описывает поведение спектральной плотности при $\omega = 0$. Более правильный путь состоит в разделении действительной и мнимой частей выражения (1.56)

$$\dot{S}_\sigma(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{E\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{jE\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right).$$

Предел первого слагаемого приводит к δ -функции:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega),$$

а предел второго слагаемого вычисляется элементарно. В результате для спектральной плотности единичного скачка получим:

$$\dot{S}_\sigma(\omega) = \pi E\delta(\omega) + \frac{E}{j\omega}. \quad (1.57)$$

Физический смысл получившегося результата достаточно прост: ступенчатый сигнал содержит постоянную составляющую, которая вдвое меньше постоянной составляющей постоянного сигнала.

Сравнивая спектральные плотности рассмотренных в данном разделе неинтегрируемых сигналов, можно заметить интересную закономерность: спектральная плотность каждого из этих сигналов содержит особенности в виде одной или нескольких δ -функций.

1.7. Спектральная плотность импульсов с высокочастотным заполнением

Рассмотрим импульс произвольной формы с высокочастотным заполнением (рис. 1.26,а), который можно рассматривать как произведение огибающей $F(t)$ на гармоническую функцию:

$$f(t) = F(t) \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.58)$$

Импульсы такого вида еще называют *радиоимпульсами*.

Пусть спектральная плотность огибающей нам известна. Обозначим ее $\dot{S}_F(\omega)$. Для определения спектральной плотности радиоимпульса применим теорему о спектральной плотности произведения двух функций. При этом используем полученное ранее выражение (1.51) для спектральной плотности гармонического сигнала:

$$\begin{aligned} \dot{S}_f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_F(\omega - u) \left[\pi e^{j\varphi} \delta(u - \omega_0) + \pi e^{-j\varphi} \delta(u + \omega_0) \right] du = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \dot{S}_F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \dot{S}_F(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (1.59)$$

На рис. 1.26,б изображен модуль спектральной плотности радиоимпульса для типичного случая, когда частота заполнения ω_0 значительно больше ширины спектра. Здесь же для сравнения изображен график спектральной плотности огибающей. Видно, что спектральная плотность радиоимпульса $S_f(\omega)$ как бы раздваивается; одна часть расположена в окрестности частоты ω_0 , другая – в окрестности частоты $-\omega_0$. Каждая из частей повторяет по форме график спектральной плотности огибающей, но имеет вдвое меньшую высоту.

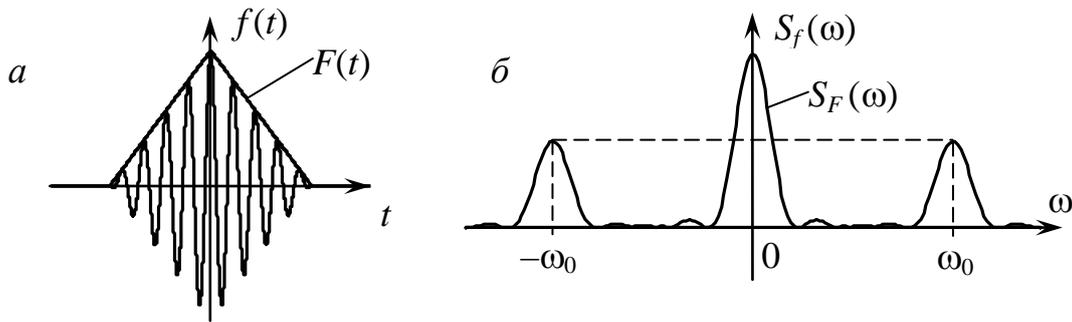


Рис. 1.26. Радиоимпульс и его спектральная плотность.

1.8. Энергетический спектр

Рассмотрим интеграл от произведения двух функций

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt. \quad (1.60)$$

Этот интеграл обычно характеризует энергию сигнала. Если, например, $f_1(t)$ – ток, а $f_2(t)$ – напряжение сигнала на каком-то элементе, то W_{12} – энергия этого сигнала; если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – один и тот же сигнал, напряжение или ток, то W_{12} равняется энергии с точностью до коэффициента пропорциональности; если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – разные сигналы, то W_{12} называют "взаимной энергией".

Выразим одну из функций в (1.60), например, $f_1(t)$ через ее преобразование Фурье:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

и подставим в (1.60), после чего входящий в состав этой формулы интеграл от $f_2(t)$ выразим через $\dot{S}_2(\omega)$:

$$W_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\dot{S}_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(\omega)S_2^*(\omega)d\omega.$$

Или, иначе:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_1(\omega)S_2^*(\omega)d\omega. \quad (1.61)$$

Выражение (1.61) называется **равенством Парсеваля**.

Особый интерес представляет случай, когда $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$. В этом случае равенство Парсеваля записывается в следующем виде

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.62)$$

где $|\dot{S}(\omega)|^2 = \dot{S}(\omega)S^*(\omega)$ – энергетический спектр сигнала $f(t)$.

Выражение (1.62) (его называют еще *теоремой Релея*) означает, что энергия сигнала может быть вычислена путем как интегрирования квадрата временной функции, так и квадрата модуля спектральной плотности, т.е. энергетического спектра.

Свойства энергетического спектра

1. Энергетический спектр – вещественная функция.
2. Энергетический спектр – четная функция частоты: $|\dot{S}(-\omega)|^2 = |\dot{S}(\omega)|^2$.
3. Энергетический спектр принимает только положительные значения; т.е. $|\dot{S}(\omega)|^2 \geq 0$ при любых значениях частоты ω .

Все эти свойства достаточно очевидны и не требуют доказательства.

Благодаря четности энергетического спектра выражение (2.54) можно переписать в несколько ином виде:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (1.63)$$

Энергетический спектр характеризует распределение энергии сигнала по частоте. Если выделить какую-то область частот, например от ω_1 до ω_2 (см.

рис. 1.27), то $\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega$ характеризует часть энергии сигнала, заключенную в полосе частот от ω_1 до ω_2 .

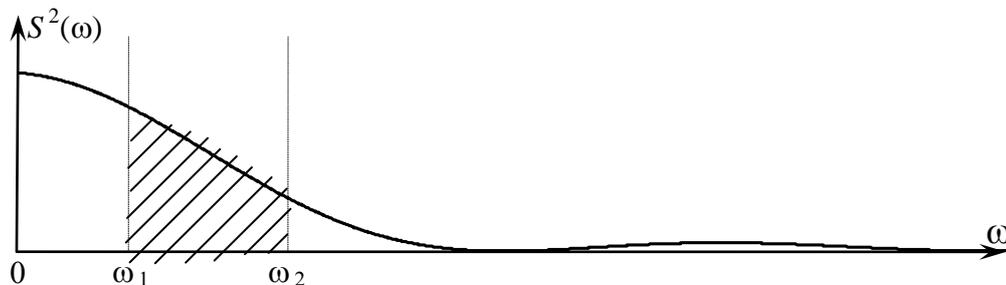


Рис. 1.27. Энергетический спектр сигнала

В радиотехнике иногда приходится решать задачу выбора типа импульса, имеющего заданную (или минимальную) ширину спектра. При этом появляется необходимость сравнения ширины спектров различных импульсов. Универсальную величину, характеризующую ширину спектра для любых типов сигналов, можно ввести с помощью энергетического спектра. Такой универсальной величиной может служить **эффективная ширина спектра** $\Delta\omega_{эф}$, в пределах которой заключена основная часть энергии сигнала, например 90% (рис. 1.28):

$$\int_0^{\Delta\omega_{эф}} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = 0,9 \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$$

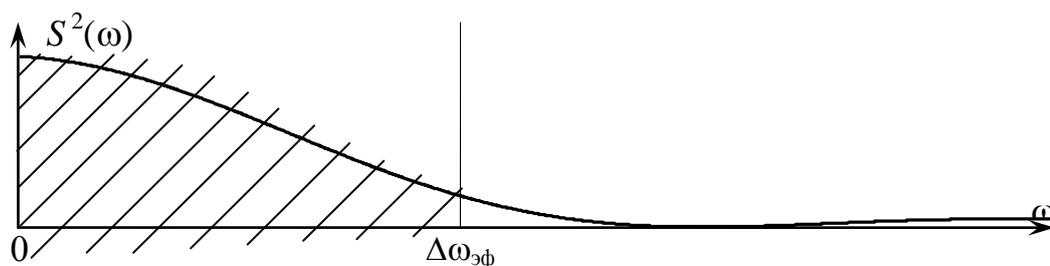


Рис. 1.28. Эффективная ширина спектра

Сравнение ширины спектра импульсов различной формы должно производиться при одинаковой длительности импульсов. С этой целью по аналогии с эффективной шириной спектра вводится эффективная длительность импульса $\Delta t_{эф}$, в пределах которой заключено 90 % энергии импульса. В табл. 1.1 приведены значения эффективной длительности импульса. Там же приведены значения произведения $\Delta\omega_{эф}\Delta t_{эф}$, которое характеризует ширину спектра при одинаковой эффективной длительности импульса. Хорошо видна следующая закономерность: наибольшую ширину спектра имеют импульсы со скачкообразным изменением значения: прямоугольный и экспоненциальный. Меньшую ширину спектра имеют треугольный и косинусоидальный импульсы, где нет скачков функции, но есть скачки производной. И наименьшую ширину спектра имеет максимально гладкий гауссов импульс.

Таблица 1.1

Вид импульса	$\Delta\omega_{эф}$	$\Delta t_{эф}$	$\Delta\omega_{эф}\Delta t_{эф}$
Экспоненциальный	$6,16 \alpha$	$1,155/\alpha$	7,115
Прямоугольный	$5,1/T_{и}$	$0,90T_{и}$	4,59
Треугольный	$5,3/T_{и}$	$0,541T_{и}$	2,867
Косинусоидальный	$4,57/T_{и}$	$0,596T_{и}$	2,724
Гауссов	$1,64/\tau$	$0,825\tau$	1,353

Лекция 4.

1.9. Корреляционный анализ сигналов

1.9.1. Автокорреляционная функция

При решении задач обнаружения и выделения сигналов часто возникает необходимость сравнения формы двух сигналов или сравнения принятого сигнала с некоторым эталонным сигналом. Эти задачи решаются с помощью корреляционного анализа сигналов.

Автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала $f(t)$ называется интеграл от произведения сигнала $f(t)$ на такой же сигнал, смещенный во времени:

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t - \tau) dt. \quad (1.64)$$

Свойства автокорреляционной функции

1. При $\tau = 0$ автокорреляционная функция равна энергии сигнала:

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (1.65)$$

2. АКФ – четная функция. Это легко показать, если в (1.64) сделать замену переменной $x = t - \tau$:

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \tau) \cdot f(x) dx.$$

3. При $\tau = 0$ достигается максимальное значение АКФ, т. е.

$$\Psi(\tau) \leq \Psi(0). \quad (1.66)$$

Для доказательства запишем разность $f(t) - f(t - \tau)$, возведем ее в квадрат и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(t - \tau)]^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t - \tau) dt = \\ &= 2 \Psi(0) - 2 \Psi(\tau). \end{aligned}$$

Это выражение неотрицательное при любых τ , откуда следует условие (1.66).

4. Автокорреляционная функция и энергетический спектр связаны друг с другом преобразованием Фурье.

Найдем преобразование Фурье от АКФ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t - \tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau.$$

Введем новую переменную $t - \tau = x$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x) e^{-j\omega t} e^{-j\omega x} dt dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = \\ &= \dot{S}(\omega) S^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\dot{S}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.67)$$

и соответственно

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.68)$$

Автокорреляционная функция прямоугольного импульса

Рассмотрим прямоугольный импульс $f(t)$ и его смещенную во времени копию $f(t - \tau)$ (рис. 1.29, а). Пусть $0 < \tau < T_{и}$, тогда АКФ можно вычислить следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \int_{\tau}^{T_{и}} E^2 dt = E^2(T_{и} - \tau).$$

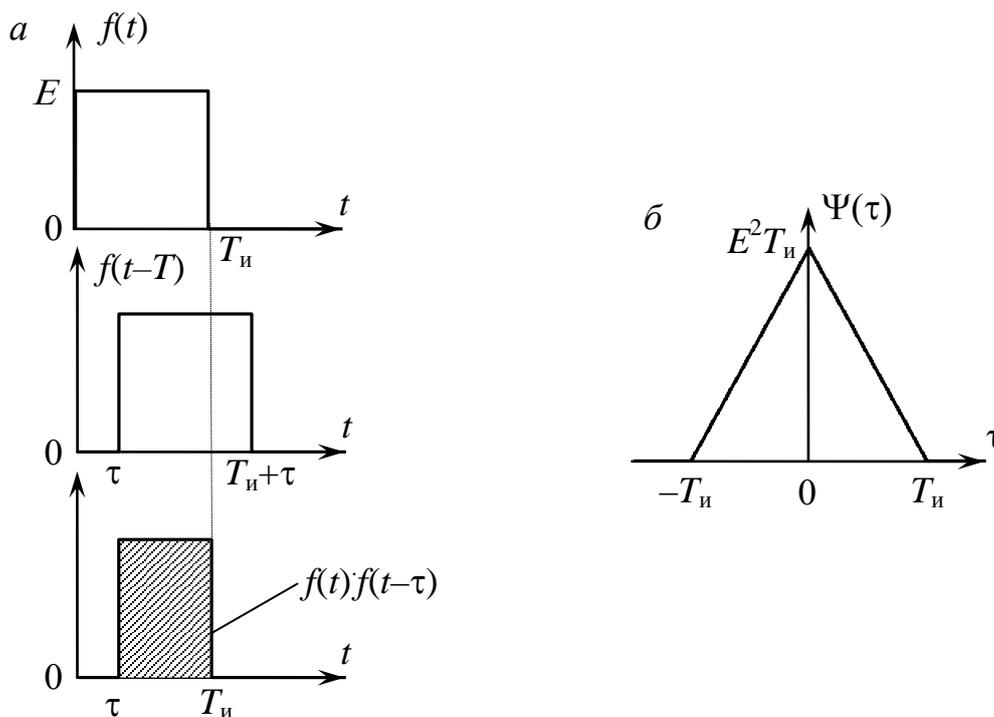


Рис. 1.29. АКФ прямоугольного видеоимпульса

При $\tau > T_{и}$ импульсы $f(t)$ и $f(t - \tau)$ не перекрываются и $\Psi(\tau) = 0$.

При отрицательных значениях τ находим АКФ, используя свойство четности $\Psi(-\tau) = \Psi(\tau)$. В результате получаем АКФ в виде треугольного импульса (рис. 1.29,б), длительность которого вдвое больше длительности прямоугольного импульса $f(t)$.

Коды Баркера

Среди всевозможных радиотехнических сигналов особый интерес представляют сигналы, АКФ которых имеет высокий главный максимум при $\tau = 0$ и низкий уровень при $\tau \neq 0$. К числу таких сигналов относятся сигналы Баркера, представляющие собой знакопеременные импульсные последовательности, значения АКФ которых при $\tau \neq 0$ не превосходят по модулю единицы.

Сигналы Баркера удастся реализовать лишь при числе позиций $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$. Случай $N = 2$ является тривиальным. Сигнал Баркера при $N = 3$ рассмотрен нами в предыдущем примере. Коды Баркера для различных значений N приведены в таблице 1.2.

N	Код Баркера
3	1 1 -1
4	1 1 1 -1
4	1 1 -1 1
5	1 1 1 -1 1
7	1 1 1 -1 -1 1 -1
11	1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1
13	1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1

На рис. 1.30 показан сигнал с 11-позиционным кодом Баркера и его автокорреляционная функция.

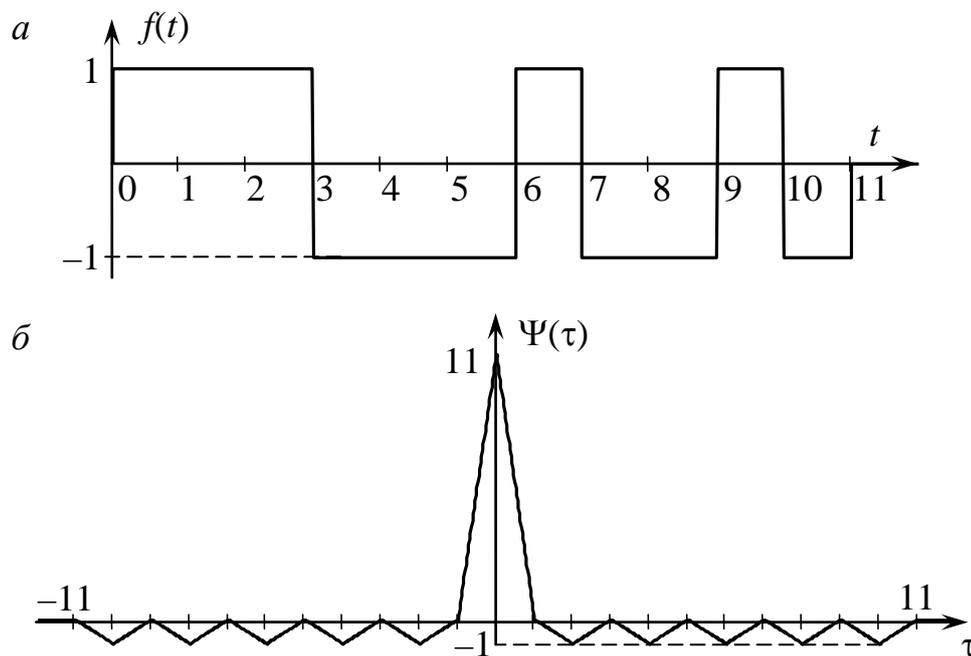


Рис. 1.30. 11-и позиционный сигнал Баркера (а) и его автокорреляционная функция (б)

1.9.2. Взаимно корреляционная функция

Для сравнения двух сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вводится **взаимно корреляционная функция**

$$\Psi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt. \quad (1.69)$$

Взаимно корреляционная функция (ВКФ) не обладает многими свойствами АКФ: не является четной и, как правило, не принимает максимальное значение при $\tau = 0$. Тем не менее ВКФ – очень важная характеристика сигналов: при передаче кодированных сообщений надо стараться применять сигналы, ВКФ которых близка к нулю, тогда такие сигналы легко различить даже при наличии помех.

Найдем преобразование Фурье взаимно корреляционной функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau.$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, которые были выполнены для АКФ, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{12}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \quad (1.70)$$

Произведение $\dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega) = S_{12}(\omega)$ называют **взаимным энергетическим спектром**. Эта функция, как и ВКФ, характеризует степень коррелированности двух сигналов. Если мы хотим, чтобы два сигнала были некоррелированы, надо, чтобы их спектры $\dot{S}_1(\omega)$ и $\dot{S}_2^*(\omega)$ практически не перекрывались.

Проиллюстрируем возможности применения корреляционной теории сигналов на примере передачи и приема кодированных сообщений.

Пусть нам надо передать некоторое сообщение, представляющее собой кодированную последовательность, состоящую из "нулей" и "единиц". Поставим в соответствие "нулю" сигнал $s_1(t)$, а "единице" – сигнал $s_2(t)$, причем эти сигналы выберем таким образом, чтобы их АКФ имели высокий главный максимум при низком уровне боковых лепестков, а взаимная корреляционная функция сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ должна быть как можно ближе к нулю.

Для обработки сигналов на приемном конце применим устройство, структурная схема которого изображена на рис. 1.31. Основу ее составляют корреляторы, вычисляющие ВКФ двух сигналов: входного (информационного) $u_{вх}(t)$ и опорного $s(t)$. В качестве опорного сигнала на первый коррелятор подадим $s_1(t)$, на второй коррелятор – $s_2(t)$. Сигналы на выходе корреляторов сравниваются в компараторе, и в зависимости от того, какой сигнал больше, принимается решение: что передается: "нуль" или "единица".

Теперь представим, что на вход приемника поступил сигнал $s_1(t)$. Тогда на выходе первого коррелятора мы получим сильный отклик, а на выходе второго коррелятора – почти ничего.

Пусть теперь вместе с сигналом на вход приемника поступают помехи, которые, как правило, бывают слабо коррелированными с информационными сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

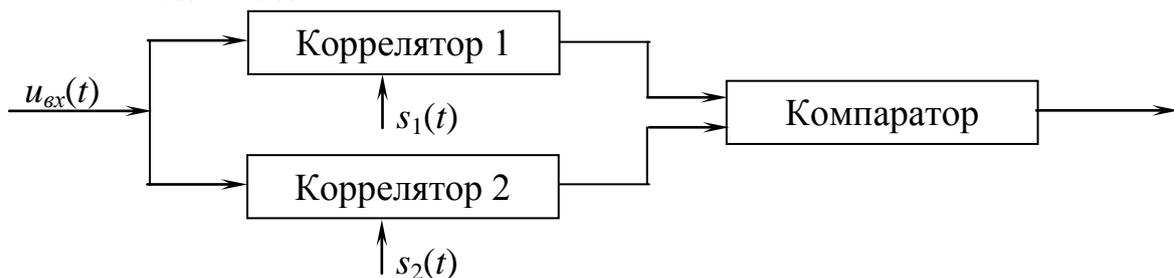


Рис. 1.31. Пример корреляционной обработки сигналов при приеме сообщений

При умеренной интенсивности помех вызванный ими отклик на выходе коррелятора невелик по сравнению с откликом информационного сигнала, и поэтому помехи практически не нарушают нормальную работу устройства. И только при очень интенсивных помехах в тех редких случаях, когда помеха похожа на сигнал $s_2(t)$, возможна ситуация, в которой передается сигнал $s_1(t)$, а сигнал на выходе второго коррелятора будет больше, чем на выходе первого коррелятора, и поэтому сообщение будет принято с ошибкой.

Таким образом, применение специальных кодированных сигналов в сочетании с корреляционной обработкой позволяет обеспечить передачу информации даже в тех случаях, когда уровень помех превышает уровень сигнала.

Контрольные вопросы

1. Что такое элементарные сигналы? Для чего они используются?
2. Назовите основные свойства дельта-функции.
3. Как понимать, что интеграл от дельта функции равен единице?
4. В чем состоит фильтрующее свойство дельта-функции?
5. Какова связь между функцией Хэвисайда и дельта-функцией?
6. Чем обусловлено широкое применение гармонических сигналов в радиотехнике?
7. В чем состоит основное отличие спектра периодического сигнала от спектра отдельных импульсов?
8. Что представляет собой спектр гармонического сигнала?
9. Как зависит спектр периодической последовательности импульсов от периода повторения импульсов?
10. Что такое спектральная плотность сигнала?
11. Как выглядит спектр прямоугольного импульса?
12. Как изменяется спектр сигнала при его смещении во времени на некоторую величину t_0 ?
13. Как изменяется спектральная плотность импульса при изменении его длительности?
14. Какова связь между спектральными плотностями радиоимпульса и его огибающей?
15. Какова связь между спектральными плотностями радиоимпульса и его огибающей?
16. Что такое энергетический спектр?
17. Что такое автокорреляционная функция сигнала?
18. Какова связь между автокорреляционной функцией и энергетическим спектром сигнала?
19. Каковы характерные особенности кода Баркера?
20. Что такое взаимно корреляционная функция?
21. Что такое корреляционный анализ сигнала? Для чего он используется?

Лекция 5.

2. Модулированные сигналы

Модулированные сигналы используются для передачи информации по радиоканалам. Сигнал, несущий информацию $s(t)$, т. е. речь, музыка, телевизионный сигнал, различные сигналы со служебной информацией – это обычно широкополосный сигнал, непригодный для излучения антенной. Чтобы осуществить передачу информационных сигналов по радиоканалу, их переносят на высокую частоту посредством модуляции.

Высокочастотный гармонический сигнал $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ характеризуется тремя параметрами: амплитудой U_m , частотой ω и фазой φ . Каждый из этих трех параметров может изменяться в такт с информационным сигналом. Если пропорционально информационному сигналу изменяется амплитуда высокочастотного сигнала – получается **амплитудно-модулированный** сигнал; если частота – частотно-модулированный; если фаза – **фазомодулированный**.

Кроме этих трех, наиболее простых видов модуляции, в радиотехнической практике используются и другие, более сложные, обеспечивающие высокую помехоустойчивость при передаче информации.

2.1. Амплитудно-модулированные сигналы

Амплитудно-модулированным (АМ) сигналом называется гармонический сигнал, амплитуда которого изменяется пропорционально передаваемому информационному сигналу. Формирование АМ сигнала проиллюстрировано на рис. 2.1.

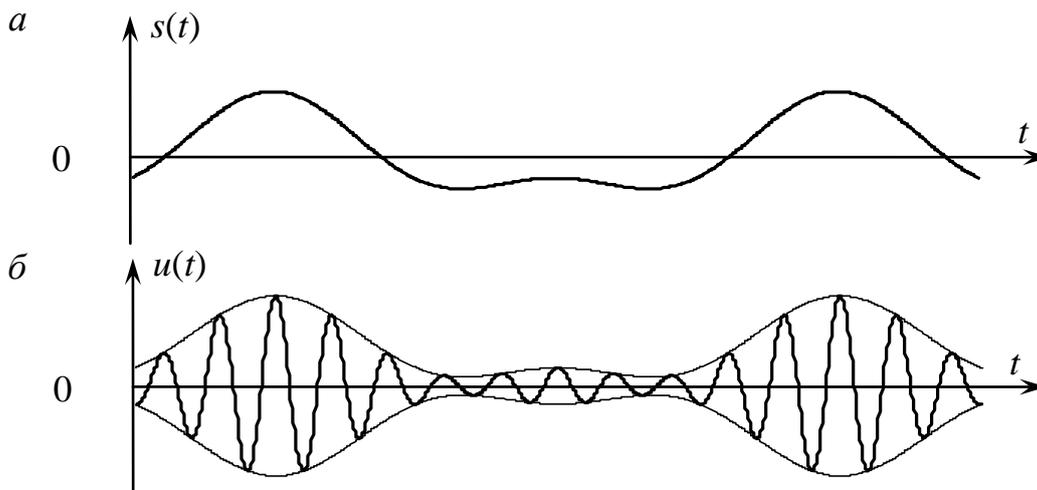


Рис. 2.1. Информационный сигнал (а) и соответствующий ему АМ сигнал (б)

На рис. 2.1, а изображен информационный сигнал $s(t)$, который обычно представляет собой знакопеременную функцию времени. Соответствующий ему амплитудно-модулированный сигнал изображен на рис. 2.1, б. Поскольку

амплитуда сигнала не должна быть отрицательной, к сигналу $s(t)$ добавляется постоянная составляющая, в результате чего амплитудно-модулированный сигнал записывается в следующем виде:

$$u(t) = U_m [1 + Ms(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1)$$

Рассмотрим АМ сигнал с однотоновой модуляцией, когда модулирующий сигнал имеет вид гармонической функции: $s(t) = \cos(\Omega t + \Phi)$. Тогда соответствующий АМ сигнал можно представить в виде

$$u(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.2)$$

Временная диаграмма (осциллограмма) такого сигнала изображена на рис. 2.2, а. Коэффициент M , называемый **коэффициентом модуляции**, характеризует глубину модуляции, т. е. насколько сильно изменяется амплитуда в такт с передаваемым сообщением. Минимальное значение амплитуды сигнала U_{\min} равно $U_m (1 - M)$, максимальное $U_{\max} = U_m (1 + M)$. По экспериментально снятой осциллограмме вида рис. 2.2, а можно определить коэффициент модуляции:

$$M = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}. \quad (2.3)$$

Максимальное значение коэффициента модуляции $M = 1$, когда амплитуда изменяется от 0 до $2U_m$ (рис. 2.2, б).

Если $M > 1$, то в течение некоторого интервала времени амплитуда сигнала оказывается отрицательной, как показано на рис. 2.2, в. Изменение знака амплитуды означает изменение фазы высокочастотного заполнения на этом участке на 180° . Перемодуляция сигнала является крайне нежелательным явлением, поскольку обычный амплитудный детектор, используемый в приемниках АМ сигналов, выделит модуль огибающей (см. рис. 2.2, з), сильно отличающийся от исходного гармонического сигнала $\cos(\Omega t + \Phi)$.

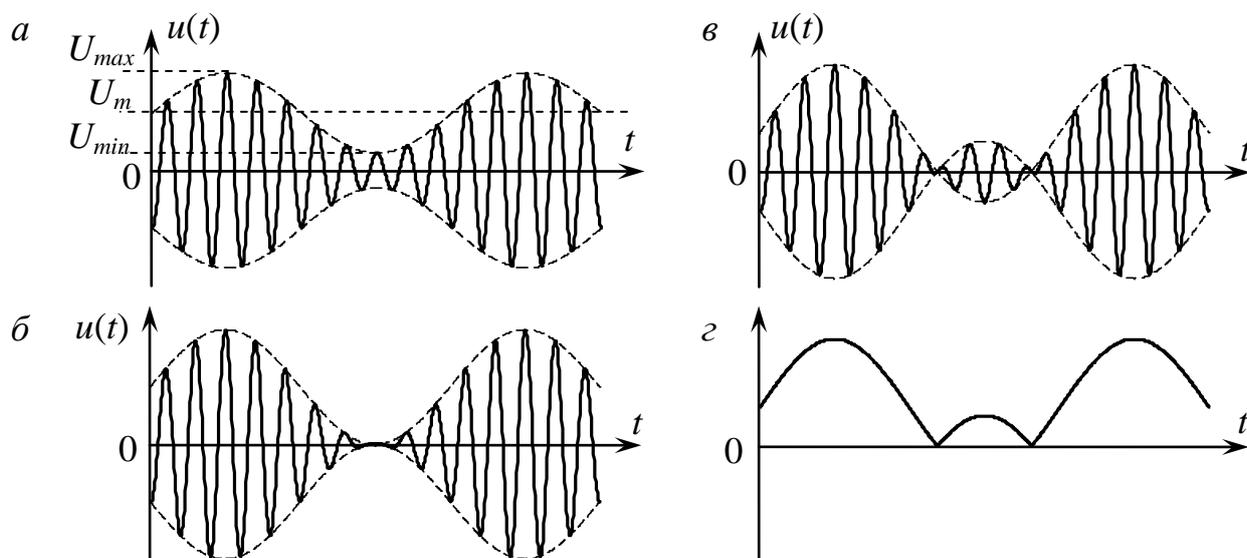


Рис. 2.2. Сигналы с амплитудной модуляцией: а – при коэффициенте модуляции $M < 1$; б – при коэффициенте модуляции $M = 1$; в – перемодуляция ($M > 1$); з – результат детектирования АМ сигнала с $M > 1$

Найдем спектр АМ сигнала с однотоновой модуляцией. Для этого раскроем скобки в выражении (2.2) и преобразуем произведение косинусов по правилам тригонометрии:

$$u(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Phi] + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi - \Phi]. \quad (2.4)$$

Таким образом, АМ сигнал можно представить в виде суммы трех гармонических составляющих. Первая из них, с частотой ω_0 , называется несущей составляющей или просто – "несущей"; вторая – верхней боковой и третья – нижней боковой составляющей. Соответственно, частота ω_0 называется несущей частотой, $\omega_0 + \Omega$ – **верхней боковой**, $\omega_0 - \Omega$ – **нижней боковой** частотой. Спектральная диаграмма однотонового АМ сигнала изображена на рис. 2.3.

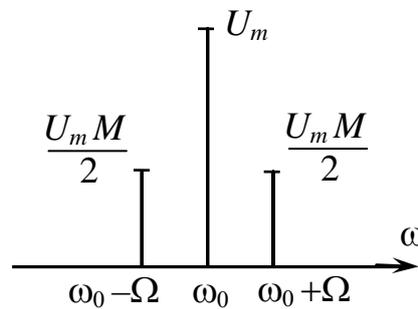


Рис. 2.3. Спектральная диаграмма АМ сигнала

Характерно, что верхняя и нижняя боковые составляющие расположены симметрично относительно несущей и имеют одинаковую высоту.

Зная спектр АМ сигнала, можно построить его векторную диаграмму (рис. 2.4). Построение начнем с несущей составляющей, которую изобразим в виде неподвижного вектора, повернутого на угол φ относительно горизонтальной оси нулевой фазы. Ось отсчета предполагается вращающейся по часовой стрелке с угловой частотой ω_0 , так что угол между несущей и осью отсчета равен $\omega_0 t + \varphi$. Верхняя боковая имеет частоту $\omega_0 + \Omega$, поэтому она должна быть представлена в виде вектора, вращающегося против часовой стрелки с частотой Ω так, чтобы ее скорость вращения относительно оси отсчета равнялась $\omega_0 + \Omega$. Соответственно, нижняя боковая составляющая будет вращаться по часовой стрелке с частотой Ω , как бы догоняя ось отсчета. Сумма несущей и боковых составляющих равна амплитуде сигнала.

Векторная диаграмма (рис. 2.4, а) изображена для момента времени $t = 0$. Поскольку векторы, соответствующие верхней и нижней боковым составляющим, вращаются, через некоторое время они изменят свое положение, как показано на рис. 2.4, б. Изменится и равнодействующая векторов, которая равна амплитуде сигнала.

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{U_m M_k}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_k)t + \varphi_0 - \Phi_k]. \quad (2.7)$$

Соответствующая этому выражению спектральная диаграмма изображена на рис. 2.5. Она содержит несущую, n верхних и n нижних боковых составляющих, которые расположены симметрично относительно несущей. Полная ширина спектра определяется наибольшей из модулирующих частот; она равна $2\Omega_B$.

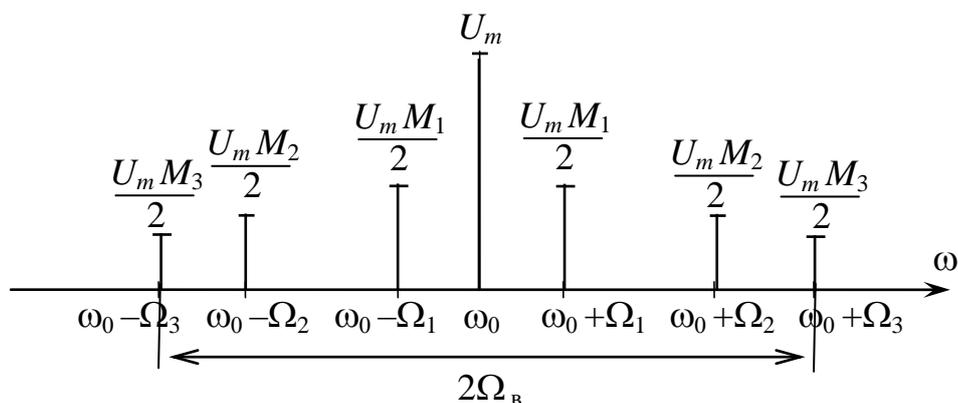


Рис. 2.5. Спектр АМ сигнала при многотональной модуляции

Сложные виды амплитудной модуляции

Недостатки обычной амплитудной модуляции частично устраняются при использовании амплитудной модуляции с подавленной несущей и модуляции с одной боковой полосой.

Для более рационального использования мощности сигнала используется амплитудная **модуляция с подавленной несущей**. При однотоновой модуляции такой сигнал записывается в виде

$$u(t) = U_m \cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.8)$$

Его спектр и временная диаграмма представлены на рис. 2.6. Огибающая такого сигнала существенно отличается от гармонической, и при использовании для его детектирования обычного амплитудного детектора возникнут очень сильные нелинейные искажения. Поэтому на приемной стороне восстанавливают обычный вид АМ сигнала, добавляя несущую и только после этого детектируют сигнал.

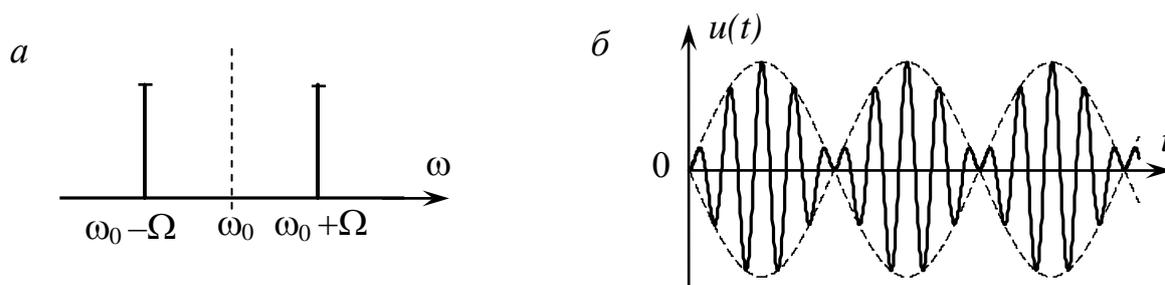


Рис. 2.6. Спектральная (а) и временная (б) диаграммы АМ сигнала с подавлением несущей

Модуляция с одной боковой полосой позволяет сэкономить на ширине спектра сигнала. Если рассмотреть спектр обычного АМ сигнала на рис. 2.5, то видно, что левая и правая части спектра дублируют друг друга. Можно передавать лишь половину спектра, при этом сохраняется вся передаваемая информация. Модуляция с одной боковой полосой используется, например, в телевидении, где ширина спектра сигнала составляет около 6 МГц. Очевидно, что форма сигнала с одной боковой полосой отличается от формы обычного АМ сигнала, что необходимо учитывать при его детектировании.

2.2. Сигналы с угловой модуляцией

Сигналами с угловой модуляцией называются **частотно-модулированные (ЧМ) и фазомодулированные (ФМ) сигналы**. Они схожи друг с другом, и поэтому их свойства обычно рассматриваются совместно.

Колебания с угловой модуляцией (и ЧМ, и ФМ) можно записать в виде

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.9)$$

Для описания сигналов с угловой модуляцией необходимо четко определить понятия частоты и фазы сигнала. Полной фазой сигнала называется величина $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, а $\varphi(t)$ – сдвиг фазы. Мгновенной частотой называется производная полной фазы по времени

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (2.10)$$

Соответственно,

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t) dt + \text{const}. \quad (2.11)$$

Обозначим, как и прежде, передаваемый информационный сигнал как $s(t)$.

При частотной модуляции в соответствии с информационным сигналом $s(t)$ должна изменяться мгновенная частота $\omega(t)$, т. е.

$$\omega(t) = \omega_0 + a s(t). \quad (2.12)$$

Соответственно, полная фаза

$$\psi(t) = \omega_0 t + a \int_{-\infty}^t s(t) dt, \quad (2.13)$$

и ЧМ сигнал можно записать в следующей форме:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + a \int_{-\infty}^t s(t) dt]. \quad (2.14)$$

Максимальное отклонение частоты $\Delta\omega$ от среднего значения ω_0 называется **девиацией частоты**. На рис. 2.7 в качестве иллюстрации приведены временные диаграммы модулирующего сигнала $s(t)$, мгновенной частоты $\omega(t)$, сдвига фазы $\varphi(t)$ для ЧМ сигнала $u(t)$.

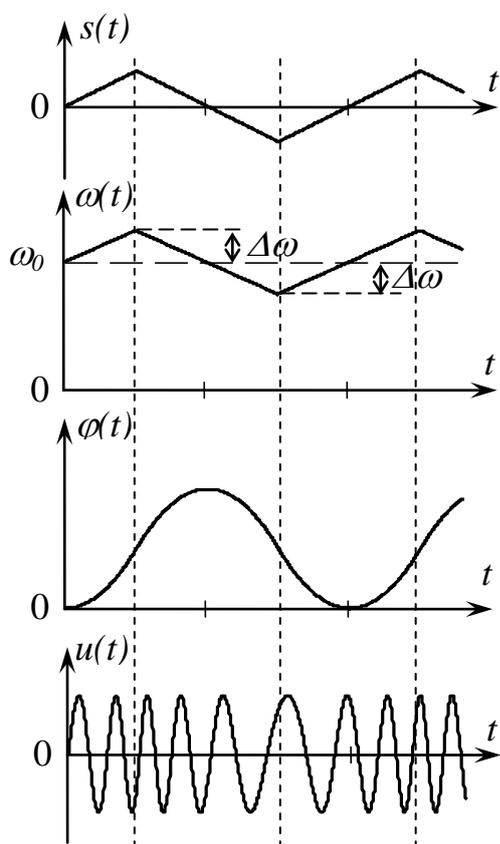


Рис. 2.7. Временные диаграммы для ЧМ сигнала

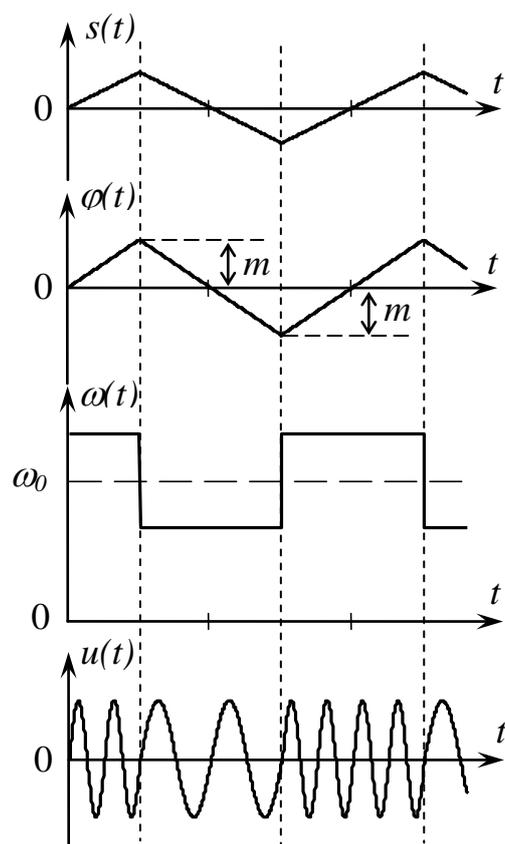


Рис. 2.8. Временные диаграммы для ФМ сигнала

При однотоновой частотной модуляции

$$s(t) = \cos(\Omega t + \Phi). \quad (2.15)$$

Запишем выражения для мгновенной частоты, полной фазы и сдвига фазы сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \Phi), \quad (2.16)$$

где $\Delta\omega$ – девиация частоты,

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi), \quad (2.17)$$

$$\varphi(t) = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi). \quad (2.18)$$

Величина $\Delta\omega/\Omega = m$ – характеризует максимальное отклонение сдвига фазы от среднего значения и называется **индексом модуляции**. Индекс модуляции – величина безразмерная и измеряется в радианах.

При фазовой модуляции пропорционально информационному сигналу $s(t)$ изменяется сдвиг фазы $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = as(t). \quad (2.19)$$

В соответствии с этим,

$$\psi(t) = \omega_0 t + as(t), \quad (2.20)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + a \frac{ds(t)}{dt}, \quad (2.21)$$

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + as(t)]. \quad (2.22)$$

На рис. 2.8 показаны временные диаграммы модулирующего сигнала $s(t)$, сдвига фазы $\varphi(t)$, мгновенной частоты $\omega(t)$ и ФМ сигнала $u(t)$ при таком же виде модулирующего сигнала, как на рис. 2.7. Сравнивая рис. 2.7 и 2.8, можно видеть, в чем различаются ЧМ и ФМ сигналы и их характеристики.

При однотоновой фазовой модуляции

$$s(t) = \cos(\Omega t + \Phi), \quad (2.23)$$

$$\varphi(t) = m \cos(\Omega t + \Phi), \quad (2.24)$$

где m – максимальное отклонение сдвига фазы, т. е. индекс модуляции.

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 - m\Omega \sin(\Omega t + \Phi). \quad (2.25)$$

Максимальное отклонение мгновенной частоты от среднего значения, т. е. девиация частоты в данном случае равна $m\Omega$, т. е.

$$\Delta\omega = m\Omega. \quad (2.26)$$

Как видно, связь между индексом модуляции и девиацией частоты одинакова для ЧМ и ФМ сигналов.

Сравнивая выражения (2.16) – (2.18) и (2.24) – (2.25) нетрудно видеть, что при однотоновой модуляции ЧМ и ФМ сигналы различаются лишь фазой модулирующего сигнала, т. е. различить их достаточно сложно. При более сложном характере модуляции разница между ЧМ и ФМ сигналами может быть существенной, но внешне, лишь по временной диаграмме, трудно определить, какой вид модуляции применяется, так как при любом виде угловой модуляции изменяются и мгновенная частота, и фаза. Поэтому на приемной стороне, во избежание ошибок при детектировании, необходимо заранее знать вид используемой модуляции. Сравнивая рис. 2.7 и 2.8, можно получить

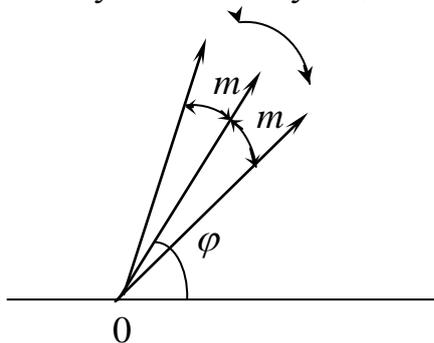


Рис. 2.9. Векторная диаграмма колебания с угловой модуляцией

представление о характере ошибок, которые возникают, если для детектирования ЧМ сигнала будет применен ФМ детектор или наоборот.

Векторная диаграмма сигнала с угловой модуляцией представляет собой вектор, длина которого с течением времени не изменяется, а изменяется лишь фаза, т. е. угол по отношению к некоторой оси отсчета (рис. 2.9).

Максимальный угол отклонения вектора от среднего значения равен индексу модуляции. В отличие от амплитудной модуляции, где коэффициент модуляции должен быть меньше 1, величина индекса модуляции не ограничена и может достигать любых значений, при этом никаких искажений сигнала не происходит. В зависимости от величины индекса

модуляции различают узкополосную модуляцию, когда $m \ll 1$ и широкополосную модуляцию, когда $m \gg 1$.

Лекция 6.

Спектр сигнала с угловой модуляцией

Рассмотрим простейший случай однотональной модуляции. Как ЧМ, так и ФМ сигналы могут быть описаны выражением

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + m \cos(\Omega t + \Phi) + \varphi_0]. \quad (2.27)$$

Перепишем выражение (2.27) в следующем виде:

$$u(t) = U_m \operatorname{Re} \left[e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} e^{jm \cos(\Omega t + \Phi)} \right]. \quad (2.28)$$

В теории функций Бесселя доказываются следующие выражения:

$$e^{jm \cos(\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{jn\alpha}. \quad (2.29)$$

Применяя (2.29), преобразуем выражение (2.28) к следующему виду:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{jn(\Omega t + \Phi)} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right] = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \operatorname{Re} \left\{ e^{j[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_0 + n\Phi]} \right\} = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\Omega)t + \varphi_0 + n\Phi]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Таким образом, колебание с угловой модуляцией удалось представить в виде суммы гармонических составляющих, частоты которых равны $\omega_0 + n\Omega$, а амплитуды – $U_m J_n(m)$.

Для построения спектральной диаграммы необходимо знать некоторые свойства функций Бесселя. График функций Бесселя $J_n(m)$ для некоторых положительных значений индекса n приведен на рис. 2.10. При отрицательных значениях индекса справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= J_n(m), \text{ если } n - \text{четное;} \\ J_{-n}(x) &= -J_n(m), \text{ если } n - \text{нечетное.} \end{aligned}$$

Другое важное свойство функций Бесселя состоит в том, что при большом индексе n они весьма близки к нулю при $m < n - 1$ (см. рис. 2.10). В связи с этим спектральные составляющие с частотой $\omega_0 + n\Omega$, где $n > m + 1$, становятся пренебрежимо малыми, и хотя, строго говоря, ширина спектра бесконечно велика, можно говорить о реальной ширине спектра, которая равна $2\Omega(m + 1) = 2\Delta\omega + 2\Omega$. В качестве иллюстрации на рис. 2.11 изображен спектр колебания с угловой модуляцией при $m = 5$.

Анализ этой спектральной диаграммы позволяет сделать следующие выводы. Спектр сигнала с угловой модуляцией при $m \gg 1$ содержит несущую и большое число боковых составляющих, расположенных на расстоянии Ω друг от друга. Несущая составляющая совсем не обязательно больше боковых составляющих, она может быть даже отрицательной, т. е. ее фаза равна π , как на рис. 2.11. Составляющие за пределами практической ширины спектра (в нашем случае – с частотой $\omega_0 \pm 7\Omega$) еще заметно отличаются от нуля, однако, как показывает опыт, их вклад в формирование сигнала пренебрежимо мал.

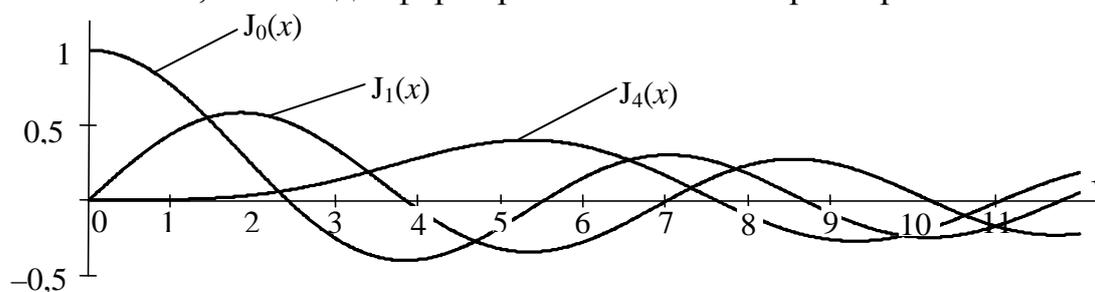


Рис.2.10. Графики функций Бесселя

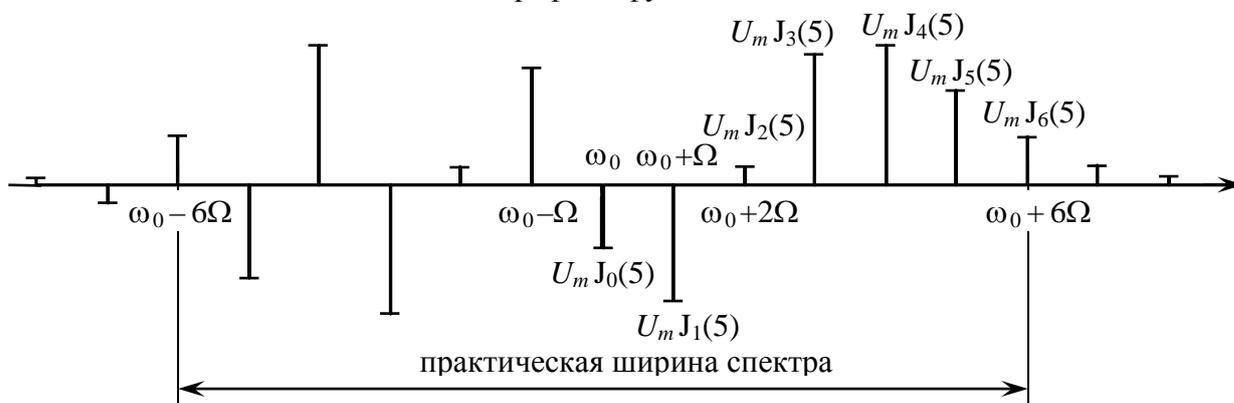


Рис. 2.11. Спектр сигнала с угловой модуляцией при $m = 5$

При узкополосной угловой модуляции, когда $m \ll 1$, можно воспользоваться приближенными выражениями для функций Бесселя:

$$J_0(m) \approx 1; \quad J_1(m) \approx m/2; \quad J_2(m) \approx m^2/8.$$

В этом случае спектральная диаграмма сигнала имеет лишь три составляющие: несущую и две боковых с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Все остальные составляющие настолько малы, что ими можно пренебречь. Несущая составляющая равна U_m , верхняя боковая $U_m m/2$, нижняя боковая: $-U_m m/2$ (рис. 2.12). Спектр этого сигнала похож на спектр АМ сигнала, с той лишь разницей, что нижняя боковая составляющая имеет противоположную фазу.

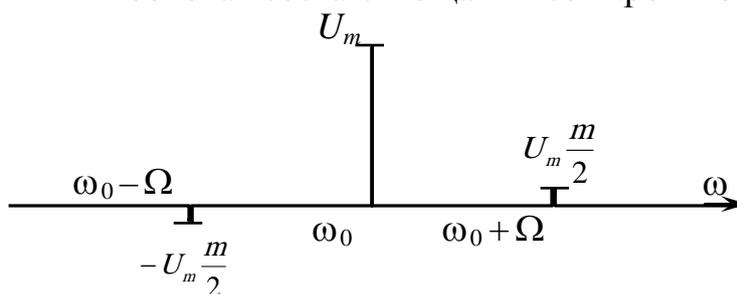


Рис. 2.12. Спектр сигнала с угловой модуляцией при $m = 0,2$

Преимущества ЧМ и ФМ сигналов по сравнению с АМ сигналами

Сигналы с угловой модуляцией обеспечивают более широкий динамический диапазон, особенно в сторону увеличения громкости (для случая звуковых сигналов). При использовании амплитудной модуляции максимальный уровень модуляции ограничен значением $M = 1$; при дальнейшем увеличении глубины модуляции возникают недопустимые искажения. При угловой модуляции глубина модуляции может увеличиваться безгранично без появления нелинейных искажений.

