ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

«МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ»

Цели работы

Научиться вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной криволинейным контуром используя три подхода.

1. Численное интегрирование. Приближённый метод средних прямоугольников. Основные модели метода: Сетка, Одномерные дискретные множества, Прямоугольник.
2. Метод Монте-Карло. Также относится к приближённым методам интегрирования. Основные модели метода: Дискретные множества, Случайные числа, Статистический анализ.
3. Аналитический метод. Вычисление определённых интегралов по формуле Ньютона-Лейбница. Основные модели метода: Непрерывные множества, Определённый интеграл.

РАЗДЕЛ 1. ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ (ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА)

Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя линиями:

1) $x = 1.0$,

2) $x = 3.0$,

3) $A1(x) = \sin(W1 \cdot x)$ и

4) $A2(x) = 2.0 + \cos(W2 \cdot x)$

тремя методами.

1. Численное интегрирование (до сходимости).
2. Метод Монте-Карло (до сходимости).
3. Аналитический.

Значения частот $W1$ и $W2$ взять из Лабораторной работы №1.

Результаты интегрирования записывайте в Таблицы 1–3.

План выполнения Лабораторной работы изложен в Разделе 7.

РАЗДЕЛ 2. МОТИВАЦИЯ

В Лабораторной работе рассмотрены самые распространённые модели, которые широко используются для вычисления площади фигур произвольной формы (в том числе и так называемых неправильных фигур).

Типовые характеристики фигур (площадь, периметр, центр масс, момент инерции и т.д.) могут быть вычислены с помощью одной формулы только для весьма ограниченного множества типов фигур. Эти формулы можно найти в многочисленных математических и инженерных справочниках. В общем случае для вычисления площади фигур, ограниченных контуром произвольной формы приходится пользоваться специальными моделями, изучение которых и является содержанием Лабораторной работы.

С такой задачей, как вычисление площади приходится встречаться не только при решении геометрических задач, но и в различных приложениях связанных с моделированием механических, теплотехнических, электротехнических и многих других процессов.

> В механике в случае прямолинейного движения или движения по естественной траектории если известна функциональная зависимость скорости от времени $U=U(t)$, то длину L пути можно вычислить как площадь фигуры под кривой (U, t); аналогично зная зависимость ускорения от времени $a=a(t)$ можно вычислить скорость U; а зная зависимость силы от координаты $F(x)$, можно найти работу А, как площадь фигуры под кривой (F, x) и т.п.
>
> В теплотехнике работу тепловой машины за один цикл можно вычислить как площадь фигуры, ограниченной контуром кривой в фазовом пространстве давление–объём (P, V).
>
> В электротехнике для определения режимов работы трансформатора в зависимости от разных частот и амплитуды переменного тока необходимо вычислять такую характеристику сердечников как величина (площадь) петли гистерезиса.

С другой стороны, аналитический и численный методы интегрирования, рассмотренные (в достаточно простой постановке) в данной Лабораторной работе применяются при решении обширного класса задач.

> В геометрических приложениях, немного усовершенствовав методы, использованные в Лабораторной работе, можно вычислить объём тела, длину траектории, площадь поверхности, центр масс, механические моменты.
>
> Физические, инженерные, экономические, телекоммуникационные приложения: вот далеко не полный перечень приложений, в которых используются методы аналитического и численного интегрирования.
>
> К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

РАЗДЕЛ 3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРРИРОВАНИЕ. МЕТОД СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Изучение методов, используемых для вычисления площади фигур, начинаем именно с метода средних прямоугольников потому, что он более нагляден с точки зрения технологий моделирования. Вычислительные и графические возможности пакета MATLAB позволяют эффективно произвести наглядное моделирование процесса измерения площади данным методом.

Площадь фигуры в настоящей Лабораторной работе достаточно легко вычислить аналитически (Раздел 5), однако и в этом случае реализация метода численного интегрирования будет полезной в качестве теста реализации алгоритма. В случае удовлетворительного совпадения результата с аналитическим решением (в пределах небольшой погрешности $\varepsilon = 0.001$), можно сделать вывод, что алгоритм составлен и реализован верно. Сопоставления результатов, полученных разными методами, будут произведены в Таблице 3.

Метод прямоугольников основан на том, что фигура, ограниченная криволинейным контуром заменяется (аппроксимируется) совокупностью (множеством) прямоугольников (площадь которых вычисляется очень просто). Основания прямоугольников параллельны оси x или находятся на оси x. Высота прямоугольника определяется значениями функций. Площадь фигуры произвольной формы аппроксимируется суммой площадей прямоугольников. Иначе говоря, криволинейная фигура заменяется на ступенчатую.

> Метод исследования, применяемый в данном Разделе, основан на таком понятии теории моделирования как “аппроксимация”, с которым мы уже познакомились при выполнении Лабораторной работы №2.
>
> В численном интегрировании используют также такие аппроксимации, как трапеция (в методе трапеций) и фигура с параболической верхней границей (в методе симпсона). Площади этих фигур достаточно легко вычислить, что позволяет составить несложный алгоритм.

Центральными понятиями в численном интегрировании такими методами, как метод прямоугольников, трапеций и симпсона является сетка, сеточный аргумент и сеточная функция.

Сетки можно классифицировать по типу разбиения на отрезки:

1) Сетка с постоянным шагом;

2) Сетка с переменным шагом.