Сигналы с угловой модуляцией обеспечивают более высокую помехоустойчивость. Поясним это на примере двух видов помех: импульсной и квазигармонической.

При импульсной помехе (например, при грозовом разряде) возникает мощный короткий импульс, который слышен как треск. Особенно это заметно в вещательных приемниках АМ сигналов, где уровень помехи на выходе может сильно превышать уровень полезного сигнала, как показано на рис. 2.13.

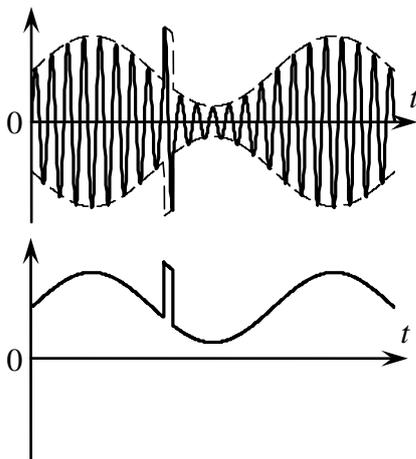


Рис. 2.13. Влияние импульсной помехи при амплитудной модуляции

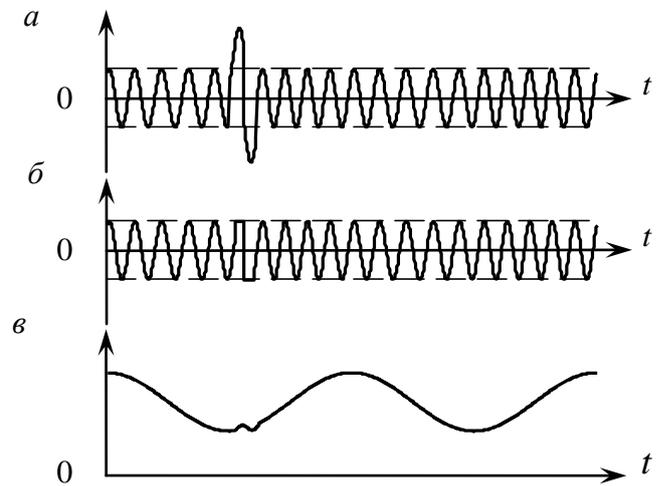


Рис. 2.14. Влияние импульсной помехи при угловой модуляции

При угловой модуляции уровень помехи на входе столь же велик, как и при использовании АМ сигналов (рис. 2.14, а). Однако в приемниках ЧМ и ФМ сигналов обязательно осуществляется ограничение амплитуды сигнала перед детектированием (рис. 2.14, б). При этом помеха не подавляется полностью; ее действие сводится к некоторому изменению фазы, которое не превышает π , т. е. максимальный индекс модуляции, вызванный помехой, не превышает π . При широкополосной угловой модуляции индекс модуляции, вызванный полезным сигналом $m \gg 1$, и поэтому отношение сигнал/помеха на выходе может быть значительно меньше единицы, несмотря на то, что на входе помеха значительно сильнее сигнала.

Действие квазигармонической помехи может быть проиллюстрировано векторной диаграммой на рис. 2.15. Здесь U_m – несущая принимаемого сигнала, вектор помехи U_n описывает вокруг конца вектора U_m некоторую траекторию. В

результате возникает паразитная амплитудная и фазовая модуляции. Коэффициент амплитудной модуляции приблизительно равен $M_{\Pi} \approx U_{\Pi}/U_m$, индекс фазовой модуляции $m_{\Pi} \approx U_{\Pi}/U_m$. При использовании амплитудной модуляции отношение сигнал/помеха на выходе равно M_c/M_{Π} , при использовании угловой модуляции – m_c/m_{Π} .

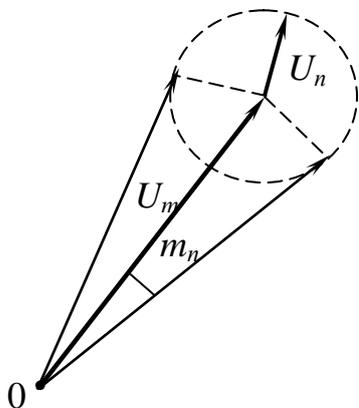


Рис. 2.15. К оценке влияния квазигармонической помехи

Поскольку индекс модуляции сигнала m_c может быть значительно больше чем коэффициент амплитудной модуляции M_c , угловая модуляция обеспечивает более высокую помехоустойчивость.

Отметим, что все эти преимущества проявляются для широкополосной угловой модуляции, когда $m \gg 1$.

2.3. Сигналы со сложной модуляцией

2.3.1. Импульсы с линейной частотной модуляцией

Особую категорию модулированных сигналов представляют радиоимпульсы с внутренней частотной модуляцией, широко применяемые в радиолокации. Чаще всего используется линейный закон изменения частоты (рис. 2.16, а):

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t. \quad (2.31)$$

За время, равное длительности импульса, частота изменяется от $\omega_0 - \Delta\omega$ до $\omega_0 + \Delta\omega$, где $\Delta\omega = \mu T_{\Pi}/2$, T_{Π} – длительность импульса. Такие сигналы называют импульсами с **линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-импульсами)**.

Аналитически ЛЧМ-импульс описывается следующим выражением (рис. 2.16, б):

$$u(t) = \begin{cases} U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right), & -\frac{T_{\Pi}}{2} < t < \frac{T_{\Pi}}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{T_{\Pi}}{2}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Важной характеристикой ЛЧМ сигнала является его **база В**, определяемая как произведение длительности сигнала на полную девиацию частоты:

$$B = T_c \frac{2\Delta\omega}{2\pi}.$$

Чем больше база сигнала, тем выше эффективность применения ЛЧМ-сигналов.

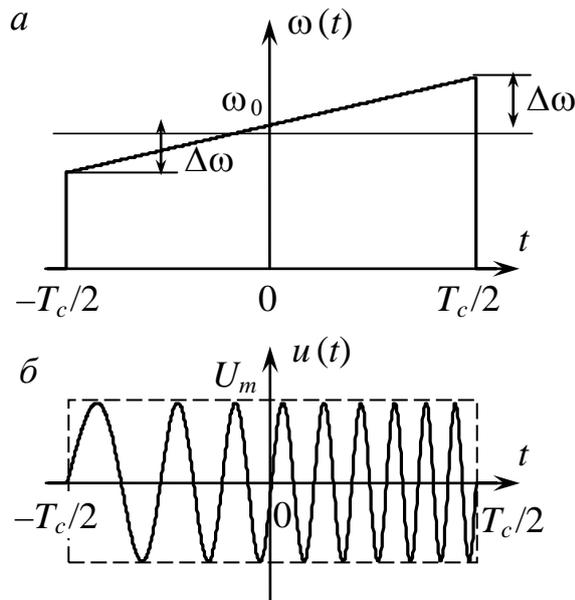


Рис. 2.16. ЛЧМ импульс: *a* – закон изменения частоты; *б* – временная диаграмма

Спектр ЛЧМ-импульса описывается достаточно сложным выражением в которое входят интегралы Френеля. Читатель при желании может найти необходимую информацию о спектре в учебнике С.И. Баскакова [1]. Отметим только, что при большой базе модуль спектра ЛЧМ-сигнала имеет форму, близкую к прямоугольной (рис. 2.17).

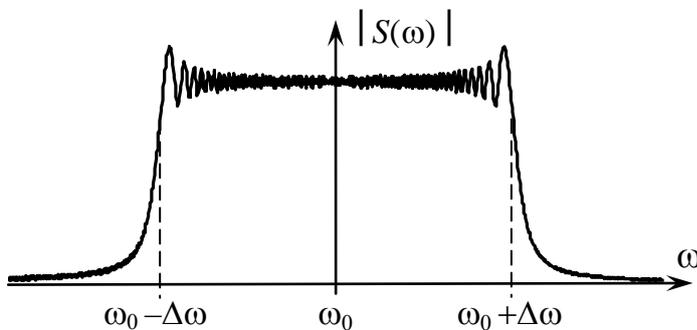


Рис. 2.17. Спектр ЛЧМ импульса при $B = 200$

Наиболее значимой характеристикой ЛЧМ-сигнала является его автокорреляционная функция. Выражение для АКФ ЛЧМ-сигнала можно найти путем прямой подстановки выражения (2.32) в формулу для вычисления АКФ (1.64):

$$\Psi(\tau) = \frac{U_m^2 T_c}{2} \frac{\sin \left[\frac{\pi B \tau}{T_c} \left(1 - \frac{\tau}{T_c} \right) \right]}{\frac{\pi B \tau}{T_c}} \cos(\omega_0 \tau). \quad (2.33)$$

При $B \gg 1$ и $\tau \ll T_c$ можно пользоваться приближенным выражением:

$$\Psi(\tau) \approx \frac{U_m^2 T_c}{2} \frac{\sin \left(\frac{\pi B \tau}{T_c} \right)}{\frac{\pi B \tau}{T_c}} \cos(\omega_0 \tau). \quad (2.34)$$

График автокорреляционной функции ЛЧМ-импульса изображен на рис. 2.18.

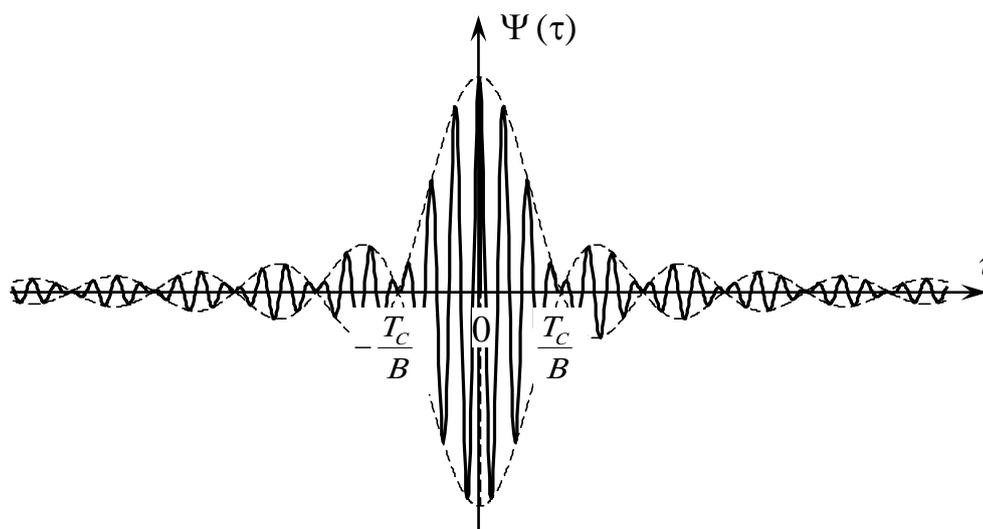


Рис. 2.18. Автокорреляционная функция ЛЧМ импульса

Характерным параметром АКФ является ширина главного лепестка (или положение первого нуля огибающей). Огибающая равна нулю, когда аргумент синуса в (2.34) равен π , и соответственно $\tau = T_c/B$. Очевидно, что чем больше база сигнала B , тем уже главный лепесток АКФ по сравнению с длительностью сигнала.

Это свойство ЛЧМ-сигнала используется при корреляционной обработке радиолокационных сигналов. Длительность сигнала в результате корреляционной обработки уменьшается приблизительно в B раз, что позволяет с большой точностью измерять запаздывание сигнала и расстояние до цели и разрешать близко расположенные объекты.

2.3.2. Фазоманипулированные сигналы

Фазоманипулированный сигнал – это гармонический сигнал, фаза которого в определенные моменты времени изменяется скачком по заданному закону. На рис. 2.19 изображен так называемый двухпозиционный фазоманипулированный сигнал, фаза которого в определенные моменты времени изменяется на 180° .

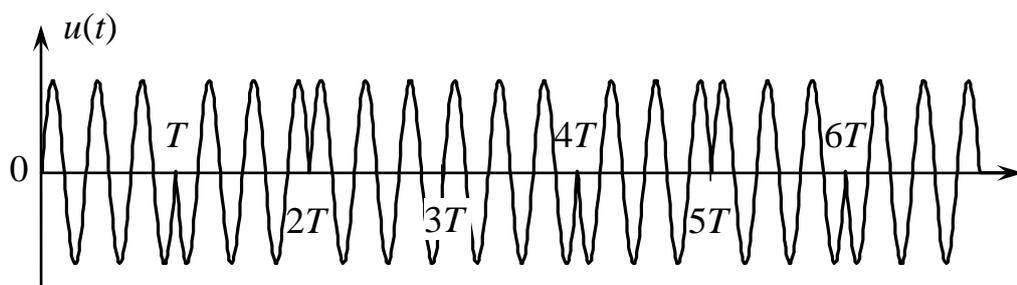


Рис. 2.19. Двухпозиционный фазоманипулированный сигнал

Корреляционные свойства фазоманипулированного сигнала определяются кодом, устанавливающим значения фазы каждого элементарного отрезка сигнала длительностью T . Если фаза изменяется, например, в соответствии с кодом Баркера, то АКФ фазоманипулированного сигнала будет иметь огибающую, соответствующую АКФ сигнала Баркера (см., например, рис. 3.4).

Кроме двухпозиционных сигналов используются четырехпозиционные, когда фаза каждого отрезка может различаться на 90° , восьмипозиционные и более сложные. Благодаря разнообразию кодов, используемых при формировании фазоманипулированных сигналов, они находят широкое применение в различных системах передачи информации.

Лекция 7.

2.4. Узкополосные сигналы.

2.4.1. Физическая огибающая и комплексная огибающая.

Узкополосными называются сигналы, ширина спектра которых значительно меньше центральной частоты спектра: $2\Delta\omega \ll \omega_0$ (см. рис. 2.20).

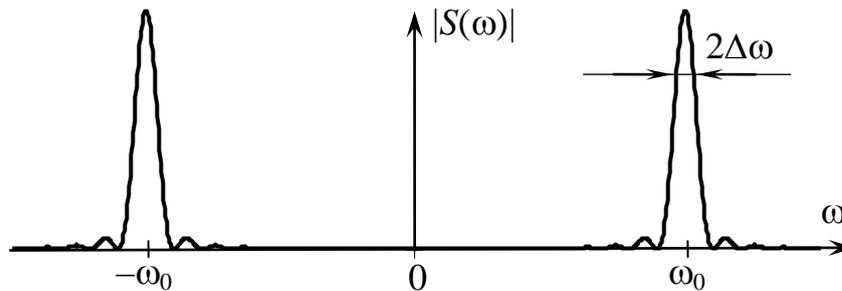


Рис. 2.20. Спектр узкополосного сигнала

Узкополосный сигнал может быть описан следующим выражением:

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2.35)$$

где $U_m(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся (по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$) огибающая и фаза сигнала.

По аналогии с комплексной амплитудой гармонического сигнала для узкополосных сигналов вводится понятие **комплексной огибающей**:

$$\dot{U}_m(t) = U_m(t)e^{j\varphi(t)}. \quad (2.36)$$

Узкополосный сигнал связан с комплексной огибающей соотношением

$$u(t) = \operatorname{Re}[U_m(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t}] = \operatorname{Re}[\dot{U}_m(t)e^{j\omega_0 t}]. \quad (2.37)$$

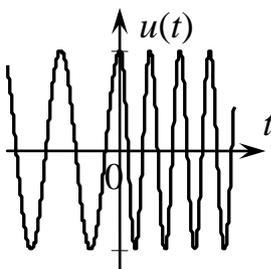


Рис. 2.21.

Комплексная огибающая $\dot{U}_m(t)$ для конкретного сигнала $u(t)$ в общем случае определяется неоднозначно и зависит от выбора опорной частоты ω_0 . Например, такая ситуация складывается для сигнала (рис. 2.21)

$$u(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_1 t), & t < 0 \\ U_m \cos(2\omega_1 t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Если в качестве опорной частоты выберем ω_0 (примем $\omega_0 = \omega_1$) то

$$\dot{U}_m(t) = \begin{cases} U_m, & t < 0 \\ U_m e^{j(\omega_2 - \omega_0)t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Если же в качестве опорной частоты выберем среднюю частоту $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, то

$$\dot{U}_m(t) = \begin{cases} U_m e^{j\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{2}\right)t}, & t < 0 \\ U_m e^{j\left(\frac{\omega_2 - \omega_0}{2}\right)t}, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (2.40)$$

Отметим, однако, что физическая огибающая $U_m(t) = |\dot{U}_m(t)|$ не зависит от выбора частоты ω_0 .

Рассмотрим, как связаны спектры узкополосного сигнала и его комплексной огибающей. Преобразуем выражение для узкополосного сигнала:

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \frac{1}{2} U_m(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} + \frac{1}{2} U_m(t) e^{-j(\omega_0 t + \varphi(t))}. \quad (2.41)$$

Применим к выражению (2.41) преобразование Фурье:

$$\dot{S}_u(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{-j\varphi(t)} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt. \quad (2.42)$$

Нетрудно видеть, что первый из интегралов равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_m(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \dot{S}_{\dot{U}_m}(\omega - \omega_0). \quad (2.43)$$

Второй интеграл можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{-j\varphi(t)} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_m(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} e^{j\omega t} dt \right)^* = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_m(t) e^{-j(-\omega - \omega_0)t} dt \right)^* = \dot{S}_{\dot{U}_m}^*(-\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь знак $*$ означает комплексную сопряженность. Таким образом,

$$\dot{S}_u(\omega) = \frac{1}{2} \dot{S}_{\dot{U}_m}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{S}_{\dot{U}_m}^*(-\omega - \omega_0). \quad (2.45)$$

Комплексная сопряженность во втором слагаемом нужна для того, чтобы спектр $\dot{S}_u(\omega)$ удовлетворял свойству симметрии мнимой части (рис. 2.22).

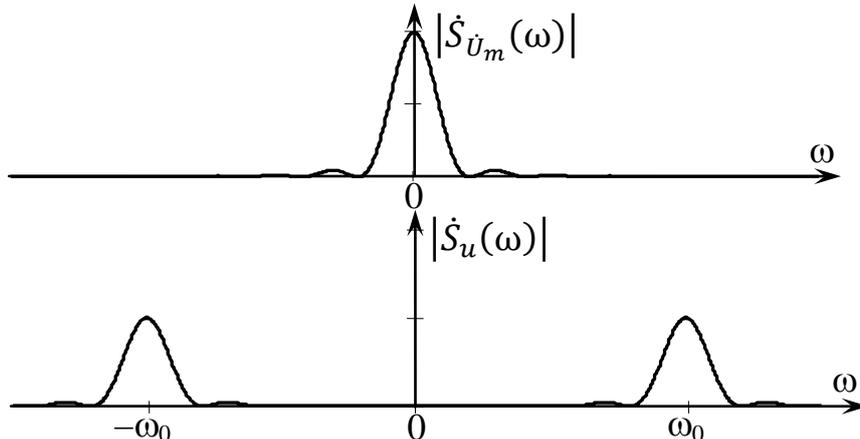


Рис. 2.22.

Если спектр комплексной огибающей несимметричен, то спектр сигнала $u(t)$ всегда симметричен.

Для иллюстрации рассмотрим пример, взятый из учебника С.И.Баскакова [1]. Рассмотрим узкополосный сигнал, спектральная плотность которого (рис. 2.23,а) описывается в области положительных частот $\omega \geq 0$ выражением

$$\dot{S}_u(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0 \\ S_0 e^{-\beta(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Соответственно, спектральная плотность огибающей (рис. 2.23,б) описывается выражением

$$a) \quad |\dot{S}_u(\omega)| \quad \dot{S}_{\dot{u}_m}(\omega) = \begin{cases} 2S_0 e^{-\beta\omega}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

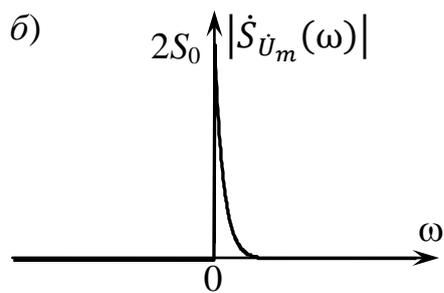
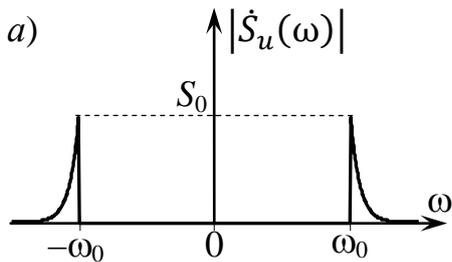


Рис. 2.23.

С помощью обратного преобразования Фурье найдем выражение для комплексной огибающей:

$$\dot{U}_m(t) = \frac{2S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{\pi(\beta - jt)} \quad (2.48)$$

Найдем физическую огибающую:

$$U_m(t) = |\dot{U}_m(t)| = \frac{S_0}{\pi\sqrt{\beta^2 + t^2}}, \quad (2.49)$$

затем найдем начальную фазу $\varphi(t)$ и мгновенную частоту $\omega(t)$:

$$\varphi(t) = \text{arctg}\left(\frac{t}{\beta}\right) \quad (2.50)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d}{dt}\left(\text{arctg}\left(\frac{t}{\beta}\right)\right) = \omega_0 + \frac{\beta}{\beta^2 + t^2}$$

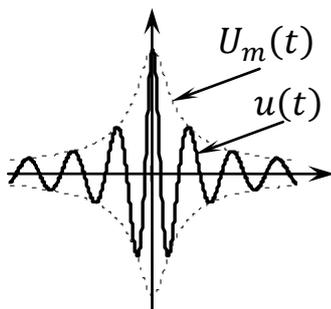


Рис. 2.24.

Полученные выражения позволяют проанализировать вид рассматриваемого сигнала (рис. 2.24). Это довольно сложный импульс с переменной частотой заполнения. При $t = 0$ мгновенная частота равна $\omega = \omega_0 + \frac{1}{\beta}$; при $t \rightarrow \pm\infty$ частота уменьшается, стремясь к ω_0 .

2.4.2. Аналитический сигнал.

На практике часто возникает задача определения комплексной огибающей исходного узкополосного сигнала. Если узкополосный сигнал задан аналитическим выражением вида (2.35), то определение комплексной огибающей не вызывает труда. Но в тех случаях, когда узкополосный сигнал задан в виде

массива значений или имеет вид изменяющегося во времени напряжения, найти комплексную огибающую бывает значительно труднее. Для решения этой проблемы используется так называемый **аналитический сигнал**.

Рассмотрим процесс нахождения комплексной огибающей более подробно. Сначала в дополнение к исходному сигналу $u(t)$ вводится так называемый **сопряженный сигнал** $v(t)$, спектр которого связан со спектром исходного сигнала соотношением

$$\dot{S}_v(\omega) = \begin{cases} -j\dot{S}_u(\omega), & \omega \geq 0 \\ j\dot{S}_u(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Можно представить ситуацию таким образом, что исходный сигнал как бы проходит через фильтр с частотной характеристикой

$$\dot{K}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega \geq 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

и превращается в сопряженный сигнал $v(t)$. Все составляющие спектра исходного сигнала поворачиваются по фазе на 90° , поэтому такой фильтр называют **квадратурным**.

Если исходный узкополосный сигнал описывается выражением (2.35), то, как нетрудно показать, сопряженный сигнал – выражением

$$v(t) = U_m(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2.53)$$

Применяя к выражению для частотной характеристики (2.52) обратное преобразование Фурье, найдем импульсную характеристику квадратурного фильтра:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t} \quad (2.54)$$

Отсюда найдем выражение, связывающее исходный и сопряженный сигналы:

$$v(t) = u(t) * h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.55)$$

Интегральное преобразование вида (2.55) называется **преобразованием Гильберта**.

Следующий этап – формирование **аналитического сигнала**, который задается выражением

$$\dot{z}(t) = u(t) + jv(t) \quad (2.56)$$

Аналитический сигнал – комплексный сигнал, его спектральная плотность описывается выражением

$$\dot{S}_z(\omega) = \dot{S}_u(\omega) + j\dot{S}_v(\omega) = \begin{cases} 2\dot{S}_u(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Преобразуем выражение для аналитического сигнала, подставляя в (2.56) выражения (2.35) и (2.53):

$$\dot{z}(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + jU_m(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) =$$

$$= U_m(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} = \dot{U}_m(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (2.58)$$

Выражение (2.58) определяет алгоритм нахождения комплексной огибающей: надо найти аналитический сигнал и умножить его на $e^{-j\omega_0 t}$:

$$\dot{U}_m(t) = \dot{z}(t)e^{-j\omega_0 t}. \quad (2.59)$$

Как видно из (2.59), в тех случаях, когда выбор значения опорной частоты ω_0 неоднозначен, комплексная огибающая тоже определяется неоднозначно и зависит от выбора частоты ω_0 . Однако физическая огибающая от выбора частоты ω_0 не зависит и определяется однозначно:

$$U_m(t) = |\dot{U}_m(t)| = |\dot{z}(t)| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}. \quad (2.60)$$

Из выражения (2.59) на основании теоремы о переносе спектра следует, что спектр комплексной огибающей равен спектру аналитического сигнала, смещенному влево (в область низких частот) на величину ω_0 :

$$\dot{S}_{\dot{U}_m}(\omega) = \dot{S}_z(\omega + \omega_0). \quad (2.61)$$

Таким образом, чтобы от спектра узкополосного сигнала перейти к спектру его огибающей, нужно выполнить следующие операции: часть спектра узкополосного сигнала, расположенную в области $\omega > 0$, увеличиваем в 2 раза и сдвигаем влево (в область низких частот) на величину ω_0 (рис. 2.25).

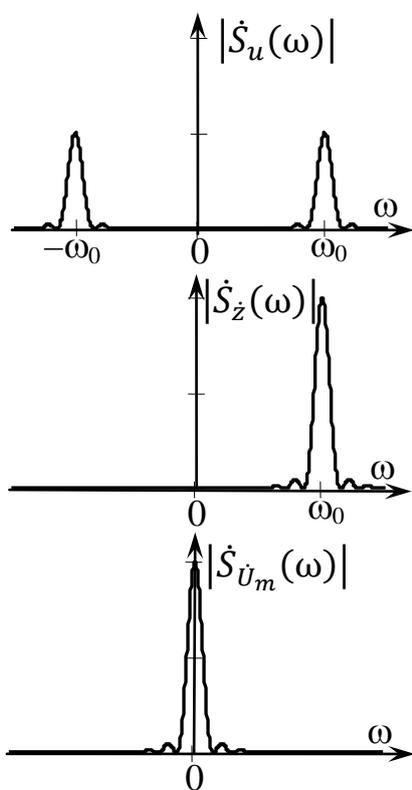


Рис. 2.25.

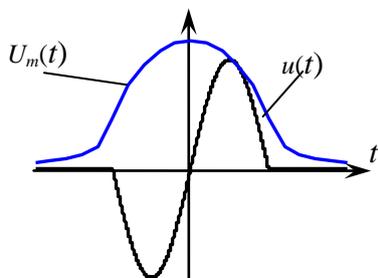


Рис. 2.26.

Следует отметить, что рассмотренная процедура нахождения огибающей приводит к правильному результату только для узкополосных сигналов, у которых составляющие спектра, расположенные в области положительных и отрицательных частот, не перекрываются. Для подтверждения этого рассмотрим пример в виде простейшего высокочастотного импульса с прямоугольной огибающей, состоящий из одного периода гармонического сигнала (рис. 2.26). Огибающая этого сигнала меняется скачком в начале и конце импульса, т.е. даже быстрее, чем $\cos(\omega_0 t)$. Если последовательно выполнить операции преобразования Гильберта, определения аналитического сигнала и затем определения огибающей, в итоге получится огибающая не прямоугольной, а сглаженной формы (рис. 2.26).

Контрольные вопросы

1. Как выглядит спектр амплитудно-модулированного сигнала?
2. Что такое перемодуляция? Почему она приводит к недопустимым искажениям?
3. Чем отличается частотная модуляция от фазовой, и что у них общего?
4. Чему равна реальная ширина спектра сигнала с угловой модуляцией?
5. Что такое широкополосная угловая модуляция? Каковы ее преимущества перед узкополосной модуляцией?
6. В чем состоят преимущества ЧМ и ФМ сигналов по сравнению с АМ сигналами?
7. Что такое ЛЧМ импульс? Каковы его основные характеристики?
8. Чем объясняется широкое применение ЛЧМ сигнала в радиолокации?
9. Какой сигнал называется узкополосным?
10. Что такое комплексная огибающая узкополосного сигнала?
11. Что такое аналитический сигнал?
12. Как связаны друг с другом спектры узкополосного сигнала, комплексной огибающей и аналитического сигнала?
13. Изложите процедуру нахождения комплексной огибающей узкополосного сигнала с использованием аналитического сигнала.

Лекция 8.

3. Анализ прохождения радиотехнических сигналов через линейные цепи

3.1. Взаимосвязь различных методов анализа прохождения сигналов через линейные цепи

Для анализа прохождения сигналов через линейные цепи используются четыре метода: метод дифференциальных уравнений, метод интеграла Дюамеля, операторный метод и спектральный метод. Некоторые из этих методов рассматривались в курсе «Основы теории цепей». Все методы анализа взаимосвязаны, и наша задача состоит в установлении характера этой взаимосвязи. Рассмотрим методы анализа прохождения сигналов через линейные цепи более подробно.

3.1.1. Метод дифференциальных уравнений

Сущность метода состоит в том, что составляется дифференциальное уравнение цепи, как правило, на основании уравнений Кирхгофа. Если к исследуемой цепи подводится какой-либо сигнал, то дифференциальное уравнение получается неоднородным, его правой частью является ЭДС или ток, характеризующий сигнал на входе цепи.

Как известно, *общее решение неоднородного дифференциального уравнения* равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. *Физический смысл решения однородного уравнения* – это свободные колебания в цепи, т.е. процесс, протекающий в цепи, когда входное воздействие больше не подается, и в цепи расходуется энергия, накопленная в реактивных элементах – конденсаторах и индуктивных катушках.

Для решения задачи в конкретном случае необходимо знать еще *начальные условия*, которые определяются значениями напряжения и тока в элементах цепи в начальный момент времени.

Метод дифференциальных уравнений является наиболее универсальным методом анализа воздействия сигналов на радиотехнические цепи. В частности, его можно применять и при анализе нелинейных цепей. Недостатком метода является его трудоемкость. Если цепь имеет сложную структуру, составление дифференциального уравнения и, тем более, его решение может вызвать значительные затруднения.

Однако, в некоторых простейших случаях как вынужденные, так и свободные колебания можно записать, не решая и даже не составляя дифференциального уравнения цепи.

3.1.2. Интеграл Дюамеля

Для определения сигнала на выходе цепи с помощью интеграла Дюамеля необходимо знать импульсную или переходную характеристики цепи.

Импульсная характеристика цепи $h(t)$ – это сигнал на выходе цепи, который получается при подаче на ее вход сигнала в виде δ -функции.

Согласно **интегралу Дюамеля** сигнал на выходе линейной цепи $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ равен свертке сигнала на входе цепи $u_{\text{ВХ}}(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (3.1)$$

Однако, если учесть, что импульсная характеристика $h(t)$ тождественно равна нулю при $t < 0$, практически используется немного **другая форма записи интеграла Дюамеля**:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t u_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t u_{\text{ВХ}}(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

Переходной характеристикой $g(t)$ называют сигнал на выходе цепи, если на ее вход подается сигнал в виде единичного скачка $\sigma(t)$. Переходная характеристика связана с импульсной характеристикой соотношением:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Интеграл Дюамеля с использованием переходной характеристики записывается следующим образом:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВХ}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau}g(t - \tau)d\tau \quad (3.4)$$

3.1.3. Операторный метод

Операторный метод основан на использовании преобразования Лапласа. Для нахождения выходного сигнала нужно найти преобразование Лапласа входного сигнала $F_{\text{ВХ}}(p)$, умножить его на операторную передаточную функцию цепи $K(p)$, в результате получим изображение выходного сигнала $F_{\text{ВЫХ}}(p)$:

$$F_{\text{ВЫХ}}(p) = F_{\text{ВХ}}(p) \cdot K(p). \quad (3.5)$$

Переход от оригинала (т.е. временной зависимости сигнала) к изображению и обратно проводится с помощью таблиц преобразования Лапласа.

3.1.4. Спектральный метод

Для реализации **спектрального метода** нужно знать амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики цепи или комплексный коэффициент передачи как функцию частоты. По определению, **комплексным частотным коэффициентом передачи** называют функцию, описывающую частотную зависимость отношения комплексных амплитуд выходного отклика цепи и

входного гармонического воздействия. Частотную зависимость модуля комплексного коэффициента передачи называют **амплитудно-частотной характеристикой** цепи (АЧХ), частотная зависимость фазы комплексного коэффициента передачи представляет собой **фазо-частотную характеристику** (ФЧХ) цепи. АЧХ устанавливает связь между амплитудами гармонических колебаний на входе и выходе цепи при различных частотах: $|K(\omega)| = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$. ФЧХ описывает частотную зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами: $\beta(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}}$.

В радиотехнике частотный коэффициент передачи чаще всего представляет собой безразмерное отношение комплексных амплитуд напряжений или токов. Для измерения значений таких АЧХ удобно использовать особые логарифмические единицы – децибелы (дБ). Для этого вводят понятие **усиления** цепи, дБ: $\Delta(\omega) = 20 \lg(|K(j\omega)|)$.

Спектральный метод для дискретного сигнала. Если входной сигнал имеет дискретный спектр, например, если сигнал периодический, то комплексную амплитуду каждой спектральной составляющей $\dot{A}_{i \text{ ВХ}}$ следует умножить на значение комплексного коэффициента передачи на соответствующей частоте ω_i . В результате определяем спектр сигнала на выходе цепи:

$$\dot{A}_{i \text{ ВЫХ}} = \dot{A}_{i \text{ ВХ}} \cdot \dot{K}(\omega_i) \quad (3.6)$$

Иначе говоря, амплитуду каждой спектральной составляющей надо умножить на соответствующее значение АЧХ, а фазу – сложить с соответствующим значением ФЧХ.

Спектральный метод для импульсного сигнала. Если входной сигнал – непериодический, то спектр его непрерывный и описывается спектральной плотностью $\dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)$. В этом случае, умножая $\dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)$ на комплексную частотную характеристику цепи $\dot{K}(\omega)$, найдем спектральную плотность выходного сигнала $\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega)$:

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega). \quad (3.7)$$

От спектральной плотности $\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega)$ можно перейти к временной зависимости $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.8)$$

К сожалению, в большинстве случаев интеграл (3.9) не удастся вычислить аналитическими методами. Поэтому для нахождения выходного сигнала либо используются методы численного вычисления интегралов, либо используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Итак, для определения спектра сигнала, прошедшего через линейную цепь, необходимо амплитудный спектр умножить на АЧХ, а фазовый спектр сложить с ФЧХ.

3.1.5. Взаимосвязь различных методов анализа

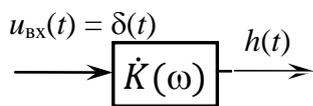


Рис. 3.1.

Для выяснения характера взаимосвязи различных методов анализа прохождения сигналов через линейные цепи представим такой опыт (рис. 3.1). Подадим на вход линейной цепи с частотной характеристикой $\dot{K}(\omega)$ сигнал в виде дельта-функции $\delta(t)$: тогда сигнал на выходе цепи будет совпадать с импульсной характеристикой $h(t)$. Спектр входного сигнала (δ -функции), как известно, равен 1. В соответствии со спектральным методом спектр выходного сигнала равен произведению спектра входного сигнала и частотной характеристики:

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega) = \dot{K}(\omega). \quad (3.9)$$

Отсюда следует, что **частотная и импульсная характеристики цепи связаны преобразованием Фурье**:

$$\dot{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.10)$$

Пусть теперь на вход линейной цепи подается произвольный сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$ со спектральной плотностью $\dot{S}_{\text{ВХ}}(\omega)$. Обозначим сигнал на выходе цепи $u_{\text{ВЫХ}}(t)$, а его спектральную плотность $\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega)$. Как известно, связь между входным и выходным сигналами определяется формулой интеграла Дюамеля (3.1). Применяя к формуле (3.1) теорему о преобразовании Фурье свертки и учитывая связь между импульсной и частотной характеристиками (3.10), получим выражение для спектрального метода (3.7).

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить **выражение, связывающее импульсную характеристику и операторную передаточную функцию**:

$$K(p) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt, \quad (3.11)$$

а также установить характер взаимосвязи между операторным методом и интегралом Дюамеля.

Наиболее простой оказывается взаимосвязь между операторным и спектральным методами. **Заменяя $j\omega$ на p** в выражении для комплексного коэффициента передачи, получаем формулу для операторной передаточной функции $K(p)$. Аналогичная взаимосвязь наблюдается между спектральной плотностью сигнала и его изображением по Лапласу. Сравним, например, спектральную плотность экспоненциального импульса $u(t) = E e^{-\alpha t} \sigma(t)$:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{E}{\alpha + j\omega} \quad (3.12)$$

и преобразование Лапласа для этого импульса:

$$U(p) = \frac{E}{\alpha + p} \quad (3.13)$$

Такая взаимосвязь позволяет в отдельных случаях переходить от спектральной плотности к временной зависимости сигнала с помощью **таблиц преобразования Лапласа**, а не заниматься трудоемким вычислением интеграла обратного преобразования Фурье.

И, наконец, рассмотрим связь метода дифференциальных уравнений с другими методами анализа. Импульсную характеристику цепи можно рассматривать как **функцию Грина** соответствующего дифференциального уравнения. Широко известный метод решения дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа приводит нас к операторному методу.

3.2. Анализ воздействия амплитудно-модулированных сигналов на избирательные цепи

Анализ воздействия АМ сигналов на избирательные цепи проще всего проводить **спектральным методом**.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда **несущая частота сигнала совпадает с резонансной частотой** избирательной цепи. Запишем выражение для АМ сигнала в виде суммы трех спектральных составляющих:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Phi] + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi + \Phi]. \quad (3.14)$$

Спектральная диаграмма этого сигнала приведена на рис. 3.2,а. Под ней изображены амплитудно-частотная $|\dot{K}(\omega)|$ (рис. 3.2,б) и фазочастотная $\beta(\omega)$ (рис. 3.2,в) характеристики цепи.

В роли избирательной цепи может выступать колебательный контур (последовательный или параллельный), резонансный усилитель или любое другое устройство, ширина частотной характеристики которого мала по сравнению с резонансной частотой. В

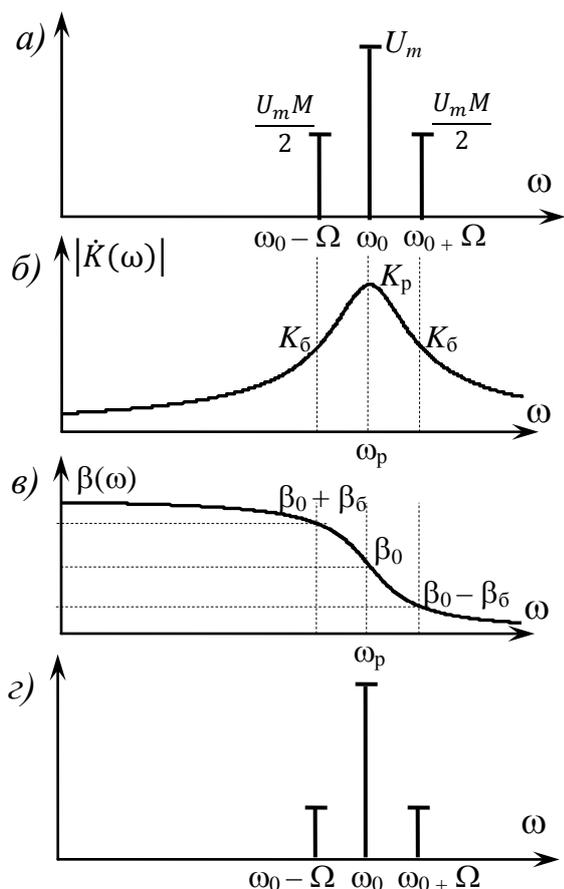


Рис. 3.2. Прохождение АМ сигнала через узкополосную цепь: а – спектр входного сигнала; б – АЧХ цепи; в – ФЧХ цепи; г – спектр выходного сигнала

зависимости от характера цепи в качестве частотной характеристики цепи могут фигурировать различные физические величины. Например, для последовательного колебательного контура, если выходным сигналом является ток, это – проводимость $Y(\omega)$, для параллельного контура (выходным является напряжение) – сопротивление $Z(\omega)$. При высокой добротности контуров, входящих в состав избирательной цепи, частотная характеристика практически симметрична, поэтому для простоты дальнейшего анализа несимметрией частотной характеристики пренебрегаем.

При прохождении через избирательную цепь амплитуда каждой из оставляющих спектра АМ сигнала умножается на свой коэффициент передачи: амплитуда несущей умножается на коэффициент передачи на резонансной частоте K_p , а амплитуда боковых на $K_6 = K(\omega_0 - \Omega) = K(\omega_0 + \Omega)$. К фазе несущей добавляется β_0 , к фазе верхней боковой $\beta_0 - \beta_6$, к фазе нижней боковой добавляется $\beta_0 + \beta_6$.

С учетом этих преобразований запишем **выражение для сигнала на выходе избирательной цепи**:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_m K_p \cos(\omega_0 t + \varphi + \beta_0) + \frac{U_m M}{2} K_6 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Phi + \beta_0 - \beta_6] + \frac{U_m M}{2} K_6 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \Phi + \beta_0 + \beta_6].$$

Проводя необходимые тригонометрические преобразования, получим:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_m K_p \left[1 + M \frac{K_6}{K_p} \cos(\Omega t + \Phi - \beta_6) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi + \beta_0). \quad (3.15)$$

Анализируя выражение (3.15) для сигнала на выходе избирательной цепи, нетрудно видеть, что этот сигнал также представляет собой АМ колебание, однако его параметры отличаются от параметров АМ сигнала на входе цепи (рис. 3.2,г). Эти отличия состоят в следующем:

1). **Изменилась** средняя амплитуда сигнала (**амплитуда несущей**). Новая амплитуда равна $U_m K_p$.

2). **Изменился коэффициент модуляции**. Коэффициент модуляции на выходе:

$$M_{\text{вых}} = M \frac{K_6}{K_p}. \quad (3.16)$$

В частности, для одиночного колебательного контура, резонансного усилителя с одиночным контуром и для любой одноконтурной системы:

$$K(\omega) = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \xi^2(\omega)}} = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \left[\frac{2Q(\omega - \omega_p)}{\omega_p} \right]^2}}. \quad (3.17)$$

Отсюда

$$M_{\text{ВЫХ}} = \frac{M}{\sqrt{1 + \left[\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right]^2}}. \quad (3.18)$$

График зависимости $M_{\text{ВЫХ}}/M_{\text{ВХ}}$ от модулирующей частоты Ω , построенный по формуле (3.18), приведен на рис. 3.3. Этот график в точности повторяет половину резонансной кривой избирательной цепи.

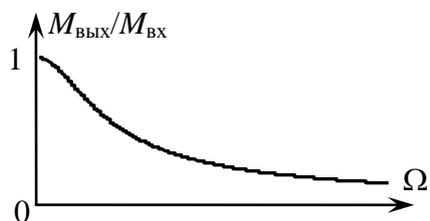


Рис. 3.3. Зависимость $M_{\text{ВЫХ}}/M_{\text{ВХ}}$ от модулирующей частоты.

3). **Изменяется фаза** (происходит запаздывание) **огibaющей** АМ сигнала. Сдвиг по фазе равен β_0 . Для одноконтурной избирательной цепи:

$$\beta_0 = \text{arctg}(\xi(\omega)) = \text{arctg}\left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right). \quad (3.19)$$

Этот фазовый сдвиг приводит к запаздыванию по времени, которое равно

$$\tau = \frac{\beta_0}{\Omega}. \quad (3.20)$$

4). Происходит **сдвиг фазы высокочастотного заполнения** на β_0 .

Временные диаграммы входного и выходного сигналов приведены на рис. 3.4.

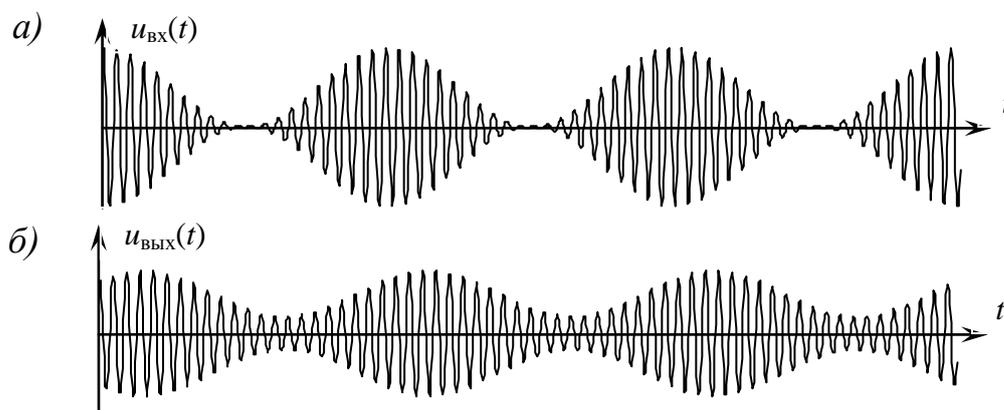


Рис. 3.4. Временные диаграммы входного (а) и выходного (б) сигналов при $\omega_0 \neq \omega_p$:

Изменение амплитуды сигнала и фазовый сдвиг ВЧ заполнения являются несущественными фактами. **Наиболее существенными изменениями** АМ сигнала при прохождении через избирательные цепи является **изменение коэффициента модуляции и запаздывание огibaющей**.

Если АМ сигнал однотоновый, то эти изменения не приводят к искажениям информации.

Искажения происходят, если в АМ сигнале несколько модулирующих частот. Тогда для каждой из модулирующих частот коэффициент модуляции в соответствии с (3.17) и (3.19) изменяется в различной степени, что приводит к изменению соотношения между разными составляющими спектра. Искажения такого вида называются **частотными**. Другой вид искажений (их называют

фазовыми) состоит в том, что временное запаздывание огибающей, согласно (3.21), зависит от модулирующей частоты. В результате изменяется форма огибающей сигнала. Фазовые искажения несущественны при передаче аудио сигнала, так как человеческое ухо нечувствительно к фазе сигнала, но сильно сказываются в телевидении, так как приводят к размазыванию контуров изображения.

Для того, чтобы как частотные, так и фазовые **искажения отсутствовали**, необходимо, во-первых, чтобы изменение коэффициента модуляции было одинаковым для всех модулирующих частот, а это возможно, **если модуль коэффициента передачи (АЧХ) одинаков для всех частот в пределах спектра сигнала**. Во-вторых, чтобы не было фазовых искажений нужно, чтобы запаздывание огибающей τ было одинаковым для всех модулирующих частот. А это возможно, согласно (3.21), если β_0 пропорционально Ω , то есть **фазо-частотная характеристика должна быть линейной в пределах спектра сигнала**.

Отсюда следует, что для неискаженной передачи АМ сигналов АЧХ должна иметь прямоугольную форму, ФЧХ должна быть линейной.

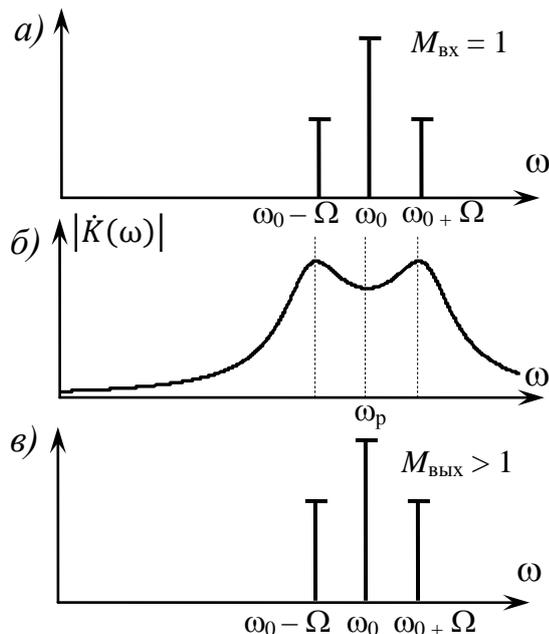


Рис. 3.5. Прохождение АМ сигнала через связанные контуры: а – спектр входного сигнала; б – АЧХ цепи; в – спектр выходного сигнала

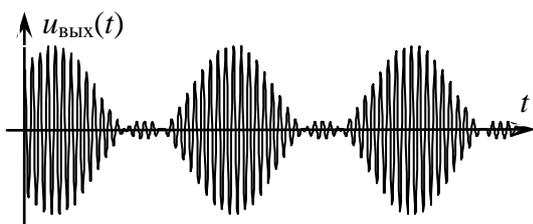


Рис. 3.6. Сигнал на выходе узкополосной цепи с двугорбой АЧХ.

Если **частотная характеристика** избирательной цепи имеет **двугорбую** форму, например, если это связанные контуры с фактором связи $A > 1$, и если боковые составляющие спектра АМ сигнала попадают горбы частотной характеристики, а несущие – на впадину между горбами (рис. 3.5), то, наоборот, коэффициент модуляции выходного сигнала увеличивается. Если коэффициент модуляции входного сигнала близок к единице, то коэффициент модуляции выходного сигнала может оказаться больше единицы, то есть происходит **перемодуляция**, приводящая к весьма неприятным искажениям сигнала (рис. 3.6). Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании резонансных усилителей в радиоприемных устройствах.

Рассмотрим, что происходит, если **несущая частота АМ сигнала не совпадает с резонансной частотой избирательной цепи**. Конкретная форма сигнала на выходе зависит от многих

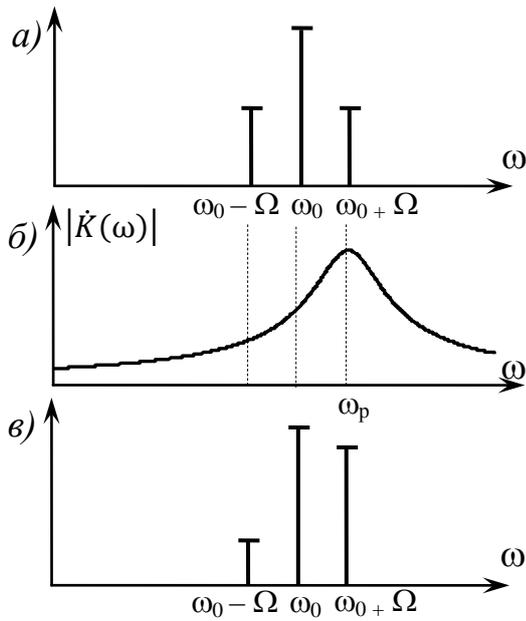


Рис. 3.7. Прохождение АМ сигнала через узкополосную цепи при $\omega_0 \neq \omega_p$: а – спектр входного сигнала; б – АЧХ цепи; в – спектр выходного сигнала

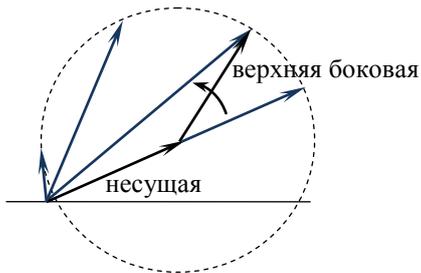


Рис. 3.8. Векторная диаграмма выходного АМ сигнала при $\omega_0 \neq \omega_p$.

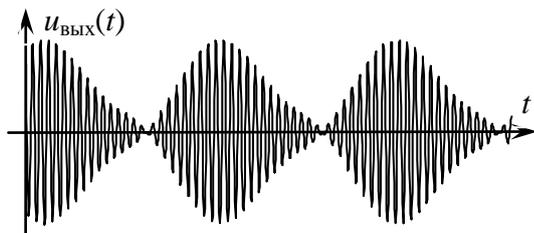


Рис. 3.9. Сигнал на выходе узкополосной цепи при $\omega_0 \neq \omega_p$.

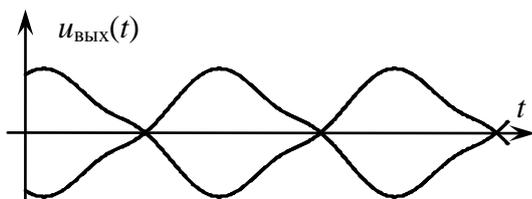


Рис. 3.10. Огибающая сигнала на выходе узкополосной цепи при $\omega_0 \neq \omega_p$.

факторов: величины расстройки, формы частотной характеристики цепи, коэффициента модуляции сигнала, соотношением между шириной спектра сигнала и полосой пропускания цепи. Поэтому мы рассмотрим в качестве примера один из частных случаев.

На рис. 3.7 изображен спектр сигнала, а под ним частотная характеристика цепи, причем резонансная частота совпадает с верхней боковой частотой сигнала. При этом верхняя боковая составляющая умножается на максимальный коэффициент передачи, а несущая – на меньший, так что на выходе верхняя боковая и несущая могут оказаться близкими по величине, а нижняя боковая окажется совсем маленькой.

Чтобы установить, как будет выглядеть при этом выходной сигнал, построим векторную диаграмму (рис. 3.8), где показана сумма несущей и верхней боковой составляющих, а нижней боковой из-за ее малости пренебрегаем. Конец суммарного вектора движется по окружности с равномерной скоростью. При этом, как нетрудно видеть, длина суммарного вектора изменяется довольно медленно в районе максимума (вблизи точки А на рис. 3.8) и значительно быстрее при движении в районе минимума (вблизи точки 0). В результате форма сигнала на выходе имеет форму, показанную на рис. 3.9. Форма огибающей сигнала отличается от синусоидальной, что приводит к возникновению искажений (рис. 3.10).

Кроме искажения формы огибающей из-за «качания» суммарного вектора происходит паразитная фазовая модуляция сигнала.

Если дополнительно учесть нижнюю боковую составляющую, то, вследствие ее малой амплитуды, она лишь немного изменит траекторию движения суммарного вектора и приведет к тому, что форма

огибающей может оказаться несимметричной, как показано на рис. 3.10.

Из изложенного следует практическая рекомендация: чтобы избежать сильных искажений сигнала, надо резонансную частоту точно настраивать на частоту сигнала.

Лекция 9.

3.3. Анализ прохождения ЧМ сигналов через избирательные цепи

В отличие от АМ сигнала, задачу о воздействии ЧМ сигналов на избирательные цепи в общем виде решить не удастся. Это объясняется тем, что, поскольку спектр ЧМ сигнала очень сложный, при умножении его на частотную характеристику цепи получается спектр, который, вообще говоря, не соответствует ЧМ сигналу. Разумеется, можно просуммировать эти составляющие и найти форму сигнала, но это будет численное решение задачи в частном случае, а общее решение найти не удастся. Поэтому для того, чтобы найти какие-то общие закономерности преобразования ЧМ сигналов при прохождении через избирательные цепи, пользуются приближенным **методом мгновенной частоты**. Суть метода состоит в том, что пренебрегают переходным процессом при изменении частоты сигнала и считают, что колебания в контуре (избирательной цепи) успевают следить за изменениями частоты входного сигнала. *Такой подход оказывается допустимым, если модулирующая частота значительно меньше ширины полосы пропускания избирательной цепи ($\Omega \ll \Delta\omega_{0,707}$).* Кроме того, *желательно, чтобы девиация частоты не превосходила полосы пропускания цепи ($\Delta\omega \leq \Delta\omega_{0,707}$).*

Сущность метода мгновенной частоты поясняется на рис. 3.11.

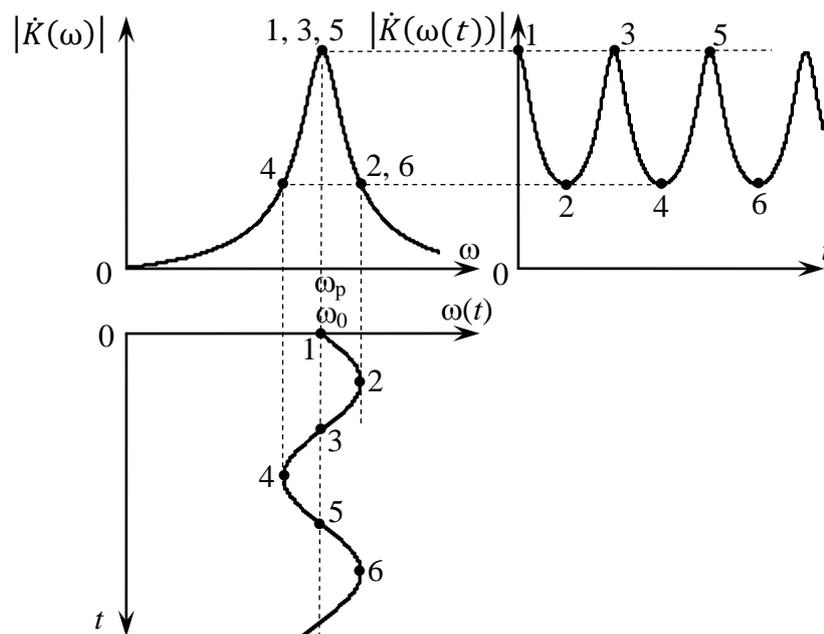


Рис. 3.11. Иллюстрация метода мгновенной частоты при $\omega_p = \omega_0$.

В нижней части рисунка показано как изменяется во времени частота сигнала, над ним – амплитудно-частотная характеристика цепи, справа – как изменяется амплитуда выходного сигнала.

Поскольку частота у ЧМ сигнала изменяется во времени, а коэффициент передачи избирательной цепи зависит от частоты, то получается, что **коэффициент передачи изменяется во времени. В результате изменяется и амплитуда сигнала, прошедшего через избирательную цепь, то есть происходит паразитная амплитудная модуляция.** Если, как на рис. 3.11, несущая частота ЧМ сигнала совпадает с резонансной частотой цепи, то частота паразитной амплитудной модуляции в 2 раза превышает частоту частотной модуляции исходного сигнала.

Если же несущая частота ЧМ сигнала не совпадает с резонансной частотой избирательной цепи и приходится на скат резонансной кривой, как на рис. 3.12, то, если изменение частоты в процессе модуляции не доходит до вершины резонансной кривой, частота получающейся паразитной амплитудной модуляции совпадает с частотой частотной модуляции ЧМ сигнала. Этот эффект может использоваться для детектирования ЧМ сигнала.

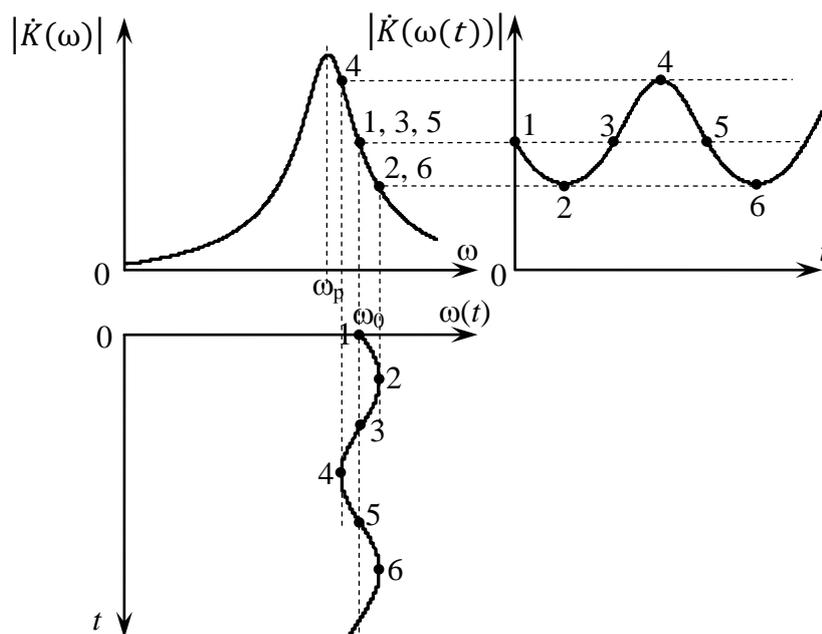


Рис. 3.11. Иллюстрация метода мгновенной частоты при $\omega_p \neq \omega_0$.

Второй эффект, который можно проанализировать с помощью метода мгновенной частоты – это **искажения характера частотной модуляции вследствие нелинейности фазо-частотной характеристики цепи.** Вследствие изменения частоты входного сигнала в процессе частотной модуляции изменяется дополнительный сдвиг фазы, вносимый избирательной цепью. В результате несколько изменяется глубина частотной модуляции выходного сигнала и появляются небольшие искажения. Этот процесс проанализирован в учебнике И.С.Гоноровского «Радиотехнические цепи и сигналы». Там показано, что коэффициент нелинейных искажений частотной модуляции не превышает

0,13/ m . Такие искажения практически незаметны при широкополосной частотной модуляции, когда $m \gg 1$.

3.4. Анализ прохождения узкополосных сигналов через избирательные цепи методом низкочастотных эквивалентов

Рассмотрим задачу о прохождении узкополосного сигнала через избирательную цепь (например, резонансный усилитель). Эту задачу можно решать, например, **спектральным методом**. Для этого спектр входного сигнала $\dot{S}_{\text{вх}}(\omega)$ надо умножить на частотную характеристику цепи $\dot{K}(\omega)$, в результате получим спектр выходного сигнала $\dot{S}_{\text{вых}}(\omega)$ (рис. 3.13):

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = \dot{S}_{\text{вх}}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega). \quad (3.21)$$

И спектры, и частотная характеристика цепи – симметричные функции относительно $\omega = 0$. Левая часть (при $\omega < 0$) полностью повторяет правую (при $\omega > 0$). Отсюда следует очевидная избыточность действий при решении этой задачи. *Избыточность можно устранить, если рассматривать только правую половину графика, а для облегчения решения задачи сместить ее влево на величину ω_0 , т.е. в область низких частот* (рис. 3.14).

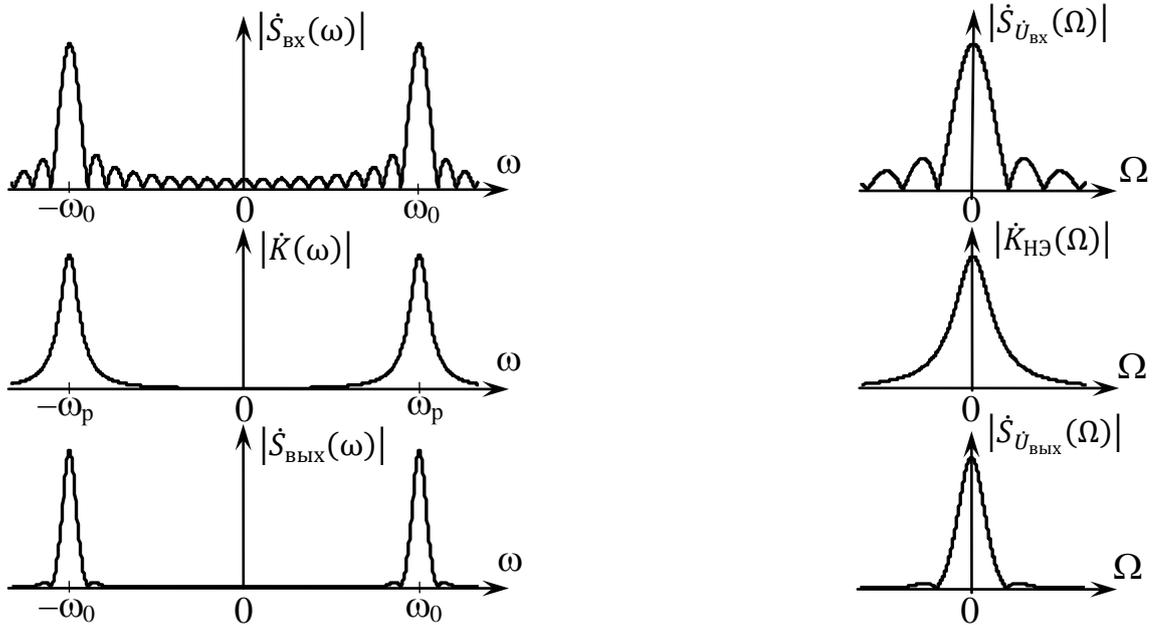


Рис. 3.13. Иллюстрация спектрального метода.

Рис. 3.14. Применение НЧ эквивалента

Рассмотрим **физический и математический смысл таких преобразований**. Переход от полного спектра исходного сигнала к усеченному, содержащему лишь положительные частоты, означает переход от исходного реального сигнала к аналитическому сигналу (с коэффициентом 0,5). Напомним, что спектр аналитического сигнала $\dot{z}(t)$ определяется выражением

$$\dot{S}_z(\omega) = \begin{cases} 2\dot{S}_u(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Сдвиг спектра влево на ω_0 на языке математики описывается заменой переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$. Иначе говоря, *сдвигая спектр влево на ω_0 , мы от аналитического сигнала переходим к комплексной огибающей*. Таким образом, вместо (3.21) мы получаем сначала выражение

$$\dot{S}_{z_{\text{ВЫХ}}}(\omega) = \dot{S}_{z_{\text{ВХ}}}(\omega) \cdot \dot{K}(\omega), \quad (3.23)$$

затем, обозначая $\omega = \omega_0 + \Omega$, запишем:

$$\dot{S}_{z_{\text{ВЫХ}}}(\omega_0 + \Omega) = \dot{S}_{z_{\text{ВХ}}}(\omega_0 + \Omega) \cdot \dot{K}(\omega_0 + \Omega), \quad (3.24)$$

или, учитывая, что $\dot{S}_z(\omega_0 + \Omega) = \dot{S}_{U_m}(\Omega)$

$$\dot{S}_{U_{m_{\text{ВЫХ}}}}(\Omega) = \dot{S}_{U_{m_{\text{ВХ}}}}(\Omega) \cdot \dot{K}(\omega_0 + \Omega), \quad (3.25)$$

Таким образом, вместо исходной задачи о воздействии узкополосного сигнала на избирательную цепь мы получаем более простую *задачу о воздействии комплексной огибающей этого сигнала на некоторую цепь с частотной характеристикой $\dot{K}(\omega_0 + \Omega) = \dot{K}_{\text{НЭ}}(\Omega)$* . Такую цепь называют **низкочастотным эквивалентом избирательной цепи**.

Задачу о воздействии комплексной огибающей на низкочастотный эквивалент избирательной цепи не обязательно решать с помощью спектрального метода. Можно использовать любой другой метод, например, операторный или интеграл Дюамеля.

Таким образом, *решение задачи о воздействии узкополосного сигнала на избирательную цепь состоит из следующих этапов*.

1). *От исходного узкополосного сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ переходим к его комплексной огибающей*. В общем случае этот переход осуществляется с помощью преобразования Гильберта и аналитического сигнала, но в простых случаях (когда в математической модели явно выделена огибающая) возможен непосредственный переход к огибающей сигнала.

2). *Находим нужную (в зависимости от выбранного метода решения задачи) характеристику низкочастотного эквивалента*. При использовании спектрального метода – это комплексная частотная характеристика $\dot{K}_{\text{НЭ}}(\Omega)$, при использовании операторного метода – операторная передаточная функция $K_{\text{НЭ}}(p)$.

3). *С помощью выбранного метода решаем задачу о воздействии комплексной огибающей входного сигнала на низкочастотный эквивалент цепи. Находим комплексную огибающую выходного сигнала*.

4). *От комплексной огибающей выходного сигнала переходим к узкополосному выходному сигналу $u_{\text{вых}}(t)$* .

Лекция 10.

3.4.1. Подключение гармонического сигнала к последовательному колебательному контуру при совпадении частоты сигнала и резонансной частоты контура

Пусть к *последовательному колебательному контуру* в момент времени $t = 0$ *подключается гармоническая ЭДС* (рис. 3.15)

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \sigma(t). \quad (3.26)$$

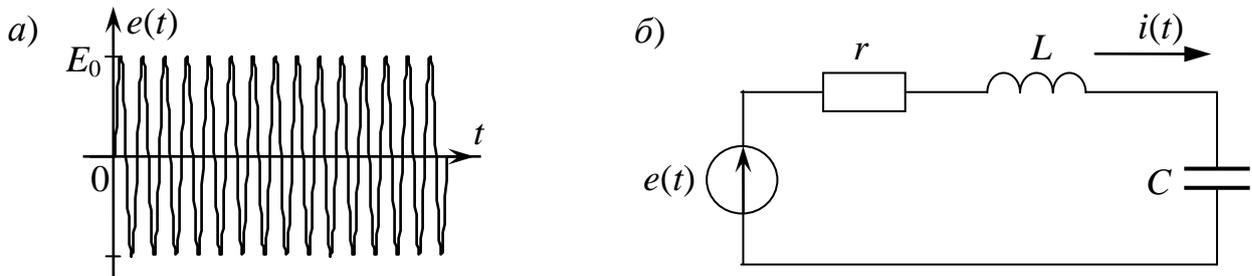


Рис. 3.15. Подключение гармонического сигнала (а) к последовательному колебательному контуру (б).

Требуется *найти ток в контуре $i(t)$* .

Комплексную огибающую входного сигнала можно записать сразу, не прибегая к помощи аналитического сигнала:

$$\dot{E}(t) = E_0 e^{j\varphi} \cdot \sigma(t). \quad (3.27)$$

Поскольку нужно найти ток в контуре, в качестве частотной характеристики цепи нужно использовать ее проводимость. Из курса «Основы теории цепей» известно, что *проводимость последовательного колебательного контура описывается выражением*

$$\dot{Y}(\omega) = \frac{1}{r(1 + j\xi(\omega))}. \quad (3.28)$$

$$\text{где } \xi(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \approx \frac{2Q(\omega - \omega_p)}{\omega_p}.$$

Чтобы перейти к низкочастотному эквиваленту, надо в выражении (3.28) произвести замену переменной $\Omega = \omega - \omega_0$, причем в нашем случае $\omega_0 = \omega_p$. Если эту замену переменной произвести в точном выражении для обобщенной расстройки $\xi(\omega)$, то это не приведет к упрощению задачи. Поэтому воспользуемся приближенным выражением, в котором уже присутствует разность $\omega - \omega_p$. Заменяя $\omega - \omega_p$ на Ω , получим:

$$\dot{Y}_{\text{нэ}}(\Omega) = \frac{1}{r \left(1 + j \frac{2Q\Omega}{\omega_p} \right)}. \quad (3.29)$$

или, учитывая, что $\frac{\omega_p}{2Q} = \alpha$,

$$\dot{Y}_{\text{нз}}(\Omega) = \frac{1}{r \left(1 + j \frac{\Omega}{\alpha}\right)}. \quad (3.30)$$

Таким образом, можно сформулировать *простое правило перехода от частотной характеристики избирательной цепи к частотной характеристике низкочастотного эквивалента*: $\xi(\omega)$ заменяется на $\frac{\Omega}{\alpha}$. Этот переход является приближенным, однако, как показывает анализ, погрешность такого приближения пренебрежимо мала.

Следующий этап – решение задачи о воздействии комплексной огибающей ЭДС на низкочастотный эквивалент. Проще всего эту задачу решить операторным методом. Запишем изображение входного сигнала

$$\dot{E}(p) = \frac{E_0}{p} e^{j\varphi}. \quad (3.31)$$

и операторную проводимость низкочастотного эквивалента:

$$Y_{\text{нз}}(p) = \frac{1}{r \left(1 + \frac{p}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{r(\alpha + p)}. \quad (3.32)$$

Перемножая (3.31) и (3.32), найдем изображение комплексной огибающей тока:

$$\dot{i}(p) = \frac{E_0 \alpha e^{j\varphi}}{r p (\alpha + p)}. \quad (3.33)$$

Используя таблицы преобразований Лапласа, перейдем к оригиналу (временной зависимости) огибающей тока:

$$\dot{i}(t) = \frac{E_0}{r} (1 - e^{-\alpha t}) e^{j\varphi} \cdot \sigma(t). \quad (3.34)$$

и записываем выражение для тока в контуре:

$$i(t) = \frac{E_0}{r} (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \sigma(t). \quad (3.35)$$

График тока в контуре приведен на рис. 3.16.

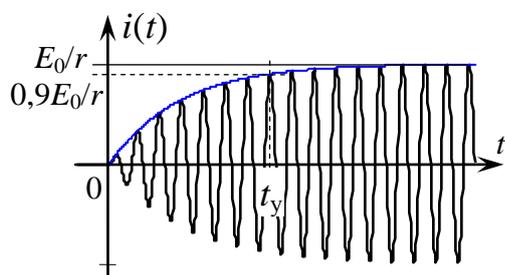


Рис. 3.16. Ток в последовательном контуре при подключении гармонической ЭДС ($\omega_0 = \omega_p$).

Рассмотрим **физический смысл** происходящих процессов. При подключении к контуру гармонической ЭДС каждый период подводимого сигнала вносит в контур порцию энергии, в результате чего амплитуда колебаний в контуре постепенно нарастает. Однако одновременно нарастает и мощность потерь в контуре (или энергия, выделяемая в резисторе в виде тепла). А поскольку мощность потерь пропорциональна квадрату амплитуды тока, она растет быстрее, чем подводимая мощность, и скорость нарастания энергии в контуре постепенно замедляется. В результате наступает баланс энергии, вносимой в контур, и теряемой энергии – наступает **установившийся режим**.

Скорость нарастания энергии в контуре определяют временем, за которое амплитуда колебаний в контуре нарастет до 0,9 от установившегося значения. Найдем это **время установления**:

$$\frac{E_0}{r}(1 - e^{-\alpha t}) = 0,9 \frac{E_0}{r}, \quad (3.36)$$

откуда $1 - e^{-\alpha t}$, а

$$t_y = \frac{2,3}{\alpha} = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}. \quad (3.37)$$

На рис. 3.17 показан характер изменения огибающей тока в контуре при нескольких значениях добротности Q . Чем больше добротность контура, тем

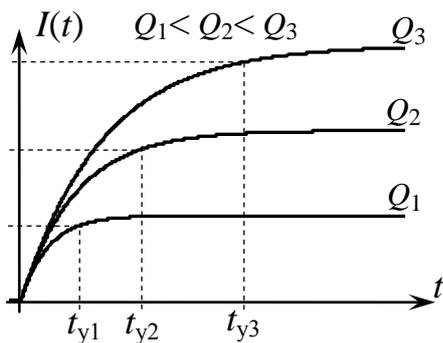


Рис. 3.17. Огибающая тока в последовательном контуре при подключении гармонической ЭДС ($\omega_0 = \omega_p$).

больше установившееся значение амплитуды тока и тем дольше идет процесс нарастания амплитуды тока в контуре. Отметим, что в самом начале, когда потери в контуре почти не сказываются, скорость нарастания амплитуды тока почти не зависит от добротности контура.

Рассмотрим, как изменяются во времени **напряжение на конденсаторе и напряжение на катушке индуктивности**. Сначала найдем напряжение на катушке. Воспользуемся формулой $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Подставляя сюда

выражение для тока (3.35) и проводя дифференцирование, получим:

$$u_L(t) = \frac{LE_0}{r} [\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi)] \cdot \sigma(t). \quad (3.38)$$

Для колебательных контуров с высокой и средней добротностью $\alpha \ll \omega_p = \omega_0$, поэтому первым слагаемым в выражении (3.38) можно пренебречь и приближенно записать:

$$\begin{aligned} u_L(t) &\approx \frac{\omega_0 LE_0}{r} (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \sigma(t) = \\ &= QE_0 (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \sigma(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Напряжение на конденсаторе проще всего найти, используя 2-ой закон Кирхгофа:

$$u_C(t) = e(t) - u_L(t) - u_r(t), \quad (3.40)$$

причем $u_r(t) = r \cdot i(t)$. Подставляя в (3.40) формулы (3.26), (3.35) и (3.38), после несложных преобразований получим:

$$u_C(t) = [-QE_0(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi) + 0,5E_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)] \sigma(t). \quad (3.41)$$

Поскольку второе слагаемое в (3.41) мало по сравнению с первым, можно приближенно записать:

$$u_C(t) \approx -QE_0 (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \sigma(t). \quad (3.42)$$

Сравнивая выражения (3.35), (3.39) и (3.42), можно сделать вывод, что **огибающая тока и напряжений на элементах изменяются по одному и тому**

же закону. Это закономерно, так как они описывают один и тот же процесс накопления энергии в контуре. Очевидно, что эта закономерность должна наблюдаться при любых других видах узкополосных сигналов, воздействующих на колебательный контур.

3.4.2. Подключение гармонического сигнала к последовательному колебательному контуру при $\omega_0 \neq \omega_p$

Рассмотрим теперь процессы в колебательном контуре при подключении гармонической ЭДС, частота которой не равна резонансной частоте контура, т.е. $\omega_0 \neq \omega_p$. Входная ЭДС описывается таким же выражением, как и в разделе 3.4.1 (формула (3.26)), но комплексную огибающую нужно определить иначе, **принимая в качестве опорной частоты не ω_0 , а ω_p .** Пусть $\omega_0 = \omega_p + \Delta\omega$, тогда выражение входной ЭДС можно представить в следующем виде

$$e(t) = E_0 \cos(\omega_p t + \Delta\omega t + \varphi) \cdot \sigma(t), \quad (3.43)$$

и $\Delta\omega t$ отнесем к изменяющейся фазе. Тогда комплексную огибающую можно записать в виде:

$$\dot{E}(t) = E_0 e^{j\Delta\omega t} e^{j\varphi} \cdot \sigma(t). \quad (3.44)$$

Рассмотрим задачу о воздействии комплексной огибающей (3.44) на низкочастотный эквивалент, используя операторный метод. Применим к (3.44) преобразование Лапласа:

$$\dot{E}(p) = \frac{E_0}{p - j\Delta\omega} e^{j\varphi}. \quad (3.45)$$

Перемножая (3.45) и (3.32), найдем изображение комплексной огибающей тока в контуре:

$$I(p) = \dot{E}(p) Y_{\text{нэ}}(p) = \frac{E_0 e^{j\varphi} \alpha}{r(p - j\Delta\omega)(\alpha + p)}. \quad (3.46)$$

С помощью таблиц преобразования Лапласа найдем оригинал, соответствующий выражению (3.46):

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E_0 e^{j\varphi} \alpha}{r(-\alpha - j\Delta\omega)} (e^{-\alpha t} - e^{j\Delta\omega t}) \sigma(t) = \\ &= \frac{E_0 e^{j\varphi} \alpha}{r \left(1 + j \frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)} (e^{j\Delta\omega t} - e^{-\alpha t}) \sigma(t). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Непосредственный переход от комплексной огибающей (3.47) к току $i(t)$ проблематичен. В данном случае нужно прибегнуть к аналитическому сигналу:

$$\dot{z}_i(t) = I(t) e^{j\omega_p t} = \frac{E_0 e^{j\varphi}}{r \left(1 + j \frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)} (e^{j\Delta\omega t} - e^{-\alpha t}) e^{j\omega_p t} \sigma(t). \quad (3.48)$$

Преобразуем комплексное выражение (3.48) в показательную форму. Для этого обозначим $\frac{\Delta\omega}{\alpha} = \xi_0$ (ξ_0 – это **обобщенная расстройка частоты ЭДС относительно резонансной частоты контура**) и осуществим преобразование

$\frac{1}{1+j\frac{\Delta\omega}{\alpha}} = \frac{1}{1+j\xi_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi_0^2}} e^{j\beta_0}$ где $\beta_0 = -\arctg(\xi_0)$. Преобразуем (3.48) с учетом этих выражений:

$$\dot{z}_i(t) = \frac{E_0 e^{j\varphi} e^{j\beta_0}}{r\sqrt{1+\xi_0^2}} (e^{j(\omega_p+\Delta\omega)t} - e^{-\alpha t} e^{j\omega_p t}) \sigma(t). \quad (3.49)$$

Теперь легко записать выражение для тока в контуре:

$$i(t) = \text{Re}\{\dot{z}_i(t)\} = \left[\frac{E_0}{r\sqrt{1+\xi_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi + \beta_0) - \frac{E_0 e^{-\alpha t}}{r\sqrt{1+\xi_0^2}} \cos(\omega_p t + \varphi + \beta_0) \right] \sigma(t). \quad (3.50)$$

Выражение (3.50) имеет простой **физический смысл**. **Первое слагаемое описывает вынужденные колебания в контуре** с расстройкой $\Delta\omega$ относительно частоты ЭДС. Амплитуда тока в этом случае, как следует из курса теории цепей, равна $\frac{E_0}{r\sqrt{1+\xi_0^2}}$, а дополнительный сдвиг фазы равен $\beta_0 = -\arctg(\xi_0)$. Частота

вынужденных колебаний совпадает с частотой ЭДС и равна ω_0 . **Второе слагаемое описывает свободные колебания в контуре**. Частота свободных колебаний отличается от частоты ЭДС и равна ω_p . Амплитуда свободных колебаний убывает по закону $e^{-\alpha t}$. Начальные значения амплитуды и фазы подбираются таким образом, чтобы суммарный ток удовлетворял начальным условиям: при $t = 0$ суммарный ток и его амплитуда должны быть равны нулю. Это достигается тем, что амплитудные коэффициенты в первом и втором слагаемых одинаковы, а знак « \leftarrow » перед вторым слагаемым означает противофазность свободных и вынужденных колебаний в начальный момент времени.

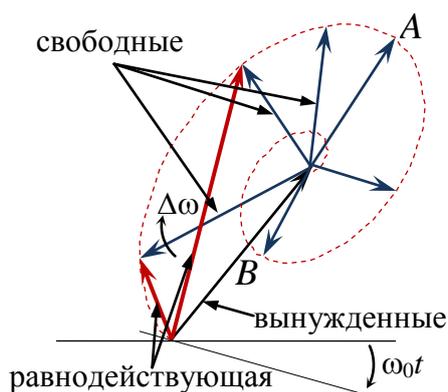


Рис. 3.18. Векторная диаграмма огибающей тока в контуре ($\omega_0 \neq \omega_p$).

Для построения временной диаграммы тока в контуре воспользуемся векторной диаграммой. Вынужденные колебания представим в виде неподвижного вектора (рис. 3.18). Чтобы этот вектор был неподвижным, ось отсчета должна вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью ω_0 . Свободные колебания описываются вектором, длина которого убывает по закону $e^{-\alpha t}$, а частота отличается на $\Delta\omega$ от ω_0 . Поэтому вектор свободных колебаний на векторной диаграмме вращается с угловой частотой $\Delta\omega$, причем направление вращения зависит от знака расстройки.

Равнодействующая двух векторов сигнала сначала увеличивается, достигает максимума в точке А, когда вынужденные и свободные колебания складываются в фазе, затем убывает, достигает минимума в точке В, когда вынужденные и

свободные колебания противофазны, затем опять увеличивается и так далее, пока свободные колебания не затухнут.

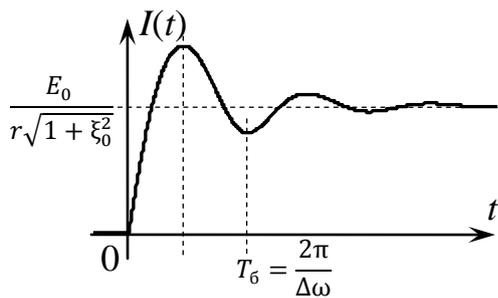


Рис. 3.19. Временная диаграмма огибающей тока в контуре ($\omega_0 \neq \omega_p$).

паразитная фазовая модуляция, которая постепенно затухает. Соответственно, колеблется и частота заполнения сигнала, а когда колебания затухнут, частота заполнения устанавливается равной ω_0 .

Для построения графика огибающей можно использовать аналитическое выражение

$$|i(t)| = \frac{E_0}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} |e^{j\Delta\omega t} - e^{-\alpha t}| = \frac{E_0}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} \sqrt{1 + e^{-2\alpha t} - 2e^{-\alpha t} \cos(\Delta\omega t)}. \quad (3.51)$$

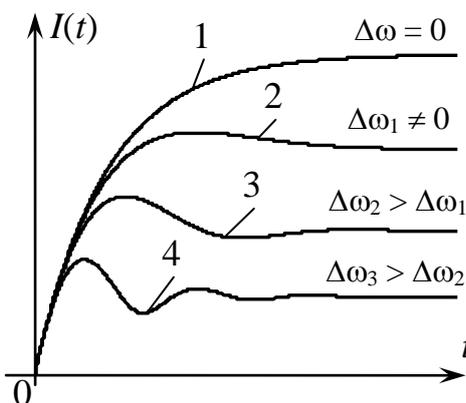


Рис. 3.20. Временная диаграмма огибающей тока в контуре при разной величине расстройки.

которое наблюдается при отсутствии расстройки. Это явление иногда используют на практике, когда нужно уменьшить время нарастания сигнала.

Временная диаграмма огибающей тока в контуре при $\omega_0 \neq \omega_p$ приведена на рис. 3.19. Колебания амплитуды тока вызваны биениями свободных и вынужденных колебаний; частота биений равна $\Delta\omega$, а период биений $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

На векторной диаграмме (рис. 3.18) видно, что вектор равнодействующей «раскачивается», то есть появляется

паразитная фазовая модуляция, которая постепенно затухает. Соответственно, колеблется и частота заполнения сигнала, а когда колебания затухнут, частота заполнения устанавливается равной ω_0 .

Для построения графика огибающей можно использовать аналитическое выражение

$$|i(t)| = \frac{E_0}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} |e^{j\Delta\omega t} - e^{-\alpha t}| = \frac{E_0}{r\sqrt{1 + \xi_0^2}} \sqrt{1 + e^{-2\alpha t} - 2e^{-\alpha t} \cos(\Delta\omega t)}. \quad (3.51)$$

На рис. 3.20 приведены графики огибающей тока в контуре при нескольких значениях расстройки $\Delta\omega$. Чем больше расстройка частоты сигнала относительно резонансной частоты контура, тем меньше уровень установившегося значения амплитуды тока и тем больше частота биений. При небольшой расстройке (кривая 2 на рис. 3.20) биения почти незаметны. В этом случае можно говорить об уменьшении кажущегося времени установления амплитуды сигнала по сравнению с формулой (3.37), которое наблюдается при отсутствии расстройки. Это явление иногда используют на практике, когда нужно уменьшить время нарастания сигнала.

Лекция 11.

3.4.3. Воздействие радиоимпульсов с прямоугольной огибающей на параллельный колебательный контур.

Проведем анализ воздействия прямоугольного радиоимпульса тока конечной длительности (рис. 3.21,а)

$$i(t) = \begin{cases} I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), & 0 \leq t \leq T_{и} \\ 0, & t < 0, \quad t > T_{и} \end{cases}. \quad (3.52)$$

на параллельный колебательный контур (рис. 3.21,б). Нужно определить закон изменения напряжения на контуре $u(t)$.

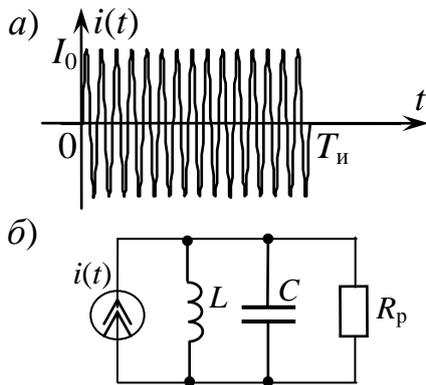


Рис. 3.21. Воздействие прямоугольного импульса (а) на параллельный колебательный контур (б).

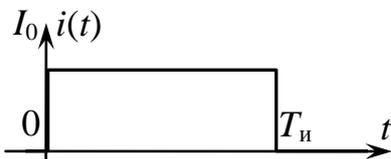


Рис. 3.22. Огибающая входного сигнала.

Сначала рассмотрим случай, когда **частота заполнения импульса равна резонансной частоте контура** ($\omega_0 = \omega_p$).

Огибающая сигнала на входе имеет вид прямоугольного импульса (рис. 3.22) с фазовым множителем:

$$i(t) = \begin{cases} I_0 e^{j\varphi}, & 0 \leq t \leq T_n \\ 0, & t < 0, t > T_n \end{cases} \quad (3.53)$$

При действии импульса тока на параллельный колебательный контур роль коэффициента передачи будет играть **комплексное сопротивление контура**:

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{R_p}{1 + j\xi(\omega)}. \quad (3.54)$$

Заменяя в (3.54) ξ на $\frac{\Omega}{\alpha}$, переходим к **низкочастотному эквиваленту**:

$$Z_{НЭ}(\Omega) = \frac{R_p}{1 + j\frac{\Omega}{\alpha}}. \quad (3.55)$$

Задачу о воздействии импульса тока на низкочастотный эквивалент будем решать **операторным методом**. Запишем **изображение комплексной огибающей входного сигнала**

$$\dot{i}(p) = \frac{I_0}{p} e^{j\varphi} - \frac{I_0}{p} e^{j\varphi} e^{-pT_n} \quad (3.56)$$

и **операторное сопротивление низкочастотного эквивалента**

$$Z_{НЭ}(p) = \frac{R_p}{1 + \frac{p}{\alpha}}. \quad (3.57)$$

Умножая (3.56) на (3.57), получим **изображение комплексной огибающей напряжения на контуре**:

$$\dot{U}(p) = \frac{I_0 R_p \alpha e^{j\varphi}}{p(p + \alpha)} - \frac{I_0 R_p \alpha e^{j\varphi}}{p(p + \alpha)} e^{-pT_n}. \quad (3.58)$$

Переходя к оригиналу, получим:

$$\dot{U}(t) = I_0 R_p (1 - e^{-\alpha t}) e^{j\varphi} \cdot \sigma(t) - I_0 R_p (1 - e^{-\alpha(t-T_n)}) e^{j\varphi} \cdot \sigma(t - T_n). \quad (3.59)$$

График изменения огибающей напряжения на контуре приведен на рис. 3.23.

На основании (3.59) запишем выражение для временной диаграммы высокочастотного напряжения на контуре:

$$u(t) = I_0 R_p [(1 - e^{-\alpha t}) \sigma(t) - (1 - e^{-\alpha(t-T_n)}) \sigma(t - T_n)] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.60)$$

График, соответствующий выражению (3.60), приведен на рис. 3.24.

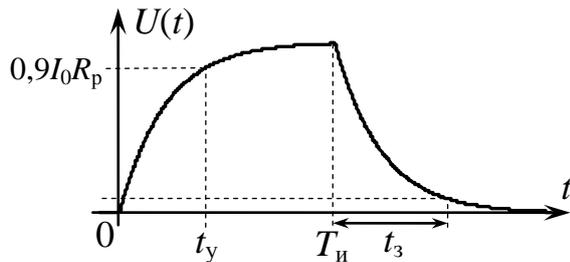


Рис. 3.23. Временная диаграмма огибающей напряжения на контуре ($\omega_0 = \omega_p$).

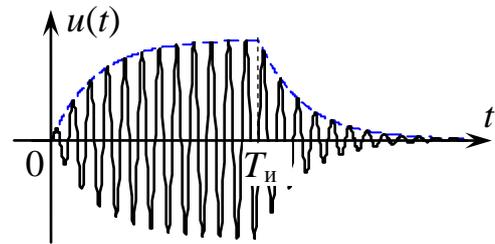


Рис. 3.24. Временная диаграмма напряжения на контуре ($\omega_0 = \omega_p$).

Время нарастания и время затухания колебаний одинаковы и равны (3.37): $t_y = t_3 = 4,6 \frac{Q}{\omega_p}$.

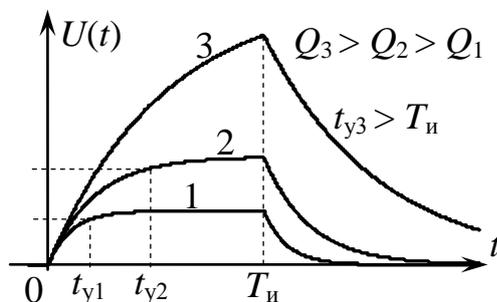


Рис. 3.25. Временная диаграмма огибающей напряжения на контуре ($\omega_0 = \omega_p$) при разной добротности.

На рис. 3.25 изображена форма огибающей напряжения на контуре при нескольких значениях добротности контура. Чем больше добротность, тем выше установившееся значение амплитуды напряжения и тем больше время нарастания и затухания колебаний. При очень больших значениях добротности амплитуда колебаний не успевает за время импульса нарасти до максимально возможного значения, сигнал на выходе получается сильно искаженным, его форма далека от прямоугольной (кривая 3 на рис. 3.25).

Возможен **другой, более простой способ определения напряжения на контуре при действии на вход прямоугольного ВЧ импульса**. Вначале мы рассматриваем процесс нарастания колебаний при подключении гармонического сигнала к контуру (как в разделе 3.4.1). К моменту окончания импульса в контуре накапливается энергия, соответствующая максимальной амплитуде $U_{max} = I_0 R_p (1 - e^{-\alpha T_и})$. После окончания импульса, когда на контур больше ничего не подается, возникают свободные колебания, амплитуда которых убывает по закону $e^{-\alpha t}$.

Такой подход можно применить при анализе процессов в контуре, когда на вход подается ВЧ импульс, **несущая частота ω_0 которого не равна резонансной частоте контура ω_p** .

Процесс нарастания колебаний описан в разделе 3.4.2. Из-за того, что частоты вынужденных и свободных колебаний не совпадают, процесс установления колебаний сопровождается биениями. К концу импульса в контуре накапливается некоторая энергия, и далее идет процесс затухания свободных колебаний по закону $e^{-\alpha t}$ уже без биений (рис. 3.26). Частота заполнения

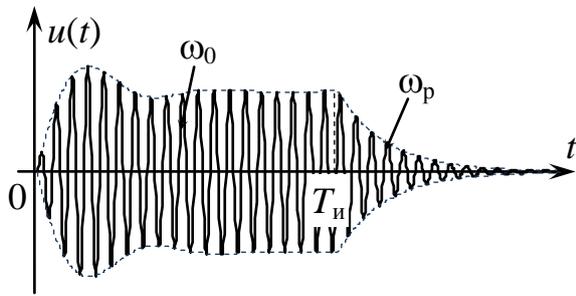


Рис. 3.26. Временная диаграмма напряжения на контуре ($\omega_0 \neq \omega_p$).

импульса непостоянна. Вначале она колеблется вокруг величины ω_0 , эти колебания постепенно затухают, и к концу импульса частота заполнения практически равна ω_0 . После окончания действия входного сигнала (при $t > T_{и}$) частота свободных колебаний равна ω_p .

3.5. Прохождение фазоманипулированных сигналов через одноконтурные избирательные цепи

Фазоманипулированный сигнал представляет собой последовательность смыкающихся друг с другом радиоимпульсов с прямоугольной огибающей, причем фаза соседних импульсов может или совпадать, или различаться на определенную величину в соответствии с выбранным кодом. В зависимости от того, на сколько может различаться фаза соседних импульсов, различают *2-х позиционные*, когда фаза изменяется на $\pm 180^\circ$, *4-х позиционные*, когда фаза может изменяться на величину, кратную 90° , *8-ми позиционные* и другие сигналы. На рис. 3.27 в качестве примера изображен *2-х позиционный* фазоманипулированный сигнал.

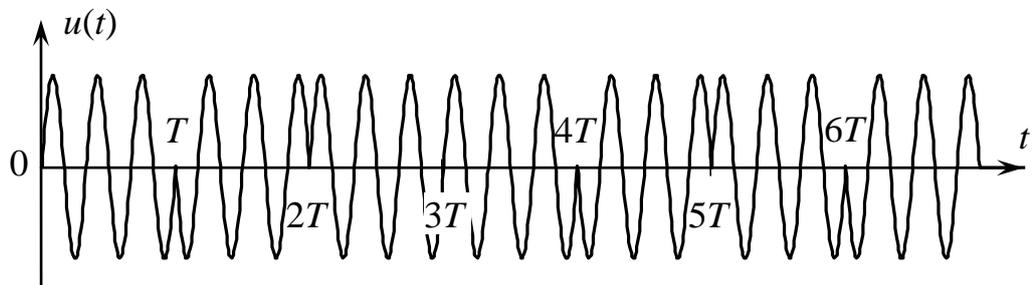


Рис. 3.27. Двухпозиционный фазоманипулированный сигнал

Для того чтобы выяснить, как изменяется фазоманипулированный сигнал при прохождении через избирательные цепи, надо рассмотреть **прохождение скачка фазы через выбранную цепь.**

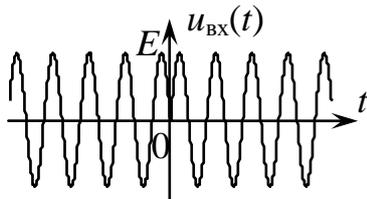


Рис. 3.28. Временная диаграмма напряжения на контуре ($\omega_0 \neq \omega_p$).

Рассмотрим прохождение через резонансный усилитель фрагмента фазоманипулированного сигнала со скачком фазы на 180° (рис. 3.28). Этот сигнал можно описать следующим выражением:

$$u_{вх}(t) = \begin{cases} E \cos(\omega_0 t + \varphi), & t < 0 \\ E \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), & t > 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Задачу можно решать с помощью метода низкочастотных эквивалентов, однако, проще будет воспользоваться полученными ранее результатами. Будем считать, что к моменту

$t = 0$ достигнут установившийся режим, и амплитуда колебаний на выходе усилителя стала равной EK_p . Поскольку система линейная, можно использовать принцип суперпозиции, представив сигнал в виде суммы двух составляющих: первая заканчивается в момент $t = 0$, вторая начинается в этот момент. От первой составляющей сигнала при $t > 0$ останутся только свободные колебания

$$u_{\text{ВЫХ}}^{(1)}(t) = EK_p e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.62)$$

а от второй составляющей начнется постепенное нарастание амплитуды сигнала по закону

$$u_{\text{ВЫХ}}^{(2)}(t) = EK_p (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (3.63)$$

Складывая эти два сигнала и учитывая, что они противофазны, получим:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВЫХ}}^{(1)}(t) + u_{\text{ВЫХ}}^{(2)}(t) = EK_p (2e^{-\alpha t} - 1) \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.64)$$

Временная диаграмма этого сигнала изображена на рис. 3.29. После скачкообразного изменения фазы входного сигнала сигнал на выходе некоторое время сохраняет прежнюю фазу. Однако вторая составляющая сигнала, действующая в противофазе, быстро гасит эти колебания. При $t = t_1$ амплитуда становится равной нулю, а фаза после этого момента времени изменяется на противоположную. После этого амплитуда колебаний нарастает, стремясь к установившемуся значению, равному EK_p .

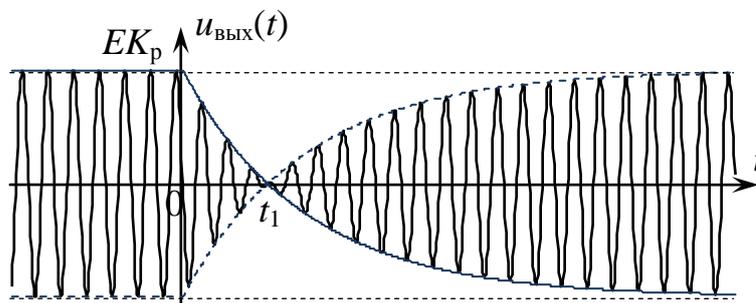


Рис. 3.29. Прохождение через одноконтурный резонансный усилитель фрагмента фазоманипулированного сигнала со скачком фазы на 180° .

Найдем время t_1 , характеризующее *запаздывание скачка фазы*. Для этого приравняем огибающую выходного сигнала к нулю:

$$EK_p (2e^{-\alpha t_1} - 1) = 0, \quad (3.65)$$

откуда $e^{-\alpha t_1} = 0,5$. Решая это уравнение, получим:

$$t_1 = \frac{0,693}{\alpha}. \quad (3.66)$$

Рассмотренный метод может использоваться и для решения других подобных задач, например, при исследовании процессов, происходящих в колебательном контуре при скачкообразном изменении частоты входного сигнала.

Контрольные вопросы

1. Какие цепи называют линейными?
2. Что такое импульсная (переходная) характеристика цепи?
3. Как определяется частотный коэффициент передачи линейной системы?
4. Изложите сущность каждого из четырех методов анализа прохождения сигналов через линейные цепи.
5. Какие типы частотных фильтров Вы знаете?
6. Приведите пример ФНЧ (ФВЧ). Как выглядят его АЧХ и ФЧХ?
7. Что такое полосовой фильтр? Как выглядят его АЧХ и ФЧХ?
8. Каким должен быть частотный коэффициент передачи линейной цепи для неискаженного прохождения сигналов?
9. Как связаны друг с другом импульсная характеристика, частотная характеристика и операторная передаточная функция линейной цепи?
10. Как связаны друг с другом спектральный метод и метод интеграла Дюамеля; спектральный метод и операторный метод?
11. В чем состоит метод низкочастотных эквивалентов? Для каких сигналов и каких цепей его можно применять? В каких случаях его применение приводит к серьезным ошибкам?
12. Как зависит время установления сигнала от добротности контура при подключении гармонического сигнала к колебательному контуру?
13. Объясните причину возникновения биений при подключении к колебательному контуру гармонического сигнала, частота которого не совпадает с резонансной частотой контура.
14. Что представляет собой низкочастотный эквивалент одноконтурного резонансного усилителя?
15. Как изменяется вид фазо-манипулированного сигнала при прохождении через избирательные цепи?

Лекция 12.

4. Нелинейные преобразования сигналов

Любой радиотехнический элемент при слабых сигналах можно рассматривать как линейный, но при больших уровнях сигналов он становится **нелинейным**. Однако **основными нелинейными элементами** в радиотехнических схемах являются диоды и транзисторы. Нелинейность в радиотехнических каскадах обычно бывает нежелательным явлением, например, в мощных усилителях она может приводить к сильным искажениям. Однако в некоторых случаях нелинейность оказывается необходимым явлением для осуществления необходимых преобразований сигнала. Например, такие процессы, как модуляция, детектирование, преобразование частоты, невозможны в линейных устройствах и могут быть осуществлены только при наличии нелинейных элементов.

Анализ работы большинства нелинейных устройств можно проводить в 2 этапа. Сначала рассматривают воздействие сигнала на нелинейный элемент, считая его безынерционным, то есть ток (или напряжение) на выходе однозначно определяется напряжением на входе в тот же момент времени с помощью вольтамперной характеристики. При этом спектральный состав сигнала изменяется, появляются новые составляющие, которых не было во входном сигнале.

После этого сигнал проходит через частотный фильтр, который выделяет нужные составляющие спектра сигнала.

Поэтому рассмотрим вначале, как изменяется спектр сигнала при действии на нелинейное сопротивление.

4.1. Анализ воздействия гармонического сигнала на нелинейный элемент

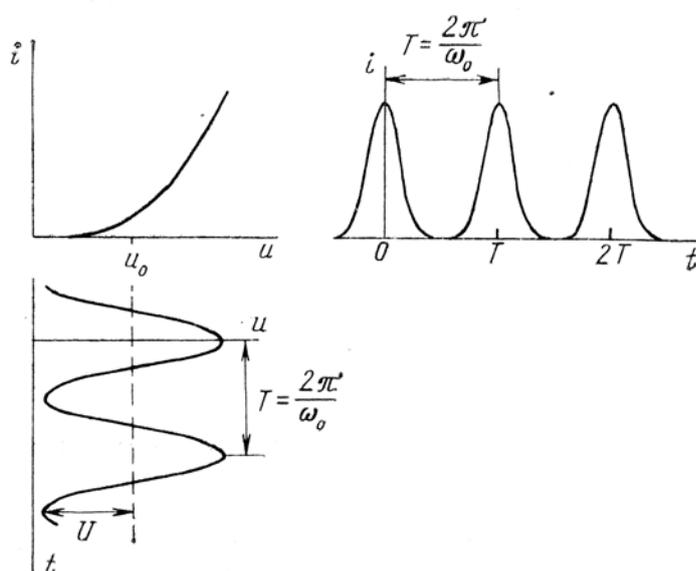


Рис. 4.1. Воздействие гармонического сигнала на нелинейный элемент

Пусть на нелинейный элемент с вольтамперной характеристикой $i = f(u)$ (рис. 4.1) подается гармонический сигнал с постоянной составляющей:

$$u = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Для сокращения записи удобно обозначить $\alpha = \omega_0 t + \varphi$:

$$u = U_0 + U_m \cos \alpha. \quad (4.1)$$

В результате действия напряжения (4.1) через нелинейный элемент протекает ток:

$$i = f(U_0 + U_m \cos \alpha) \quad (4.2),$$

который тоже является периодической функцией и поэтому может быть описан рядом Фурье:

$$i = I_0 + I_1 \cos \alpha + I_2 \cos 2\alpha + \dots + I_n \cos n\alpha + \dots \quad (4.3)$$

Вследствие того, что функция (4.2) является четной, разложение в ряд Фурье (4.3) получается по косинусам. Коэффициенты ряда Фурье I_0, I_1, \dots, I_k определяются выражениями:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_m \cos \alpha) d\alpha$$

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_m \cos \alpha) \cos(k\alpha) d\alpha \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: **в результате действия гармонического сигнала с частотой ω_0 на нелинейный элемент, ток, протекающий через этот элемент, кроме составляющей с частотой ω_0 содержит ещё составляющие с частотами $2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$** Амплитуды этих составляющих зависят от вида вольтамперной характеристики (ВАХ) нелинейного элемента.

Для вычисления амплитуды гармоник по формулам (4.4) желательно описать ВАХ $i = f(u)$ какой-либо простой функцией, т.е. подобрать **аппроксимацию** ВАХ.

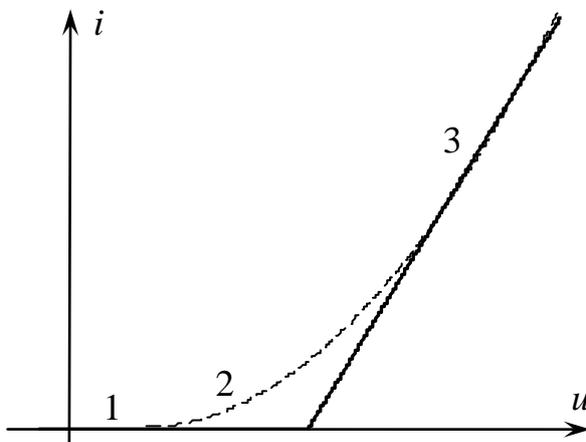


Рис. 4.2. ВАХ нелинейного элемента

Характерный вид ВАХ большинства диодов и транзисторов показан на рис. 4.2. На этой характеристике можно выделить 3 области: область отсечки 1, где ток равен нулю; область плавного изгиба 2 и почти прямолинейный участок 3. В зависимости от амплитуды подведенного напряжения можно использовать различные виды аппроксимации вольтамперной характеристики.

Если напряжение сравнительно невелико и приходится на область плавного изгиба характеристики, то уместно аппроксимировать ВАХ **степенным рядом**. **При большой амплитуде сигнала**, когда основная часть приложенного напряжения попадает либо на область отсечки, либо на прямолинейный участок характеристики, целесообразно аппроксимировать ВАХ **ломаной прямой**. Рассмотрим эти виды аппроксимации ВАХ более подробно.

4.1.1. Определение амплитуд гармоник тока при кусочно-линейной аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента

Вольтамперная характеристика нелинейного элемента, *аппроксимированная кусочно-линейной функцией*, изображена на рис. 4.3. Эти характеристики описываются двумя параметрами: **крутизной** наклонного участка S и **напряжением начала** U_H , при котором наблюдается излом характеристики. ВАХ описывается уравнением:

$$i = \begin{cases} 0, & u < U_H \\ S(u - U_H), & u \geq U_H \end{cases} \quad (4.5)$$

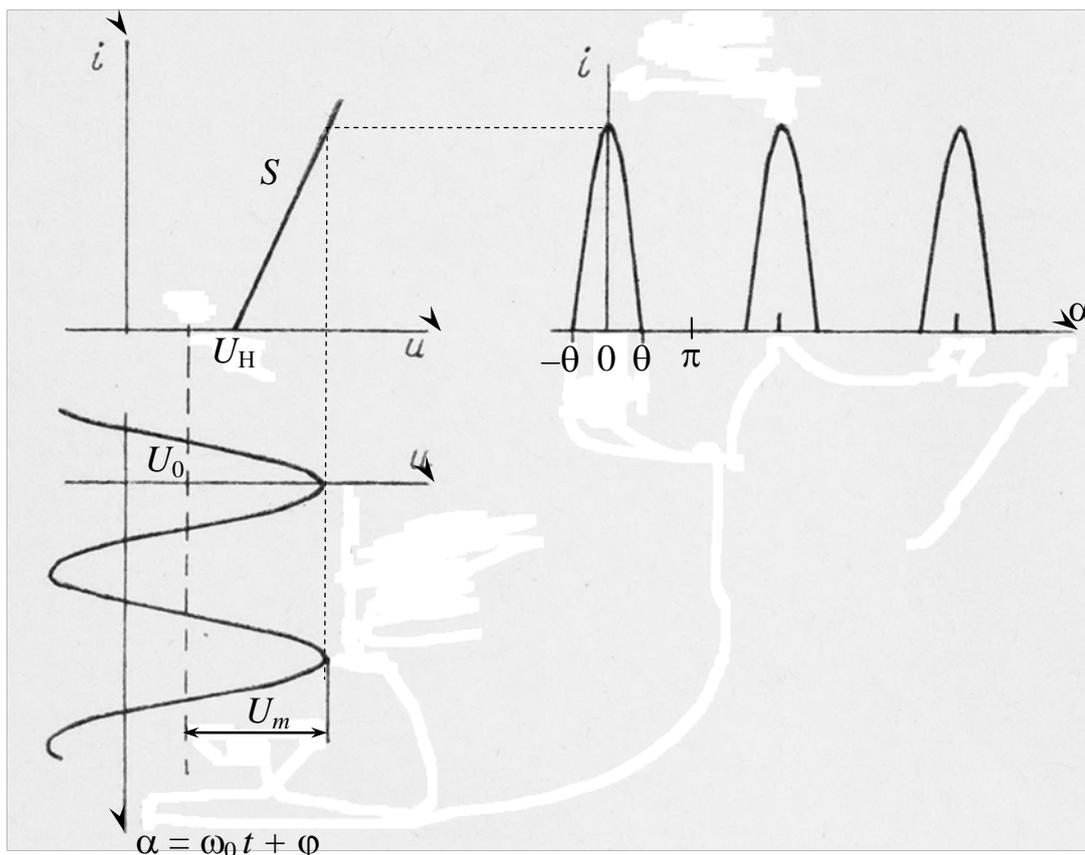


Рис. 4.3. Воздействие гармонического колебания на нелинейный элемент с кусочно-линейной аппроксимацией

На рис. 4.3 под ВАХ изображена временная диаграмма подводимого напряжения:

$$u = U_0 + U_m \cos \alpha \quad (4.6),$$

где $\alpha = \omega_0 t + \varphi$

Оно тоже характеризуется двумя параметрами: постоянным **напряжением смещения** U_0 и **амплитудой** U_m .

Справа от ВАХ изображена временная диаграмма тока, протекающего через нелинейный элемент. *Этот ток представляет собой последовательность косинусоидальных импульсов*. Длительность каждого импульса определяется безразмерной величиной 2θ , где θ носит название **угла отсечки**, так как при $\alpha = \theta$ прекращается ток через нелинейный элемент, т.е. происходит отсечка тока.

Для определения угла отсечки положим в (4.6) $\alpha = \theta$ и подставим в (4.5). Очевидно, что при $\alpha = \theta$ ток равен нулю: $S(U_0 + U_m \cos \alpha - U_H) = 0$, откуда

$$\cos \theta = \frac{U_H - U_0}{U_m} \quad (4.7)$$

Найдем амплитуды гармонических составляющих тока. Для этого подставим уравнение ВАХ (4.5) в выражение (4.4). При этом пределы интегрирования должны быть от $-\theta$ до θ :

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(U_0 + U_m \cos \alpha - U_H) d\alpha = \frac{1}{\pi} [S(U_0 - U_H)\theta + SU_m \sin \theta] \quad (4.8)$$

Это выражение можно упростить, если использовать формулу (4.7) для $\cos \theta$. Окончательно получим:

$$I_0 = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) = SU_m \gamma_0(\theta) \quad (4.9)$$

где $\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta)$.

Аналогично:

$$I_1 = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta) = SU_m \gamma_1(\theta) \quad (4.10)$$

где $\gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta)$.

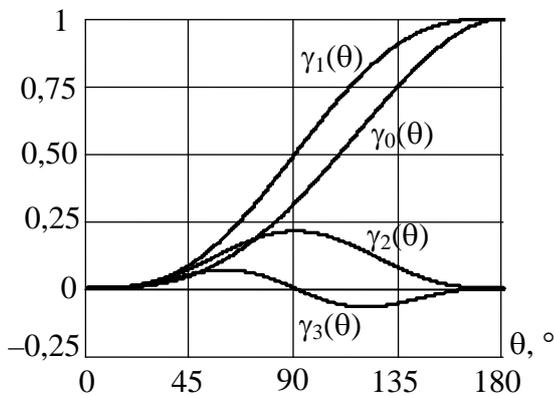


Рис. 4.4. Графики функций Берга

И для любой гармоники:

$$I_k = SU_m \gamma_k(\theta) \quad (4.11)$$

Функции $\gamma_k(\theta)$ были введены А.И. Бергом для расчета радиопередатчиков и носят его имя. Графики **функций Берга $\gamma_k(\theta)$** приведены на рис. 4.4.

Таблицы функций Берга приведены в справочном материале. **Максимальное значение** функции $\gamma_2(\theta)$ наблюдается при $\theta=90^\circ$, функции $\gamma_3(\theta)$ — при 60° .

Амплитуды гармоник можно рассчитать несколько иным способом. Обозначим **максимальное значение (амплитуду) импульсов тока** через I_m . Очевидно, что ток равен I_m при $\alpha = 0$. Подставляя это значение α в (4.6) и (4.5), получим:

$$I_m = S(U_0 + U_m - U_H) \quad (4.12)$$

Учитывая, что, согласно (4.7) $U_H - U_0 = U_m \cos \theta$, преобразуем (4.12) к следующему виду: $I_m = SU_m (1 - \cos \theta)$, откуда

$$SU_m = \frac{I_m}{1 - \cos \theta}. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в формулы для амплитуд гармоник (4.9), (4.10), (4.11), получим

$$I_k = I_m \frac{\gamma_k(\theta)}{1 - \cos \theta} = I_m \alpha_k(\theta), \quad (4.14)$$

где
$$\alpha_k(\theta) = \frac{\gamma_k(\theta)}{1 - \cos \theta}. \quad (4.15)$$

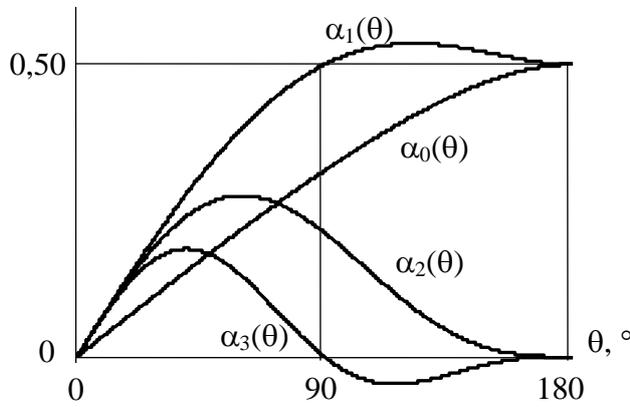


Рис. 4.5. Графики функций Берга $\alpha_k(\theta)$

Функции $\alpha_k(\theta)$ также носят название **функций Берга**. Они также табулированы, графики нескольких функций $\alpha_k(\theta)$ приведены на рис. 4.5. **Максимальное значение** функции $\alpha_1(\theta)$ наблюдается при $\theta = 120^\circ$, функции $\alpha_2(\theta)$ – при $\theta = 60^\circ$, функции $\alpha_3(\theta)$ – при $\theta = 40^\circ$, то есть положение максимумов функций $\alpha_k(\theta)$ отличается от положения максимумов функций $\gamma_k(\theta)$.

В зависимости от условия конкретной задачи для вычисления амплитуд гармоник могут использоваться как функции $\gamma_k(\theta)$, так и $\alpha_k(\theta)$.

4.1.2. Определение амплитуд гармоник тока при аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента степенным рядом

Аппроксимация степенным рядом используется при плавном характере ВАХ. В этом случае для расчета амплитуд гармоник можно обойтись без вычисления интегралов (4.4). Запишем уравнение ВАХ в виде степенного ряда:

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 + \dots + a_n (u - U_0)^n \quad (4.16)$$

где U_0 – напряжение смещения подводимого к нелинейному элементу сигнала (4.1), т.е. то же самое, которое входит в формулу $u = U_0 + U_m \cos \alpha$.

Подставляя это напряжение в (4.16) получим:

$$i = a_0 + a_1 U_m \cos \alpha + a_2 (U_m \cos \alpha)^2 + \dots + a_n (U_m \cos \alpha)^n \quad (4.17)$$

Используя тригонометрические выражения для степени косинуса

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha; \quad \cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha; \dots \quad (4.18)$$

Преобразуем (4.17) в сумму гармонических составляющих:

$$i = I_0 + I_1 \cos \alpha + I_2 \cos 2\alpha + \dots + I_n \cos n\alpha,$$

где
$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots$$

$$I_1 = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots \quad (4.19)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{15}{32} a_6 U_m^6 + \dots$$

Анализируя выражения (4.19) для амплитуд гармоник, можно обнаружить следующие закономерности:

1) **Четные гармоники тока** (включая постоянную составляющую) **зависят только от четных коэффициентов** разложения ВАХ в степенной ряд a_0, a_2, a_4, \dots , а **нечетные гармоники** – **только от нечетных коэффициентов** a_1, a_3, a_5, \dots

2) Выражение (ряд) **для k -й гармоники начинается с k -го коэффициента** разложения a_k . И, как следствие, этого:

3) Если в разложении характеристики в степенной ряд **старшим является n -ый член** $a_n (u - U_0)^n$, то **наивысшей гармоникой в токе является n -я гармоника**.

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n зависят от положения точки, вокруг которой записывается разложение ВАХ в ряд, то есть от напряжения смещения U_0 .

Если ВАХ задана аналитическим выражением $i = f(u)$, то коэффициенты могут быть вычислены с помощью известных формул:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(U_0) \\ a_1 &= f'(U_0) \\ a_2 &= \frac{f''(U_0)}{2!} \\ &\dots \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(U_0)}{k!} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Однако, чаще ВАХ бывает задана графически или с помощью массива значений (таблицы). В этом случае для **определения коэффициентов разложения в степенной ряд** можно воспользоваться следующим методом.

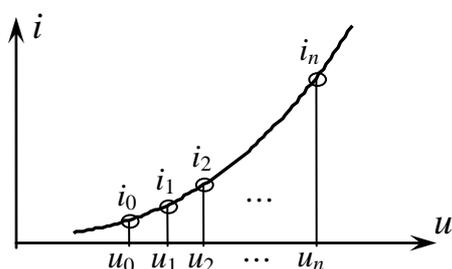


Рис. 4.6. К определению коэффициентов разложения в степенной ряд

Если мы хотим найти коэффициенты разложения до a_n включительно, надо разбить интересующую нас область ВАХ на n частей (рис. 4.6). Узловые значения напряжений обозначим u_0, u_1, \dots, u_n , а соответствующие им значения тока i_0, i_1, \dots, i_n . В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} i_0 &= a_0 + a_1(u_0 - U_0) + a_2(u_0 - U_0)^2 + \dots + a_n(u_0 - U_0)^n \\ i_1 &= a_0 + a_1(u_1 - U_0) + a_2(u_1 - U_0)^2 + \dots + a_n(u_1 - U_0)^n \\ i_2 &= a_0 + a_1(u_2 - U_0) + a_2(u_2 - U_0)^2 + \dots + a_n(u_2 - U_0)^n \\ &\dots \\ i_n &= a_0 + a_1(u_n - U_0) + a_2(u_n - U_0)^2 + \dots + a_n(u_n - U_0)^n \end{aligned} \quad (4.21)$$

Неизвестными в этой системе уравнений являются коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n . Решая ее известными в математике методами, можно найти эти коэффициенты.

Если ВАХ задана графически, то **для определения амплитуд постоянной составляющей и первых двух гармоник** можно применить простой **графический метод**.

Пусть на нелинейный элемент подается гармонический сигнал $u = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Отметим на ВАХ три точки (рис. 4.7): точку A , соответствующую **минимальному значению** напряжения $u = U_0 - U_m$, точку B , соответствующую **среднему значению** $u = U_0$, и точку C , соответствующую **максимальному значению** напряжения $u = U_0 + U_m$. Соответствующие значения тока обозначим i_{min}, i_{cp}, i_{max} .

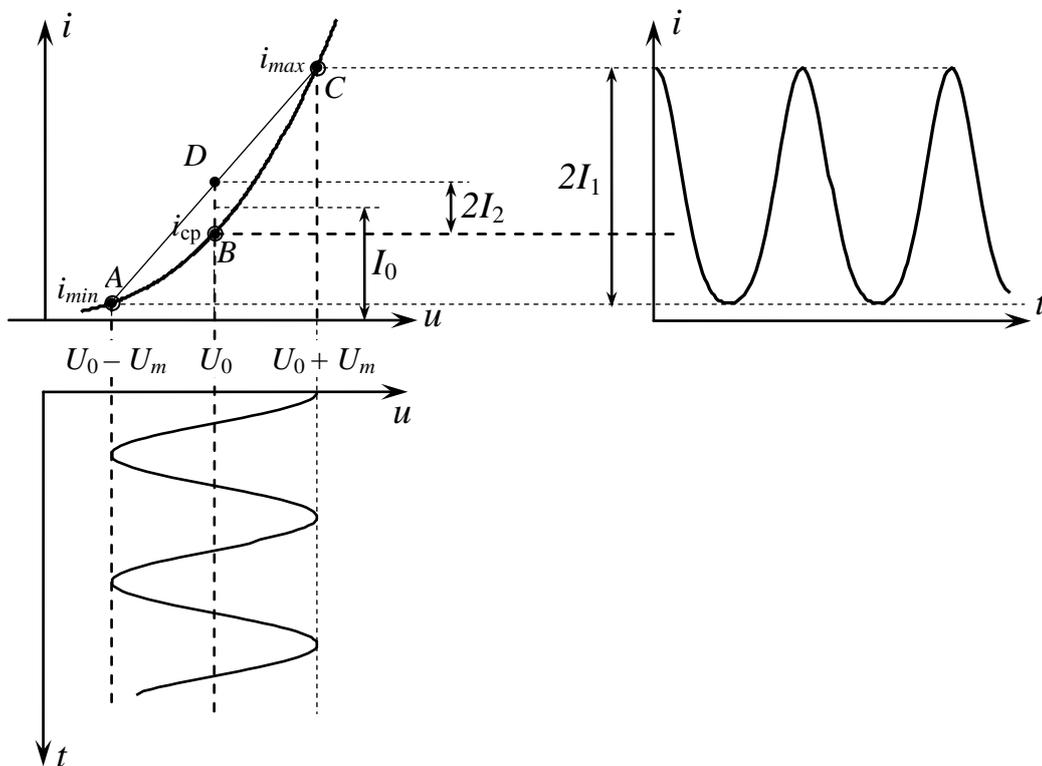


Рис. 4.7. Геометрическое определение амплитуд гармоник тока

Если ВАХ аппроксимирована степенным рядом (4.16), то, подставляя в этот ряд $u = U_{min} = U_0 - U_m$, получим

$$i_{min} = a_0 - a_1 U_m + a_2 U_m^2 - a_3 U_m^3 + \dots \quad (4.22)$$

Рассуждая аналогично, можно записать:

$$i_{cp} = a_0 \quad (4.23)$$

$$i_{max} = a_0 + a_1 U_m + a_2 U_m^2 + a_3 U_m^3 + \dots \quad (4.24)$$

Вычитая (4.22) из (4.24) и деля результат на 2, получим:

$$\frac{i_{max} - i_{min}}{2} = a_1 U_m + a_3 U_m^3 + \dots \approx I_1 \quad (4.25)$$

Сравнивая (4.25) с точным выражением для амплитуды первой гармоники тока (4.19), видим, что они различаются незначительно. Следовательно, **размах**

колебаний тока от i_{min} до i_{max} приблизительно равен амплитуде первой гармоники тока.

Складывая i_{min} и i_{max} можно получить выражение

$$\frac{i_{max} + i_{min}}{2} = a_0 + a_2 U_m^2 + a_4 U_m^4 + \dots, \quad (4.26)$$

которое приблизительно равно постоянной составляющей. Однако, можно получить более точное **выражение для постоянной составляющей**, добавляя к (4.26) i_{cp} и еще раз деля пополам:

$$\frac{\frac{i_{min} + i_{max}}{2} + i_{cp}}{2} = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \dots \approx I_0 \quad (4.27)$$

Аналогично можно получить **выражение для второй гармоники** тока:

$$\frac{\frac{i_{min} + i_{max}}{2} - i_{cp}}{2} = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{1}{2} a_6 U_m^6 + \dots \approx I_2 \quad (4.28)$$

Амплитуда второй гармоники равна половине высоты сегмента BD на рис. 4.7. Таким образом, **простое геометрическое построение позволяет определить постоянную составляющую, а также амплитуды первой и второй гармоник тока.**

Лекция 13.

4.2. Нелинейное резонансное усиление

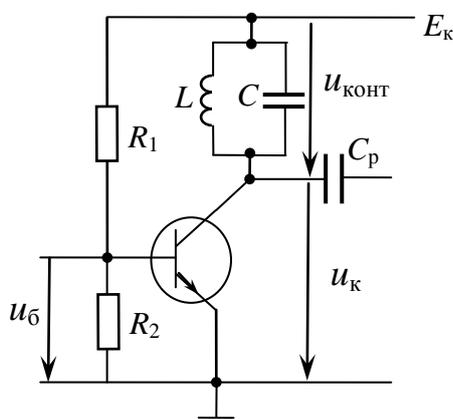


Рис. 4.8. Упрощенная схема резонансного усилителя

При резонансном усилении сигналов большой амплитуды усилительный элемент (транзистор или радиолампа) работает в нелинейном режиме, что необходимо учитывать при расчете и проектировании таких усилителей. Схема резонансного усилителя (рис. 4.8) практически ничем не отличается от схемы усилителей малых колебаний. Любой резонансный усилитель при достаточно большой амплитуде сигнала переходит в **нелинейный режим**. Нелинейность является нежелательным, но неизбежным явлением, и ее необходимо учитывать при анализе работы усилителя.

При анализе работы мощных резонансных усилителей обычно **используют кусочно-линейную аппроксимацию ВАХ** (рис. 4.9), которая описывается двумя параметрами: крутизной S и напряжением начала (излома) характеристики $U_{бн}$. Напряжение сигнала, временная диаграмма которого изображена под ВАХ транзистора, описывается выражением:

$$u_б = U_{б0} + U_{бm} \cos \alpha \quad (\alpha = \omega_0 t + \varphi), \quad (4.29)$$

причем напряжение смещения $U_{\delta 0}$ может совпадать, а может не совпадать с напряжением $U_{\delta H}$.

Вследствие нелинейности характеристики транзистора коллекторный ток i_k представляет собой периодическую последовательность косинусоидальных импульсов (рис. 4.9).

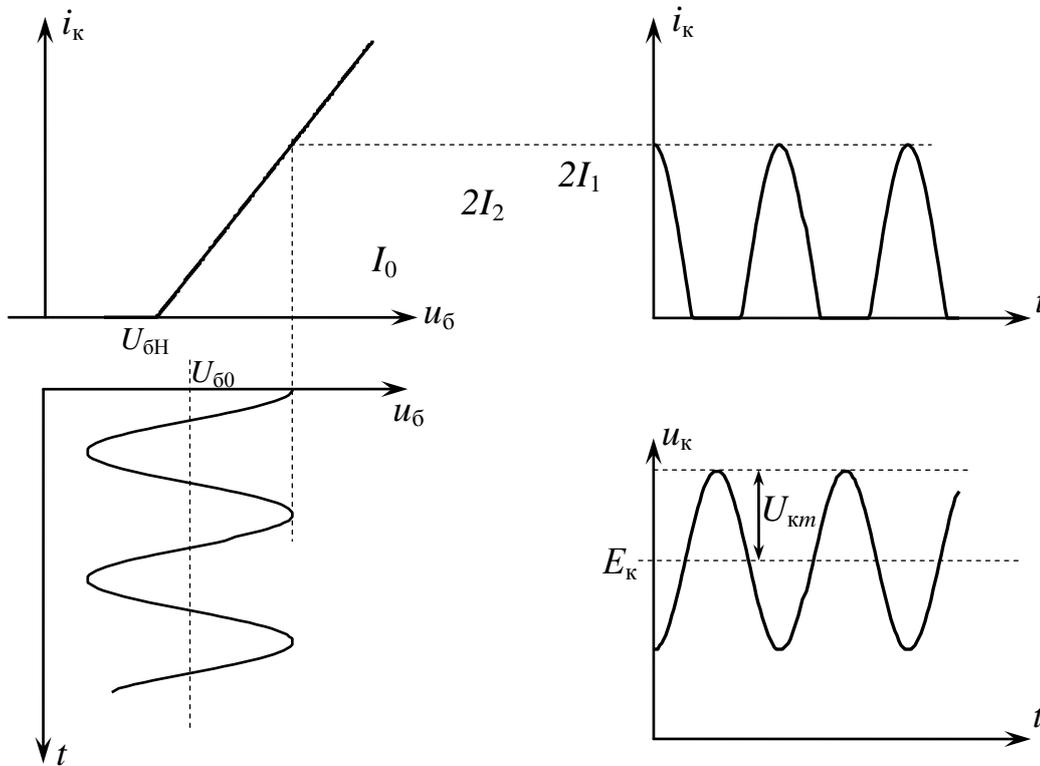


Рис. 4.9.

Кроме первой гармоники спектр тока содержит ряд высших гармоник:

$$i_k = I_{k0} + I_{k1} \cos(\omega_0 t + \varphi) + I_{k2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi) + \dots + I_{kn} \cos n(\omega_0 t + \varphi) + \dots \quad (4.30)$$

Причем амплитуды гармоник вычисляются с помощью функций Берга:

$$I_{kn} = S U_{\delta m} \gamma_n(\theta), \quad (4.31)$$

где угол отсечки θ определяется из формулы:

$$\cos \theta = \frac{U_{\delta H} - U_{\delta 0}}{U_{\delta m}} \quad (4.32)$$

На рис. 4.10 приведены спектры входного напряжения (а) и коллекторного тока (б). Контур в коллекторной цепи настроен на частоту сигнала ω_0 (рис. 4.10,в). Его сопротивление имеет резонансный характер, максимально на частоте сигнала и равно R_p , причем полоса пропускания много меньше резонансной частоты. Коллекторный ток, содержащий большое число гармоник, протекая через контур, создает на нем падение напряжения, пропорционально амплитуде первой гармоники коллекторного тока I_{k1} и резонансному сопротивлению R_p . На частотах других гармоник, в том числе и на нулевой частоте, падение напряжения на контуре пренебрежимо мало. Поэтому для

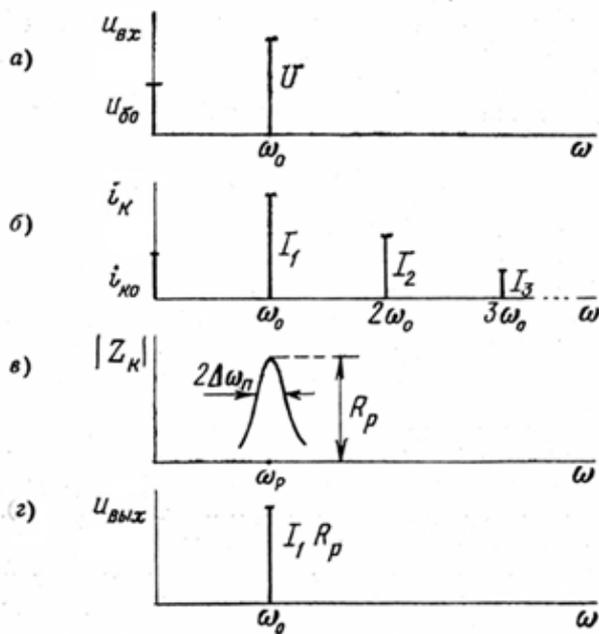


Рис. 4.10. Спектры входного напряжения (а), коллекторного тока (б), напряжения на выходе (г) и модуля сопротивления контура

напряжению питания E_k . Поэтому напряжение на коллекторе в некоторые моменты времени может почти в 2 раза превышать напряжение питания E_k .

Основным параметром любого усилителя является **коэффициент усиления** $K_{ус} = \frac{U_{км}}{U_{бм}} = \frac{R_p I_{к1}}{U_{бм}}$. Однако в резонансном усилителе больших колебаний из-за нелинейности коэффициент усиления зависит от амплитуды входного сигнала. Поэтому для описания работы таких усилителей приходится вводить новую характеристику – колебательную характеристику.

Колебательная характеристика – это зависимость амплитуды первой гармоники коллекторного тока $I_{к1}$ от амплитуды напряжения на базе $U_{бм}$: $I_{к1} = f(U_{бм})$.

В случае аппроксимации характеристики транзистора кусочно-линейной функцией колебательная характеристика определяется с помощью выражений:

$$\begin{aligned}
 I_{к1} &= S U_{бм} \gamma_1(\theta), \\
 \gamma_1(\theta) &= \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta), \\
 \cos \theta &= \frac{U_{бн} - U_{б0}}{U_{бм}}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Наиболее простой вид колебательная характеристика имеет при $U_{б0} = U_{бн}$. При этом $\theta = 90^\circ$; $\gamma_1(90^\circ) = 0,5$ и колебательная характеристика описывается выражением $I_{к1} = \frac{1}{2} S U_{бм}$ и имеет прямолинейный характер (рис. 4.11, кривая 2).

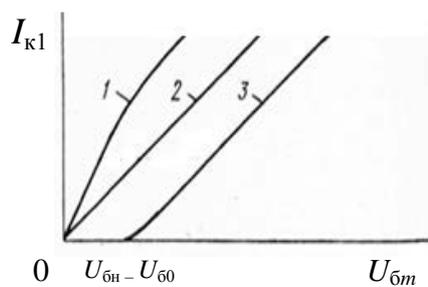
напряжения на контуре мы можем записать:

$$u_{конт} = R_p I_{к1} \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{4.33}$$

Напряжение на коллекторе транзистора равно разности напряжения питания и напряжения на контуре:

$$\begin{aligned}
 u_k &= u_{вых}(t) = E_k - u_{конт} = \\
 &E_k - R_p I_{к1} \cos(\omega_0 t + \varphi).
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Временная диаграмма напряжения на коллекторе представлена на рис. 4.9 справа внизу. Из-за того, что сопротивление контура постоянному току очень мало, постоянная составляющая напряжения на коллекторе практически равна



кривая 1 – $U_{б0} > U_{бн}$

кривая 2 – $U_{б0} = U_{бн}$

кривая 3 – $U_{б0} < U_{бн}$

Рис. 4.11. Семейство колебательных характеристик

При $U_{б0} < U_{бн}$ и амплитуде напряжения сигнала $U_{бm} < U_{бн} - U_{б0}$ транзистор закрыт и ток через него равен нулю. Только при амплитуде сигнала $U_{бm} > U_{бн} - U_{б0}$ появляются импульсы тока малой амплитуды и малой длительности, то есть с маленьким углом отсечки θ . По мере увеличения амплитуды входного сигнала увеличивается амплитуда импульсов тока и угол отсечки, и колебательная характеристика поднимается вверх и становится почти параллельной колебательной характеристике при $U_{б0} = U_{бн}$ (кривая 3 на рис. 4.11).

Если $U_{б0} > U_{бн}$, то при малой амплитуде сигнала на базе отсечки тока нет, транзистор работает в линейном режиме, и первая гармоника коллекторного тока определяется выражением $I_{к1} = S U_{бm}$. Колебательная характеристика на этом участке прямолинейна и идет в 2 раза круче, чем при $U_{б0} = U_{бн}$. Отсечка коллекторного тока начинается при $U_{бm} > U_{б0} - U_{бн}$. При этом рост колебательной характеристики замедляется, она постепенно становится параллельной характеристике при $U_{б0} = U_{бн}$ (кривая 1 на рис. 4.11).

В некоторых случаях, например, при экспериментальных исследованиях, вместо зависимости $I_{к1} = f(U_{бm})$ рассматривают зависимость $U_{км} = f(U_{бm})$, и ее тоже называют **колебательной характеристикой**. Поскольку $U_{км} = R_p I_{к1}$, характеристики $U_{км} = f(U_{бm})$ имеют такой же вид, как на рис. 4.11, отличаясь лишь оцифровкой по оси ординат.

Если продолжать увеличивать амплитуду напряжения сигнала на базе, то амплитуда выходного сигнала не может увеличиваться беспредельно. Для объяснения происходящих при этом явлений обратимся к рис. 4.12, где на верхнем графике в одном масштабе показаны напряжение на базе и напряжение на коллекторе, а под ними – импульсы коллекторного тока. Для простоты выбран режим, когда $U_{б0} = U_{бн}$, то есть $\theta = 90^\circ$.

При небольшой амплитуде колебаний на базе (кривые 1 на рис. 4.12) амплитуда сигнала на выходе пропорциональна амплитуде входного сигнала, что соответствует колебательной характеристике рис. 4.11. Такой режим называется **недонапряженным**.

Если увеличить амплитуду сигнала на входе вдвое, амплитуда напряжения на коллекторе тоже увеличивается, при этом в момент максимума напряжения на базе напряжение на коллекторе оказывается почти равным напряжению на базе (кривые 2 на рис. 4.12). Иначе говоря, напряжение между коллектором и базой становится очень маленьким, что приводит к некоторому провалу вершины импульса коллекторного тока. При дальнейшем увеличении амплитуды сигнала на базе амплитуда напряжения на коллекторе уже практически не может увеличиваться, так как в течение некоторого времени напряжение на коллекторе

оказывается даже меньше напряжения на базе, что приводит к глубоким провалам в импульсах коллекторного тока (кривые 3 на рис. 4.12). Такой режим называется **перенапряженным**. Пограничное состояние между недонапряженным и перенапряженным режимами, когда только намечаются провалы вершины импульсов коллекторного тока, называется **критическим режимом**.

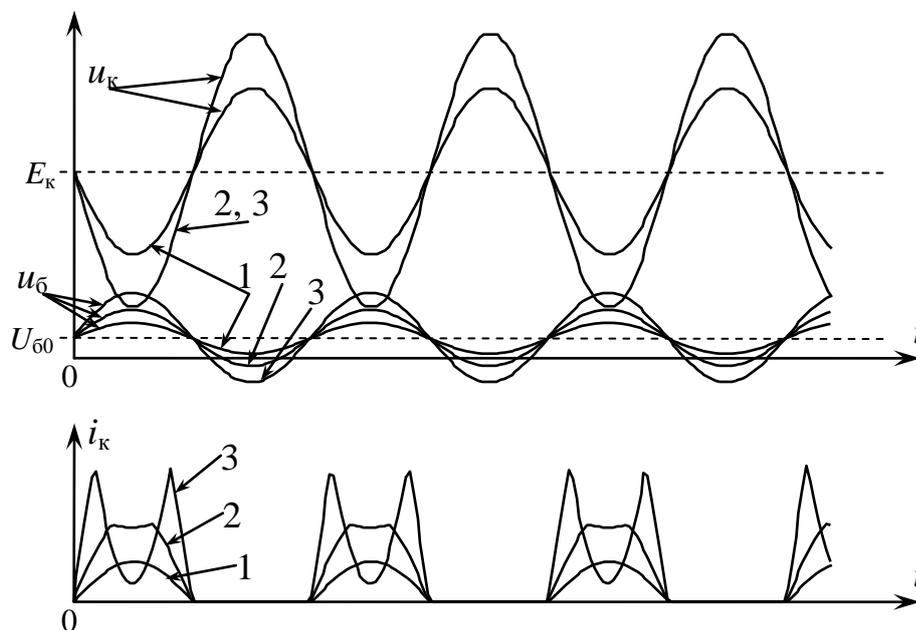


Рис. 4.12.

С учетом перенапряженного режима колебательные характеристики загибаются на уровне, несколько меньшем E_k/R_p (рис. 4.13).

Перенапряженный режим может возникать как в очень мощных усилителях, так и в самых маленьких усилителях, собранных на миниатюрных, бескорпусных транзисторах. В большинстве случаев это нежелательный режим, так как приводит к искажениям сигнала и снижению коэффициента полезного действия. Однако это – не аварийный режим, при этом ничего не перегорает, а в отдельных случаях перенапряженный режим может использоваться даже как рабочий режим усилителя.



кривая 1 – $U_{б0} > U_{бн}$; кривая 2 – $U_{б0} = U_{бн}$; кривая 3 – $U_{б0} < U_{бн}$

Рис. 4.13. Семейство колебательных характеристик.

Другими важными характеристиками мощного резонансного усилителя являются **выходная мощность** и **коэффициент полезного действия (КПД)**.

Выходная мощность пропорциональна произведению амплитуды первой гармоники коллекторного тока и амплитуды напряжения на коллекторе:

$$P_{\text{вых}} = \frac{1}{2} I_{\text{к1}} U_{\text{км}}. \quad (4.36)$$

С другой стороны, амплитуды первой гармоники коллекторного тока и напряжения на коллекторе связаны соотношением $U_{\text{км}} = I_{\text{к1}} R_{\text{р}}$, где $R_{\text{р}}$ – резонансное сопротивление контура. Отсюда получаем:

$$P_{\text{вых}} = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{км}}^2}{R_{\text{р}}}. \quad (4.37)$$

Максимально допустимая амплитуда напряжения на коллекторе $U_{\text{км}}$ ограничена пробивной прочностью транзистора, ее редко удается сделать более 100 В. Поэтому для получения большой выходной мощности надо уменьшать резонансное сопротивление контура. Например, при $U_{\text{км}} = 100$ В для получения $P_{\text{вых}} = 100$ Вт резонансное сопротивление должно быть равно 100 Ом. Столь низкое резонансное сопротивление можно получить только в схемах с неполным включением контура. Резонансное сопротивление такого контура равно $R_{\text{р}} = p^2 Q_{\text{р}}$, где p – коэффициент включения контура, $Q_{\text{р}}$ – его характеристическое сопротивление. Например, при $p = 0,1$ резонансное сопротивление уменьшается в 100 раз.

Коэффициент полезного действия (КПД) резонансного усилителя определяется как отношение выходной мощности $P_{\text{вых}}$ к полной мощности P_0 , потребляемой усилителем от источника питания:

$$\eta = \frac{P_{\text{вых}}}{P_0}. \quad (4.38)$$

В свою очередь,

$$P_0 = I_{\text{к0}} E_{\text{к}}. \quad (4.39)$$

где $I_{\text{к0}}$ – постоянная составляющая коллекторного тока. Подставляя (4.39) и (4.36) в (4.38), получаем:

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{I_{\text{к1}}}{I_{\text{к0}}} \frac{U_{\text{км}}}{E_{\text{к}}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_1(\theta)}{\gamma_2(\theta)} \xi_{\text{к}}, \quad (4.40)$$

где $\xi_{\text{к}} = \frac{U_{\text{км}}}{E_{\text{к}}}$ – коэффициент использования коллекторного напряжения.

Для получения максимального КПД нужно добиваться максимального значения $\frac{\gamma_1(\theta)}{\gamma_2(\theta)}$ и максимального значения $\xi_{\text{к}}$. Максимальное значение $\xi_{\text{к}} = 0,8 \div 0,9$ достигается в критическом режиме. В перенапряженный режим заходить не

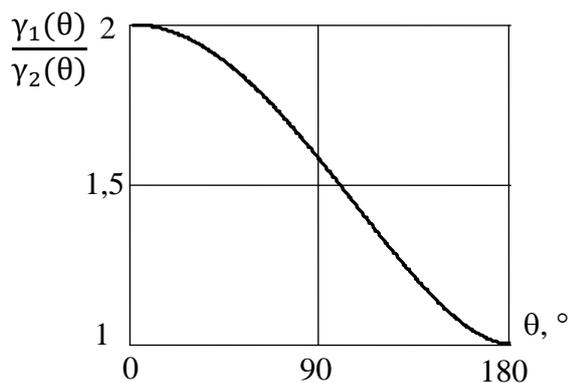


Рис. 4.14. График функции $\frac{P_1(\theta)}{P_2(\theta)}$

следует, так как там падает выходная мощность и КПД. График зависимости $\frac{P_1(\theta)}{P_2(\theta)}$ приведен на рис. 4.14. Согласно графику, максимальный КПД получается при маленьких углах отсечки θ . Однако очень маленькие значения θ невыгодны из-за снижения выходной мощности и коэффициента усиления усилителя. Поэтому обычно выбирается компромиссное значение $\theta = 70^\circ - 90^\circ$.

Необходимость получения высокого КПД в мощных усилителях обусловлена следующей причиной. Разность между мощностью, потребляемой от источника питания P_0 , и полезной мощностью $P_{\text{вых}}$ ($P_{\text{к}} = P_0 - P_{\text{вых}}$) выделяется на коллекторе в виде тепла. Чтобы не допустить перегрева транзистора, мощность $P_{\text{к}}$ должна быть меньше предельно допустимой, задаваемой в паспортных данных транзистора.

Увеличивая КПД, мы одновременно увеличиваем полезную мощность $P_{\text{вых}}$ и уменьшаем мощность, выделяемую на коллекторе транзистора. Как показывают расчеты, при увеличении КПД с 0,7 до 0,8 при одинаковой мощности $P_{\text{к}}$ полезная мощность увеличивается почти в 2 раза.

Если резонансный усилитель предназначен для усиления АМ сигналов, то необходимо, чтобы форма огибающей сигнала на выходе усилителя была такая же, как и на входе. Для этого нужно, чтобы амплитуда сигнала на выходе была пропорциональна амплитуде сигнала на входе, то есть колебательная характеристика должна быть линейной. В нелинейных резонансных усилителях это достигается только при $U_{\text{б0}} = U_{\text{бн}}$, когда угол отсечки при любых значениях амплитуды входного сигнала равен 90° , $\gamma_1(90^\circ) = 0,5$ и $I_{\text{к1}} = \frac{1}{2} S U_{\text{бт}}$.

Кроме этого требования необходимо, чтобы полоса пропускания резонансного усилителя была достаточной, чтобы пропустить весь спектр сигнала без искажений.

Если усилитель предназначен не для АМ сигналов, например, ЧМ или ФМ сигналов, для получения более высокого КПД угол отсечки может быть выбран меньшим, чем 90° , например, $70^\circ - 80^\circ$.

4.3. Умножение частоты

Умножители частоты – это устройства, на вход которых подается гармонический сигнал с частотой ω_0 , а на выходе получается гармонический сигнал с частотой, в несколько раз большей, т.е. $n\omega_0$, где n – целое число.

Умножители частоты обычно используются в радиопередатчиках, когда нужно получить стабильные по частоте высокочастотные колебания. Обычно

стабильные колебания получают с помощью автогенераторов с кварцевыми резонаторами. Однако кварцевый резонатор с частотой более 10 МГц изготовить трудно из-за его малых размеров. Поэтому в тех случаях, когда нужно получить стабильные колебания с частотой, например, несколько сотен мегагерц, используют кварцевый автогенератор с относительно невысокой частотой, а затем эту частоту повышают до требуемого значения с помощью нескольких каскадно включенных умножителей частоты. При этом высокая степень стабильности частоты сохраняется.

Схема умножителя частоты практически не отличается от схемы резонансного усилителя (рис. 4.8). Отличие состоит только в том, что контур в коллекторной цепи настраивается не на первую, а на n -ю гармонику частоты

$$\omega_p = n\omega_0. \quad (4.41)$$

Поскольку транзистор работает в нелинейном режиме, коллекторный ток содержит большое число гармоник (рис. 4.15):

$$i_k = I_{k0} + I_{k1} \cos(\omega_0 t + \varphi) + I_{k2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi) + \dots + I_{kn} \cos n(\omega_0 t + \varphi) + \dots$$

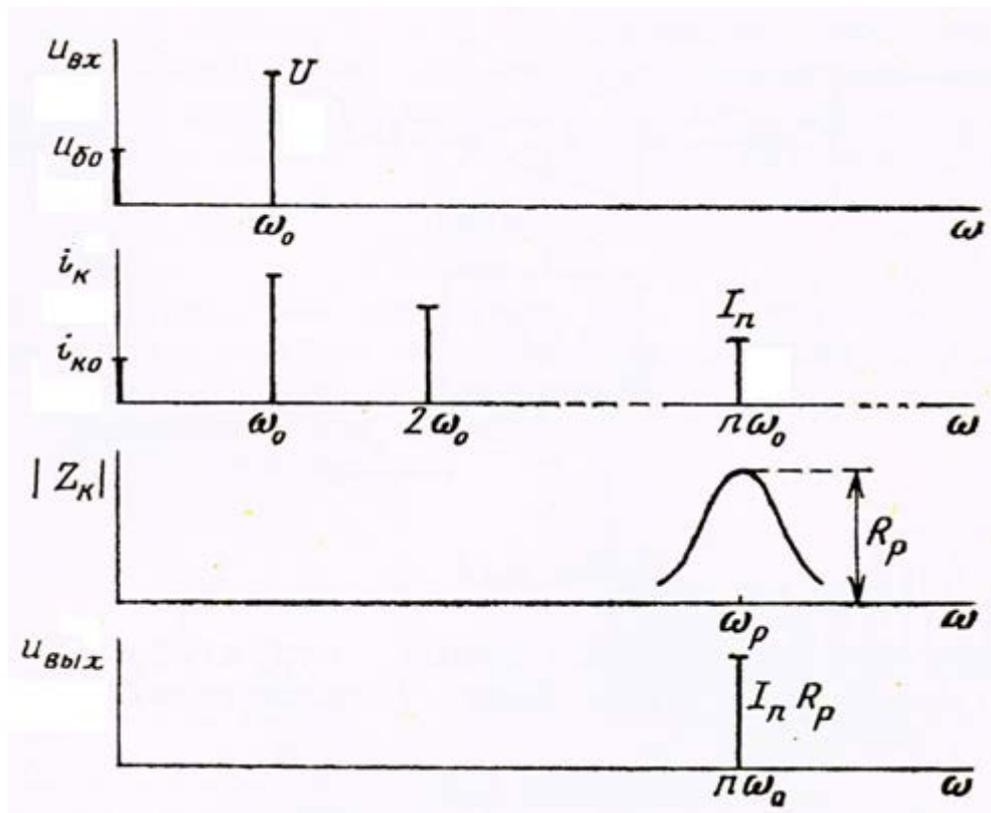


Рис. 4.15. Умножение частоты

Контур, настроенный на n -ую гармонику, имеет большое сопротивление, равное R_p , только на частоте $n\omega_0$, а на других частотах его сопротивление мало. Поэтому на контуре создается падение напряжения, равное $I_{kn} R_p \cos n(\omega_0 t + \varphi)$. Амплитуда сигнала на выходе равна:

$$U_{твых} = I_{kn} R_p = S U_{бт} \gamma_n(\theta) R_p, \quad (4.42)$$

а коэффициент передачи

$$K_p = SR_p \gamma_n(\theta). \quad (4.43)$$

Коэффициент передачи пропорционален функции Берга $\gamma_n(\theta)$, поэтому для получения максимального коэффициента передачи надо работать с углом отсечки, при котором максимальна соответствующая функция $\gamma_n(\theta)$. Для удвоителя частоты оптимальный угол отсечки $\theta = 90^\circ$, а для утроителя частоты – $\theta = 60^\circ$.

Чем выше номер гармоники n , тем меньше соответствующий коэффициент передачи. Поэтому на практике используются удвоители и утроители частоты, а если частоту нужно увеличить в большее число раз – используется несколько умножителей частоты, включенных каскадно.

Выходная мощность и КПД умножителя частоты получаются в несколько раз меньше, чем у резонансного усилителя на таком же транзисторе в аналогичном режиме. Поэтому умножители частоты практически не используются в качестве усилителей мощности и выходных каскадов радиопередатчиков. Их назначение – довести частоту сигнала до требуемого значения при сравнительно небольших уровнях мощности сигнала.

Лекция 14.

4.4. Воздействие нескольких гармонических сигналов на нелинейные элементы. Теория комбинационных частот

В данном разделе мы рассмотрим формирование новых спектральных составляющих при одновременном воздействии нескольких гармонических сигналов на нелинейный элемент.

Рассмотрим воздействие суммы гармонических сигналов:

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + U_{mn} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (4.44)$$

На нелинейный элемент, ВАХ которого аппроксимирована степенным рядом

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 + \dots + a_m (u - U_0)^m \quad (4.45)$$

Подставим выражение (4.44) в (4.45), обозначив для краткости $\alpha_1 = \omega_1 t + \varphi_1$, $\alpha_2 = \omega_2 t + \varphi_2, \dots, \alpha_n = \omega_n t + \varphi_n$:

$$i(t) = a_0 + a_1 (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots) + a_2 (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots)^2 + \dots + a_m (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots)^m \quad (4.46)$$

Проанализируем структуру выражения (4.46). Очевидно, что второй член этой суммы: $a_1 (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots)$ описывает первые гармоники подаваемых на вход гармонических сигналов с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots$. Следующий член суммы $a_2 (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots)^2$ после возведения в квадрат преобразуется к выражению

$$\begin{aligned}
& a_2 [U_{m1}^2 \cos^2 \alpha_1 + U_{m2}^2 \cos^2 \alpha_2 + \dots + 2U_{m1}U_{m2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \dots] = \\
& = a_2 \left\{ U_{m1}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha_1 \right) + U_{m2}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha_2 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. + U_{m1}U_{m2} [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] + \dots \right\} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что квадратичный член ряда приводит к появлению вторых гармонических частот $2\omega_1, 2\omega_2$, комбинационных составляющих $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$, а также дает некоторое приращение постоянной составляющей.

Аналогично кубичный член выражения (4.46) $a_3 (U_{m1} \cos \alpha_1 + U_{m2} \cos \alpha_2 + \dots)^3$ отвечает за появление третьих гармоник $3\omega_1, 3\omega_2$, а также более сложных комбинационных составляющих вида $2\omega_1 \pm \omega_2; \omega_1 \pm 2\omega_2, \dots \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$.

Таким образом, при воздействии нескольких гармонических сигналов на нелинейный элемент возникает большое число спектральных составляющих, и чтобы разобраться и установить закономерности в их формировании, вводится понятие порядка комбинационных частот.

Общее выражение для комбинационной частоты можно записать в следующем виде

$$\omega_{\text{ком}} = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n \quad (4.48)$$

где k_1, k_2, \dots, k_n – целые числа, положительные или отрицательные.

Порядком комбинационной частоты называется

$$N = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n| \quad (4.49)$$

Например, комбинационные частоты первого порядка – это частоты сигнала на входе нелинейного элемента: $\omega_1, \omega_2, \dots$

Комбинационные частоты второго порядка: $2\omega_1, 2\omega_2, \dots \omega_1 \pm \omega_2; \omega_1 \pm \omega_3; \dots$

Комбинационные частоты третьего порядка: $3\omega_1, 3\omega_2, \dots 2\omega_1 \pm \omega_2; \omega_1 \pm 2\omega_2; \dots \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$.

В образовании комбинационных частот нужно отметить следующие закономерности.

Комбинационные составляющие четного порядка определяются только четными коэффициентами разложения ВАХ нелинейного элемента в степенной ряд a_0, a_2, a_4, \dots , а комбинационные составляющие нечетного порядка – только нечетными коэффициентами a_1, a_3, a_5, \dots

Если разложение ВАХ в степенной ряд имеет наивысшую степень, равную n , то наивысший порядок комбинационных частот равен n .

Например, если ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована квадратичной параболой: $i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2$, то при воздействии на этот нелинейный элемент нескольких гармонических сигналов будут формироваться только комбинационные составляющие 1 и 2 порядков.

Рассмотрим *примеры*.

Пример 1. На нелинейный элемент с характеристикой

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 \quad (4.50)$$

подаются два гармонических сигнала: низкочастотный с частотой Ω и высокочастотный с частотой ω_0 . Спектральная диаграмма входного сигнала приведена на рис. 4.16,а. Поскольку ВАХ квадратичная, ток через нелинейный элемент будет содержать комбинационные составляющие 1-го порядка Ω и ω_0 и комбинационные составляющие 2-го порядка 2Ω , $2\omega_0$, $\omega_0 - \Omega$, $\omega_0 + \Omega$. Спектральная диаграмма тока через нелинейный элемент приведена на рис. 4.16,б.

Этот пример на языке спектров описывает процесс формирования АМ сигнала. Мы видим, что кроме несущей частоты ω_0 образовались верхняя $\omega_0 + \Omega$ и нижняя $\omega_0 - \Omega$ боковые частоты, что соответствует спектру АМ сигнала. Чтобы получить «чистый» АМ сигнал и подавить ненужные составляющие спектра, достаточно пропустить этот сигнал через полосовой фильтр, частотная характеристика которого показана на рис. 4.16,б пунктиром.

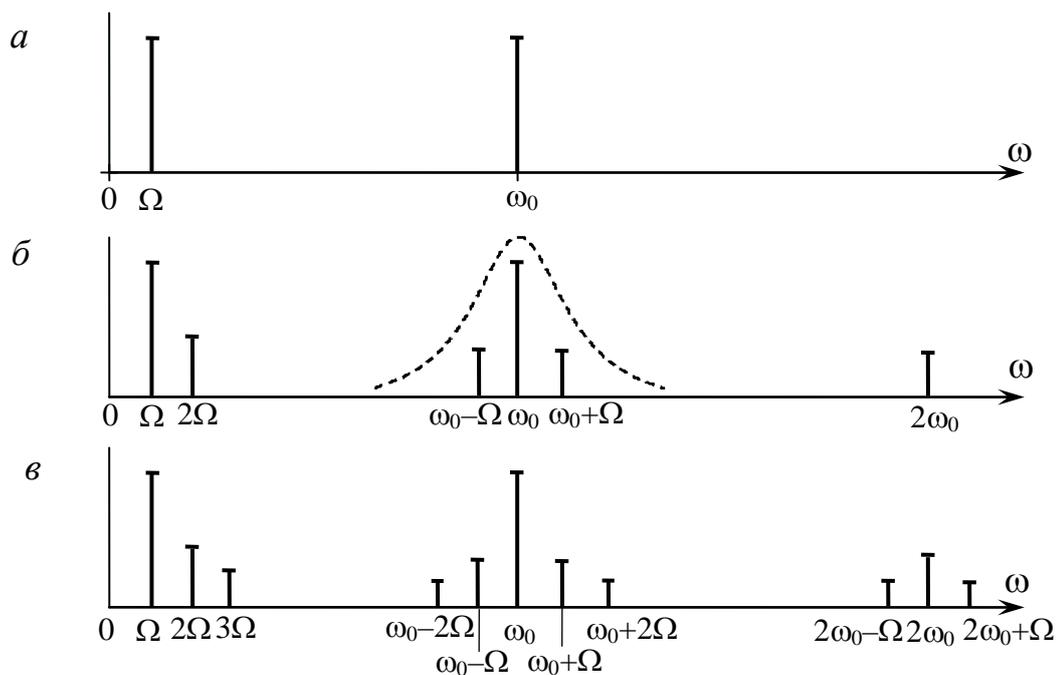


Рис. 4.16. Пример образования комбинационных частот

Теперь предположим, что аппроксимация ВАХ нелинейного элемента содержит еще кубический член:

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 + a_3 (u - U_0)^3.$$

Тогда в токе появляются комбинационные составляющие 3-го порядка: 3Ω , $3\omega_0$, $\omega_0 \pm 2\Omega$, $2\omega_0 \pm \Omega$. Мы видим, что в спектре сигнала появились лишние боковые составляющие, что означает появление нелинейных искажений при модуляции. Таким образом, неискаженная амплитудная модуляция получается только при квадратичной форме ВАХ нелинейного элемента.

Пример 2. Рассмотрим воздействие на нелинейный элемент, например, на транзистор с квадратичной характеристикой

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2$$

АМ сигнала $u(t) = U_0 + U_m (1 + M \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t)$, спектр которого содержит три составляющие: несущие и две боковых (рис. 4.17,а). В результате взаимодействия этих составляющих в спектре тока возникает много новых составляющих (рис. 4.17,б).

Составляющая с частотой Ω возникает в результате взаимодействия верхней боковой с несущей и несущей с нижней боковой. Составляющая с частотой 2Ω возникает в результате взаимодействия верхней и нижней боковых составляющих. Аналогично формируются составляющие спектра на частотах $2\omega_0$, $2\omega_0 \pm \Omega$, $2\omega_0 \pm 2\Omega$.

Данный пример позволяет объяснить некоторые особенности таких процессов, как детектирование, резонансное усиление и умножение частоты.

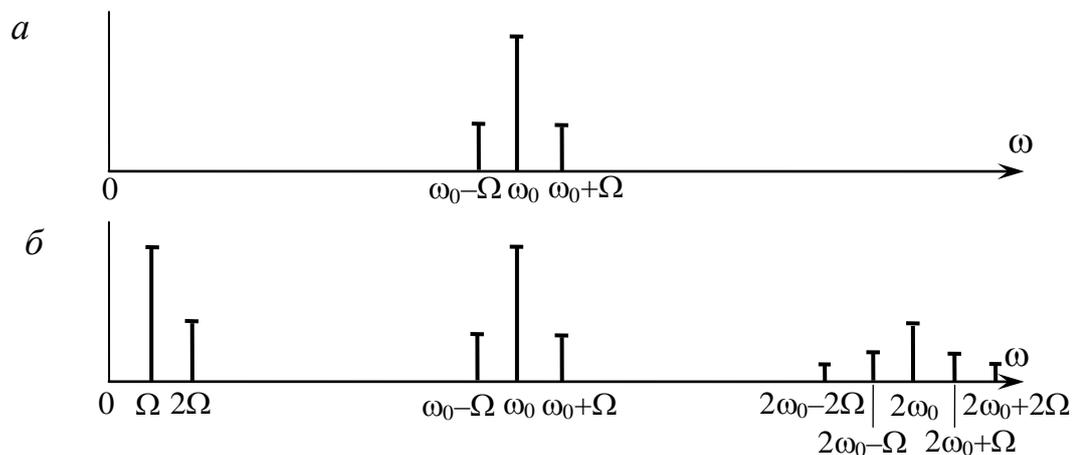


Рис. 4.17. Воздействие АМ сигнала на нелинейный элемент с квадратичной характеристикой

Мы видим, что ток, протекающий через транзистор, содержит много спектральных составляющих, и их можно разделить с помощью частотных фильтров. Если в коллекторной цепи включить фильтр нижних частот (RC -цепь), то будут выделены низкочастотные составляющие спектра с частотами Ω и 2Ω . Это режим коллекторного детектирования, причем квадратичный режим, поскольку характеристика транзистора квадратичная, и мы видим вторую гармонику частоты модуляции, которая возникает при квадратичном детектировании.

Если включить в коллекторную цепь полосовой фильтр, настроенный на частоту ω_0 , то будут выделены несущая составляющая с частотой ω_0 и две боковые. Это режим нелинейного резонансного усиления. Если полоса пропускания фильтра достаточно широкая и боковые составляющие спектра не ослабляются, то усиление происходит без искажений, несмотря на нелинейность характеристики транзистора.

Можно настроить полосовой фильтр на частоту $2\omega_0$. Это режим удвоения частоты. Однако, если на вход удвоителя частоты подается АМ сигнал (как в нашем случае), то в спектре сигнала на выходе появляются дополнительные боковые составляющие, что свидетельствует о наличии нелинейных искажений огибающей сигнала. Отсюда следует, что нельзя проводить удвоение (умножение) частоты АМ сигнала. Сигнал на входе удвоителя (умножителя) частоты должен быть немодулированным.

4.5. Амплитудная модуляция

Амплитудная модуляция – это процесс формирования АМ сигнала, огибающая которого повторяет по форме **информационный (модулирующий)** сигнал. Рассмотрим один из способов получения амплитудной модуляции – **амплитудную модуляцию смещением**.

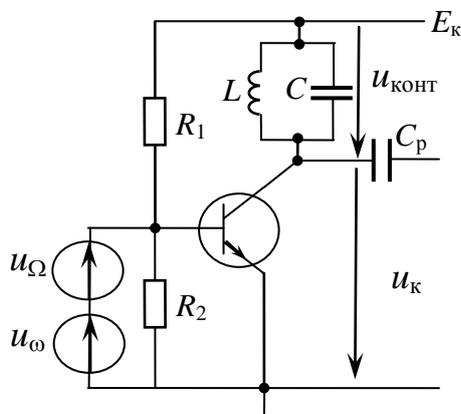


Рис. 4.18. Упрощенная схема амплитудного модулятора.

Для осуществления амплитудной модуляции на нелинейный элемент (например, на транзистор на рис. 4.18) подаются два сигнала: низкочастотный информационный $u_{\Omega}(t)$ и высокочастотный немодулированный $u_{\omega}(t) = U_{\delta m} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Сумма низкочастотного и высокочастотного сигналов показана на рис. 4.19 слева внизу. Низкочастотный сигнал как бы управляет высокочастотным сигналом, смещая его то вправо, то влево, то есть изменяет напряжение смещения в такт модуляции.

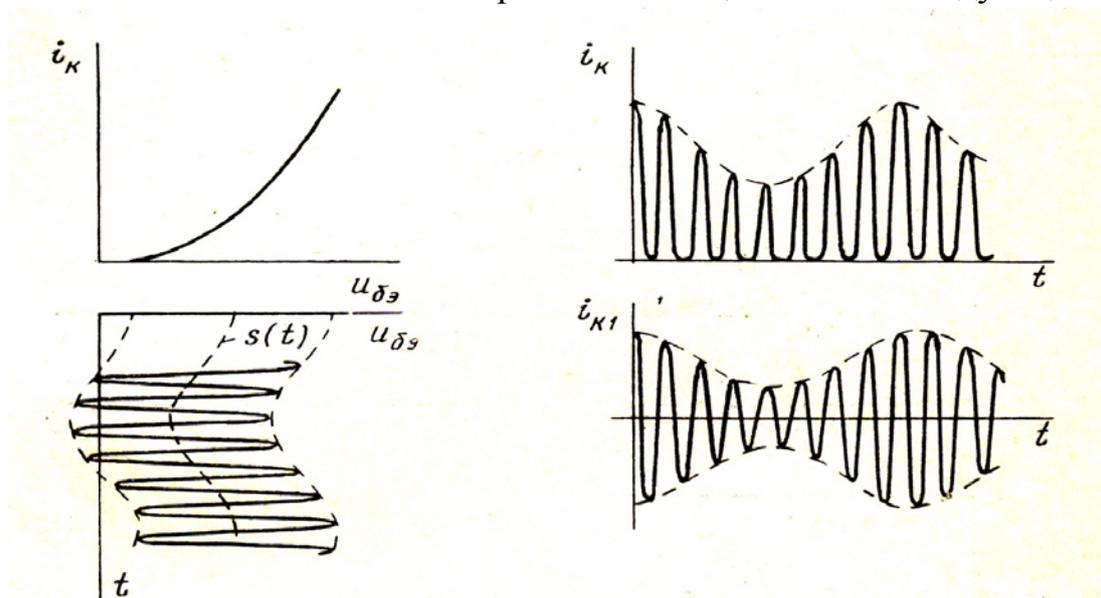


Рис. 4.19. Получение АМ сигнала

Модулирующий каскад ведет себя как резонансный усилитель, управляемый низкочастотным модулирующим сигналом. Высокочастотный сигнал попадает то на участок характеристики с малой крутизной, то с большой крутизной, и в

соответствии с этим изменяется амплитуда высокочастотной составляющей тока с частотой ω_0 . При попадании на участок с большой крутизной амплитуда тока получается большой, при попадании на участок с малой крутизной амплитуда тока сильно уменьшается. Кроме высокочастотной составляющей коллекторный ток содержит и низкочастотную составляющую, которая заставляет график тока изгибаться.

В коллекторной цепи включен колебательный контур, настроенный на частоту ω_0 . Контур выделяет высокочастотную составляющую и не пропускает низкочастотную составляющую. В результате на коллекторе, т.е. на выходе каскада образуется АМ напряжение (график на рис. 4.19 справа внизу).

Для описания работы модулирующего каскада вводится понятие модуляционной характеристики. **Модуляционная характеристика** – это график зависимости первой гармоники коллекторного тока от напряжения смещения на базе. Вид модуляционной характеристики зависит от характера аппроксимации ВАХ транзистора. При кусочно-линейной аппроксимации ВАХ амплитуда первой гармоники коллекторного тока вычисляется по формулам (4.7) и (4.11):

$$I_{k1} = SU_{\delta m} \gamma_1(\theta), \quad \cos \theta = \frac{U_{\delta H} - U_{\delta 0}}{U_{\delta m}}. \quad (4.51)$$

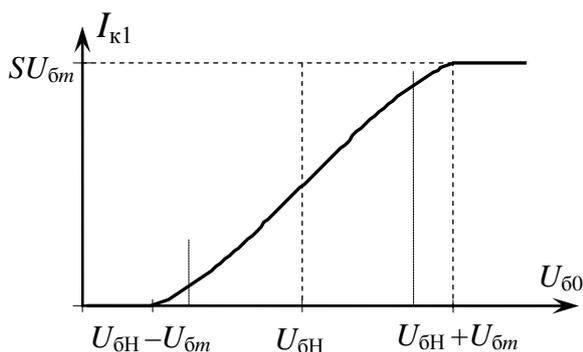


Рис. 4.20. Модуляционная характеристика.

Характерный вид модуляционной характеристики показан на рис. 4.20. При $U_{\delta 0} < U_{\delta H} - U_{\delta m}$ транзистор закрыт и $I_{k1} = 0$. При $U_{\delta 0} = U_{\delta H} - U_{\delta m}$ транзистор начинает открываться и далее, по мере увеличения $U_{\delta 0}$ ток I_{k1} растет. При $U_{\delta 0} = U_{\delta H} + U_{\delta m}$ подаваемый на базу транзистора высокочастотный сигнал целиком попадает на линейный участок характеристики, амплитуда первой гармоники коллекторного тока достигает максимальной величины, равной $SU_{\delta m}$, и при дальнейшем увеличении напряжения смещения больше не увеличивается.

С помощью модуляционной характеристики можно оценить качество модуляции в каждом конкретном случае. Для получения неискаженной модуляции нужно, чтобы зависимость амплитуды высокочастотного сигнала, т.е. первой гармоники коллекторного тока, линейно зависела от модулирующего напряжения смещения $U_{\delta 0}$. В случае кусочно-линейной аппроксимации ВАХ линейность обеспечивается центральным участком модуляционной характеристики (рис. 4.20) приблизительно от $U_{\delta H} - 0,8 U_{\delta m}$ до $U_{\delta H} + 0,8 U_{\delta m}$. При сдвиге вправо или влево относительно этого участка модуляция будет сопровождаться сильными искажениями формы огибающей. **Таким образом, для получения неискаженной модуляции амплитуда модулирующего сигнала U_{Ω} не должна превышать $0,8 U_{\delta m}$.**

В случае аппроксимации характеристики транзистора степенным рядом

$$i_k = f(u_6) = b_0 + b_1 u_6 + b_2 u_6^2 + \dots + b_n u_6^n \quad (4.52)$$

амплитуда первой гармоники коллекторного тока определяется выражением

$$I_{k1} = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \dots, \quad (4.53)$$

причем коэффициенты a_1, a_2, \dots зависят от U_{60} (см. (4.20)):

$$\begin{aligned} a_1 &= f'(U_{60}) \\ a_3 &= \frac{f''(U_{60})}{3!} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.54)$$

Подставляя (4.52) в (4.54), получим:

$$a_1 = b_1 + 2b_2 U_{60} + 3b_3 U_{60}^2 + 4b_4 U_{60}^3 + \dots$$

$$a_3 = b_3 + 4b_4 U_{60} + \dots$$

Нетрудно видеть, что линейная зависимость первой гармоники коллекторного тока I_{k1} от напряжения смещения U_{60} получается только при $b_2 \neq 0$ и $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$, то есть при квадратичном характере ВАХ транзистора.

Кроме ВАХ транзистора на качество модуляции влияет и частотная характеристика колебательного контура, включенного в цепь коллектора транзистора. Полоса пропускания колебательного контура должна быть не уже, чем ширина спектра формируемого АМ сигнала. В противном случае наиболее удаленные боковые составляющие спектра будут сильно ослаблены, что приведет к частотным (линейным) искажениям сигнала.

Лекция 15.

4.6. Детектирование АМ сигналов

Детектирование – это процесс, обратный модуляции. В результате детектирования из модулированного сигнала должен быть выделен исходный модулирующий информационный сигнал.

Различают несколько видов детекторов. Среди них наибольшее распространение получили коллекторный детектор и диодный детектор.

4.6.1. Коллекторный детектор

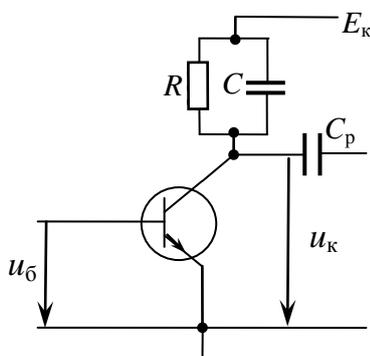


Рис. 4.21. Упрощенная схема коллекторного детектора

Схема **коллекторного детектора** напряжения изображена на рис. 4.21. На вход транзистора, работающего в нелинейном режиме, подается АМ сигнал:

$$u_6(t) = U_{60} + U_{6m} [1 + M \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.55)$$

В коллекторной цепи в качестве нагрузки включена RC -цепь, частота среза ($\omega_c = \frac{1}{RC}$) которой должна быть значительно больше частоты модуляции и значительно меньше несущей частоты:

$$\Omega \ll \frac{1}{RC} \ll \omega_0. \quad (4.56).$$

Принцип действия коллекторного детектора поясняется на рис. 4.22. Вследствие нелинейности характеристики транзистора коллекторный ток имеет своеобразную искривленную форму, среднее значение коллекторного тока $I_{к0}$ оказывается не постоянным, а изменяется во времени с частотой модуляции Ω . Иначе говоря, в спектре коллекторного тока появляется низкочастотная составляющая с частотой Ω . Включенный в коллекторной цепи RC -фильтр выделяет эту составляющую и подавляет высокочастотную составляющую (несущую частоту). В результате напряжение на коллекторе имеет вид протектированного низкочастотного сигнала, повторяющего по форме огибающую исходного АМ сигнала.

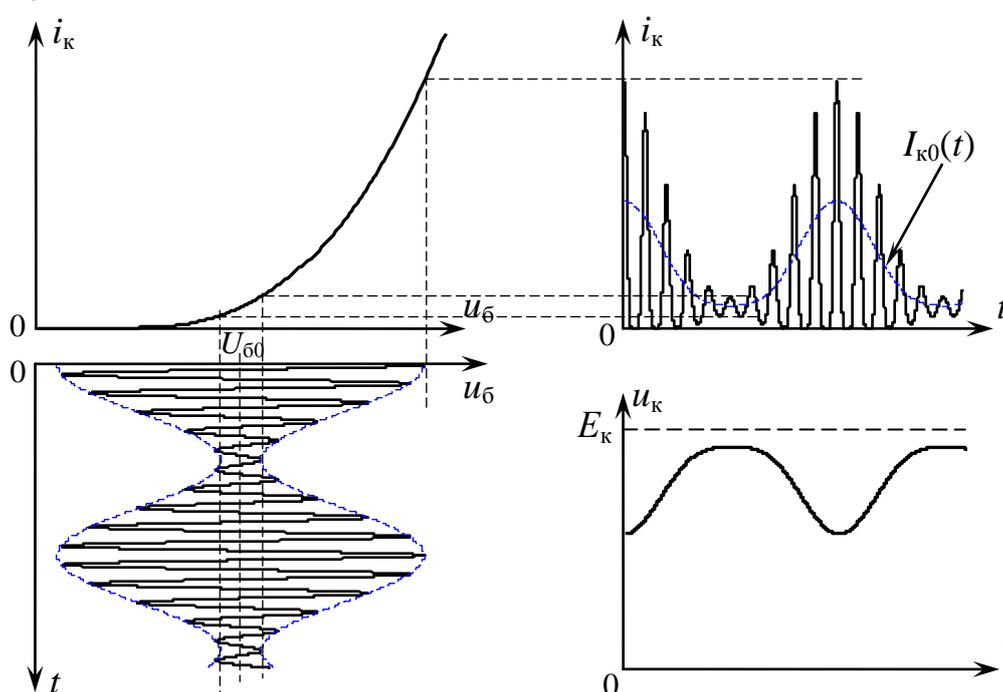


Рис. 4.22. Принцип действия коллекторного детектора.

Количественный анализ работы коллекторного детектора несколько различается в зависимости от уровня сигнала, поступающего на вход детектора. При слабых сигналах используется аппроксимация ВАХ транзистора степенным рядом, при сильных сигналах – кусочно-линейная аппроксимация. В зависимости от вида аппроксимации используются различные математические выражения.

Рассмотрим вначале **режим детектирования сильных сигналов**. При кусочно-линейной аппроксимации коллекторный ток имеет вид последовательности косинусоидальных импульсов, амплитуда которых изменяется в такт модуляции (рис. 4.23).

Величина постоянной составляющей последовательности косинусоидальных импульсов вычисляется по формуле

$$I_{к0} = SU_{бm} \gamma_0(\theta), \quad (4.57)$$

где $\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi}(\sin(\theta) - \theta\cos(\theta))$, причем $\cos(\theta) = \frac{U_{\text{бн}} - U_{\text{б0}}}{U_{\text{бm}}}$.

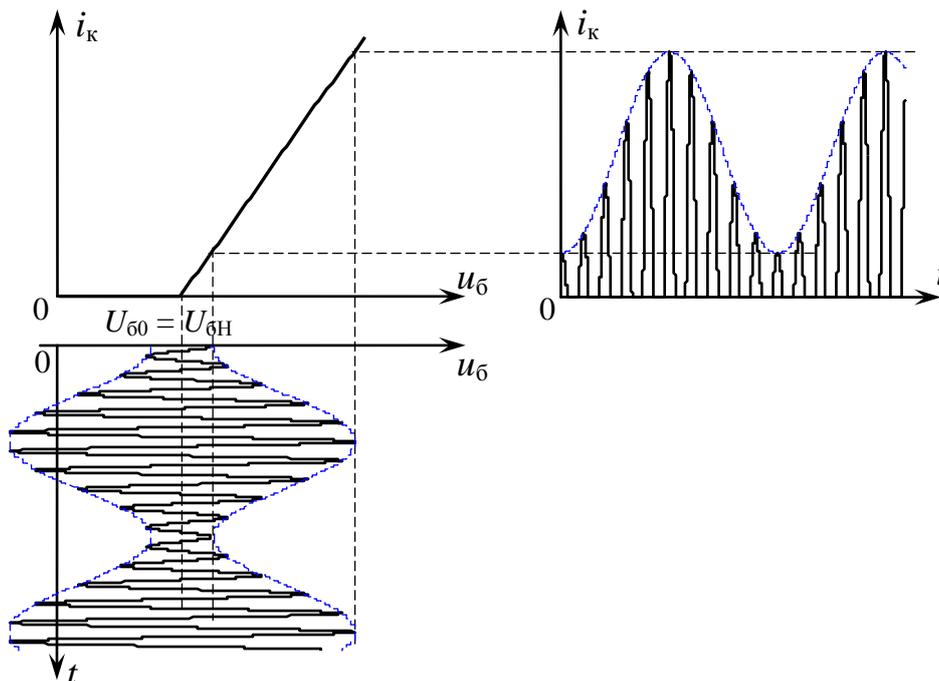


Рис. 4.23. Осциллограммы токов и напряжений в коллекторном детекторе.

Для неискаженного детектирования нужно, чтобы постоянная составляющая коллекторного тока $I_{\text{к0}}$ была пропорциональна амплитуде входного сигнала $U_{\text{бm}}$. Такой режим наступает, если $U_{\text{бн}} = U_{\text{б0}}$. При этом $\cos(\theta) = 0$ при любых значениях амплитуды входного сигнала.

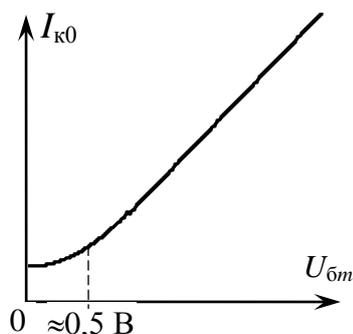


Рис. 4.24. Детекторная характеристика.

Для описания работы детектора используется **детекторная характеристика $I_{\text{к0}}(U_{\text{бm}})$** . При детектировании сильных сигналов она имеет вид **линейной функции** (рис. 4.24). Линейный режим детектирования получается при достаточно больших амплитудах сигнала, когда можно применять аппроксимацию ВАХ кусочно-линейной функцией. Обычно это бывает возможно при $U_{\text{бm}} > 5 \text{ В}$.

При детектировании слабых сигналов используется аппроксимация ВАХ степенным рядом

$$i_{\text{к}} = a_0 + a_1(u_{\text{б}} - U_{\text{б0}}) + a_2(u_{\text{б}} - U_{\text{б0}})^2 + a_3(u_{\text{б}} - U_{\text{б0}})^3 + \dots \quad (4.58)$$

Для такой аппроксимации постоянная составляющая тока описывается выражением

$$I_{\text{к0}} = a_0 + \frac{1}{2}a_2U_{\text{бm}}^2 + \frac{3}{8}a_4U_{\text{бm}}^4 + \dots \quad (4.59)$$

Поскольку амплитуда сигнала $U_{\text{бm}}$ предполагается малой, членами четвертой и более степеней можно пренебречь и ограничиться квадратичным выражением

$$I_{\text{к0}} = a_0 + \frac{1}{2}a_2U_{\text{бm}}^2 \quad (4.60)$$

Выражение (4.60) описывает начальную часть детекторной характеристики (рис. 4.24) при напряжениях сигнала $U_{\text{вм}} < 5 \text{ В}$. Поскольку результат детектирования согласно (4.60) пропорционален квадрату амплитуды входного сигнала, такой режим детектирования называют **квадратичным**. Квадратичный режим детектирования является нежелательным, так как коэффициент передачи пропорционален амплитуде входного сигнала, и слабый сигнал при возведении в квадрат еще больше ослабляется.

Второй недостаток квадратичного режима детектирования состоит в появлении **нелинейных искажений**. Пусть входной сигнал имеет вид

$$u_{\text{в}}(t) = U_0 + U_{\text{вм}0} [1 + M \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t), \quad (4.61)$$

то есть амплитуда сигнала изменяется по закону:

$$U_{\text{вм}}(t) = U_{\text{вм}0} [1 + M \cos(\Omega t)]. \quad (4.62)$$

Подставляя (4.62) в (4.60), получим:

$$\begin{aligned} I_{\text{к}0} &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{\text{вм}0}^2 (1 + M \cos(\Omega t))^2 = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{\text{вм}0}^2 (1 + 2M \cos(\Omega t) + M^2 \cos^2(\Omega t)) = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{\text{вм}0}^2 \left(1 + 2M \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{2} M^2 \cos(2\Omega t) \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

В соответствии с (4.63) постоянная составляющая коллекторного тока содержит полезную составляющую с частотой Ω , амплитуда которой равна $a_2 U_{\text{вм}0}^2 M$, и вторую гармонику частоты Ω , амплитуда которой равна $\frac{1}{4} a_2 U_{\text{вм}0}^2 M^2$. Наличие второй гармоники свидетельствует о нелинейных искажениях. Уровень нелинейных искажений принято оценивать **коэффициентом нелинейных искажений** ν , который равен отношению амплитуды высших гармоник к амплитуде первой гармоники. В нашем случае

$$\nu = \frac{I_{\text{к}2\Omega}}{I_{\text{к}\Omega}} = \frac{M}{4}. \quad (4.64)$$

При коэффициенте модуляции $M = 1$ коэффициент нелинейных искажений равен $\nu = 0,25$. Это недопустимо большой уровень искажений. Однако при среднем коэффициенте модуляции $M \approx 0,3$, коэффициент нелинейных искажений оказывается равным $\nu = 0,075$, что считается приемлемым, особенно при небольшом уровне громкости. Для сравнения: в Московской городской радиотрансляционной сети допускается коэффициент нелинейных искажений 7%.

Чтобы избежать нежелательного квадратичного режима детектирования, нужно стараться детектировать сигналы большой амплитуды. С этой целью в радиоприемных устройствах всегда перед детектированием сигнал усиливают, доводя его напряжение до нескольких вольт.

Преимуществом коллекторного детектора является его сравнительно большое входное сопротивление, особенно при использовании полевого

транзистора. **Недостатком** – небольшой динамический диапазон, так как при напряжении сигнала на входе более 2-3 В происходит перегрузка каскада и связанные с нею нелинейные искажения.

4.6.2. Диодный детектор

Схема **диодного детектора** изображена на рис. 4.25. Нагрузкой диодного детектора служит RC -цепь, причем сопротивление R должно быть значительно (в сотни раз) больше, чем сопротивление диода в прямом направлении.

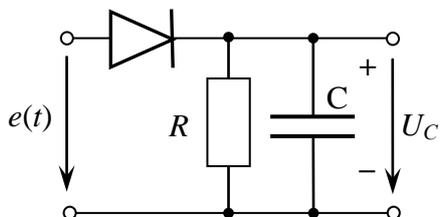


Рис. 4.25. Схема диодного детектора.

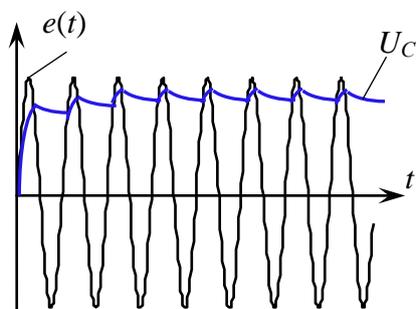


Рис. 4.26. Принцип действия диодного детектора.

Работает детектор следующим образом. На его вход подается высокочастотный сигнал $e(t)$. Во время действия положительного полупериода напряжения входного сигнала конденсатор C быстро заряжается через небольшое сопротивление открытого диода (рис. 4.26). Во время отрицательного полупериода диод закрыт и конденсатор медленно разряжается через сопротивление нагрузки R . В результате на конденсаторе формируется почти постоянное, слабо пульсирующее напряжение U_C , величина которого немного меньше амплитуды высокочастотного напряжения, подводимого к детектору. Это и есть результат детектирования.

Рассмотрим процесс детектирования более подробно. Определим **коэффициент передачи детектора**. Продетектированное постоянное напряжение U_C противоположной полярностью через источник сигнала подается на диод. То есть к аноду диода приложено отрицательное постоянное напряжение смещения $U_0 = -U_C$. Из-за этого напряжения диод большую часть периода находится в запертом состоянии и открывается на короткий промежуток времени, за который и происходит зарядка конденсатора.

Аппроксимируем ВАХ диода кусочно-линейной функцией с $U_H = 0$ (рис. 4.27). Хотя, как будет ясно из дальнейшего, вид аппроксимации ВАХ слабо влияет на результаты детектирования. На диод подается напряжение

$$u_d(t) = U_0 + U_m \cos(\alpha) \quad (\alpha = \omega_0 t + \varphi), \quad (4.65)$$

Постоянная составляющая тока через диод:

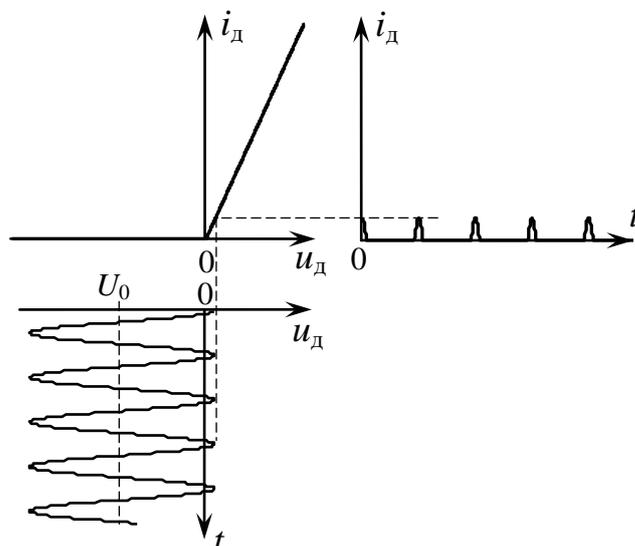


Рис. 4.27. К расчету диодного детектора.

$$I_{д0} = SU_m \gamma_0(\theta) = \frac{SU_m}{\pi} (\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)) \quad (4.66)$$

Протекая через сопротивление нагрузки R , ток $I_{д0}$ создает на ней падение напряжения, равное $U_C = -U_0$, то есть $I_{д0}R = -U_0$ или

$$\frac{SU_m R}{\pi} (\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)) = -U_0 \quad (4.67)$$

Учитывая, что $\cos(\theta) = \frac{U_H - U_0}{U_m}$ и $U_H = 0$, получим $\cos(\theta) = -\frac{U_0}{U_m}$. Отсюда следует, что коэффициент передачи диодного детектора равен $k_d = \frac{U_C}{U_m} = \cos(\theta)$.

Разделив в (4.67) левую и правую части на U_m и заменяя $-\frac{U_0}{U_m}$ на $\cos(\theta)$, получим:

$$\frac{SR}{\pi} (\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)) = \cos(\theta) \quad (4.68)$$

Далее, разделив (4.68) на $\cos(\theta)$, после несложных преобразований получаем **основное уравнение для диодного детектора:**

$$\text{tg}(\theta) - \theta = \frac{\pi}{SR}. \quad (4.69)$$

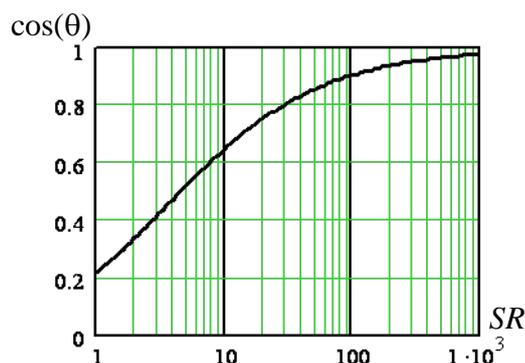


Рис. 4.28. График зависимости $\cos(\theta)$ от SR .

Как следует из (4.69), угол отсечки, а, следовательно, и коэффициент передачи детектора определяется величиной произведения SR . График зависимости $\cos(\theta)$ от SR приведен на рис. 4.28.

Уравнение (4.69) – трансцендентное, и решить его можно только численными методами. Однако, если $\theta \ll 1$, что получается при $SR \gg 1$, можно легко найти приближенное решение уравнения. Разлагая $\text{tg}(\theta)$ в ряд: $\text{tg}(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots$ и подставляя в уравнение (4.69), получим $\theta + \frac{\theta^3}{3} - \theta \approx \frac{\pi}{SR}$, откуда

$$\theta \approx \sqrt[3]{\frac{3\pi}{SR}}. \quad (4.70)$$

Из решения уравнения (4.69) и графика рис. 4.28 следует, что для получения большого коэффициента передачи диодного детектора $k_d = \cos(\theta) > 0,9$ необходимо, чтобы $SR > 100$.

Это неравенство является основой для выбора сопротивления нагрузки R . Вторым фактором, который влияет на выбор сопротивления R , является **входное сопротивление диодного детектора**.

Для источника сигнала детектор представляет собой нагрузку, забирающую энергию. Входное сопротивление определяется на высокой (несущей) частоте как отношение соответствующих амплитуд напряжения и тока:

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_m}{I_{\text{д1}}}, \quad (4.71)$$

где
$$I_{\text{д1}} = SU_m \gamma_1(\theta) = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin(\theta) \cos(\theta)) \quad (4.72)$$

Предполагая, что $\theta \ll 1$, преобразуем это выражение:

$$\theta - \sin(\theta) \cos(\theta) = \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \theta - \frac{1}{2} \left(2\theta - \frac{(2\theta)^3}{3!} + \dots \right) \approx \frac{2}{3} \theta^3. \quad (4.73)$$

Подставляя (4.73) в (4.72) и затем в (4.71), получим:

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_m \pi}{SU_m \frac{2}{3} \theta^3}, \quad (4.74)$$

Из уравнения (4.69) следует, что $\frac{\pi}{S} = R(\text{tg}(\theta) - \theta)$, или, при $\theta \ll 1$,

$$\frac{\pi}{S} = R \frac{\theta^3}{3}. \quad (4.75)$$

Подставляя (4.75) в (4.74) и проводя необходимые сокращения, получим

$$R_{\text{вх}} \approx \frac{R}{2}. \quad (4.76)$$

Знание входного сопротивления детектора бывает нужно в тех случаях, когда источником сигнала для детектора является колебательный контур. Чтобы детектор не шунтировал колебательный контур и не снижал его добротность, нужно, чтобы входное сопротивление детектора было в несколько раз больше резонансного сопротивления контура. Это требование тоже влияет на выбор величины сопротивления R .

Емкость конденсатора при детектировании АМ сигналов выбирается из условия

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll RC \ll \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (4.77)$$

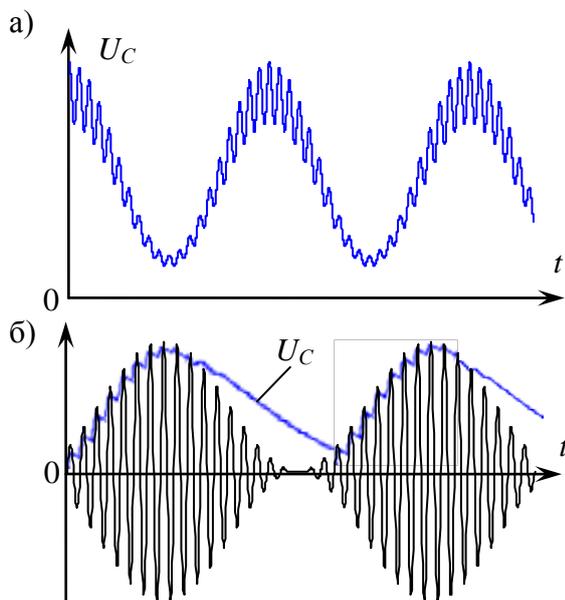


Рис. 4.29. Искажения АМ сигнала при детектировании.

Если не выполняется левая часть неравенства, то есть **емкость конденсатора слишком мала**, то недостаточно подавляются колебания высокой (несущей) частоты и протектированный сигнал имеет вид, показанный на рис. 4.29,а. Искажения сигнала такого рода не являются недопустимыми, так как высокочастотная составляющая спектра сигнала может быть подавлена с помощью последующей фильтрации.

Если емкостью конденсатора слишком велика, и не выполняется правая часть неравенства (4.77), то могут возникать

так называемые инерционные искажения. При достаточно большом коэффициенте модуляции может получиться, что конденсатор разряжается через резистор R медленнее, чем убывает амплитуда сигнала. Происходит своеобразный «отрыв» напряжения U_C от огибающей сигнала (рис. 4.29,б), что воспринимается как неприятные на слух нелинейные искажения.

При детектировании слабых сигналов диодным детектором также возникает режим квадратичного детектирования, однако уже при напряжениях сигнала более 0,2-0,3 В детектор переходит в линейный режим детектирования. Со стороны больших напряжений уровень сигнала ограничивается пробивной прочностью диода, что составляет 50-100 В. Поэтому диодные детекторы отличаются большим динамическим диапазоном и минимальными искажениями сигнала.

Следует отметить, что изложенный выше анализ работы диодного детектора выполнен в предположении, что диод имеет характеристику, аппроксимируемую ломаной прямой с $U_H = 0$. Такую характеристику имеют вакуумные диоды, а *полупроводниковые диоды имеют характеристику, для которой $U_H \neq 0$* . Для германиевых диодов $U_H \approx 0,3$ В, для кремниевых диодов $U_H \approx 0,6-0,7$ В.

Очевидно, что при такой характеристике диода невозможно детектирование сигналов, амплитуда которых меньше U_H . *Для устранения этого недостатка схему детектора немного видоизменяют, включая последовательно с диодом источник постоянного напряжения смещения, равный по величине U_H .*

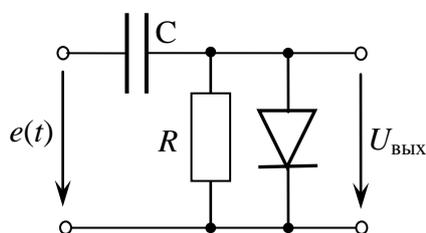


Рис. 4.30. Схема параллельного диодного детектора.

как на результат детектирования наложится эта постоянная составляющая и исказит его. Для детектирования сигналов с постоянной составляющей используется **параллельный диодный детектор** (рис. 4.30), который называют еще **детектором с закрытым входом**. Принцип действия его такой же, как у последовательного диодного детектора: конденсатор C заряжается через открытый диод во время положительного полупериода напряжения входного сигнала и разряжается во время отрицательного полупериода. Продетектированный сигнал $U_{\text{вых}}$ снимается с резистора R . В отличие от последовательного диодного детектора, входное сопротивление параллельного диодного детектора равно не $R/2$, а $R/3$. Таким диодным детектором обычно оснащаются щупы-пробники, с помощью которых измеряют уровень высокочастотных сигналов в разных точках работающего устройства.

Лекция 16.

4.7. Преобразование частоты

Преобразование частоты – это такой вид нелинейных преобразований сигналов, когда на вход нелинейного элемента подаются два сигнала: информационный модулированный сигнал $u_c(t) = U_{cm}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c(t))$, имеющий обычно небольшую амплитуду, и гармонический сигнал (напряжение гетеродина) $u_r(t) = U_{gm} \cos(\omega_r t + \varphi_r)$. В результате взаимодействия этих двух сигналов возникают различные комбинационные составляющие, среди которых наибольший интерес представляет составляющая с частотой $\omega_n = \omega_r - \omega_c$. Эту частоту обычно называют **промежуточной частотой**. Если сигнал на входе преобразователя частоты промодулирован по амплитуде, по частоте или по фазе, то **закон модуляции полностью переносится на промежуточную частоту**.

Основное применение преобразователя частоты находят в **супергетеродинных приемниках**. Первые радиоприемники, которые выпускались до 1930-х годов, были собраны **по схеме прямого усиления** (рис. 4.31). Принимаемый антенной сигнал поступает на колебательный контур, настроенный на частоту сигнала ω_c , затем на усилитель высокой частоты (УВЧ), также настроенный на частоту ω_c , затем детектируется, усиливается в усилителе низкой частоты и подается на громкоговоритель.

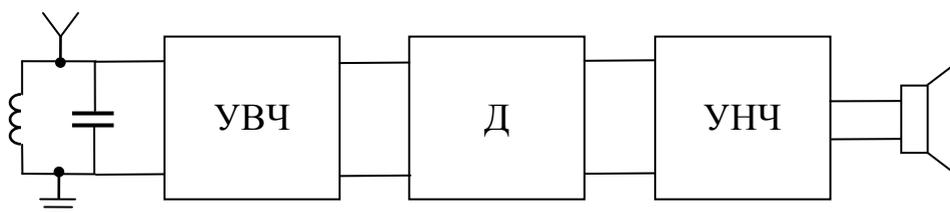


Рис. 4.31. Структурная схема приемника прямого усиления.

Схема прямого усиления имеет ряд недостатков. Для эффективного подавления помех и сигналов соседних радиостанций полоса пропускания входного контура и усилителя высокой частоты должна соответствовать ширине спектра сигнала. Это удастся сделать в диапазонах длинных и средних волн (150 кГц – 1500 кГц), но оказывается невозможным в диапазоне коротких волн. Например, при частоте сигнала 10 МГц и добротности контуров $Q = 100$ полоса пропускания составит 100 кГц. При ширине спектра АМ сигнала около 10 кГц в полосе пропускания приемника может одновременно оказаться до 10 радиостанций, что совершенно недопустимо.

Выход из положения состоит в том, чтобы принимаемый сигнал перенести на более низкую (промежуточную) частоту (например, для АМ сигнала промежуточная частота равна $f_n = 465$ кГц). Так возникла **схема супергетеродинного приемника** (рис. 4.32).

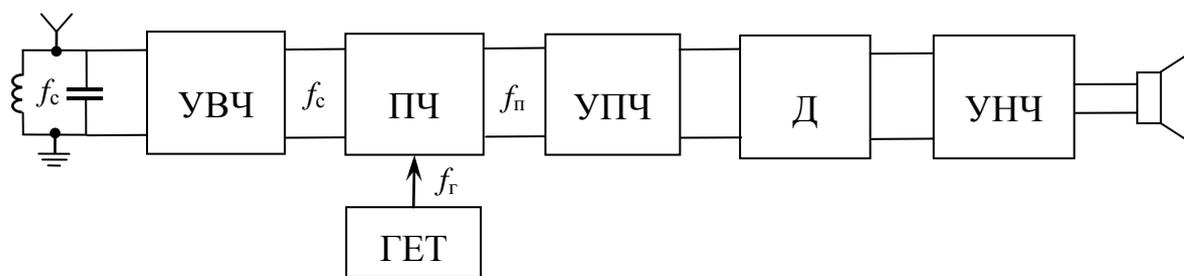


Рис. 4.32. Структурная схема супергетеродинного приемника.

Принимаемый антенной сигнал предварительно отфильтровывается входным колебательным контуром, усиливается в УВЧ и подается на преобразователь частоты (ПЧ). Кроме принимаемого информационного сигнала на вход преобразователя частоты подается напряжение гетеродина $u_r(t) = U_{gm} \cos(\omega_r t + \varphi_r)$. Преобразователь частоты содержит нелинейный элемент (например, транзистор) и колебательный контур, настроенный на промежуточную частоту $f_п = f_r - f_c$. **Промежуточная частота является постоянной для данного приемника.** Если приемник надо перестраивать, настраиваясь на другую станцию с другой частотой сигнала, то одновременно изменяется и частота гетеродина f_r так, чтобы разность $f_r - f_c$ оставалась неизменной.

Далее сигнал поступает на усилитель промежуточной частоты (УПЧ), где происходит основное усиление и основная фильтрация сигнала. УПЧ обычно содержит систему колебательных контуров с частотной характеристикой, близкой к прямоугольной.

В результате взаимодействия напряжения сигнала и напряжения гетеродина кроме полезной составляющей с частотой $\omega_r - \omega_c$ возникают еще другие комбинационные составляющие, которые могут приводить к появлению паразитных каналов приема. Например, если на вход преобразователя частоты поступает сигнал другой радиостанции с частотой $\omega_r + \omega_п$, то в результате его взаимодействия с напряжением гетеродина возникнет составляющая с частотой $\omega_п$, которая в дальнейшем будет усилена в УПЧ и отделить ее от полезного сигнала будет невозможно. Это так называемый **зеркальный канал приема**. Кроме этого, возможно образование **паразитных каналов приема** при взаимодействии второй или третьей гармоник гетеродина с сигналами радиостанций, работающих на частотах $2\omega_r \pm \omega_п$, $3\omega_r \pm \omega_п$. На рис. 4.33 приведена диаграмма частот, на которых возможен прием сигналов при заданных ω_r и $\omega_п$.

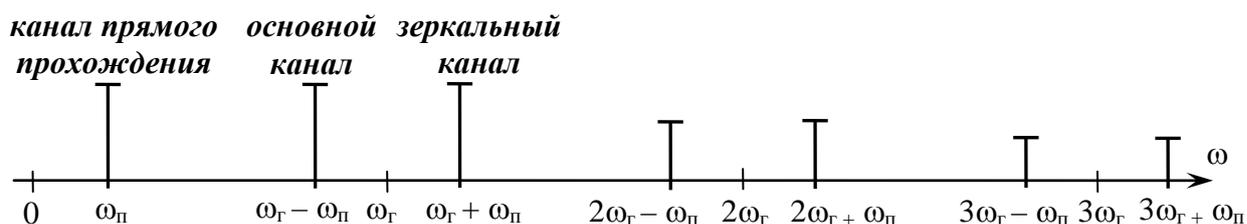


Рис. 4.33. Диаграмма частот, на которых возможен прием паразитных каналов.

Среди паразитных каналов приема самым опасным является **канал «прямого прохождения»** с частотой, равной $\omega_{\text{п}}$. Если на вход приемника попадает сигнал с частотой $\omega_{\text{п}}$, то он беспрепятственно проходит через ПЧ как через усилитель, не взаимодействуя с напряжением гетеродина.

Для подавления паразитных каналов приема применяют колебательные контуры, настроенные на частоту полезного сигнала, во входных цепях приемника перед преобразователем частоты. Параметры этих контуров, а также значение промежуточной частоты $\omega_{\text{п}}$ подбираются таким образом, чтобы обеспечить достаточное подавление сигналов на паразитных каналах приема. Для борьбы с каналом «прямого прохождения», кроме этого, принимаются организационные меры: запрет на функционирование любых радиосредств, работающих на частоте, равной $\omega_{\text{п}}$ или близкой к ней. Поэтому значения промежуточной частоты стандартизованы: для АМ приемников – 465 кГц, для ЧМ приемников – 8,4 МГц, для телевидения – 30 МГц и т.д.

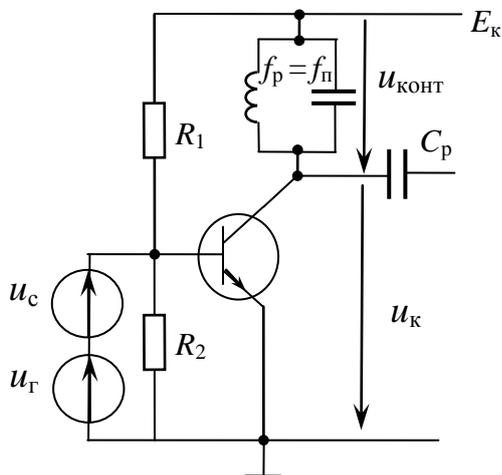


Рис. 4.34. Упрощенная схема преобразователя частоты.

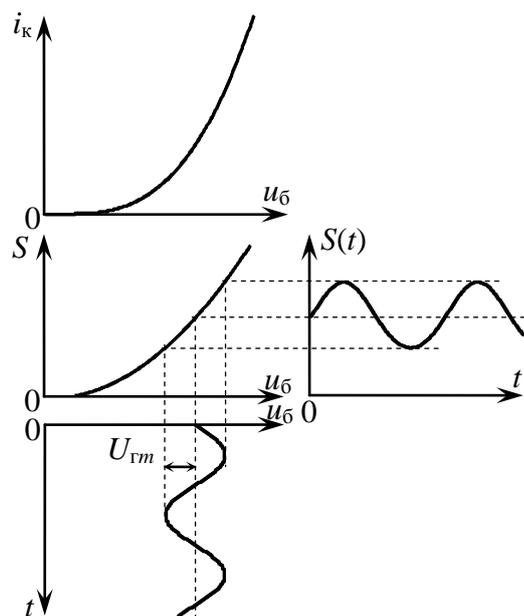


Рис. 4.35. Принцип действия преобразователя частоты.

Существуют различные варианты схемной реализации преобразователей частоты. Среди них наиболее распространенным является **преобразователь частоты на транзисторе**, схема которого изображена на рис. 4.34. Схема выглядит так же, как у резонансного усилителя, только контур в коллекторной цепи настроен на промежуточную частоту $\omega_{\text{п}}$. На вход транзистора подается небольшое напряжение сигнала $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c)$ и напряжение гетеродина $u_r(t) = U_{gm} \cos(\omega_r t + \varphi_r)$, амплитуда которого обычно составляет около 1 В. При такой большой амплитуде сигнала транзистор работает в нелинейном режиме. А для сигнала, амплитуда которого обычно составляет не более нескольких милливольт, нелинейностью можно пренебречь, и рассматривать каскад как линейный усилитель с управляемой крутизной. Пусть проходная характеристика транзистора аппроксимирована степенным рядом:

$$i_k = f(u_б) = b_0 + b_1 u_б + b_2 u_б^2 + b_3 u_б^3 + \dots, \quad (4.78)$$

тогда зависимость крутизны от напряжения на базе (рис. 4.35) описывается выражением:

$$S = \frac{di_k}{du_б} = b_1 + 2b_2 u_б + 3b_3 u_б^2 + \dots \quad (4.79)$$

Подставляя в (4.79) выражение для напряжения гетеродина, получим:

$$S = b_1 + 2b_2 U_{gm} \cos(\omega_r t + \varphi_r) + 3b_3 U_{gm}^2 \cos^2(\omega_r t + \varphi_r) + \dots \quad (4.80)$$

то есть крутизна оказывается периодической функцией времени (рис. 4.35).

Выражение (4.80) можно записать в виде ряда Фурье:

$$S(t) = S_0 + S_1 \cos(\omega_r t + \varphi_r) + S_2 \cos(2\omega_r t + \varphi_r) + \dots, \quad (4.81)$$

где $S_0 = b_1 + \frac{3}{2} b_3 U_{gm}^2 + \dots$ – постоянная составляющая крутизны, $S_1 = 2b_2 U_{gm} + 3b_4 U_{gm}^3 + \dots$ – первая гармоника крутизны и т.д.

Запишем выражение для составляющих коллекторного тока, связанных с подаваемым на базу полезным сигналом:

$$\begin{aligned} \Delta i_k &= S(t) U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) = \\ &= S_0 U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) + S_1 U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) \cos(\omega_r t + \varphi_r) + \\ &+ S_2 U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) \cos(2\omega_r t + 2\varphi_r) + \dots = \\ &= S_0 U_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) + \frac{S_1 U_{cm}}{2} \cos[(\omega_r + \omega_c)t + \varphi_r + \varphi_c] + \\ &+ \frac{S_1 U_{cm}}{2} \cos[(\omega_r - \omega_c)t + \varphi_r - \varphi_c] + \frac{S_2 U_{cm}}{2} \cos[(2\omega_r + \omega_c)t + 2\varphi_r + \varphi_c] + \\ &+ \frac{S_2 U_{cm}}{2} \cos[(2\omega_r - \omega_c)t + 2\varphi_r - \varphi_c] + \dots \end{aligned}$$

Среди этих составляющих основной интерес представляет *составляющая с промежуточной частотой* $\omega_{п} = \omega_r - \omega_c$:

$$\Delta i_{кп} = \frac{S_1 U_{cm}}{2} \cos[(\omega_r - \omega_c)t + \varphi_r - \varphi_c], \quad (4.82)$$

которая далее будет выделена контуром в коллекторной цепи преобразователя частоты и системой контуров в УПЧ.

Амплитуда составляющей тока с промежуточной частотой определяется выражением:

$$I_{кп} = S_{п} U_{cm}, \quad \text{где } S_{п} = \frac{S_1}{2} - \text{крутизна преобразования}, \quad (4.83)$$

а амплитуда напряжения на выходе преобразователя частоты:

$$U_{вых} = S_{п} R_p U_{cm}, \quad (4.84)$$

где R_p – резонансное сопротивление контура в коллекторной цепи.

Коэффициент передачи преобразователя частоты пропорционален первой гармонике крутизны, которая, в свою очередь, растет при увеличении амплитуды напряжения гетеродина. Однако, чем больше амплитуда напряжения гетеродина, тем больше уровень высших гармоник крутизны S_2, S_3, \dots , что приводит к появлению сложных паразитных каналов приема на частотах $2\omega_r \pm \omega_{п}, 3\omega_r \pm \omega_{п}, \dots$ Поэтому предпочтительнее работать при средних, около 1 В, амплитудах напряжения гетеродина.

В качестве нелинейного элемента в преобразователях частоты кроме транзисторов могут использоваться электронные лампы или (в СВЧ-диапазоне, где транзисторы работают плохо) специальные СВЧ-диоды.

4.8. Синхронное детектирование

Синхронный детектор – это преобразователь частоты, у которого частота гетеродина равна частоте сигнала. Если на вход синхронного детектора подается сигнал $u_c(t) = U_{cm}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c(t))$, то на выходе (например, в коллекторной цепи транзистора) появляется низкочастотная составляющая

$$\Delta i_0 = \frac{S_1 U_{cm}(t)}{2} \cos[(\omega_r - \omega_c)t + \varphi_r - \varphi_c] = \frac{1}{2} S_1 U_{cm}(t) \cos(\varphi_r - \varphi_c), \quad (4.85)$$

которая может быть выделена с помощью RC -фильтра. В отличие от других видов детекторов сигнал на выходе синхронного детектора пропорционален амплитуде входного сигнала при любых, даже самых слабых уровнях сигнала, то есть **квадратичный режим детектирования при слабых сигналах не наступает**.

Вторая особенность (и достоинство) синхронного детектора – **высокая помехоустойчивость**. Если на вход синхронного детектора поступает помеха, частота которой немного отличается от частоты сигнала, то на выходе появляется составляющая

$$\Delta i_{\text{пом}} = \frac{1}{2} S_1 U_{\text{пом}} \cos[(\omega_r - \omega_{\text{пом}})t + \varphi_r - \varphi_{\text{пом}}], \quad (4.86)$$

которая может быть отфильтрована (т.е. не пропущена) с помощью частотного фильтра. Отметим, для сравнения, что при обычном (диодном или коллекторном) детектировании отфильтровать сигнал от помехи после детектирования практически невозможно.

Недостатком синхронного детектора является необходимость получения частоты гетеродина, в точности совпадающей с частотой сигнала. Поэтому синхронное детектирование применяется преимущественно в тех случаях, когда частота сигнала известна точно, и она может быть использована для синхронизации напряжения гетеродина.

Схема, состоящая из транзистора и RC -фильтра в коллекторной цепи, может работать как синхронный детектор, однако, она практически не используется из-за низкой помехоустойчивости. Если на вход такого детектора поступит помеха, то он будет работать для нее как коллекторный детектор; помеховый и полезный сигнал перемешаются и их невозможно будет разделить. Поэтому для синхронного детектирования применяются

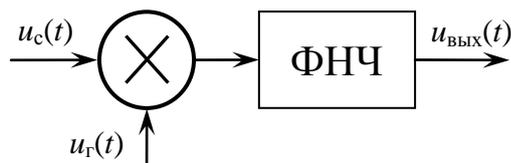


Рис. 4.36. Структурная схема синхронного детектора.

более сложные схемы, например схема, состоящая из перемножителя и фильтра нижних частот (рис. 4.36). На один вход перемножителя подается напряжение сигнала $u_c(t) = U_{cm}(t) \cos(\omega_c t + \varphi_c(t))$, на другой вход – напряжение гетеродина $u_r(t) = U_{rm} \cos(\omega_r t + \varphi_r)$, причем $\omega_r = \omega_c$. После перемножения получается сигнал $U_{cm} U_{rm} \cos(\omega_c t + \varphi_c) \cos(\omega_r t + \varphi_r) = \frac{1}{2} U_{cm} U_{rm} \cos[(\omega_r + \omega_c)t + \varphi_r + \varphi_c] + \frac{1}{2} U_{cm} U_{rm} \cos[(\omega_c - \omega_r)t + \varphi_c - \varphi_r]$. ФНЧ

пропускает вторую (низкочастотную) составляющую, в результате получается сигнал на выходе устройства:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2} U_{cm}(t) U_{gm} \cos[\varphi_c - \varphi_r]. \quad (4.87)$$

На практике проблема синхронного детектирования решается с помощью специализированных микросхем, разработанных специально для синхронного детектирования.

Контрольные вопросы

1. При каком условии нелинейное преобразование сигнала можно считать безынерционным?
2. Какие виды аппроксимации ВАХ нелинейного элемента Вы знаете?
3. Как рассчитать амплитуды гармоник тока, протекающего через нелинейный элемент, при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ? Что такое угол отсечки?
4. ВАХ нелинейного элемента аппроксимирована кусочно-линейной функцией. При каком напряжении смещения амплитуда третьей гармоники равна нулю?
5. При каком угле отсечки амплитуда второй гармоники максимальна при заданной амплитуде сигнала на входе?
6. Как рассчитать амплитуды гармоник тока, протекающего через нелинейный элемент, при аппроксимации ВАХ степенным рядом?
7. Изобразите схему резонансного усилителя и объясните назначение элементов схемы.
8. Почему при усилении гармонического сигнала большой амплитуды форма сигнала на выходе получается неискаженной, несмотря на то, что транзистор работает в нелинейном режиме?
9. Что такое колебательная характеристика? Запишите уравнение колебательной характеристики при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ транзистора.
10. Объясните, почему коэффициент усиления нелинейного резонансного усилителя зависит от напряжения смещения на входе.
11. Что такое перенапряженный режим? Как он возникает и к каким последствиям приводит?
12. Как выбрать режим работы нелинейного резонансного усилителя для неискаженного усиления АМ сигналов?
13. Какой характер имеют искажения усиленного АМ сигнала при неправильном выборе напряжения смещения?
14. Объясните, почему в мощных резонансных усилителях в качестве нагрузки в коллекторной цепи используются колебательные контуры с небольшим резонансным сопротивлением?
15. Какие причины, кроме экономии электроэнергии, заставляют добиваться высокого КПД в мощных резонансных усилителях?
16. Объясните принцип работы умножителя частоты.
17. Как рассчитать коэффициент передачи умножителя частоты?

18. Как выбрать напряжение смещения для получения максимального коэффициента передачи удвоителя (утроителя) частоты?
19. Возможен ли в умножителе частоты перенапряженный режим?
20. Что такое порядок комбинационной частоты?
21. Какие комбинационные частоты появятся при воздействии суммы двух гармонических сигналов на нелинейный элемент с квадратичной аппроксимацией ВАХ?
22. Изобразите схему для получения АМ сигналов и объясните, как она работает.
23. Как выбрать режим работы, обеспечивающий неискаженную амплитудную модуляцию?
24. Что такое модуляционная характеристика? Изобразите характерный вид модуляционной характеристики.
25. Запишите уравнение модуляционной характеристики при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ транзистора.
26. Как рассчитать коэффициент модуляции на выходе модулирующего каскада при заданных параметрах транзистора и амплитудах низкочастотного и высокочастотного сигналов на входе каскада?
27. Как влияет на работу модулирующего каскада колебательный контур в коллекторной цепи? Какие требования предъявляются к добротности этого контура?
28. Изобразите спектральные диаграммы входного напряжения, коллекторного тока и напряжения на выходе модулирующего каскада.
29. Изобразите схему коллекторного детектора и объясните, как он работает.
30. Из каких соображений выбираются сопротивление и емкость нагрузки в коллекторной цепи детектора?
31. Почему детектирование слабых сигналов происходит в квадратичном режиме?
32. Каковы основные недостатки квадратичного режима детектирования?
33. Объясните принцип работы диодного детектора.
34. Чему равен коэффициент передачи диодного детектора? Как он зависит от сопротивления нагрузки?
35. Из каких соображений выбираются сопротивление и емкость нагрузки в диодном детекторе?
36. Какова природа искажений в диодном детекторе при чрезмерно большой емкости нагрузки?
37. Чему равно входное сопротивление диодного детектора?
38. Для чего применяют преобразование частоты?
39. Изобразите структурную схему супергетеродинного приемника.
40. Что такое паразитные каналы приема и как с ними бороться?

Часть 2

1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

1.1. Общее понятие о цифровой обработке сигналов

Любая система цифровой обработки сигналов независимо от ее сложности содержит цифровое вычислительное устройство – универсальную цифровую вычислительную машину, микропроцессор или специально разработанное для решения конкретной задачи вычислительное устройство. Сигнал, поступающий на вход вычислительного устройства, должен быть преобразован к виду, пригодному для обработки на ЭВМ. Он должен иметь вид последовательности чисел, представленных в коде машины.

В некоторых случаях задача представления входного сигнала в цифровой форме решается сравнительно просто. Например, если нужно передать словесный текст, то каждому символу (букве) этого текста нужно поставить в соответствие некоторое число и, таким образом, представить передаваемый сигнал в виде числовой последовательности. Легкость решения задачи в этом случае объясняется тем, что словесный текст по своей природе дискретен.

Однако большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело в радиотехнике, являются непрерывными¹. Это связано с тем, что сигнал является отображением некоторого физического процесса, а почти все физические процессы непрерывны по своей природе.

Рассмотрим процесс дискретизации непрерывного сигнала на конкретном примере. Допустим, на борту некоторого космического аппарата производится измерение температуры воздуха; результаты измерения должны передаваться на Землю в центр обработки данных. Температура воздуха измеряется непрерывно;

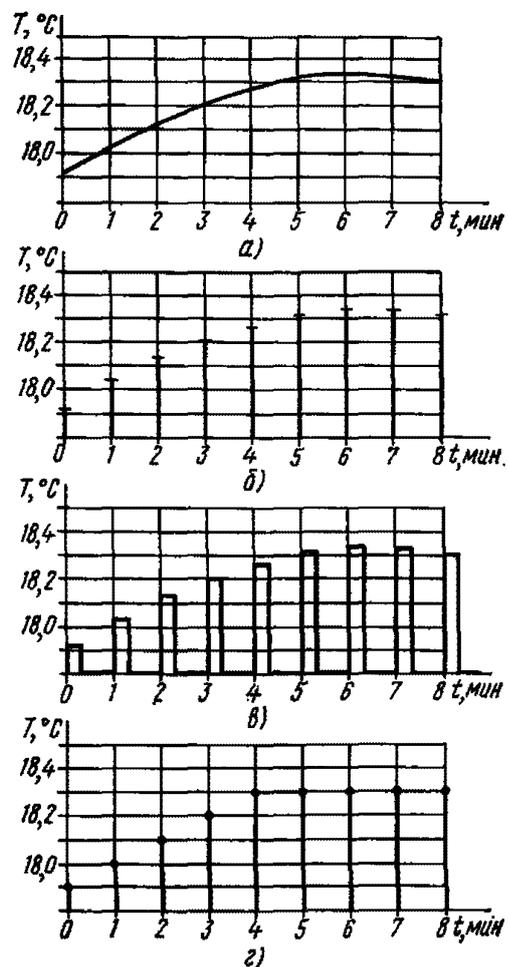


Рис. 1.1. Виды сигналов:
а – непрерывный (континуальный) сигнал;
б – дискретный сигнал;
в – АИМ-колебание;
г – цифровой сигнал

¹ Термин «непрерывный сигнал» не вполне корректен, так как могут существовать сигналы, описываемые разрывной функцией времени (например, прямоугольный импульс). Чтобы избежать недоразумений, иногда для обозначения таких сигналов употребляют термин «континуальный». Континуальные сигналы называют также аналоговыми, так как они являются аналогами некоторых физических процессов.

показания датчика температуры также являются непрерывной функцией времени $f(t)$ (рис. 1.1, а). Но температура изменяется медленно, достаточно передавать ее значения один раз в минуту. Кроме того, нет необходимости измерять ее с точностью выше, чем 0,1 градуса. Таким образом, вместо непрерывной функции $f(t)$ можно с интервалом в 1 минуту передавать последовательность числовых значений (рис. 1.1, з), а в промежутках между этими значениями можно передавать сведения о давлении, влажности воздуха и другую научную информацию.

Рассмотренный пример показывает, что процесс дискретизации непрерывных сигналов состоит из двух этапов: **дискретизации по времени** и **дискретизации по уровню (квантования)**. Сигнал, дискретизированный только по времени, называют **дискретным**; он еще не пригоден для обработки в цифровом устройстве. Дискретный сигнал представляет собой последовательность, элементы которой $f(kT)$ в точности равны соответствующим значениям исходного непрерывного сигнала $f(t)$ (рис. 1.1, б). Примером дискретного сигнала может быть последовательность импульсов с изменяющейся амплитудой – амплитудно-импульсно-модулированное колебание (рис. 1.1, в). Аналитически такой дискретный сигнал описывается выражением

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) F(t - kT) \quad (1.1)$$

где $f(t)$ – исходный непрерывный сигнал; $F(t)$ – единичный импульс АИМ-колебания.

Если уменьшать длительность импульса $F(t)$, сохраняя его площадь неизменной, то в пределе функция $F(t)$ стремится к δ -функции. Тогда **выражение для дискретного сигнала можно представить в виде:**

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT) \quad (1.2)$$

Для преобразования аналогового сигнала в цифровой после дискретизации по времени должна следовать **дискретизация по уровню (квантование)**. Необходимость квантования вызвана тем, что любое вычислительное устройство может оперировать только числами, имеющими конечное число разрядов. Таким образом, **квантование** представляет собой округление передаваемых значений с заданной точностью. Так в рассмотренном примере производится округление значений температуры до трех значащих цифр (рис. 1.1, з). В других случаях число разрядов передаваемых значений сигнала может быть иным. **Сигнал, дискретизированный и по времени, и по уровню, называется цифровым.**

Правильный выбор интервалов дискретизации по времени и по уровню очень важен при разработке цифровых систем обработки сигналов. Чем меньше интервал дискретизации, тем точнее дискретизированный сигнал соответствует исходному непрерывному. Однако при уменьшении интервала дискретизации по времени возрастает число отсчетов, и для сохранения общего времени обработки сигнала неизменным приходится увеличивать скорость обработки, что не всегда возможно. При уменьшении интервала квантования требуется больше разрядов для описания сигнала, вследствие чего цифровой фильтр становится более сложным и громоздким.

Рассмотрим, из каких элементов должно состоять устройство цифровой обработки сигналов. Разумеется, универсальную структурную схему изобразить невозможно, так как существует очень много разнообразных цифровых систем различного назначения. Однако все они содержат некоторые специфические общие элементы.

Система цифровой обработки сигнала должна содержать устройство для преобразования аналогового сигнала в цифровой (рис. 1.2). Обычно такое устройство состоит из двух частей: *дискретизатора* непрерывного сигнала по времени и *аналого-цифрового преобразователя* (АЦП), превращающего выборочные значения сигнала в числовую последовательность, элементы которой – это числа, представленные в коде вычислительной машины. Цифровой сигнал, получающийся на выходе АЦП, уже готов для цифровой обработки.

Далее следует *электронное вычислительное устройство*, в котором происходит обработка цифрового сигнала по заданному алгоритму. Алгоритмы обработки сигналов могут быть очень разнообразными как по характеру, так и по степени сложности. *Цифровые устройства, производящие линейную обработку сигнала*, называют цифровыми фильтрами.

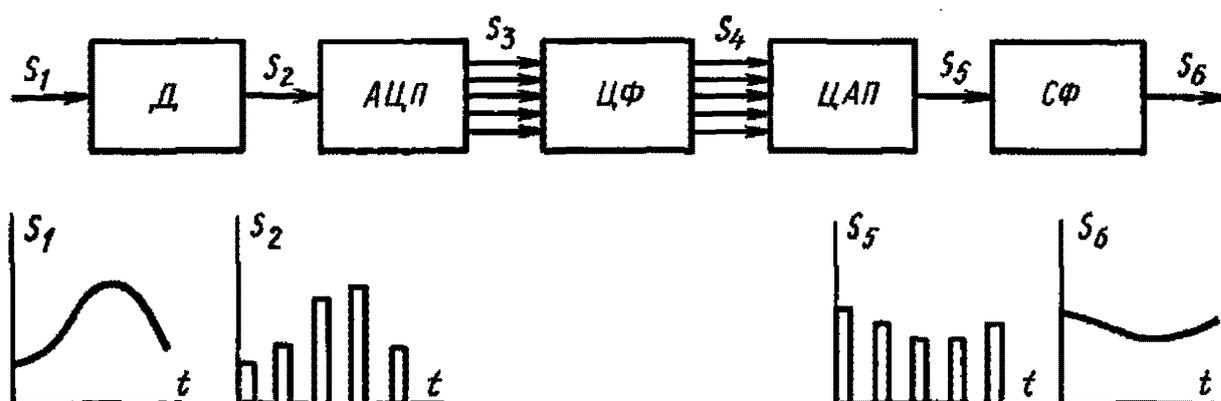


Рис. 1.2. Структурная схема системы цифровой обработки непрерывных сигналов и временные диаграммы:

Д – дискретизатор; АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ЦФ – цифровой фильтр; ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь; СФ – сглаживающий фильтр

Методы анализа цифровых фильтров во многом родственны методам анализа обычных аналоговых фильтров. Каждый цифровой фильтр эквивалентен некоторому аналоговому устройству, называемому **фильтром-прототипом**. Многие характеристики цифровых фильтров аналогичны соответствующим характеристикам фильтров-прототипов.

Сигнал на выходе цифрового фильтра имеет вид последовательности чисел, представленных в коде машины. Дальнейшая обработка этого сигнала может быть различной в зависимости от назначения устройства. Например, выходной сигнал непосредственно в цифровой форме без преобразования можно использовать для управления некоторыми процессами или можно вывести на дисплей для считывания информации. Для преобразования цифрового сигнала в аналоговый (рис. 1.2) используют восстанавливающее устройство, состоящее из **цифро-аналогового преобразователя** (ЦАП) и **выходного сглаживающего фильтра**. ЦАП преобразует цифровой сигнал в импульсы напряжения, которые подаются на сглаживающий фильтр, и на выходе этого фильтра получается непрерывный сигнал. Процесс преобразования сигнала в устройстве цифровой обработки проиллюстрирован временными диаграммами на рис. 1.2.

Наряду с цифровыми фильтрами существуют устройства, которые могут производить обработку неквантованных дискретных сигналов по алгоритмам, аналогичным алгоритмам цифровой фильтрации. Такие устройства называют **дискретными фильтрами**. К дискретным устройствам относятся, например, приборы с зарядовой связью.

Интенсивное развитие цифровой техники не означает, что должны быть полностью отброшены и забыты аналоговые устройства для обработки сигналов. Каждому из типов фильтров, каждому методу обработки сигналов присущи свои преимущества и недостатки и в зависимости от конкретных условий следует применять тот или иной тип фильтра.

Основным преимуществом цифровых фильтров перед аналоговыми является **возможность реализации сложных алгоритмов** обработки сигналов, которые неосуществимы с помощью аналоговой техники, например адаптивных алгоритмов, изменяющихся при изменении параметров входного сигнала.

Точность обработки сигнала цифровыми фильтрами определяется точностью выполняемых расчетов. Она может быть несоизмеримо выше точности обработки сигнала в аналоговых фильтрах.

Одним из источников погрешности аналоговых фильтров является **нестабильность их параметров**, вызываемая колебаниями температуры, старением, дрейфом нуля, изменением питающих напряжений и т. д. В цифровых фильтрах эти неприятные эффекты **отсутствуют**.

При разработке цифровых фильтров **не возникает проблема согласования нагрузок**.

При обработке низкочастотных и инфранизкочастотных сигналов элементы пассивных аналоговых фильтров (индуктивные катушки и конденсаторы) оказываются очень громоздкими. В этом случае *цифровые фильтры более компактны.*

Недостатком цифровых фильтров является их большая сложность по сравнению с аналоговыми и более высокая стоимость. Ведь кроме процессора устройство для цифровой обработки сигналов содержит аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи и другие устройства сопряжения. Поэтому в тех случаях, когда алгоритм обработки сигналов несложен и не требуется высокой точности, целесообразнее применять более простые аналоговые фильтры.

Другим существенным недостатком цифровых фильтров является их сравнительно невысокое быстродействие. Чтобы произвести обработку каждого значения поступающего сигнала, требуется проделать значительное число арифметических операций. Вследствие этого наивысшие частоты спектра сигналов, обрабатываемых цифровыми фильтрами, пока что не превышают нескольких десятков мегагерц. Для обработки более высокочастотных сигналов применяют аналоговые фильтры на пассивных элементах и фильтры на поверхностных акустических волнах.

В цифровых фильтрах появляются специфические погрешности, вызванные дискретизацией, квантованием сигнала и округлением значений обрабатываемого сигнала в процессе вычислений. Чтобы сделать эти погрешности достаточно малыми, требуется внимательное их изучение.

1.2. Z-преобразование и его свойства

1.2.1. Z-преобразование

Основным математическим аппаратом, который используется для описания линейных цифровых фильтров, является *z-преобразование.*

Z-преобразование – это модификация преобразования Лапласа для дискретных сигналов.

Запишем преобразование Лапласа для непрерывных сигналов

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (1.3)$$

Это соотношение справедливо для сигналов, тождественно равных нулю при $t < 0$. Поскольку все реально существующие сигналы имеют начало, преобразование Лапласа можно применять практически для всех сигналов.

Применим преобразование Лапласа к дискретному сигналу, записанному в виде последовательности δ -функций:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT);$$

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-pkT}.$$
(1.4)

Выражение (1.4) представляет собой *дискретное преобразование Лапласа*.

Формула дискретного преобразования Лапласа может быть несколько упрощена, если положить $e^{pT} = z$. В результате такой замены приходим к **z-преобразованию**, которое обычно применяют при анализе дискретных сигналов

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}.$$
(1.5)

Функция $F(z)$ является *аналитической функцией комплексного переменного z*. Z-преобразование можно применить и к абстрактным числовым последовательностям.

В качестве примеров рассмотрим z-преобразования простейших сигналов. При этом всюду будем полагать, что сигнал $f(nT)$ тождественно равен нулю при $n < 0$.

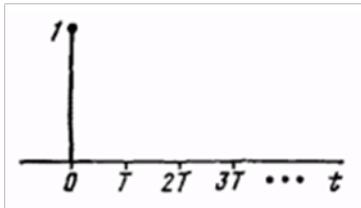


Рис. 1.3. Дискретизированный единичный импульс

1. **Дискретизированный единичный импульс** (рис. 1.3):

$$f(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Z-преобразование единичного импульса равно:

$$F(z) = 1.$$

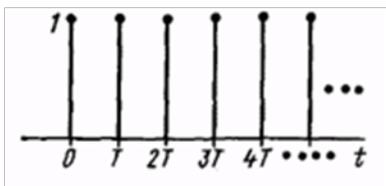


Рис. 1.4. Дискретизированный единичный скачок

2. **Дискретизированный единичный скачок** (рис. 1.4):

$$f(nT) = 1.$$

Z-преобразование единичного скачка равно:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

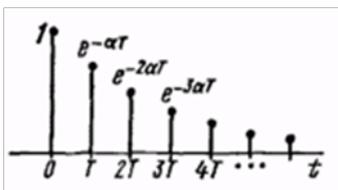


Рис. 1.5. Экспоненциально убывающий дискретный сигнал

3. **Экспоненциально убывающий дискретный сигнал** (рис. 1.5):

$$f(nT) = e^{-anT}.$$

Z-преобразование этого сигнала равно:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}.$$

4. Степенная функция.

$$f(nT) = K^n$$

Z-преобразование этого сигнала равно:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n z^{-n} = \frac{1}{1 - Kz^{-1}} = \frac{z}{z - K}.$$

Поскольку z-преобразование – это степенной ряд переменной z^{-1} , то важно рассмотреть вопрос о его сходимости.

Ряд (1.5), определяющий z-преобразование, сходится для $|z| > R$, где R – радиус сходимости, зависящий от вида функции $f(nT)$. Наиболее просто радиус сходимости определяется для последовательности $f(nT) = K^n$. В этом случае

$F(z) = \frac{z}{z - K}$. Эта функция имеет полюс при $z = K$. Вне окружности $|z| = K$ функция $F(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z , и описывающий ее ряд (1.5) сходится. Следовательно, для $f(nT) = K^n$ радиус сходимости $R = K$.

Обратное z-преобразование

Обратное z-преобразование позволяет определить значения дискретного сигнала по виду функции $F(z)$. Для нахождения формулы обратного z-преобразования можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа, но легче получить ее из формулы прямого z-преобразования.

Запишем еще раз прямое z-преобразование:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}.$$

Умножим обе части этого выражения на z^{k-1} , проинтегрируем по окружности с радиусом, превышающим радиус сходимости R ряда для $F(z)$, и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\oint F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \oint z^{k-n-1} dz. \quad (1.6)$$

Интеграл в правой части выражения (1.6) равен:

$$\oint z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ 2j\pi & \text{при } k = n \end{cases}.$$

Такой результат объясняется тем, что значение интеграла по замкнутому контуру в комплексной плоскости равно произведению $2\pi j$ на сумму вычетов подынтегральной функции; единственный вычет при $z = 0$ получается только при $k = n$, когда $z^{k-n-1} = 1/z$.

Следовательно

$$f(kT) = \frac{1}{2j\pi} \oint F(z) z^{k-1} dz. \quad (1.7)$$

Получившееся выражение представляет собой формулу **обратного z-преобразования**, но надо только уточнить форму контура интегрирования. Для этого положим $f(nT) = K^n$. Тогда $F(z) = z/(z - K)$. Применим обратное z-преобразование к этой формуле:

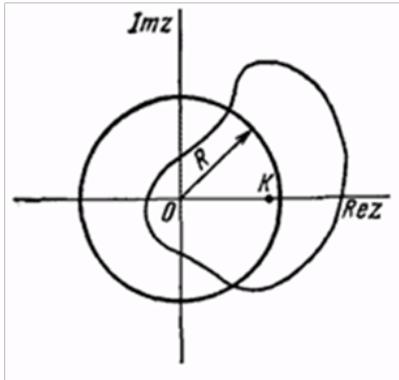


Рис. 1.6. Возможные контуры интегрирования при вычислении обратного z-преобразования.

$$f(nT) = \frac{1}{2j\pi} \oint \frac{z^n dz}{z - K}.$$

Подынтегральная функция имеет единственный полюс при $z = K$. Интегрировать можно вдоль любого контура, охватывающего точку $z = K$ (рис. 1.6), но удобнее вдоль окружности радиуса $R > K$.

Для сигналов, абсолютное значение которых убывает во времени, $K < 1$, потому в качестве контура интегрирования можно использовать окружность радиуса $R = 1$.

1.2.2. Основные свойства z-преобразования

Для z-преобразования справедливы некоторые теоремы, аналогичные теоремам о спектрах непрерывных сигналов. Главная из них – теорема о свертке.

Теорема о свертке

В теории непрерывных сигналов свертка сигналов $x(t)$ и $y(t)$ задается выражением:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

Для дискретных сигналов $x_k = x(kT)$ и $y_k = y(kT)$ по аналогии с непрерывными сигналами вводится дискретная свертка, которая определяется выражением

$$f(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT) y(kT) \quad (1.8)$$

или

$$f_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^n x_{n-k} y_k \quad (1.9)$$

Запишем для дискретных сигналов x_k , y_k и f_n их z -преобразования:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}; \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}; \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Применим z -преобразование к формуле свертки (1.9):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{n-k} z^{-n}.$$

Преобразуем правую часть этого выражения так, чтобы получить произведение z -преобразований. Для этого нужно, в частности, чтобы x_k умножалось на z^{-k} , а y_{n-k} на $z^{-(n-k)}$. Сгруппируем соответствующим образом степени z :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{n-k} z^{-k} z^{-(n-k)}.$$

При $k > n$ $y_{n-k} = 0$, поэтому можно во второй сумме верхний предел суммирования сделать равным ∞ . Далее обозначим $n - k = m$ и получим:

$$F(z) = \sum_{m=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m}.$$

Нижний предел $m = -k$ можно заменить на $m = 0$, так как при $m < 0$ все $y_m = 0$. В результате получим:

$$F(z) = \sum_{m=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_m z^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m},$$

т.е.
$$F(z) = X(z)Y(z) \tag{1.10}$$

Теорема о запаздывании

Сдвинем дискретный сигнал $x(nT)$ по времени на величину периода повторения T . Получившийся новый сигнал $y(nT)$ связан с $x(nT)$ простым соотношением:

$$y(nT) = x(nT - T).$$

Пусть известно z -преобразование сигнала $x(nT)$: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$.

Найдем z -преобразование сигнала $y(nT)$:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT - T) z^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} y(mT) z^{-(m+1)} = z^{-1} X(z).$$

Таким образом, *запаздывание дискретного сигнала на один элемент соответствует умножению z -преобразования на z^{-1} .*

Теорема Парсеваля для дискретных сигналов

Пусть дискретный сигнал $f(kT)$ представляет собой убывающую последовательность, так что все полюсы его z -преобразования $F(z)$ находятся внутри единичной окружности в плоскости z . Для вывода теоремы Парсеваля умножим $F(z)$ на $F(1/z)$ и найдем величину этого произведения:

$$F(z)F\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^n \sum_{n=0}^n f(kT)f(nT)z^{-k+n} \quad (1.11)$$

Умножим обе части равенства (1.11) на $z^{-1}/(2\pi j)$ и проинтегрируем по замкнутому контуру L , который должен располагаться в области сходимости как $F(z)$, так и $F(1/z)$. Поскольку последовательность $f(kT)$ является убывающей, в качестве контура интегрирования L можно принять окружность $|z| = 1$. При интегрировании двойной суммы в правой части равенства (1.11) все члены окажутся равными нулю, кроме членов, соответствующих $k = n$. В результате получим выражение, которое называют **теоремой Парсеваля для дискретных сигналов**:

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_L F(z)F\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT). \quad (1.12)$$

1.3. Цифровые фильтры и их характеристики

1.3.1. Универсальный алгоритм линейной цифровой фильтрации

В рамках данного курса мы будем рассматривать только линейные цифровые фильтры с постоянными параметрами. Рассмотрим, как работают такие фильтры.

На вход цифрового фильтра подается входной сигнал $x(kT)$ в виде последовательности числовых значений, следующих с интервалом T (рис. 1.7, а). При поступлении каждого очередного значения сигнала $x(kT)$ в цифровом фильтре производится расчет очередного значения выходного сигнала $y(kT)$. Алгоритмы расчета могут быть самыми разнообразными; в процессе расчета, кроме последнего значения входного сигнала $x(kT)$ могут использоваться предыдущие значения входного и выходного сигналов: $x(kT - T)$, $x(kT - 2T)$, ..., $y(kT - T)$, $y(kT - 2T)$, Сигнал на выходе цифрового фильтра $y(kT)$ (рис. 1.7, б) также представляет собой последовательность числовых значений, следующих с интервалом T . Этот интервал является единым для всего устройства цифровой обработки сигналов.

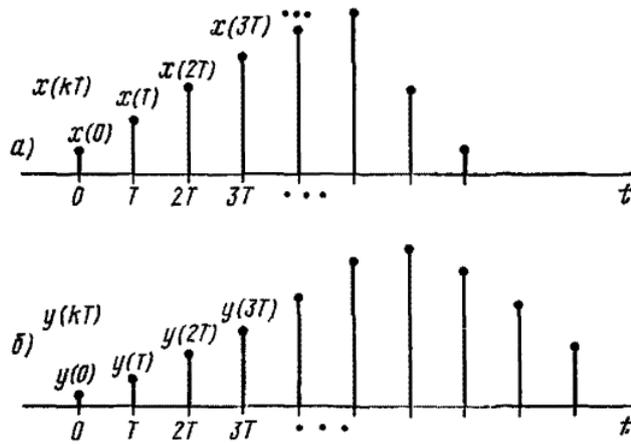


Рис. 1.7. Сигнал на входе (а) и на выходе (б) цифрового фильтра.

В линейных цифровых фильтрах при обработке сигналов допускаются только линейные операции: умножение значений сигнала на постоянные коэффициенты и сложение (вычитание) значений сигнала. С учетом этих ограничений **универсальный алгоритм линейной цифровой обработки сигналов** выглядит следующим образом:

$$y(nT) = a_0x(nT) + a_1x(nT - T) + a_2x(nT - 2T) + \dots + a_Nx(nT - NT) + b_1y(nT - T) + b_2y(nT - 2T) + \dots + b_My(nT - MT). \quad (1.13)$$

Все типы линейных фильтров: фильтры нижних частот, фильтры верхних частот, полосовые и любые другие линейные фильтры отличаются друг от друга только коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N; b_1, b_2, \dots, b_M$.

1.3.2. Характеристики цифровых фильтров

Если на вход цифрового фильтра подать простейший сигнал в виде единичного импульса (рис. 1.8, а)

$$x_0(kT) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

то на выходе получим сигнал в виде дискретной последовательности числовых значений, следующих с интервалом T . По аналогии с обычными аналоговыми цепями назовем этот ответный сигнал **импульсной характеристикой фильтра** $h(kT)$ (рис. 1.8, б). В отличие от импульсной характеристики аналоговой цепи функция $h(kT)$ является безразмерной.

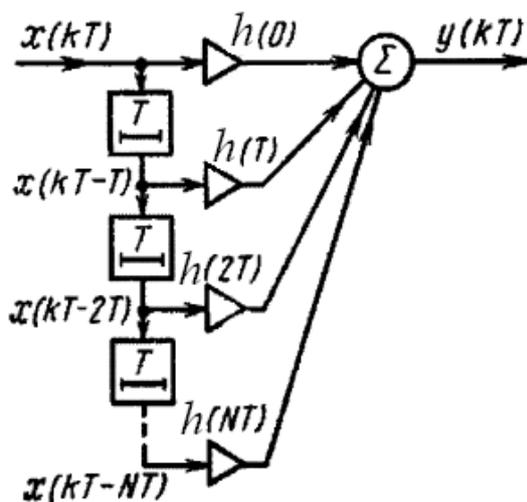


Рис. 1.9. Схема нерекурсивного цифрового фильтра.

Схема, изображенная на рис. 1.9, не является электрической схемой цифрового фильтра; эта схема представляет собой графическое изображение алгоритма цифровой фильтрации и показывает последовательность арифметических операций, выполняемых при обработке сигнала.

Для цифровых фильтров, обрабатывающих сигналы в виде абстрактных числовых последовательностей, понятие «задержка на время T » является не совсем корректным. Поэтому элементы, задерживающие сигнал на одну ячейку, на схемах цифровых фильтров обычно отмечают символом z^{-1} , обозначающим задержку сигнала на языке z -преобразований. В дальнейшем будем придерживаться этого обозначения.

Вернемся к схеме цифрового фильтра, изображенной на рис. 1.9. Такие фильтры, где для расчета используются лишь значения входного сигнала, называют **нерекурсивными** или **трансверсальными**.

Алгоритм нерекурсивного фильтра легко записать, если известна импульсная характеристика фильтра. Для практической реализации алгоритма необходимо, чтобы импульсная характеристика содержала конечное число членов. Если импульсная характеристика содержит бесконечное число членов, но они быстро убывают по величине, то можно ограничиться конечным числом членов, отбросив те, значения которых малы. В случае, если элементы импульсной характеристики не убывают по величине, алгоритм нерекурсивного фильтра оказывается нереализуемым.

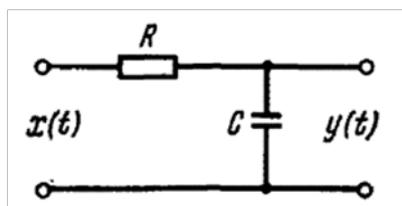


Рис. 1.10. RC-цепь.

В качестве примера рассмотрим **простейший цифровой фильтр, аналогичный RC-цепи** (рис. 1.10). Импульсная характеристика RC- цепи имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (1.15)$$

Чтобы записать импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра, в выражении (1.15) t следует заменить на kT . Однако импульсная характеристика RC -цепи имеет размерность $1/c$, а импульсная характеристика цифрового фильтра должна быть безразмерной. Поэтому опустим множитель $1/T$ в выражении (1.15) и запишем импульсную характеристику цифрового фильтра в виде

$$h(kT) = e^{-kT/\tau} \quad (1.16)$$

Такая импульсная характеристика содержит бесконечно много членов, но их величина убывает по экспоненциальному закону, и можно ограничиться N членами, выбирая N таким, чтобы $e^{-NT/\tau} \ll 1$.

Теперь можно записать выражение для сигнала на выходе фильтра

$$y(nT) = x(nT) + e^{-T/\tau}x(nT - T) + e^{-2T/\tau}x(nT - 2T) + \dots \\ \dots + e^{-NT/\tau}x(nT - NT). \quad (1.17)$$

Это выражение является одновременно алгоритмом цифрового фильтра. Схема этого фильтра представлена на рис. 1.11.

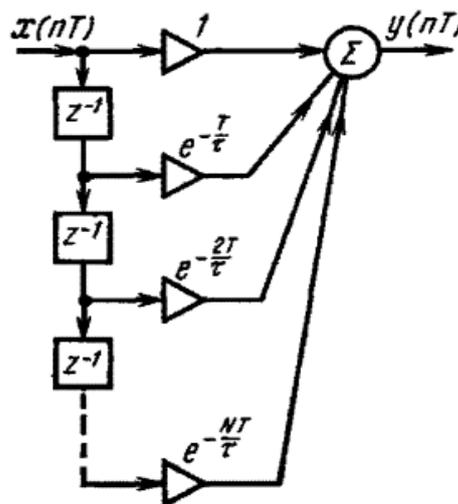


Рис. 1.11. Схема некурсивного цифрового фильтра, аналогичного RC -цепи.

Второй подход к анализу процессов в цифровых фильтрах аналогичен операторному методу анализа обычных аналоговых цепей, только вместо преобразования Лапласа используют z -преобразование.

Определим параметр цифрового фильтра, аналогичный передаточной функции $K(p)$ электрической цепи. Для этого применим z -преобразование к импульсной характеристике $h(kT)$ цифрового фильтра:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k}. \quad (1.18)$$

Функцию $H(z)$ называют **передаточной** или **системной функцией** фильтра.

В соответствии с выражением (1.14) сигнал на выходе цифрового фильтра равен дискретной свертке входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Применяя к этому выражению теорему о z -преобразовании свертки, получим, что z -преобразование выходного сигнала равно z -преобразованию входного сигнала, умноженному на системную функцию фильтра:

$$Y(z) = X(z)H(z). \quad (1.19)$$

Таким образом, *системная функция $H(z)$ играет роль передаточной функции цифрового фильтра.*

В качестве примера найдем системную функцию цифрового фильтра первого порядка, аналогичного RC -цепи:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT/\tau} \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot z^{-1}}. \quad (1.20)$$

Третий метод анализа прохождения сигналов через цифровые фильтры аналогичен классическому методу дифференциальных уравнений. Рассмотрим этот метод на примере цепей 1-го порядка.

Простейшей аналоговой цепью 1-го порядка является RC -цепь (рис. 1.10), прохождение сигналов через которую описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = \frac{1}{\tau}x. \quad (1.21)$$

Для дискретной цепи вместо дифференциального уравнения (1.21) должно быть записано *разностное уравнение*, где входной и выходной сигналы $x(t)$ и $y(t)$ задаются для дискретных моментов времени $t = nT$, а вместо производной dy/dt должна фигурировать разность соседних значений сигнала $y(nT) - y(nT - T)$. Для дискретной цепи 1-го порядка разностное уравнение может быть записано в достаточно общем виде

$$y(nT) - by(nT - T) = ax(nT). \quad (1.22)$$

Применим к уравнению (1.22) z -преобразование:

$$Y(z)(1 - bz^{-1}) = aX(z),$$

откуда найдем системную функцию фильтра

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1 - bz^{-1}}. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) является достаточно общим выражением для системной функции цифрового фильтра 1-го порядка. При $a = 1$ и $b = e^{-T/\tau}$ она совпадает с

полученным ранее выражением (1.20) для системной функции цифрового фильтра, эквивалентного RC -цепи.

Найдем алгоритм цифровой фильтрации, соответствующий системной функции (1.23). Для этого решим уравнение (1.22) относительно $y(nT)$:

$$y(nT) = ax(nT) + by(nT - T). \quad (1.24)$$

Эквивалентная схема этого алгоритма приведена на рис. 1.12. По сравнению с нерекурсивным фильтром (см. рис. 1.11) здесь добавилась своеобразная «цепь обратной связи», которая означает, что значения выходного сигнала используются в последующих расчетах. Фильтры такого типа называют **рекурсивными**.

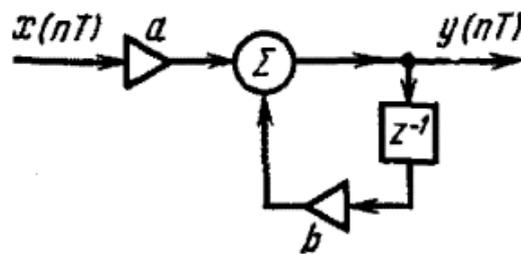


Рис. 1.12. Схема рекурсивного цифрового фильтра, аналогичного RC -цепи

Алгоритм (1.24) соответствует фильтру, который полностью эквивалентен рассмотренному ранее нерекурсивному фильтру. Но для определения одного значения выходного сигнала с помощью алгоритма нерекурсивного фильтра (1.17) требуется выполнить $2N$ операций, а при использовании алгоритма рекурсивного фильтра (1.24) – только две операции. В этом состоит основное преимущество рекурсивных фильтров. Кроме того, рекурсивные фильтры позволяют производить обработку сигнала с более высокой точностью, так как они позволяют более правильно реализовать импульсную характеристику без отбрасывания ее «хвоста». Рекурсивные фильтры позволяют реализовать алгоритмы, вообще нереализуемые с помощью нерекурсивных фильтров. Например, при $a = 1$ и $b = 1$ фильтр, работающий по схеме рис. 1.12, является, по существу, идеальным накопителем-интегратором и имеет импульсную характеристику вида $h(nT) = 1$ ($n \geq 0$). *Фильтр с такой характеристикой по нерекурсивной схеме не может быть реализован.*

Рассмотренные примеры показывают, что нет смысла применять нерекурсивные алгоритмы для создания цифровых фильтров с импульсной характеристикой большой протяженности. В этих случаях целесообразнее использовать рекурсивные фильтры.

Область применения нерекурсивных алгоритмов – это реализация цифровых фильтров с импульсной характеристикой, содержащей сравнительно небольшое число членов. Примером может служить **простейший**

дифференциатор, сигнал на выходе которого равен приращению входного сигнала:

$$y(nT) = x(nT) - x(nT - T)$$

Схема такого цифрового фильтра изображена на рис. 1.13.

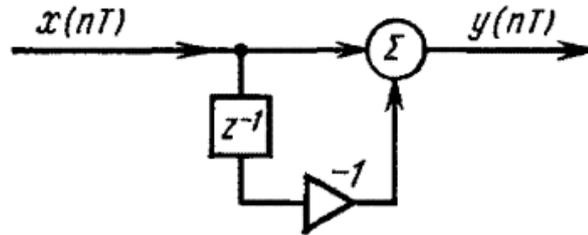


Рис. 1.13. Схема простейшего цифрового дифференциатора.

Рассмотрим теперь цифровой фильтр общего вида, алгоритм которого описывается выражением:

$$y(nT) = a_0x(nT) + a_1x(nT - T) + \dots + a_Mx(nT - MT) - b_1y(nT - T) - b_2y(nT - 2T) - \dots - b_Ny(nT - NT). \quad (1.25)$$

Алгоритму (1.25) соответствует схема, изображенная на рис. 1.14.

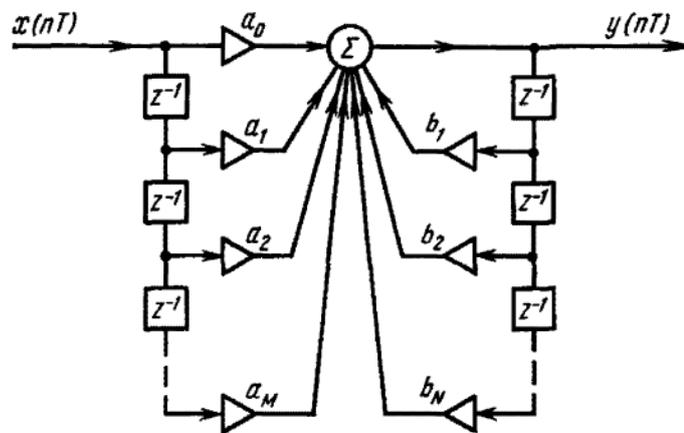


Рис. 1.14. Схема рекурсивного цифрового фильтра N-го порядка.

Найдем системную функцию такого фильтра. Для этого применим к выражению (1.25) z-преобразование:

$$Y(z) = a_0X(z) + a_1X(z)z^{-1} + a_2X(z)z^{-2} + \dots + a_MX(z)z^{-M} + b_1Y(z)z^{-1} + b_2Y(z)z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}Y(z).$$

Откуда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2} - \dots - b_Nz^{-N}}. \quad (1.26)$$

Выражение (1.26) позволяет установить связь между значениями элементов схемы фильтра и системной функцией. Коэффициенты в числителе системной функции a_i определяют значения коэффициентов при $x(nT - kT)$ (в нерекурсивной части фильтра), а коэффициенты в знаменателе b_i определяют рекурсивную часть фильтра.

Системная функция цифрового фильтра (1.26) является аналогом операторного коэффициента передачи аналоговой цепи. Как и передаточная функция, системная функция (1.26) может быть полностью охарактеризована положением своих нулей и полюсов в плоскости комплексного переменного z . Например, системная функция фильтра первого порядка (1.20) имеет единственный полюс при $z = e^{-T/\tau}$.

В общем случае фильтр N -го порядка с системной функцией (1.26) характеризуется N полюсами и M нулями. Рассмотрим **общие закономерности расположения особых точек в комплексной плоскости**.

Известно, что для физической устойчивости аналоговой системы полюсы расположены в левой полуплоскости комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$, т.е. при $\text{Re}(p) < 0$. Чем меньше затухание в системе, тем ближе расположены полюсы к мнимой оси.

По аналогии можно определить расположение полюсов системной функции цифрового фильтра в плоскости комплексного переменного z . Учитывая, что $z = e^{pT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$, можно сделать вывод, что для **устойчивого цифрового фильтра полюсы должны располагаться внутри окружности единичного радиуса**. Чем выше эквивалентная добротность системы, тем ближе должны располагаться полюсы к окружности $|z| = 1$. Системная функция фильтра первого порядка (1.20) (рис. 1.15) имеет единственный полюс при $z = e^{-T/\tau}$. Чем больше постоянная времени фильтра τ , тем медленнее затухает переходный процесс при элементарном воздействии и тем ближе расположен полюс к единичной окружности.

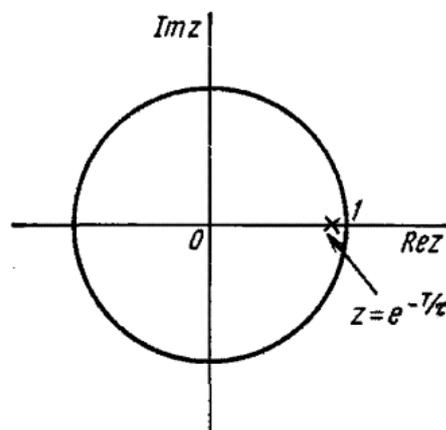


Рис. 1.15. Положение полюса системной функции фильтра 1-го порядка.

Для примера рассмотрим **цифровой фильтр второго порядка, эквивалентный колебательному контуру.**

Импульсная характеристика колебательного контура имеет вид

$$h(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t),$$

где A — размерный множитель.

Заменяя t на kT и опуская множитель A , запишем импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра

$$h(kT) = e^{-\alpha kT} \cos \omega_0 kT = \frac{1}{2} (e^{-\alpha kT + j\omega_0 kT} + e^{-\alpha kT - j\omega_0 kT}).$$

Найдем системную функцию этого фильтра как z -преобразование от импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha T + j\omega_0 T} \cdot z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-\alpha T - j\omega_0 T} \cdot z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T} \cdot z^{-1} + 1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T} \cdot z^{-1}}{2(1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T} \cdot z^{-1} - e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T} \cdot z^{-1} + e^{-2\alpha T} \cdot z^{-2})} = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha T} \cos(\omega_0 T) z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos(\omega_0 T) z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_0 = 1; a_1 = e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T; b_1 = 2e^{-\alpha T} \cos(\omega_0 T); b_2 = -e^{-2\alpha T}$.

Алгоритм данного фильтра запишем в виде

$$y(nT) = x(nT) + a_1 x(nT - T) + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T).$$

Схема, соответствующая этому алгоритму, приведена на рис. 1.16.

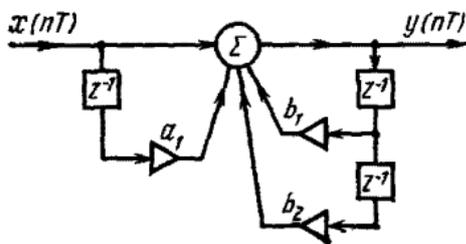


Рис. 1.16. Схема цифрового фильтра 2-го порядка, аналогичного колебательному контуру.

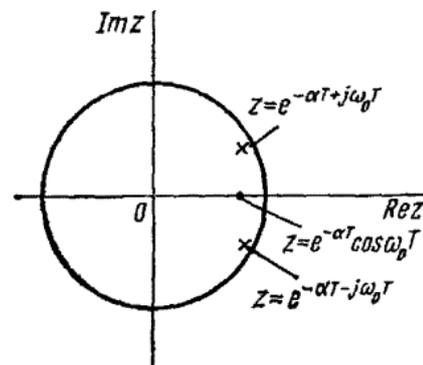


Рис. 1.17. Положение нулей и полюсов системной функции цифрового фильтра 2-го порядка, аналогичного колебательному контуру.

Анализ выражения для системной функции показывает, что она имеет один нуль при $z = e^{-\alpha T} \cos(\omega_0 T)$ и два полюса при: $z = e^{-\alpha T} e^{j\omega_0 T}$ и при $z = e^{-\alpha T} e^{-j\omega_0 T}$. Расположение особых точек на плоскости комплексного переменного z показано на рис. 1.17. Отметим, что с ростом добротности колебательного контура, соответствующего данному цифровому фильтру, величина коэффициента затухания α уменьшается, $e^{-\alpha T}$ стремится к единице и все особые точки приближаются к единичной окружности, что подтверждает сделанный ранее общий вывод.

1.3.3. Частотные характеристики цифровых фильтров

До сих пор мы не рассматривали такую важную характеристику цифрового фильтра, как частотная. В какой-то мере роль частотной характеристики играет системная функция. Однако использовать только системную функцию не всегда удобно, особенно при рассмотрении цифровых систем обработки сигналов, аналогичных фильтрам верхних частот, фильтрам нижних частот, полосовым и режекторным фильтрам. Как известно, для описания аналоговых фильтров часто используют частотную характеристику (частотный коэффициент передачи). Поскольку система цифровой обработки сигналов должна выполнять те же функции, что и аналоговый фильтр, для такой системы в целом и для входящих в нее цифровых фильтров также следует определить частотную характеристику.

Частотная характеристика (частотный коэффициент передачи) аналогового фильтра может быть определена как отношение спектра сигнала на выходе фильтра $\dot{S}_2(\omega)$ при некотором воздействии к спектру входного сигнала $\dot{S}_1(\omega)$:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{S}_2(\omega)}{\dot{S}_1(\omega)}$$

В качестве *входного сигнала* удобно использовать *обобщенный гармонический сигнал* $e^{j\omega t}$, тогда *сигнал на выходе* имеет вид $\dot{K}(\omega)e^{j\omega t}$.

Для определения частотной характеристики цифрового фильтра на его вход (точнее говоря, на вход дискретного фильтра, так как эффекты квантования мы не учитываем) подают дискретизированный сигнал $f(kT) = e^{j\omega kT}$. Тогда сигнал на выходе будет иметь вид $\dot{K}(\omega)e^{j\omega kT}$.

Рассмотрим цифровой фильтр общего вида, алгоритм которого описывается выражением (1.25):

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + \dots + a_M x(nT - MT) - \\ - b_1 y(nT - T) - b_2 y(nT - 2T) - \dots - b_N y(nT - NT).$$

Пусть входной сигнал $x(nT) = e^{j\omega nT}$. Тогда, по определению, сигнал на выходе фильтра $y(nT) = \dot{K}(\omega)e^{j\omega nT}$. Подставляя выражения для $x(nT)$ и $y(nT)$ в уравнение (1.25), получим

$$\dot{K}(\omega)e^{j\omega nT} = e^{j\omega nT}(a_0 + a_1e^{-j\omega T} + \dots + a_Me^{-j\omega MT} + b_1e^{-j\omega T} + \dots + b_Ne^{-j\omega NT}),$$

откуда выражение для **частотной характеристики** фильтра примет вид

$$\dot{K}(\omega) = \frac{a_0 + a_1e^{-j\omega T} + \dots + a_Me^{-j\omega MT}}{1 - b_1e^{-j\omega T} - \dots - b_Ne^{-j\omega NT}}. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) совпадает с выражением (1.26) для системной функции фильтра, если $e^{-j\omega T}$ заменить на z^{-1} . Таким образом, установлена простая **связь между частотной характеристикой фильтра и его системной функцией**:

$$\dot{K}(\omega) = H(e^{j\omega T}). \quad (1.28)$$

Формула (1.28) позволяет записать **связь между частотной характеристикой цифрового фильтра и его импульсной характеристикой**. Заменяя в формуле (1.18) z на $e^{j\omega T}$, получим

$$\dot{K}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) e^{-j\omega kT}. \quad (1.29)$$

Из выражения (1.28) следует свойство периодичности частотной характеристики цифровых фильтров. Для доказательства этого представим комплексную экспоненту в виде:

$$e^{jk\omega T} = \cos(k\omega T) + j\sin(k\omega T). \quad (1.30)$$

Подставляя это выражение в (1.28), получим:

$$\dot{K}(\omega) = H(\cos(k\omega T) + j\sin(k\omega T)). \quad (1.31)$$

Отсюда следует, что функция $\dot{K}(\omega)$ является периодической функцией частоты с периодом $2\pi/T$. Этим свойством частотные характеристики цифровых фильтров принципиально отличаются от частотных характеристик аналоговых фильтров.

Проиллюстрируем свойство периодичности частотной характеристики на примере цифрового фильтра 1-го порядка, эквивалентного RC -цепи, с импульсной характеристикой $h(kT) = e^{-kT/\tau}$. Системная функция такого фильтра определяется выражением

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot z^{-1}}.$$

Заменяя z^{-1} на $e^{-j\omega T}$, получим выражение для частотной характеристики

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot e^{-j\omega T}},$$

откуда найдем *амплитудно-частотную характеристику*

$$|\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2T/\tau} - 2e^{-T/\tau} \cos \omega T}}$$

и *фазо-частотную характеристику* цифрового фильтра

$$\arg \dot{K}(\omega) = \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - e^{-T/\tau}}.$$

На рис. 1.18 приведен график амплитудно-частотной характеристики цифрового фильтра при $T/\tau = 1$ и $T/\tau = 0,1$. Для значений частоты $-\pi/T < \omega < \pi/T$ график частотной характеристики цифрового фильтра почти совпадает с частотной характеристикой RC-цепи, а за пределами этой полосы частот графики амплитудно-частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров принципиально различаются.

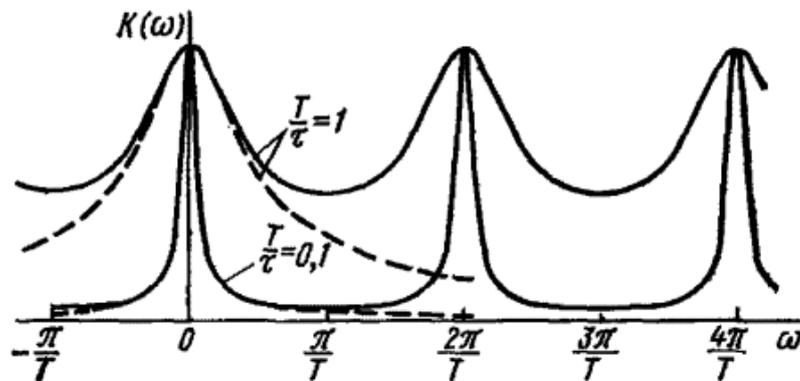


Рис. 1.18. Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра 1-го порядка, эквивалентного RC-цепи.

1.3.4. Сравнение характеристик рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров

Из предыдущего материала может сложиться впечатление, что рекурсивные фильтры во всех отношениях лучше нерекурсивных. Однако, это не так. Рекурсивные фильтры (их еще называют *фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой, или БИХ-фильтрами*) действительно позволяют провести обработку сигналов *при минимальном числе арифметических операций*, и это их

основное преимущество. **Недостатком** БИХ-фильтров является *высокая чувствительность их характеристик к изменению коэффициентов фильтра*, особенно в рекурсивной части: b_1, b_2, \dots, b_N . При изменении этих коэффициентов, вызванных, например, неточностью расчета, происходит смещение полюсов передаточной функции $H(z)$, а если эти полюсы находятся близко к единичной окружности – к заметному изменению характеристик цифрового фильтра. При больших смещениях полюсов рекурсивные фильтры могут оказаться **неустойчивыми**.

В отличие от рекурсивных – **нерекурсивные** фильтры (их еще называют **фильтрами с конечной импульсной характеристикой, или КИХ-фильтрами**) **всегда устойчивы**, их характеристики слабо зависят от коэффициентов фильтра. Кроме того, **нерекурсивные фильтры позволяют реализовать любую импульсную характеристику конечной длины**. В то же время **рекурсивные фильтры позволяют реализовать лишь определенный набор импульсных характеристик**. Например, можно создать рекурсивный фильтр Баттерворта 3-го или 4-го порядка, а промежуточные характеристики реализовать нельзя. Поэтому каждый из видов фильтров имеет свою область преимущественного применения.

1.3.5. Формы реализации цифровых фильтров

Схема рекурсивного цифрового фильтра, представленная на рис. 1.14, не является единственно возможной формой реализации цифрового фильтра с системной функцией вида (1.26).

Запишем выражение, связывающее z -преобразования сигналов на входе и выходе рекурсивного фильтра:

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_N z^{-N}} X(z). \quad (1.32)$$

Введем промежуточную последовательность $w(nT)$ для которой определим z -преобразование следующим образом:

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_N z^{-N}}. \quad (1.33)$$

Такое преобразование осуществляется с помощью рекурсивного фильтра N -го порядка. Связь между выходным сигналом $y(nT)$ и промежуточным $w(nT)$ определяется выражением

$$Y(z) = W(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}). \quad (1.34)$$

Формула (1.34) определяет **нерекурсивное преобразование сигнала**, которое может быть произведено после рекурсивного, определяемого выражением (1.33).

Общая схема фильтрации, включая рекурсивное и нерекурсивное преобразования, представлена на рис. 1.19.

В этой схеме несколько элементов задержки являются лишними, так как дублируют друг друга. Если попарно объединить дублирующие друг друга элементы, то получим схему фильтра, которую называют *канонической* (рис. 1.20). В отличие от нее схему рис. 1.14 называют *прямой* или *основной* формой цифрового фильтра. Преимуществом канонической схемы фильтра является минимальное число элементов задержки, равное порядку фильтра. Благодаря этому удастся сократить общий объем вычислений.

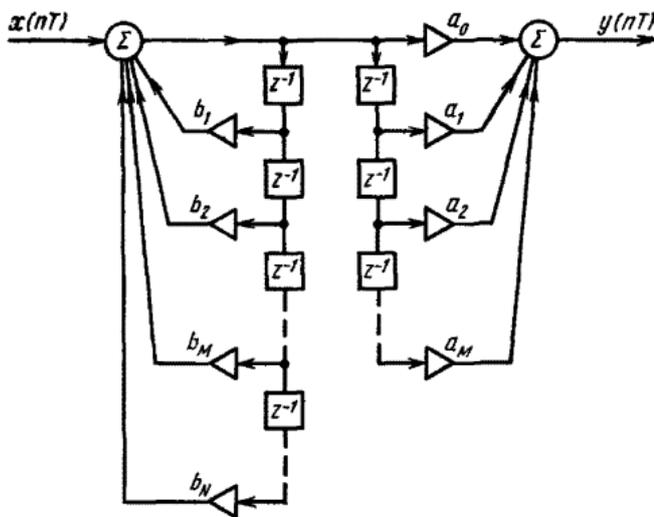


Рис. 1.19. К выводу канонической схемы цифрового фильтра

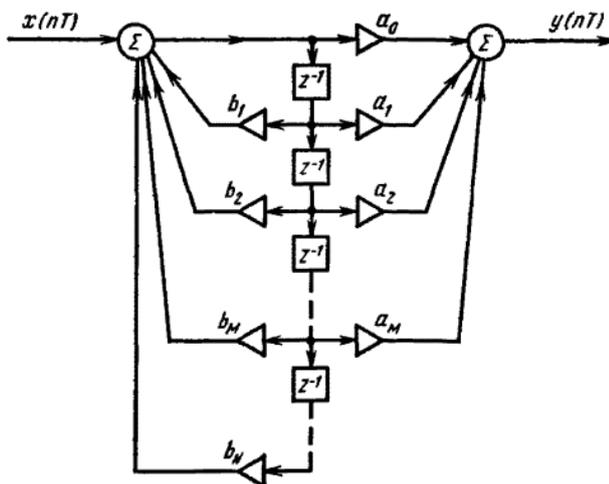


Рис. 1.20. Каноническая схема цифрового фильтра N -го порядка.

Кроме прямой и канонической форм реализации цифровых фильтров существуют и другие варианты. Разложим многочлены в числителе и знаменателе системной функции (1.26) на множители вида $(\alpha_i + \beta_i z^{-1})$ и $(\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \gamma_i z^{-2})$ так чтобы коэффициенты α_i , β_i , γ_i были действительными числами. Это возможно, так как все коэффициенты a_i и b_i в числителе и

знаменателе выражения (1.26) также являются действительными числами. Затем, группируя соответствующим образом эти множители, представим системную функцию фильтра в виде произведения

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \dots H_k(z), \quad (4.21)$$

где сомножители $H_i(z)$ имеют вид $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1}}{1 + \gamma_i z^{-1}}$ или $\frac{\alpha_i + \beta_i z^{-1} + \delta_i z^{-2}}{1 + \gamma_i z^{-1} + \chi_i z^{-2}}$ и являются, таким образом, системными функциями цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков. Таким образом, цифровой фильтр с системной функцией вида (1.35) может быть реализован посредством каскадного соединения цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков, как показано на рис. 1.21, Такую форму реализации цифровых фильтров называют *последовательной* или *каскадной*.

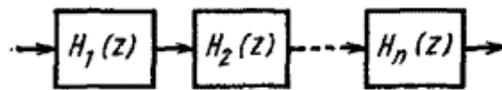


Рис. 1.21. Последовательная схема цифрового фильтра.

Системную функцию фильтра (1.35), представленную в виде произведения элементарных сомножителей, можно посредством разложения на простые дроби преобразовать к виду

$$H(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j(z), \quad (1.36)$$

где $\tilde{H}_j(z)$ – системные функции цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков. Такое представление системной функции соответствует схемной реализации в виде *параллельного* соединения элементарных цифровых фильтров (рис. 1.22).

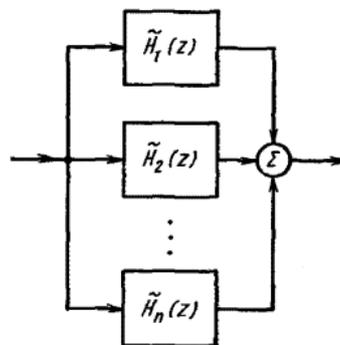


Рис. 1.22. Параллельная схема цифрового фильтра.

Рассмотренные четыре типа фильтров совершенно эквивалентны друг другу и дают один и тот же результат, если не учитывать квантование сигналов и

считать, что параметры фильтров т. е. коэффициенты a_i , b_i , α_i и другие, заданы абсолютно точно. В реальных цифровых фильтрах происходит округление значений входного сигнала и результатов промежуточных вычислений, а параметры фильтров задаются с конечной точностью. В результате этого возникают погрешности обработки сигналов, а в отдельных случаях нарушается устойчивость фильтров. *Наиболее сильно эти нежелательные эффекты проявляются при реализации фильтров в виде прямой и канонической форм; применение последовательной или параллельной форм позволяет несколько снизить ошибки обработки сигналов.* Более подробно вопрос о погрешностях цифровой фильтрации будет рассмотрен далее.

1.4. Основы синтеза цифровых фильтров

При решении задачи о синтезе цифрового фильтра обычно бывает задана частотная характеристика, реже – импульсная характеристика этого фильтра. В ходе решения задачи синтеза нужно определить передаточную функцию фильтра $H(z)$ и реализовать фильтр в рекурсивном виде, или найти импульсную характеристику, и таким образом синтезировать трансверсальный (нерекурсивный) фильтр.

Все методы синтеза линейных цифровых фильтров делятся на две большие группы: методы с использованием аналогового фильтра-прототипа и прямые методы.

К моменту появления цифровых фильтров радиоспециалистами накоплен богатый опыт по проектированию аналоговых фильтров, и вполне естественным является стремление использовать этот опыт при разработке цифровых фильтров. Поэтому наиболее распространенные методы синтеза цифровых фильтров основаны на использовании **аналогового фильтра-прототипа**, т. е. физически реализуемого аналогового фильтра, удовлетворяющего поставленным техническим требованиям. При этом должна быть известна частотная или импульсная характеристика фильтра-прототипа.

К методам, использующим аналоговые фильтры-прототипы, относятся метод инвариантной импульсной характеристики и метод билинейного z -преобразования.

1.4.1. Метод инвариантной импульсной характеристики

Наиболее просто задача синтеза цифрового фильтра решается в том случае, если известна импульсная характеристика фильтра-прототипа. Метод синтеза цифровых фильтров, основанный на использовании импульсной характеристики фильтра-прототипа, называют **метод инвариантной импульсной характеристики**. Согласно этому методу, для определения импульсной характеристики проектируемого цифрового фильтра необходимо подвергнуть дискретизации импульсную характеристику $h(T)$ аналогового фильтра-прототипа.

Значения импульсной характеристики цифрового фильтра $h(kT)$ должны быть равны значениям импульсной характеристики фильтра-прототипа в отсчетные моменты времени $t = kT$. Применяя к импульсной характеристике цифрового фильтра z -преобразование, можно найти системную функцию и составить алгоритм цифровой фильтрации. Метод инвариантной импульсной характеристики уже был использован в § 1.4.2 при определении алгоритма цифрового фильтра 2-го порядка, эквивалентного колебательному контуру.

1.4.2. Метод билинейного z -преобразования

Синтез цифровых фильтров по заданной частотной характеристике фильтра-прототипа более сложен. При этом используются различные методы, основным из которых является метод *билинейного z -преобразования*. Пусть частотная характеристика аналогового фильтра-прототипа задана в операторной форме $K(p)$. Тогда системную функцию цифрового фильтра можно найти посредством замены переменного $e^{pT} = z$ или

$$p = \frac{1}{T} \ln z \quad (1.37)$$

Передаточная функция любой физически осуществимой аналоговой цепи описывается дробно-рациональным выражением

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}. \quad (1.38)$$

Подставляя (1.37) в (1.38), можно найти выражение для системной функции цифрового фильтра $H(z)$. Однако это выражение не будет дробно-рациональным и поэтому не соответствует никакому реальному цифровому устройству.

Поскольку точно решить задачу не удастся, используется приближенный подход. Надо подобрать дробно-рациональное выражение, которое бы приближенно соответствовало (1.37), и, что очень важно, преобразовывало бы частотную характеристику устойчивого аналогового фильтра в системную функцию устойчивого цифрового фильтра.

Для этого представим функцию (1.37) в виде ряда

$$p = \frac{2}{T} \left(\xi + \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{1}{5} \xi^5 + \dots \right), \quad (1.39)$$

где $\xi = (z - 1)/(z + 1)$.

Чем больше взято членов ряда, тем точнее частотные характеристики аналогового и цифрового фильтров соответствуют друг другу. Однако точного соответствия невозможно достичь ни при каком конечном числе членов ряда.

Поэтому ограничимся для простоты одним членом ряда и получим формулу дробно-линейного преобразования

$$p = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (1.40)$$

Если исходный аналоговый фильтр-прототип устойчив, то соответствующий ему цифровой фильтр также будет устойчивым. Это можно показать, анализируя расположение полюсов системной функции цифрового фильтра $H(z)$. Для устойчивой аналоговой системы все полюсы передаточной функции $K(p)$ располагаются в левой полуплоскости комплексного переменного p , т. е. при $\text{Re}(p) < 0$. Преобразование (1.40) производит конформное отображение плоскости p на плоскость комплексного переменного z , так что мнимая ось $j\omega$ в плоскости p переходит в единичную окружность $|z| = 1$. При этом все полюсы передаточной функции $K(p)$, расположенные левее оси $p = j\omega$, оказываются внутри окружности $|z| = 1$. Следовательно, цифровой фильтр, соответствующий этой системной функции, будет устойчив.

Однако получающийся таким образом цифровой фильтр не будет точным аналогом исходного фильтра-прототипа, так как дробно-линейное преобразование искажает частотный масштаб. Вследствие того, что преобразование (1.40) лишь приблизительно соответствует желаемому преобразованию (1.37), частотная характеристика цифрового фильтра будет отличаться от частотной характеристики аналогового фильтра-прототипа.

Пусть, например, ω_a — значение частоты, соответствующее какому-либо характерному месту частотной характеристики аналогового фильтра (например, ослаблению на 3 дБ), и $p = j\omega_a$; этому же характерному месту частотной характеристики цифрового фильтра соответствует частота $\omega_{ц}$ и $z = e^{j\omega_{ц}T}$. Значения p и z связаны друг с другом дробно-линейным преобразованием (1.40), откуда получаем

$$p = j\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega_{ц}T}}{1 + e^{-j\omega_{ц}T}} \quad (1.41)$$

или, после преобразования,

$$\omega_a = \frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega_{ц}T}{2} \quad (1.42)$$

Формула (1.42) показывает соответствие между частотами на частотных характеристиках аналогового и цифрового фильтров. График функции (1.42) приведен на рис. 1.23. На самых низких частотах, когда $\frac{\omega_c T}{2} \ll 1$, $\operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \approx \frac{\omega_c T}{2}$, и $\omega_a \approx \omega_c$. С увеличением частоты разница между ω_a и ω_c увеличивается, и, наконец, частоте $\omega_c = \frac{\pi}{T}$ соответствует $\omega_a = \infty$.

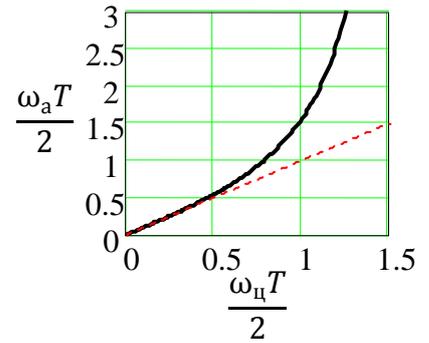


Рис. 1.23. График функции (1.42)

Соотношение (1.42) позволяет скорректировать частотный масштаб при проектировании цифровых фильтров. Пусть, например, требуется, чтобы цифровой фильтр имел заданную частотную характеристику. Для решения задачи синтеза такого фильтра надо сначала подобрать аналоговый фильтр-прототип, такой, чтобы его частотная характеристика не совпадала точно с частотной характеристикой проектируемого цифрового фильтра, а была бы деформирована по оси частот в соответствии с условием (1.42). Если найдена частотная характеристика $K(\omega)$ или передаточная функция $K(p)$ такого фильтра-прототипа, то с помощью преобразования (1.40) находят системную функцию цифрового фильтра $H(z)$ и определяют его структурную схему.

Таким образом, задача синтеза цифрового фильтра с помощью метода билинейного z -преобразования состоит из следующих этапов:

1. Формулируется задание для синтеза цифрового фильтра: задается тип фильтра, характерные частоты $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \dots$ и значения коэффициента передачи на этих частотах.

2. С помощью формулы (1.42) рассчитываются характерные частоты аналогового фильтра-прототипа $\omega_{a1}, \omega_{a2}, \dots$ и таким образом формулируется задание для синтеза аналогового фильтра.

3. Синтезируется аналоговый фильтр-прототип и определяется его передаточная функция $K(p)$.

4. В выражение для $K(p)$ аналогового фильтра-прототипа вместо p подставляем выражение (1.40) и находим системную функцию цифрового фильтра $H(z)$.

Рассмотренный метод билинейного преобразования является одним из основных рабочих методов синтеза цифровых фильтров.

На практике при синтезе цифровых фильтров пользуются несколько модифицированным методом. Поскольку в справочниках формулы для $K(p)$ приведены в предположении, что частота среза $\omega_c = 1$, в качестве аналогового фильтра-прототипа используется фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $\omega_c = 1$. При этом вместо формул (1.40) и (1.42) надо использовать формулы:

$$p = k \frac{z - 1}{z + 1} \quad (1.43)$$

и

$$\omega_a = k \operatorname{tg} \frac{\omega_{ц} T}{2} \quad (1.44)$$

где коэффициент k подбирается таким образом, чтобы $\omega_{ca} = 1$, т.е.

$$k = \operatorname{tg} \frac{\omega_{цц} T}{2} \quad (1.45)$$

В остальном эта модификация метода синтеза цифровых фильтров не отличается от рассмотренного выше. Эта модификация метода синтеза позволяет несколько сократить объем математических преобразований, выполняемых при переходе от $K(p)$ к $H(z)$.

Метод, аналогичный рассмотренному, используется не только для синтеза фильтров нижних частот, но и для синтеза фильтров верхних частот, полосовых, режекторных и даже многополосных цифровых фильтров.

При синтезе цифровых фильтров верхних частот в качестве аналогового фильтра-прототипа используется ФНЧ с частотой среза $\omega_{ca} = 1$. Процесс синтеза проводится аналогично процессу синтеза ФНЧ, только вместо формул (1.43), (1.44) и (1.45) используются выражения:

$$p = k \frac{z + 1}{z - 1} \quad (1.46)$$

$$\omega_a = k \operatorname{ctg} \frac{\omega_{ц} T}{2} \quad (1.47)$$

$$k = \operatorname{tg} \frac{\omega_{цц} T}{2} \quad (1.48)$$

При синтезе цифровых полосовых фильтров в качестве аналогового фильтра-прототипа тоже используется ФНЧ. Вместо билинейного z -преобразования здесь применяется более сложная формула соответствия между переменными p и z :

$$p = k \frac{z - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (1.49)$$

Заменяя p на $j\omega_a$, а z на $e^{j\omega_{ц} T}$, после несложных преобразований получаем:

$$\omega_a = k \frac{\alpha - \cos(\omega_{ц} T)}{\sin(\omega_{ц} T)}. \quad (1.50)$$

Формула (1.50) отображает частотную характеристику цифрового полосового фильтра на частотную характеристику аналогового фильтра нижних частот так, как показано на рис. 1.24. Центральной частоте цифрового полосового фильтра соответствует $\omega_a = 0$; верхней граничной частоте цифрового фильтра $\omega_{ц2}$ соответствует частота среза аналогового ФНЧ ω_{ca} , т.е.

$$\omega_{ca} = k \frac{\alpha - \cos(\omega_{ц2}T)}{\sin(\omega_{ц2}T)}. \quad (1.51)$$

Нижней граничной полосе полосового фильтра $\omega_{ц1}$ соответствует частота $-\omega_{ca}$ аналогового фильтра:

$$-\omega_{ca} = k \frac{\alpha - \cos(\omega_{ц1}T)}{\sin(\omega_{ц1}T)}. \quad (1.52)$$

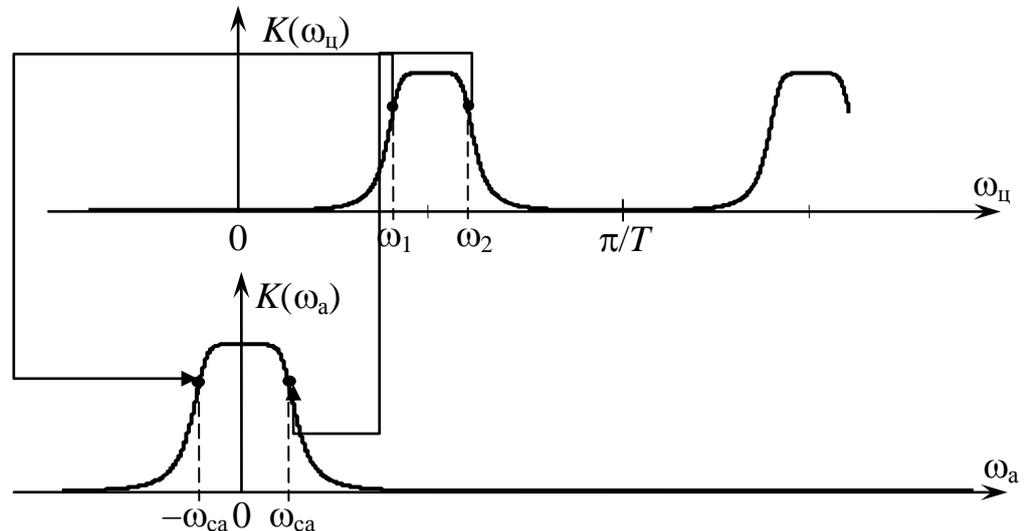


Рис. 1.24. Соответствие между частотными характеристиками цифрового полосового фильтра и аналогового фильтра нижних частот

Из формул (1.56), (1.57) находим коэффициенты k и α :

$$k = \omega_{ca} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega_{ц2} - \omega_{ц1}}{2} T \right), \quad (1.53)$$

$$\alpha = \frac{\cos \left(\frac{\omega_{ц2} + \omega_{ц1}}{2} T \right)}{\cos \left(\frac{\omega_{ц2} - \omega_{ц1}}{2} T \right)}. \quad (1.54)$$

Для определения порядка фильтра нужно задаться некоторой частотой $\omega_{ц3}$ и ослаблением сигнала на этой частоте. Частоте $\omega_{ц3}$ соответствует частота ω_{a3} аналогового фильтра, которая вычисляется с помощью формулы (1.50).

Ослабление на этой частоте позволяет определить порядок аналогового фильтра-прототипа.

Необходимо отметить, что при реализации данного метода частотная характеристика цифрового полосового фильтра получается не совсем симметричной: низкочастотный скат характеристики более крутой, чем высокочастотный. Поэтому, если мы обеспечим требуемую избирательность полосового фильтра со стороны высоких частот, она тем более будет обеспечена со стороны низких частот.

Контрольные вопросы

1. Каковы преимущества и недостатки цифровой обработки сигналов?
2. Что такое z -преобразование? Назовите его свойства.
3. Как определяются понятия импульсной характеристики цифрового фильтра (ЦФ), системной функции ЦФ, частотная характеристика ЦФ?
4. В чем состоят характерные отличия системных функций и импульсных характеристик трансверсальных и рекурсивных фильтров?
5. Как связаны между собой импульсная, частотная характеристики и системная функция?
6. На чем основан синтез ЦФ по методу инвариантной импульсной характеристики; Метод билинейного z -преобразования?

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛОВ

2.1. Основы дискретизации сигналов. Теорема В.А.Котельникова

Для эффективной работы цифровых фильтров надо уметь правильно выбрать *интервал дискретизации сигнала*. Если интервал дискретизации T выбрать слишком большим, то будет потеряна часть информации о быстрых изменениях сигнала. Если интервал дискретизации выбрать слишком маленьким, то потери информации не произойдет, но это будет невыгодно, так как придется передавать и затем обрабатывать слишком много значений сигнала, что приведет к увеличению требуемого быстродействия вычислительного устройства и его удорожанию.

Наиболее просто задача о выборе интервала дискретизации решается с помощью *теоремы В.А.Котельникова для сигналов с ограниченным спектром*, спектр которых отличен от нуля в интервале частот от $-\omega_B$ до ω_B и тождественно равен нулю за пределами этого интервала.

Для вывода теоремы В.А.Котельникова воспользуемся теорией обобщенных рядов Фурье.

Радиотехнические сигналы можно раскладывать в ряд Фурье не только по гармоническим функциям. По аналогии с обычным рядом Фурье произвольный сигнал $s(t)$ можно разложить в обобщенный ряд Фурье по функциям $u_k(t)$, удовлетворяющих условию взаимной ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t)u_m(t)dt = 0, \text{ если } k \neq m. \quad (2.1)$$

Тогда сигнал $s(t)$ можно записать в виде ряда

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k u_k(t), \quad (2.2)$$

где коэффициенты C_k вычисляются по формулам:

$$C_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k(t)dt}{\|u_k\|^2}, \quad (2.3)$$

где

$$\|u_k\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} u_k^2(t)dt} \quad (2.4)$$

– норма сигнала u_k . Пределы интегрирования (t_1, t_2) в интегралах (2.3) и (2.4) определяются областью задания базисных функций $u_k(t)$. Если функции $u_k(t)$ заданы на бесконечном интервале – пределы интегрирования должны быть бесконечными. Для функций, заданных на конечном интервале (t_1, t_2) пределы интегрирования определяются границами интервала. Для периодических функций пределы интегрирования определяются длительностью периода.

В основу построения базисных функций при выводе теоремы В.А. Котельникова положен так называемый идеальный низкочастотный сигнал, спектральная плотность которого постоянна в области частот от $-\omega_B$ до ω_B и равна нулю за пределами этой области (см. рис. 2.1, а). Соответствующая временная зависимость может быть найдена посредством применения обратного преобразования Фурье к спектральной плотности (рис. 2.1, б):

$$u_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S_0 e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t}. \quad (2.5)$$

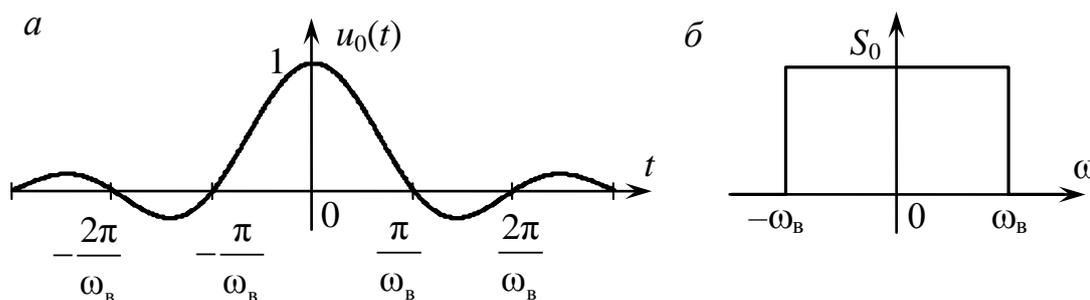


Рис. 2.1. Идеальный низкочастотный сигнал (а) и его спектр (б)

Обычно величина S_0 выбирается равной π/ω_B , тогда выражение для временной зависимости идеального низкочастотного сигнала имеет максимально простой вид:

$$u_0(t) = \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t}. \quad (2.6)$$

Базис ряда Котельникова образуют функции вида (2.6), смещенные на величину $T = \pi/\omega_B$, т. е.

$$u_k(t) = \frac{\sin \omega_B(t - kT)}{\omega_B(t - kT)}. \quad (2.7)$$

Здесь k может принимать любые целочисленные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Интервал $T = \pi/\omega_B$, характеризующий взаимное смещение базисных функций, называется **интервалом Найквиста**.

Для дальнейшего анализа нам нужно определить спектральные плотности базисных функций $u_k(t)$. Поскольку спектральная плотность идеального низкочастотного сигнала нам известна, а базисные функции $u_k(t)$ отличаются от

него лишь смещением во времени, применим теорему о запаздывании и, учитывая, что $S_0 = \pi/\omega_B = T$, получаем:

$$\dot{S}_{u_k}(\omega) = \begin{cases} Te^{-j\omega kT} & \text{при } |\omega| < \omega_B; \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_B. \end{cases} \quad (2.8)$$

Докажем, что базисные функции $u_k(t)$ взаимно ортогональны. Для этого воспользуемся равенством Парсеваля :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t)u_m(t)dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_{u_k}(\omega)S_{u_m}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} Te^{-j\omega kT}Te^{j\omega mT}d\omega = \\ &= \frac{T}{\pi(m-k)} \sin[\omega_B(m-k)T] = \frac{T}{\pi(m-k)} \sin[\pi(m-k)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что при $m \neq k$ сигналы $u_k(t)$ и $u_m(t)$ ортогональны.

Норму сигнала $u_k(t)$ можно найти из (2.9), положив $m = k$. Нетрудно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_k^2(t)dt = T. \quad (2.10)$$

Теперь рассмотрим разложение произвольного сигнала $f(t)$ в ряд по функциям (2.7):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \frac{\sin[\omega_B(t-kT)]}{\omega_B(t-kT)}. \quad (2.11)$$

Поскольку норма базисных функций (2.7) не равна 1, для вычисления коэффициентов C_k воспользуемся формулой (2.3):

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u_k(t)dt = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_f(\omega)S_{u_k}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_f(\omega)Te^{j\omega kT}d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}_f(\omega)e^{j\omega kT}d\omega. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) совпадает с формулой обратного преобразования Фурье для сигнала $f(t)$ при $t = kT$. Следовательно,

$$C_k = f(kT), \quad (2.13)$$

т. е. коэффициенты разложения произвольного сигнала $f(t)$ с ограниченным спектром в ряд (2.11) равны значениям сигнала $f(kT)$, и формулу (2.11) можно переписать в виде:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin[\omega_B(t - kT)]}{\omega_B(t - kT)}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) представляет собой *математическое выражение известной теоремы В.А. Котельникова (теоремы отсчетов)*, которая формулируется следующим образом: *сигнал, в спектре которого не содержатся частоты выше ω_B , может быть полностью описан своими дискретными значениями, взятыми с интервалом $T = \pi/\omega_B$.*

Описание сигнала с помощью ряда В.А. Котельникова можно проиллюстрировать с помощью рис. 2.2, где полужирной линией показана функция $f(t)$, а тонкими линиями – составляющие ряда Котельникова, т. е. функции $\frac{\sin[\omega_B(t - kT)]}{\omega_B(t - kT)}$, умноженные на значения $f(kT)$.

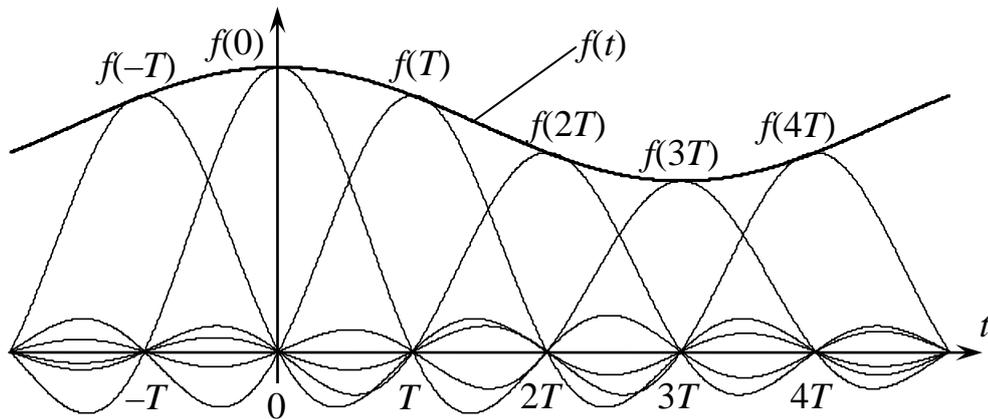


Рис. 2.2. Представление сигнала с ограниченным спектром рядом Котельникова

Если просуммировать все составляющие ряда, то получится в точности функция $f(t)$. Если спектр сигнала не содержит составляющих с частотой выше ω_B , то любое промежуточное значение сигнала может быть однозначно и точно восстановлено с помощью ряда (2.14) по своим отсчетным значениям $f(0), f(T), f(2T), \dots, f(kT), \dots$.

Теорема В.А. Котельникова играет ключевую роль в дискретной и цифровой обработке сигналов, позволяя правильно выбрать интервал дискретизации сигнала перед последующей обработкой.

К сожалению, большинство сигналов имеют спектр, убывающий асимптотически с ростом частоты. Для таких сигналов, строго говоря, невозможно указать частоту ω_B , выше которой спектр тождественно равен нулю. К

таким сигналам относятся, например, различные импульсы, спектры которых рассматриваются в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы». Для этих сигналов, строго говоря, теорема В.А.Котельникова неприменима. Однако, если смириться с неизбежностью некоторой погрешности, которая, кстати говоря, может быть сделана сколь угодно малой, можно и для таких сигналов выбрать частоту ω_b и интервал дискретизации T , которые обеспечат приемлемую величину погрешности дискретизации сигнала. Подробнее об этом будет рассказано ниже.

Для узкополосных сигналов, спектр которых лежит в интервале частот от ω_1 до ω_2 , интервал дискретизации выбирается иначе. Такой сигнал может быть представлен в виде суммы синфазной и квадратурной составляющих:

$$f(t) = A(t) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) + B(t) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \quad (2.15)$$

причем, как было показано В.А.Котельниковым, функции $A(t)$ и $B(t)$ – низкочастотные, наивысшая частота их спектра равна $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Следовательно, для функций $A(t)$ и $B(t)$ интервал дискретизации T может быть выбран равным $\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$, а для описания всего узкополосного сигнала $f(t)$ потребуется $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}$ отсчетов в секунду. **Для сигналов, ширина спектра которых значительно меньше центральной частоты спектра, такой выбор интервала дискретизации позволяет получить значительный выигрыш по сравнению с вариантом, когда интервал дискретизации выбирается как π/ω_b .**

2.2. Спектры дискретных сигналов

Для дальнейшего анализа свойств дискретных сигналов необходимо рассмотреть их спектры.

Рассмотрим сначала спектр идеализированного дискретного сигнала в виде последовательности δ -функций. Для этого перепишем это выражение в несколько ином виде:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (2.16)$$

т.е. в виде произведения исходного непрерывного сигнала на бесконечную сумму

δ -функций $\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, которую называют **решетчатой функцией**.

Найдем спектр решетчатой функции. Как всякую периодическую функцию, решетчатую функцию можно разложить в ряд Фурье

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad (2.17)$$

где

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \eta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt. \quad (2.18)$$

На интервале $(-T/2, T/2)$ функция $\eta(t)$ есть единичный импульс $\delta(t)$. Следовательно,

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{2}{T}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.17), получим

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}. \quad (2.20)$$

Таким образом, сигнал $\eta(t)$ можно представить в виде бесконечной суммы гармонических составляющих с одинаковой амплитудой.

В курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» было получено выражение для спектральной плотности произвольного периодического сигнала:

$$S_T(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_k \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}). \quad (2.21)$$

Применяя его к решетчатой функции, можно записать выражение для ее спектральной плотности:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}). \quad (2.22)$$

Как следует из выражения (2.22), спектральная плотность решетчатой функции тоже является решетчатой функцией.

В связи с тем, что идеальный дискретизированный сигнал $\psi(t)$ равен произведению сигналов $f(t)$ и $\eta(t)$, спектральная плотность сигнала $\psi(t)$ равна свертке соответствующих спектральных плотностей:

$$S_\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega - \nu) S_\eta(\nu) d\nu. \quad (2.23)$$

Подставляя (2.22) в (2.23), получим

$$S_{\psi}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_f\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right). \quad (2.24)$$

Из выражения (2.24) следует, что **спектральная плотность дискретного сигнала $\psi(t)$ представляет собой периодическое повторение спектров исходного непрерывного сигнала $f(t)$** . Если спектр сигнала $f(t)$ имеет конечную ширину и интервал дискретизации T выбран в соответствии с теоремой Котельникова, то соседние составляющие спектра дискретного сигнала (2.24) не перекрываются, как показано на рис. 2.3.

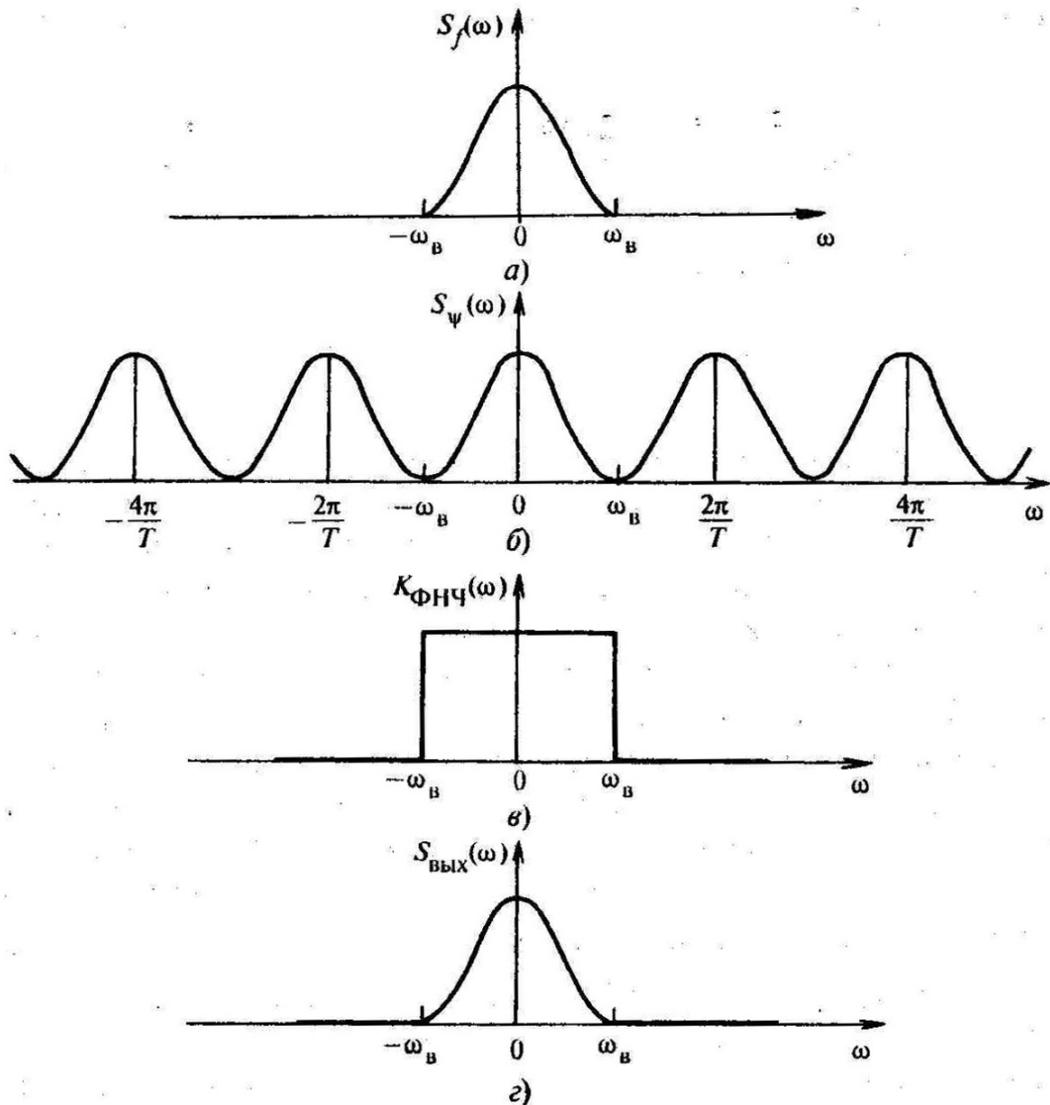


Рис. 2.3. Спектр исходного непрерывного сигнала (а), спектр дискретного сигнала в виде модулированной последовательности δ -функций (б), частотная характеристика восстанавливающего фильтра (в) и спектр восстановленного сигнала (г).

Центральная часть (центральный лепесток) спектра полностью совпадает со спектром исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Отсюда следует простой способ восстановления исходного непрерывного сигнала из дискретного: надо пропустить его через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза ω_B . Частотная характеристика восстанавливающего фильтра приведена на рис. 2.3,в.

Найдем теперь *спектр дискретного сигнала в виде модулированной последовательности видеоимпульсов* (АИМ-сигнала):

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)F(t - kT). \quad (2.25)$$

Нетрудно показать, что $\varphi(t)$ – это свертка идеализированного дискретного сигнала $\psi(t)$ и одиночного видеоимпульса $F(t)$. Для этого произведем операцию свертывания сигналов $\psi(t)$ и $F(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)F(t-x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-x)f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-kT)dx = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(t-kT)f(kT) = \varphi(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Исходя из теоремы о спектре свертки двух сигналов, получаем, что спектр сигнала $\varphi(t)$ равен произведению спектров сигналов $\psi(t)$ и $F(t)$:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{T} S_F(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_f(\omega - n \frac{2\pi}{T}). \quad (2.27)$$

График спектра сигнала $\varphi(t)$ приведен на рис. 2.4. В результате умножения периодического спектра $S_{\psi}(\omega)$ на спектр $S_F(\omega)$ боковые составляющие спектра $S_{\varphi}(\omega)$ ослабляются, причем чем уже спектр $S_F(\omega)$, тем сильнее это ослабление. Вследствие этого при восстановлении непрерывного сигнала из дискретного с помощью идеального фильтра нижних частот восстановленный сигнал несколько отличается от исходного непрерывного сигнала. Чтобы это отличие было минимальным, нужно, чтобы ширина импульса $F(t)$ была минимальной, а его спектр приближался к спектру δ -функции.

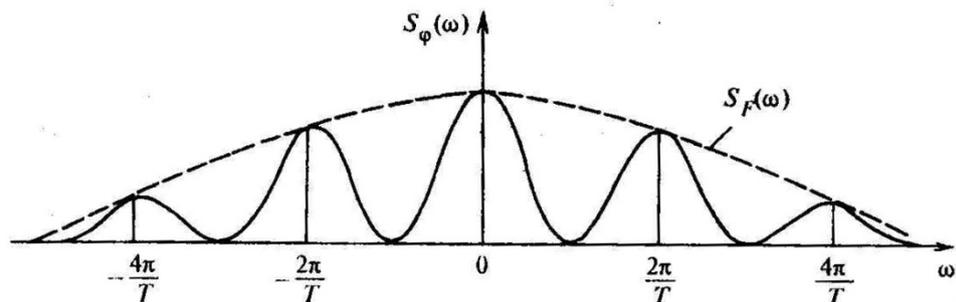


Рис. 2.4. Спектр реального дискретного сигнала в виде модулированной последовательности импульсов.

2.3. Погрешности дискретизации и восстановления сигналов

Описанные выше идеальные условия дискретизации и восстановления сигналов реализовать на практике бывает очень сложно, что приводит к некоторым погрешностям при обработке сигналов.

Прежде всего, отметим, что практически все реальные сигналы имеют спектр, убывающий асимптотически, и оказывается невозможным назвать значение частоты ω_b , за пределами которой спектр исходного непрерывного сигнала строго равен нулю. Это приводит к тому, что соседние составляющие спектра дискретного сигнала перекрываются друг с другом, как схематически показано на рис. 2.5,а. Если сигнал с таким спектром пропустить через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза ω_b , то восстановленный сигнал будет отличаться от исходного непрерывного сигнала $f(t)$. Это отличие состоит не только в том, что обрезаются составляющие спектра выше ω_b , но также и в том, что на спектр восстановленного сигнала накладываются «хвосты» от соседних спектральных составляющих (рис. 2.5,в).

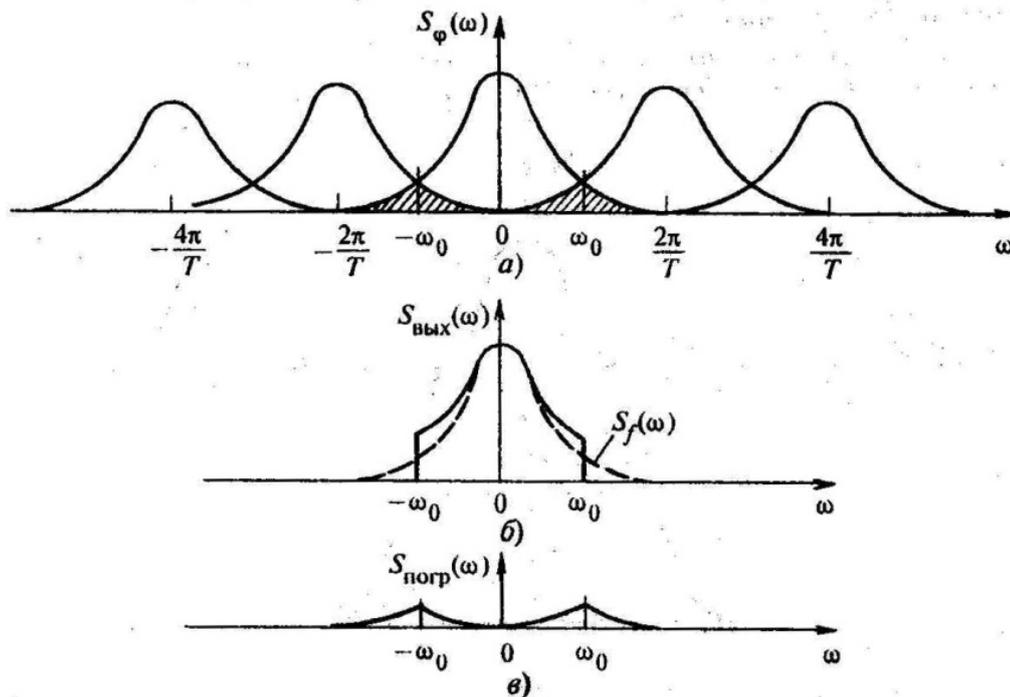


Рис. 2.5. Погрешность дискретизации сигнала со спектром, убывающим асимптотически: а – спектр дискретного сигнала; б – спектр сигнала после прохождения через идеальный фильтр нижних частот; в – спектр сигнала погрешности.

Основным методом снижения погрешности восстановления сигнала является повышение частоты дискретизации. Еще одним эффективным приемом снижения погрешности является пропускание исходного непрерывного сигнала через идеальный фильтр нижних частот *перед дискретизацией*. При этом отрезаются составляющие спектра выше ω_b (они все равно будут потеряны), но зато потом при восстановлении сигнала не происходит наложение «хвостов» от соседних составляющих спектра на основной сигнал. При этом суммарная погрешность восстановления сигнала уменьшается вдвое.

Вторым фактором, приводящим к погрешности восстановления сигналов, является неидеальность частотной характеристики восстанавливающих фильтров. Как известно, идеальная прямоугольная частотная характеристика фильтра нижних частот физически нереализуема. Реальные фильтры имеют постепенно спадающую частотную характеристику (рис. 2.6,б). В результате, даже если частота дискретизации выбрана в соответствии с теоремой Котельникова и соседние составляющие спектра дискретного сигнала не перекрываются (рис. 2.6,а), в сигнале, «восстановленном» с помощью такого фильтра, кроме полезной составляющей будут присутствовать остатки от соседних, высокочастотных составляющих спектра. Для минимизации этой погрешности надо частоту дискретизации выбирать равной не π/ω_b , как требует теорема Котельникова, а в 2-5 раз выше, а в качестве восстанавливающих фильтров использовать фильтры Баттерворта 10-15 порядка. В этом случае между соседними составляющими спектра образуются «окна», в которых должна поместиться убывающая часть частотной характеристики сглаживающего фильтра (рис. 2.7). Использование этих приемов позволяет сделать погрешности дискретизации и восстановления сигналов сколь угодно малыми.

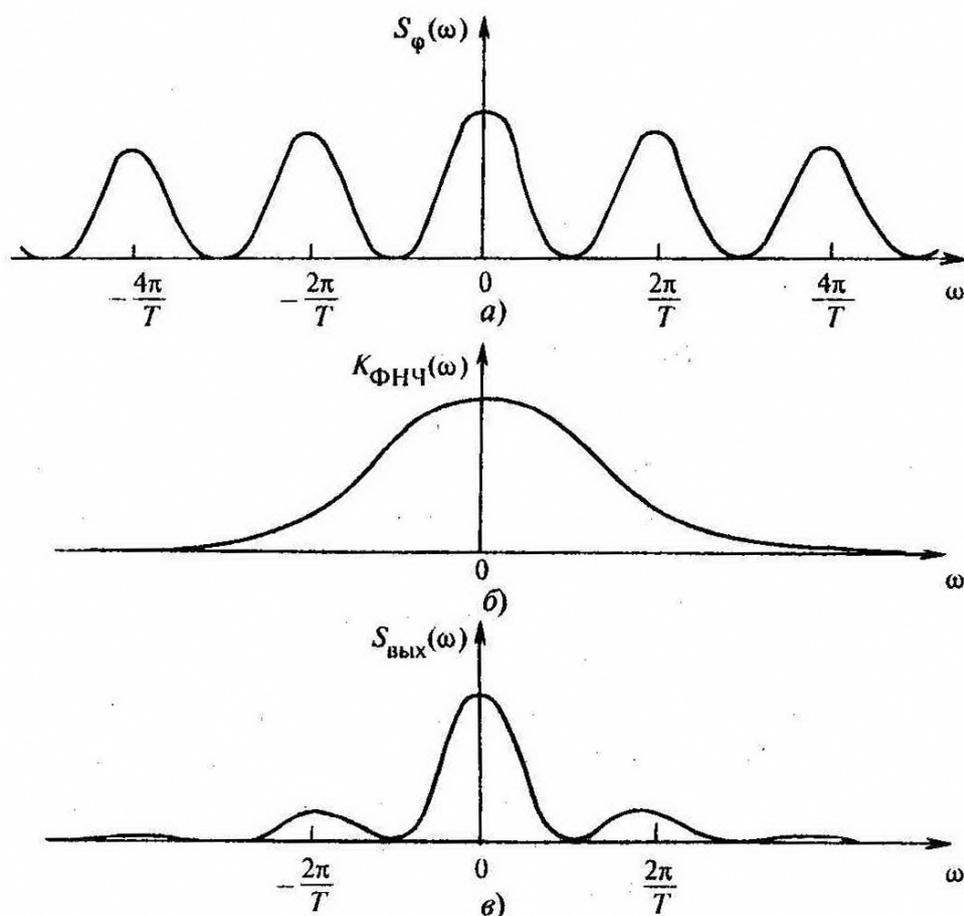


Рис. 2.6. Погрешность восстановления сигнала при неидеальной характеристике восстанавливающего фильтра: *a* – спектр дискретного сигнала; *б* – частотная характеристика восстанавливающего фильтра; *в* – спектр сигнала после восстанавливающего фильтра.

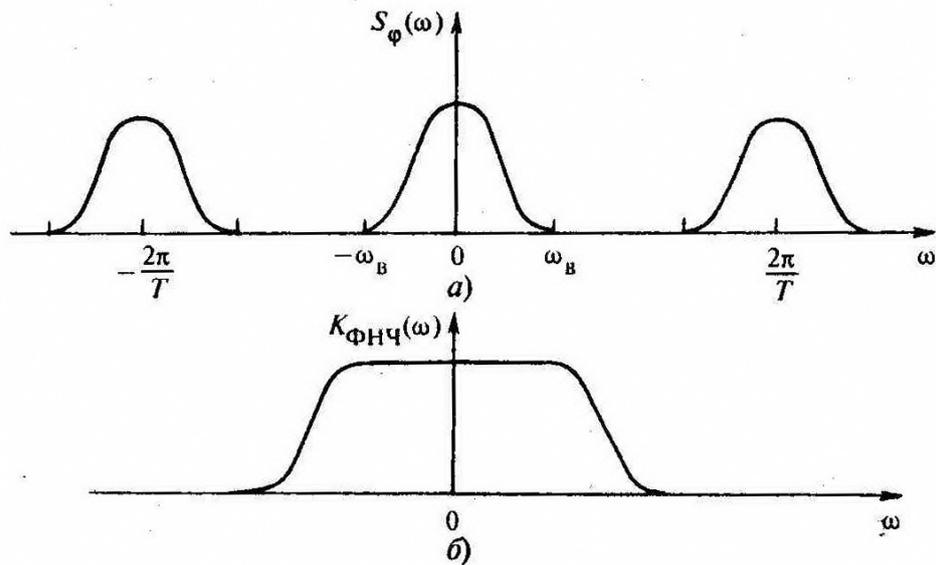


Рис. 2.7. Восстановление сигнала при правильно подобранных интервале дискретизации сигнала и частотной характеристике фильтра: *a* – спектр дискретного сигнала; *б* – частотная характеристика восстанавливающего фильтра.

2.4. Дискретизация в спектральной области.

Для сигналов с конечной длительностью (рис. 2.8,а) можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Котельникова, но не для временных выборок, а для спектральных. Такая возможность следует из симметрии преобразований Фурье.

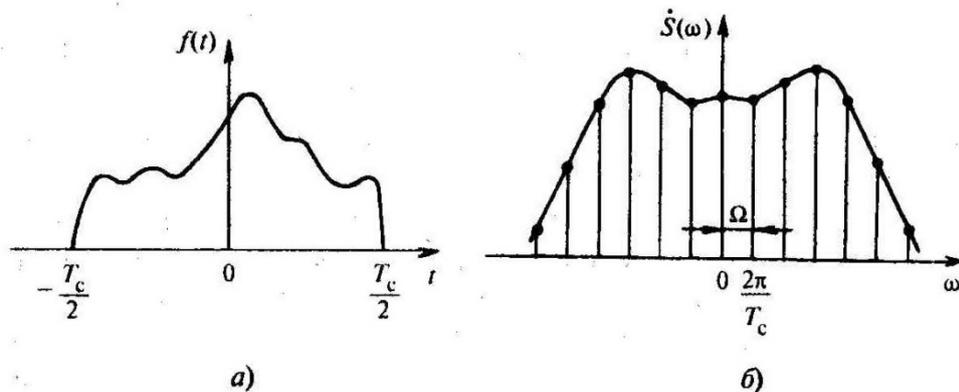


Рис. 2.8. Сигнал с конечной длительностью (*a*) и его спектр (*б*).

Чтобы записать разложение спектра в ряд Котельникова, заменим в формуле (2.14) t на ω , а ω на t , вместо ширины спектра $2\omega_B$ подставим длительность сигнала T_c , а вместо $T = \pi/\omega_B$ подставим $2\pi/T_c = \Omega$. В результате получим

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Omega) \frac{\sin\left(\frac{T_c}{2}(\omega - n\Omega)\right)}{\frac{T_c}{2}(\omega - n\Omega)}. \quad (2.28)$$

Таким образом, спектр сигнала с конечной длительностью полностью описывается своими дискретными значениями, взятыми с интервалом $\Omega = 2\pi/T_c$ (рис. 2.8,б).

2.5. Число степеней свободы сигнала

Строго говоря, все реальные сигналы имеют конечную длительность и, следовательно, бесконечно протяженный спектр. Однако начиная с некоторых значений частоты значения спектра становятся настолько малыми, что ими можно пренебречь. Таким образом, сигнал может быть приближенно описан конечным числом дискретных значений. Число дискретных значений, которыми полностью описывается сигнал, называется числом степеней свободы сигнала.

Найдем число степеней свободы сигнала при дискретизации по времени. Пусть длительность сигнала равна T_c , а наивысшая частота спектра f_B . Тогда сигнал может быть описан значениями, взятыми с интервалом $1/(2f_B)$ (рис. 2.9,а). Общее число дискретных значений N будет равно $T_c/T = 2T_c f_B$.

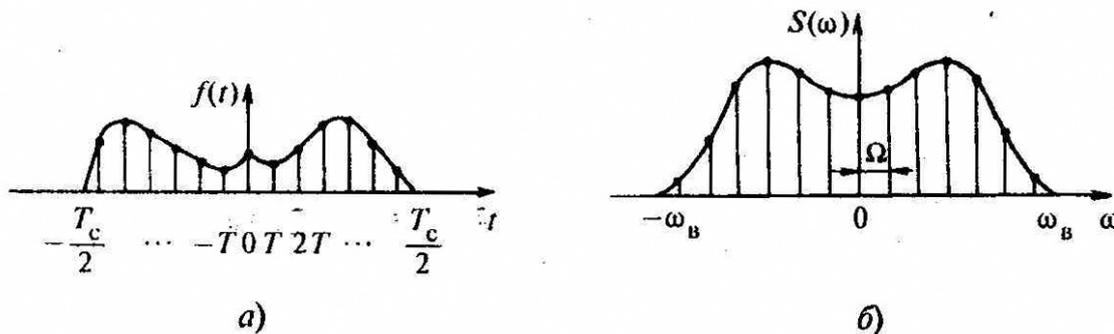


Рис. 2.9. К определению числа степеней свободы сигнала: а – при дискретизации во временной области; б – при дискретизации в спектральной области.

При дискретизации в спектральной области (рис.2.9,б) общее число спектральных линий равно $2\omega_B/\Omega = 2T_c f_B$, т.е. совпадает с числом дискретных значений при временной дискретизации сигнала и равно числу степеней свободы сигнала N .

Некоторая специфика дискретизации в спектральной области состоит в том, что $S(\omega)$ – величина комплексная, т.е. фактическое количество числовых значений оказывается вдвое больше. Однако если учесть симметрию спектра, то число независимых значений спектра уменьшается вдвое и оказывается равным $N = 2T_c f_B$.

2.6. Шум квантования, его характеристики. Эффекты квантования в ЦФ.

До сих пор мы не учитывали эффекты квантования, предполагая, что сигнал на входе цифрового фильтра может принимать любые значения. Иначе говоря, вместо цифровых сигналов и фильтров мы рассматривали дискретные.

В цифровых фильтрах сигнал задается последовательностью чисел с конечным числом разрядов, т. е. значения сигнала округляются с заданной точностью. Это приводит к появлению ряда специфических эффектов, не встречающихся в аналоговых и дискретных устройствах. Главными из этих эффектов являются: а) квантование сигналов на входе (шум квантования); б) неточные (округленные) значения коэффициентов фильтров; в) округление результатов промежуточных вычислений; г) предельные циклы малого уровня.

Анализ эффектов квантования – это один из самых сложных вопросов теории цифровых фильтров. Величина погрешности обработки сигналов, вызванной эффектами квантования, зависит от многих факторов: структуры фильтра, способа представления чисел в машине, характера входного сигнала и др. Общий анализ погрешностей цифровой обработки сигналов не входит в задачи данной книги. Ограничимся лишь краткой характеристикой различных эффектов квантования. Более подробно вопросы эффектов квантования и погрешностей цифровой обработки сигналов изложены в специальной литературе.

2.6.1. Шум квантования

Как говорилось в лекции 1, **квантование – это дискретизация сигналов по уровню**. Необходимость такой дискретизации вызвана тем, что для осуществления обработки сигнала цифровым фильтром каждое его значение должно быть описано числом, количество разрядов которого конечно.

Квантование – это округление значений сигнала до ближайшего дискретного значения. При этом каждое округленное значение отличается от первоначального (истинного) значения сигнала на величину ξ , которая является **ошибкой округления** и **не превосходит по величине половины шага квантования $\Delta/2$** . Если входной сигнал неизвестен точно, то ошибка округления ξ является случайной величиной. *При малом шаге квантования распределение величины ξ близко к равномерному* (рис. 2.10, а). Последовательность значений ошибки округления ξ , возникающей при квантовании дискретного сигнала $x(kT)$, образует дискретный случайный процесс $\xi(kT)$ (рис. 2.10, б), называемый **шумом квантования**. Квантованный сигнал можно представить как сумму неквантованного дискретного сигнала $x(kT)$ и шума квантования $\xi(kT)$. **Дисперсию шума квантования вычисляют как дисперсию закона равномерного распределения:**

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi^2 p(\xi) d\xi = \frac{\Delta^2}{12}, \quad (2.29)$$

где Δ – шаг квантования.

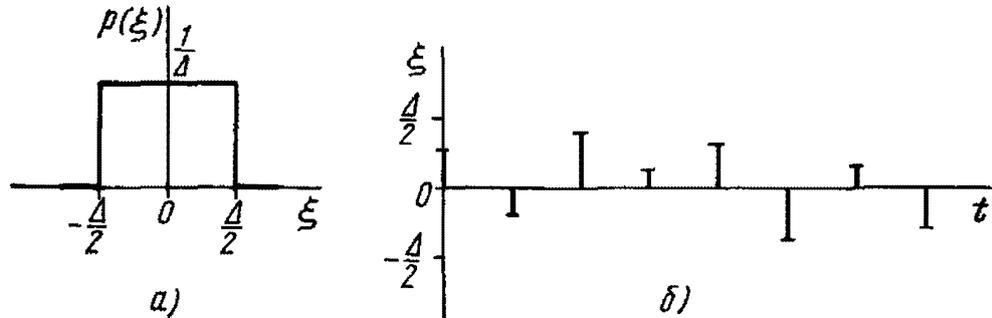


Рис. 2.10. К определению шума квантования: *a* – плотность вероятности; *b* – реализация.

При достаточно малом шаге квантования и правильно выбранном интервале дискретизации за время между соседними отсчетами значение сигнала обычно успевает измениться на много шагов квантования. При этом соседние значения ошибки $\xi(kT)$ оказываются практически некоррелированными друг с другом.

2.6.2. Погрешности, вызываемые квантованием входного сигнала

Одним из источников погрешности цифровой обработки сигналов является шум квантования, возникающий при квантовании (округлении) значений входного сигнала в аналого-цифровом преобразователе.

Как отмечалось, квантованный сигнал на входе цифрового фильтра можно представить в виде суммы исходного неквантованного сигнала и шума квантования $\xi(t)$. Если фильтр линейный, то прохождение через него сигнала и шума квантования можно рассматривать независимо друг от друга.

Определим **шум на выходе цифрового фильтра, вызванный прохождением через него шума квантования**. Шум квантования представляет собой последовательность дискретных значений $\xi(t)$, не превышающих по модулю половины шага квантования $\Delta/2$ и распределенных по равномерному закону. Статистическая связь между соседними дискретными значениями обычно бывает невелика, и можно приближенно считать, что они независимы. В этом случае можно найти дисперсию шума на выходе фильтра. Обозначим через $\eta(nT)$ шум на выходе цифрового фильтра, т.е. реакцию фильтра на входное воздействие $\eta(nT)$. Очевидно, что $\eta(nT)$ можно записать как

$$\eta(nT) = \sum_{m=0}^n \xi(mT)h(nT - mT). \quad (2.30)$$

Поскольку соседние отсчеты входного шума независимы, дисперсия шума на входе фильтра равна сумме дисперсий отдельных слагаемых в выражении (2.30). Учитывая, что дисперсия равномерного закона распределения шириной Δ равна $\Delta^2/12$, получим

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^n h^2(nT - mT) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^n h^2(mT). \quad (2.31)$$

Поскольку все $h^2(mT)$ положительны, **дисперсия отсчетов шума на выходе фильтра** растет с увеличением числа отсчетов, стремясь к **предельному значению**

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT). \quad (2.32)$$

Обычно для цифровых фильтров выполняется условие $\sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT) < \infty$, и дисперсия σ_{η}^2 конечна.

Для расчета дисперсии шума квантования на выходе цифрового фильтра можно получить еще одну формулу. Учитывая, что системная функция цифрового фильтра является z-преобразованием импульсной характеристики, запишем для нее теорему Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (2.33)$$

Подставляя выражение (2.33) в (2.32), получим

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (2.34)$$

Формулу (2.34) удобно применять для расчета дисперсии шума на выходе цифрового фильтра *в тех случаях, когда импульсная характеристика неизвестна, а задана системная функция фильтра.*

2.6.3. Влияние квантования результатов промежуточных вычислений

При обработке сигналов в цифровых фильтрах производится ряд арифметических операций; умножение значений сигнала на постоянные коэффициенты и суммирование. В арифметических устройствах, в которых используются числа с фиксированной запятой, сложение чисел не приводит к увеличению числа разрядов, а при умножении число разрядов возрастает и

возникает необходимость округления результатов вычисления. Каждое такое округление приводит к появлению погрешности, аналогичной шуму квантования.

Для анализа ошибок округления результатов вычисления каждый из источников ошибок заменяется на схеме цифрового фильтра источником шума $e_i(kT)$, включенным в соответствующую часть схемы. Общее число таких источников должно быть равно числу умножений.

Рассмотрим расчет шумов округления на примере цифрового фильтра с системной функцией

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2} - \dots - b_Mz^{-M}}. \quad (2.35)$$

Цифровой фильтр с системной функцией (2.35) может быть реализован в прямой и канонической формах. Эквивалентная схема фильтра при **прямой форме реализации** с учетом шумов округления имеет вид, изображенный на рис. 2.11. Источники шума $e_1(kT)$, $e_2(kT)$, ... имеют одинаковую дисперсию $\sigma^2 = \Delta^2/12$, причем величина Δ определяется числом используемых разрядов. Все источники действуют по существу на входе общего сумматора и создают суммарный шум округления. Если считать источники шума независимыми, то дисперсия суммарного шума на входе сумматора равна сумме дисперсий:

$$\sigma_{\text{общ}}^2 = (N + M) \frac{\Delta^2}{12},$$

где N и M – число умножений в нерекурсивной и рекурсивной частях фильтра соответственно.

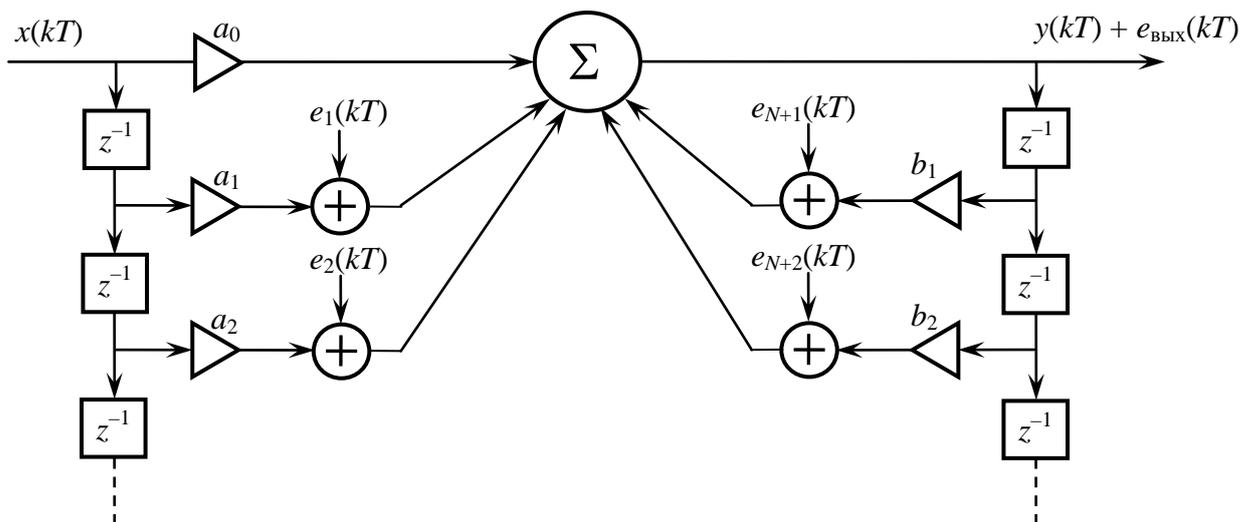


Рис. 2.11. Эквивалентная шумовая схема цифрового фильтра в прямой форме.

Этот шум, проходя через оставшуюся рекурсивную часть фильтра, создает выходной шум $e_{\text{вых}}(kT)$. Дисперсия шума на выходе цифрового фильтра может быть вычислена по формуле:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = (N + M) \frac{\Delta^2}{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{рек}}^2(kT). \quad (2.36)$$

или

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = (N + M) \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint H_{\text{рек}}(z) H_{\text{рек}}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (2.37)$$

где $h_{\text{рек}}(kT)$ и $H_{\text{рек}}(z)$ – импульсная характеристика и системная функция рекурсивной части фильтра.

Эквивалентная схема цифрового фильтра, при **канонической форме реализации** с учетом шумов округления представлена на рис. 2.12. Источники шума $e_{N+1}(kT)$, $e_{N+2}(kT)$, ..., характеризующие округление результатов при умножении на коэффициенты в нерекурсивной части фильтра, действует по существу на выходе фильтра, и их суммарная дисперсия

$$\sigma_{\text{ВЫХ} 1}^2 = N \cdot \frac{\Delta^2}{12}. \quad (2.38)$$

где N – число умножений в нерекурсивной части фильтра.

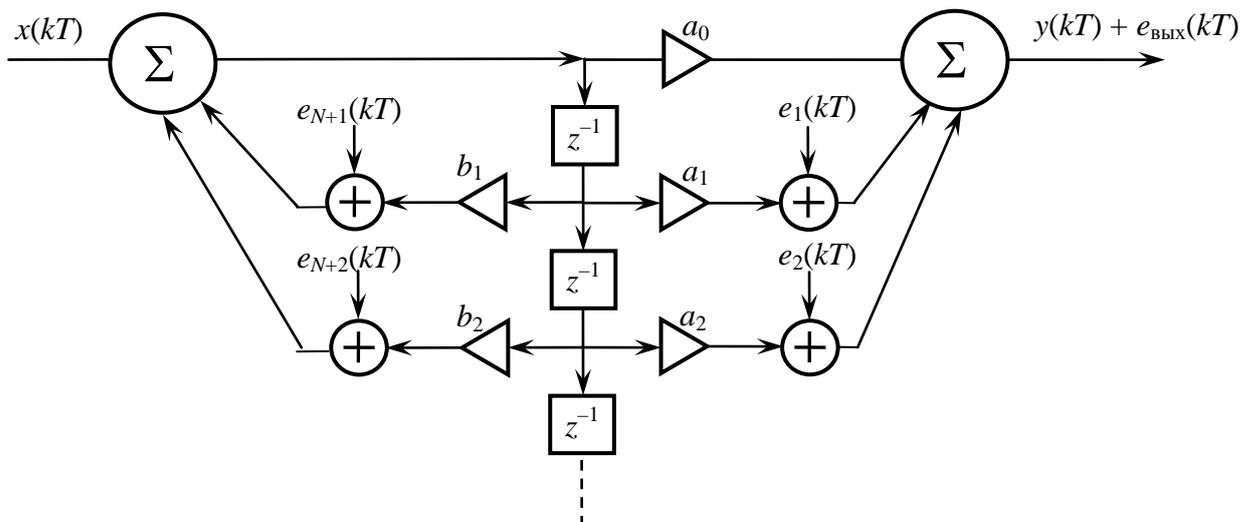


Рис. 2.12. Эквивалентная шумовая схема цифрового фильтра в канонической форме.

Источники шума $e_{N+1}(kT)$, $e_{N+2}(kT)$, ..., возникающего при округлении результатов умножения на коэффициенты в рекурсивной части фильтра, оказываются подключенными ко входу фильтра. Дисперсия порождаемого ими шума на выходе фильтра может быть вычислена по формуле (2.32) или (2.34).

$$\sigma_{\text{ВЫХ} 2}^2 = M \cdot \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT) = M \cdot \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint H_{\text{рек}}(z) H_{\text{рек}}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (2.39)$$

Результирующая дисперсия шума на выходе определяется суммой выражений (2.38) и (2.39):

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{\text{ВЫХ } 1}^2 + \sigma_{\text{ВЫХ } 2}^2. \quad (2.40)$$

В случае последовательно или параллельной форм реализации фильтра каждое звено может быть реализовано или в прямой, или в канонической форме. Расчет шума квантования, возникающего при округлении результатов промежуточных вычислений в этих случаях проводится аналогично рассмотренному.

Проведенный анализ показывает, что шум округления на выходе цифрового фильтра зависит от формы его реализации. Для выбора оптимальной формы реализации необходимо в каждом конкретном случае провести расчет дисперсии шума квантования на выходе фильтра. Однако более детальный анализ шумов округления позволяет выявить общие закономерности, согласно которым в большинстве случаев наилучшей является последовательная или параллельная форма фильтра.

2.6.4. Ошибки, вызываемые неточными значениями коэффициентов фильтра

При синтезе цифровых фильтров значения коэффициентов фильтра $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$, получающиеся в результате расчета, приходится округлять с заданной степенью точности. Например, в результате расчета получено значение некоторого коэффициента $a_k = 2,8374$. Это значение округляют, например, до трех значащих цифр: $a_k = 2,84$. В результате этого фактические параметры цифрового фильтра несколько отличаются от расчетных.

Ошибки этого типа наибольшую роль играют в рекурсивных фильтрах, которые можно уподобить цепям, охваченным глубокой положительной обратной связью. Небольшие изменения параметров фильтра приводят к небольшим перемещениям его полюсов, но если эти полюсы расположены близко к единичной окружности в плоскости z , то такие смещения могут привести к резким изменениям параметров фильтра и даже к потере его устойчивости. Поэтому разработка любого цифрового фильтра обязательно должна сопровождаться исследованием влияния неточности параметров. Это особенно важно для фильтров высокого порядка, где такое влияние может быть очень сильным. Поэтому обычно стараются избежать применения фильтров высокого порядка, заменяя их последовательно или параллельно соединенными фильтрами 1-го и 2-го порядков.

2.6.5. Предельные циклы низкого уровня

Если сигнал на входе цифрового фильтра мал по величине, то вследствие округления результатов вычисления на выходе фильтра могут возникнуть специфические периодические колебания.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим рекурсивный цифровой фильтр 1-го порядка, описываемый разностным уравнением

$$y(nT) = x(nT) - 0,9 y(nT - T).$$

Подадим на вход этого фильтра сигнал

$$x(nT) = \begin{cases} 10, n = 0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

Если результаты вычисления не округлять, на выходе фильтра получится последовательность +10; -9; +8,1; -7,29; +6,561; -5,8949; + 4,80541; -4,324869; Абсолютные значения входного сигнала убывают, стремясь к нулю по экспоненциальному закону.

Теперь рассмотрим реальный цифровой фильтр, результаты вычисления в котором округляются до целочисленных значений. При подаче того же сигнала на вход этого фильтра на его выходе возникает последовательность +10; -9; +8; -7; +6; -5; + 5 ; -5; +5; -5; ... Спустя время $5T$ после подачи входного сигнала на выходе фильтра устанавливаются периодические колебания, амплитуда которых равна 5, а период повторения вдвое больше периода дискретизации. В фильтре другого типа амплитуда и частота периодических колебаний на выходе фильтра могут быть иными.

Рассмотренные предельные циклы являются очень нежелательным явлением, так как приводят к возникновению паразитных колебаний на выходе фильтра, уровень которых может значительно превышать уровень шума квантования. Предельные циклы обычно возникают при прекращении действия сигнала на входе фильтра. Поэтому при разработке систем цифровой обработки следует избегать режимов, приводящих к паузам входного сигнала.

Рассмотренные эффекты квантования являются главными источниками погрешностей цифровой обработки сигналов. Радикальным методом снижения этих погрешностей является увеличение числа разрядов чисел, обрабатываемых в вычислительном устройстве. Однако этот путь в большинстве случаев бывает нежелательным, так как приводит к усложнению и удорожанию фильтров, а в ряде случаев оказывается неосуществимым из-за технологических трудностей. Поэтому на практике приходится искать компромиссные решения, выбирая оптимальную для каждого случая структуру фильтра.

3. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

3.1. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является основной математической характеристикой дискретных сигналов, аналогом обычного преобразования Фурье. Оно применяется для сигналов, имеющих конечное и фиксированное число степеней свободы.

Для вывода дискретного преобразования Фурье воспользуемся представлением дискретного сигнала в виде модулированной последовательности δ -функций:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad (3.1)$$

которое отличается от (2.16) пределами суммирования. Подставляя (3.1) в формулу классического преобразования Фурье, получим:

$$S_{\psi}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\omega kT}. \quad (3.2)$$

Рассматривая (3.2) для дискретных значений частоты $\omega = n\Omega$, перейдем к дискретному спектру:

$$S(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jn\Omega kT}. \quad (3.3)$$

Производя замену $\Omega T = 2\pi T/T_c = 2\pi/N$, получим окончательное **выражение для дискретного преобразования Фурье (ДПФ)**:

$$S(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (3.4)$$

Количество значений спектра, вычисляемого с помощью ДПФ, равно количеству значений сигнала, т.е. числу степеней свободы сигнала N .

Как и в теории обычных, непрерывных сигналов, существует **обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)**, позволяющее вычислять значения дискретного сигнала по значениям его дискретного спектра:

$$f(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n\Omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}. \quad (3.5)$$

Справедливость этого выражения легко проверить, подставляя сюда $S(n\Omega)$ из (3.4).

Дискретное преобразование Фурье может использоваться не только для сигналов, являющихся функцией времени, но также и для упорядоченных числовых последовательностей. В этом случае вместо дискретного времени kT и дискретной частоты $n\Omega$ в формулах прямого и обратного ДПФ фигурируют номера элементов последовательностей:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad (3.6)$$

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}. \quad (3.7)$$

Важным свойством дискретного преобразования Фурье является его периодичность. Она следует из периодичности спектра дискретных сигналов. Свойство периодичности ДПФ необходимо учитывать при выполнении практических расчетов, связанных с обработкой сигналов.

Для доказательства свойства периодичности ДПФ запишем выражение для F_n , где $n = n_0 + N$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j(n_0+N)k\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jn_0k\frac{2\pi}{N}} e^{-jNk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jn_0k\frac{2\pi}{N}} = F_{n_0}.$$

Вследствие симметрии прямого и обратного дискретных преобразований Фурье свойство периодичности распространяется и на функцию времени $f(kT)$ или f_k . Если продолжать сигнал за пределы номеров $k = 1$ и $k = N - 1$, то продолжать надо, учитывая периодичность, т.е.: $f_N = f_0$; $f_{N+1} = f_1$; $f_{N+2} = f_2$; Поэтому, чтобы подчеркнуть периодичность сигнала, его иногда изображают на окружности, как показано на рис. 3.1.

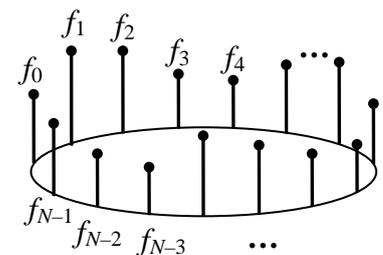


Рис. 3.1. Дискретный периодический сигнал.

Благодаря свойству периодичности при вычислении ДПФ не обязательно пределы суммирования должны быть от 0 до $N - 1$. Могут быть другие пределы суммирования, например, от 1 до N или от -1 до $N - 2$... Важно лишь, чтобы были использованы все N значений сигнала.

Пример 3.1. В качестве примера вычисления ДПФ рассмотрим простейший дискретный сигнал, состоящий из двух отсчетов: $f_0 = a$ и $f_1 = b$ (рис. 3.2, а). Применяя к нему формулу ДПФ (3.6), получим $S_0 = a + b$, $S_1 = a - b$ (рис. 3.2, б). Если теперь применить к этому результату формулу обратного ДПФ (3.7), то, как нетрудно убедиться, получим исходный сигнал $f_0 = a$, $f_1 = b$.

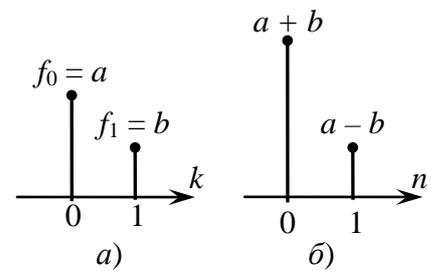


Рис. 3.2. К примеру 3.1: дискретный сигнал (а) и его ДПФ (б).

Пример 3.2. Найдем ДПФ сигнала, состоящего из 4-х одинаковых отсчетов: $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = a$ (рис. 3.3, а). Применяя к дискретному сигналу формулу ДПФ (3.6), получим:

$$F_0 = \sum_{k=0}^3 ae^{-j0} = 4a,$$

$$F_1 = \sum_{k=0}^3 ae^{-jk\frac{\pi}{2}} = ae^{-j0} + ae^{-j\frac{\pi}{2}} + ae^{-j\pi} + ae^{-j\frac{3\pi}{2}} = 0,$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^3 ae^{-jk\pi} = ae^{-j0} + ae^{-j\pi} + ae^{-j2\pi} + ae^{-j3\pi} = 0,$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^3 ae^{-jk\frac{3\pi}{2}} = ae^{-j0} + ae^{-j\frac{3\pi}{2}} + ae^{-j3\pi} + ae^{-j\frac{9\pi}{2}} = 0.$$

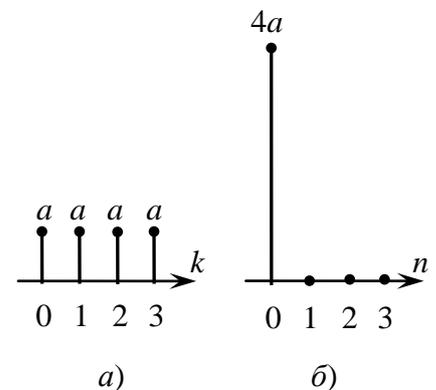


Рис. 3.3. К примеру 3.2: дискретный сигнал (а) и его ДПФ (б).

Следовательно, ДПФ сигнала имеет вид, представленный на рис. 3.3, б.

Рассмотрим **физический смысл полученного результата**. Исходный сигнал f_k – это не дискретизированный прямоугольный импульс. Если продолжить сигнал за пределы изображенных на рис. 3.3,а четырех отсчетов, то это будут не нули, а такие же значения, равные a . То есть представленный сигнал f_k – это дискретизированный постоянный сигнал, спектр которого – единственная составляющая на нулевой частоте, что мы и видим на рис. 3.3, б.

Применим к полученному дискретному спектру обратное ДПФ:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{4} 4a = a \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

т.е. при любых k значения $f_k = a$. Мы получили исходный сигнал.

Дискретное преобразование Фурье циклической свертки

Важным свойством ДПФ является его связь с *дискретной сверткой*. Различают две дискретных свертки: *линейная и циклическая*. ДПФ применяют к *циклической свертке*.

Циклической сверткой двух сигналов $x(kT)$ и $y(kT)$ называют выражение вида:

$$f(mT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)y(mT - kT). \quad (3.8)$$

или

$$f_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k}. \quad (3.9)$$

Сигналы $x(kT)$ и $y(kT)$, а также свертка $f(mT)$ обязательно содержат одинаковое число отсчетов, равное N .

Применим ДПФ к формуле дискретной свертки:

$$F_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-jnm\frac{2\pi}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k} e^{-jnm\frac{2\pi}{N}}.$$

Обозначим $m - k = l$, тогда $m = k + l$. Поменяем местами суммирование по m и по k , в результате получим:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-k}^{N-1-k} x_k y_l e^{-jn(l+k)\frac{2\pi}{N}}.$$

Учитывая, что при вычислении ДПФ суммирование не обязательно проводить от 0 до $N - 1$, окончательно получим:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \sum_{l=-k}^{N-1-k} y_l e^{-jnl\frac{2\pi}{N}} = X_n Y_n, \quad (3.10)$$

где $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$, $Y_n = \sum_{l=-k}^{N-1-k} y_l e^{-jnl\frac{2\pi}{N}}$ – ДПФ сигналов $x(kT)$ и $y(kT)$

соответственно.

Таким образом, ДПФ дискретной свертки двух сигналов равно произведению ДПФ этих двух сигналов.

3.2. Быстрое преобразование Фурье

Недостатком дискретного преобразования Фурье является большое количество математических операций, которые необходимо произвести при применении формулы (3.6) или (3.7). Если число степеней свободы сигнала равно N , то для расчета по формулам дискретного преобразования Фурье необходимо выполнить N^2 умножений и N^2 сложений комплексных чисел – всего $2N^2$ арифметических операций. При большом N такая обработка сигналов оказывается слишком трудоемкой.

Для облегчения вычисления дискретного преобразования Фурье применяют **специальные алгоритмы, которые позволяют во много раз сократить объем необходимых вычислений**. Такие алгоритмы называют **быстрым преобразованием Фурье**.

Существуют различные алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Каждый из них применяют в определенной ситуации, в зависимости от того, на какие множители может быть разложено число степеней свободы N . Наиболее простые алгоритмы получаются, если N является степенью числа 2. Рассмотрим один из таких алгоритмов, основанный на так называемом прореживании по времени.

Пусть требуется вычислить дискретное преобразование Фурье числовой последовательности f_k :

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}.$$

Поскольку число отсчетов сигнала N – четное, исходную последовательность f_k можно разбить на две: g_i куда войдут все f_k с четными номерами, и h_i куда войдут все f_k с нечетными номерами (рис. 3.4), так что

$$g_i = f_{2i}; \quad h_i = f_{2i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, N/2 - 1).$$

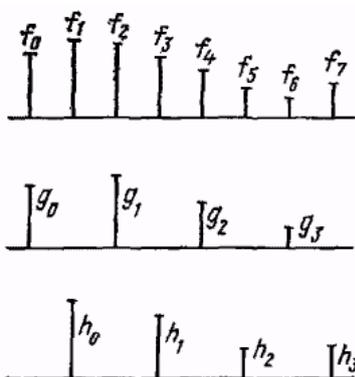


Рис. 3.4. К выводу алгоритма БПФ.

Применим дискретное преобразование Фурье к последовательностям g_i и h_i , при этом учтем, что последовательности g_i и h_i содержат по $N/2$ членов

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k e^{-jnk \frac{4\pi}{N}}$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k e^{-jnk \frac{4\pi}{N}}$$

Для сокращения записи обозначим $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Тогда

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot W^{nk}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k \cdot W^{2nk}$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k \cdot W^{2nk}$$

Нашей конечной целью является вычисление значений F_n . Учитывая, что все члены последовательности f_k принадлежат g_k или h_k , можно записать:

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{N/2-1} (g_k \cdot W^{2kn} + h_k \cdot W^{2(k+1)n}) = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k \cdot W^{2kn} + W^n \sum_{k=0}^{N/2-1} h_k \cdot W^{2kn} = \\ &= G_n + W^n H_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, значения F_n можно вычислить по известным значениям G_n и H_n . Однако формула (3.11) справедлива только для $n \leq N/2 - 1$, так как G_n и H_n не определены для больших значений n . Поэтому для $n \geq N/2$ значения F_n можно вычислить, используя свойство периодичности дискретного преобразования Фурье:

$$F_n = G_{n-N/2} + W^n H_{n-N/2}.$$

Учитывая, $W^n = W^{n-N/2} \cdot W^{N/2} = -W^{n-N/2}$, получим окончательную расчетную формулу для F_n при $n \geq N/2$:

$$F_n = G_{n-N/2} - W^{n-N/2} H_{n-N/2}. \quad (3.12)$$

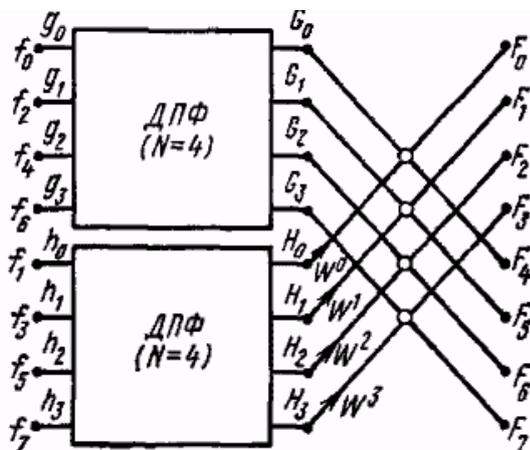


Рис. 3.5. Замена восьмиточечного ДПФ двумя четырехточечными.

Процесс вычисления дискретного преобразования Фурье по формулам (3.11), (3.12) схематически изображен на рис. 3.5 с помощью направленного сигнального графа. Здесь каждое из умножений на W^n представлено в виде стрелки, под которой записан соответствующий множитель. Кружочки схематически обозначают сложение (вычитание), причем линия,

отходящая от кружочка вправо вверх, соответствует сумме, а отходящая вправо вниз – разности двух значений, подводимых к кружочку слева. Например, сумма значений G_2 и H_2W^2 равна F_2 а разность этих значений равна F_6 .

Для вычисления значений G_n и H_n нужно выполнить два дискретных преобразования Фурье, однако число дискретных значений в каждом из этих преобразований оказывается в 2 раза меньше, чем в исходном преобразовании Фурье и равно $N/2$. При этом для вычисления G_n и H_n необходимо выполнить по $2(N/2)^2$ арифметических операций, и еще $N + N/2$ операций необходимо произвести в процессе расчетов значений F_n по формулам (3.11), (3.12). Таким образом, общее число арифметических операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье, будет равно $N^2 + 3/2 N$, что при большом N оказывается значительно меньше, чем при вычислении F_n по общей формуле дискретного преобразования Фурье. Если число степеней свободы сигнала N является степенью числа 2, то число $N/2$ тоже будет четным. В этом случае для вычисления значений G_n и H_n вместо общей формулы дискретного преобразования Фурье можно применить алгоритм, аналогичный только что рассмотренному. При этом общая процедура расчета может быть схематически представлена сигнальным графом, представленным на рис. 3.6.

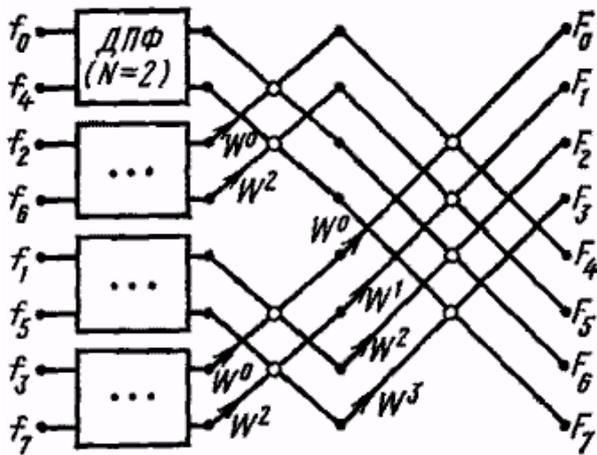


Рис. 3.6. Замена четырехточечных ДПФ двухточечными

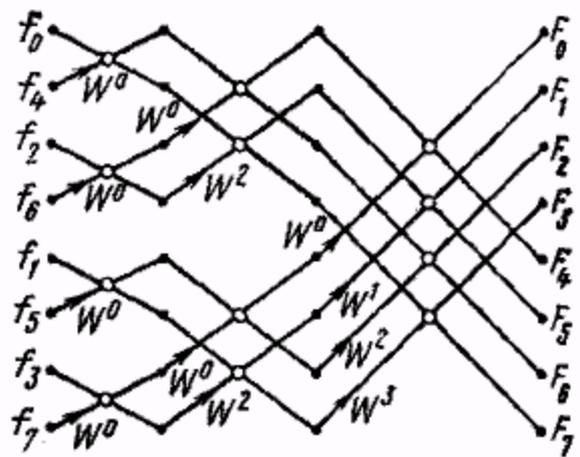


Рис. 3.7. Схематическое изображение алгоритма БПФ

Процесс упрощения алгоритма расчета можно продолжать до тех пор, пока не останутся только простейшие двухточечные дискретные преобразования Фурье. В результате получим сигнальный граф для $N = 8$, изображенный на рис. 3.7. Детальное рассмотрение этого рисунка позволяет точно определить число арифметических операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье. Число умножений определяется числом стрелок на рис. 3.7, а число сложений (вычитаний) – числом кружочков, умноженным на 2. В рассмотренном случае восьмиточечного дискретного преобразования Фурье в

соответствии с рис. 3.7 необходимо выполнить $8 \cdot 3$, т. е. $N \log_2 N$ сложений (вычитаний) и $4 \cdot 3$, т. е. $1/2N \log_2 N$ умножений.

Фактическое число умножений оказывается несколько меньше, так как часть из них оказывается тривиальными умножениями на $W^0 = 1$.

Таким образом, при применении данного алгоритма для вычисления дискретного преобразования Фурье последовательности из N точек требуется выполнить $N \log_2 N$ сложений и самое большее $1/2N \log_2 N$ умножений. Для сравнения напомним, что при использовании обычной формулы дискретного преобразования Фурье необходимо выполнить $2N^2$ арифметических операций. Применение быстрого преобразования Фурье при $N > 1000$ позволяет сократить объем вычислений более чем в 100 раз.

Кроме рассмотренного алгоритма быстрого преобразования Фурье существует ряд других, которые применяют в тех случаях, когда N не является степенью числа 2, а раскладывается на другие простые сомножители. Все эти алгоритмы подробно рассмотрены в специальной литературе.

3.3. Применение быстрого преобразования Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) применяется во всех тех случаях, когда нужно рассчитать преобразование Фурье какой-либо функции.

Мы рассмотрим два направления применения БПФ в радиотехнике: расчет спектра сигнала и цифровая обработка сигналов.

Для **расчета спектра сигнала** его нужно предварительно оцифровать, т.е. задать в виде массива значений. Всего значений должно быть 2^m (т.е. 512, или 1024, или 2048, ...). Чем сложнее форма сигнала, тем больше должно быть число значений. Интервал между отсчетными значениями выбирается в соответствии с теоремой В.А.Котельникова с 2-5 кратным запасом. Если число значений сигнала получается меньше, чем 2^m , его нужно дополнить нулями.

К массиву сигнала (обозначим его u) применяют оператор БПФ и получают массив значений спектра S :

$$S = \text{FFT}(u) \text{ или } S = \text{CFFT}(u).$$

Рассчитанный спектр имеет такое же количество значений, как и сигнал, т.е. $N = 2^m$.

Рассмотрим вычисление спектра на примере прямоугольного импульса. импульс опишем следующим массивом, содержащим 512 значений:

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq i \leq 25 \\ 0 & \text{для } 26 \leq i \leq 511 \end{cases}$$

Применяя к этому массиву процедуру БПФ, получим спектр, модуль которого изображен на рис. 3.8,а.

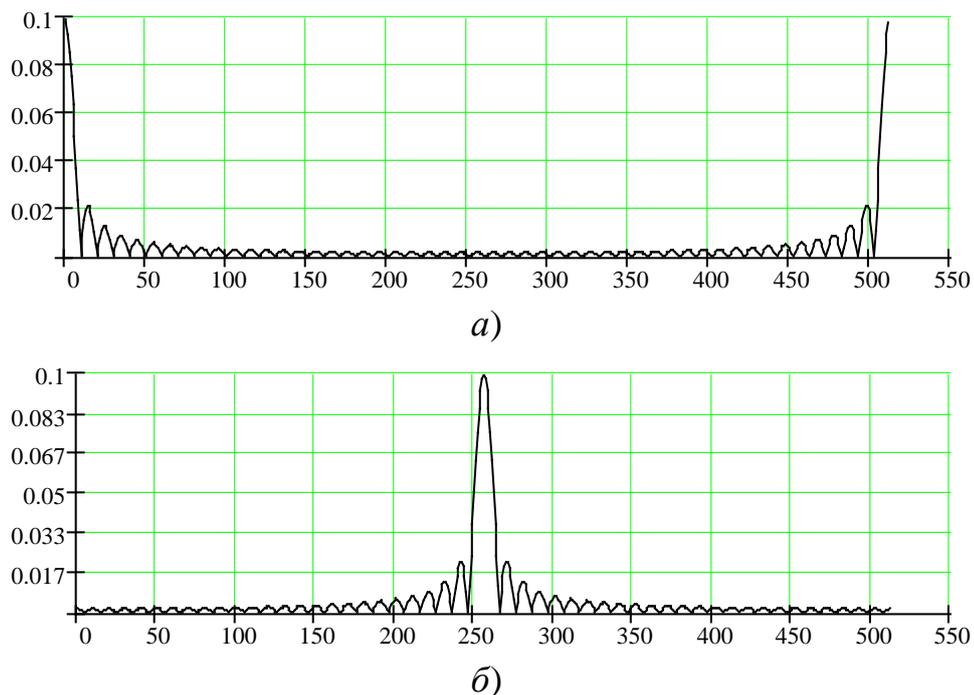


Рис. 3.8. График модуля БПФ

БПФ, как модификация ДПФ, обладает свойством периодичности. Отсчеты от 0 до $N/2 - 1$ описывают область положительных частот, отсчеты от $N/2$ до $N - 1$ – область отрицательных частот. Чтобы получить привычное нам изображение спектра, нужно отсчеты с от $N/2$ до $N - 1$ перенести в область отрицательных частот. Результат такого переноса представлен на рис. 3.8,б.

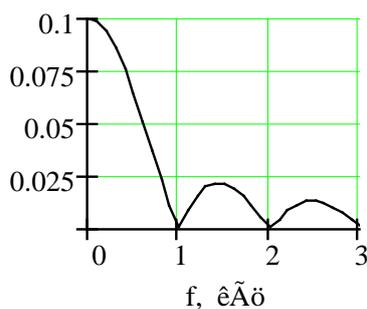


Рис. 3.9. График модуля БПФ с реальным масштабом по оси частот

Для определения масштаба по оси частот воспользуемся теоремой Котельникова в спектральной области, в соответствии с которой интервал дискретизации по частоте равен $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$.

Если принять, например, что длительность импульса, содержащего 51 отсчет, равна 1 мс, то полная длительность сигнала (512 отсчетов) $T_c = 10$ мс. Отсюда интервал дискретизации по частоте $\Omega = 2\pi \cdot 10^2$ рад/с или $F = 100$ Гц. Отметим, что положение первого нуля спектра соответствует $i = 10$, т.е. частоте 1 кГц, как и следовало ожидать (рис. 3.9).

Рассмотренный пример позволяет сформулировать рекомендации по выбору количества отсчетов, которыми описывается сигнал и количества нулевых отсчетов. Если бы мы выбрали количество нулевых отсчетов таким же,

как число отсчетов импульса, т.е. $T_c = 2T_{и}$, тогда на каждый лепесток спектра приходилось бы только 2 отсчета и изображение спектра получилось бы слишком грубым. Отсюда следует вывод, что при вычислении спектров сигналов, подобных рассмотренному, количество нулевых отсчетов должно приблизительно в 10 раз превышать число отсчетов сигнала.

Применение БПФ для цифровой обработки сигналов.

Пусть требуется входной сигнал $u_1(t)$ пропустить через линейный фильтр с частотной характеристикой $\dot{K}(\omega)$ и найти выходной сигнал $u_2(t)$. С помощью БПФ эта задача решается следующим образом. Входной сигнал подвергается дискретизации и с помощью БПФ находят его дискретный спектр $\dot{S}_1(n\Omega)$. Затем $\dot{S}_1(n\Omega)$ умножают на $\dot{K}(n\Omega)$ и находят спектр выходного сигнала $\dot{S}_2(n\Omega)$:

$$\dot{S}_2(n\Omega) = \dot{S}_1(n\Omega) \cdot \dot{K}(n\Omega).$$

После этого применяют обратное БПФ к спектру $\dot{S}_2(n\Omega)$ и находят выходной сигнал $u_2(t)$.

Этот метод удобно применять, если входной сигнал имеет не слишком большую длительность, и число отсчетов для его описания не должно превышать несколько сотен тысяч.

Недостаток метода состоит в том, что сигнал на выходе получается с некоторым запаздыванием на время, необходимое для выполнения перечисленных операций.

Если сигнал длинный, а результаты его обработки нужно получать до завершения действия входного сигнала, то используется следующий алгоритм. Входной сигнал разбивают на блоки по 215 или 1024 отсчета. После поступления первого блока производится его обработка по изложенной выше схеме, и находят соответствующий блок выходного сигнала. После этого обрабатывается второй блок входного сигнала, и находят второй блок выходного сигнала и так далее. В результате формируется выходной сигнал с некоторой задержкой по отношению к входному.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему В.А.Котельникова. Как она применяется при дискретизации сигналов?
2. Каковы особенности спектров дискретных сигналов?
3. Объясните основные причины возникновения погрешностей дискретизации и восстановления сигналов.
4. Что такое шумы квантования? К чему они приводят при обработке сигналов в ЦФ?
5. Что такое дискретное преобразование Фурье? Каковы его свойства?

6. Чему равно дискретное преобразование Фурье циклической свертки двух сигналов?
7. На каком принципе основан алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)?
8. Как рассчитать шаг дискретизации по частоте при применении БПФ?
9. Как применить БПФ для обработки сигналов?

Литература

Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы.

Карташев В.Г., Жихарева Г.В. Основы теории сигналов. – М.: МЭИ, 2002.

Карташев В.Г., Шалимова Е.В. Радиотехнические цепи и сигналы. Сборник задач. – М.: МЭИ. 2013.

Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: URSS, 2016.

Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982.