В настоящей Лабораторной работе будет использован первый тип сетки (с шагом `hp`).

Сетка является основой построения модели численного интегрирования. Основной отрезок $[a,b]$ (являющийся непрерывным множеством значений независимого аргумента) разбивается на конечное множество отрезков (элементов – рёбер).

> В двумерных и трёхмерных задачах при построении сетки область тоже разбивается на элементы. Трёхмерные элементы, в зависимости от их топологии (типа многогранника) бывают трёх видов: призма, пирамида, тетраэдр. Двумерные элементы называются гранями. Одномерные – рёбрами. Сетка называется конформной, если соседние элементы “правильным образом”

прилегают друг к другу: то есть без пересечений и пустот. Внутри или на поверхности элемента выбирается одна точка называемая узлом. Именно эта точка и её координаты являются базовыми при составлении вычислительных схем в модельных задачах.

Сумма длин сеточных отрезков равна длине основного отрезка (сетка конформная). Внутри каждого отрезка разбиения или на его границах располагается *узел*. Множество узлов сетки (их координат) является *сеточным аргументом* (то есть дискретным множеством значений независимого аргумента).

При численном интегрировании, в зависимости от выбранного метода узел может принимать одно и трёх положений:

1) В методе правого прямоугольника узлы располагаются на левых границах рёбер (а основание прямоугольника находится справа). Этот метод наиболее распространён в литературе.
2) В методе левого прямоугольника узлы располагаются справа (а основание прямоугольника находится слева)
3) В методе среднего прямоугольника узлы располагаются в серединах (центрах) отрезков. Этот метод будет использован в Лабораторной работе.

Сеточная функция – это множество значений функции, вычисленных для значений сеточного аргумента.

Значение результата численного интегрирования может существенно зависеть от шага сетки `hp`. Поэтому расчёт площади фигуры в Лабораторной работе будем проводить на *последовательности вложенных сеток* (смысл этого термина раскроется далее в Разделе 7 (ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ)).

РАЗДЕЛ 4. ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО.

Метод Монте-Карло, или метод статистических испытаний, – это численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистических оценок для искомых величин.

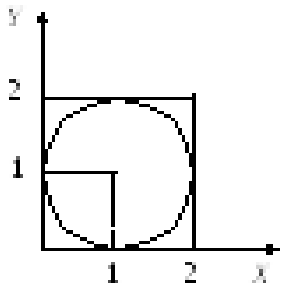
Суть метода состоит в следующем. Для вычисления площади некоторой фигуры, проведем эксперимент: поместим данную фигуру в квадрат и будем наугад бросать точки в этот квадрат. Естественно предполагать, что чем больше площадь фигуры, тем чаще в нее будут попадать точки. Таким образом, можно сделать допущение: при большом числе точек, наугад выбранных внутри квадрата, доля точек, содержащихся в данной фигуре, приближенно равна отношению площади этой фигуры и площади квадрата.

Пример. Вычисление числа π методом Монте-Карло.

Постановка задачи: для вычисления числа π методом Монте-Карло рассмотрим круг радиуса 1 с центром в точке (1, 1). Круг вписан в квадрат, сторона которого, $a = 2$. Тогда площадь квадрата $S_{quad} = a^2 = 2^2 = 4$.

Решение.

Выбираем внутри квадрата N случайных точек. Выбрать точку означает задать ее координаты – числа x и y.



Обозначим $N_{\text{круга}}$ – число точек попавших при этом внутрь круга.

Точка принадлежит квадрату, если $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 2$.

Если $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$, то точка попадает в круг, иначе она находится вне круга.

Геометрически очевидно, что $\dfrac{S_{круга}}{S_{квадрата}} = \dfrac{N_{круга}}{N}$

Отсюда $S_{круга} = \dfrac{S_{квадрата} \cdot N_{круга}}{N}$

То есть для круга единичного радиуса: $S_{круга} = 4\dfrac{N_{круга}}{N}$, но для круга единичного радиуса $S_{круга} = \pi$, следовательно, получаем: $\pi = 4\dfrac{N_{круга}}{N}$.

Данная формула дает оценку числа π. Чем больше N, тем больше точность этой оценки. Следует заметить, что данный метод вычисления площади будет справедлив только тогда, когда случайные точки будут не просто случайными, а еще и равномерно разбросанными по всему квадрату.

Как показывает практика, используя в реальной жизни метод Монте-Карло, можно наугад много раз перебирать все возможности, при этом сохраняя одинаковые характеристики распределения. В результате получится искусственно воссоздать всю картину данного процесса. Затем, повторяя эту картину вновь, каждый раз изменяя условия, можно получить статистические данные, будто они были собраны в реальном времени. Таким же образом можно вновь несколько раз воссоздавать искусственную картину работы практически любого магазина, применяя на практике метод Монте-Карло. Имитационное моделирование в этом случае будет повторять реальные данные. Получатся опять два вышеописанных стохастических процесса. Их попеременное взаимодействие в конечном результате снова выдаст «очередь» практически с такими же показателями, что и в реальной жизни. – Читайте подробнее на FB.ru: http://fb.ru/article/62591/chto-takoe-metod-monte-karlo

Следовательно, метод Монте-Карло в науке состоит в искусственном моделировании посредством многократных повторений в случайных реализациях. Важно отметить, что так называемые единичные реализации иначе именуются статистическими испытаниями. Чтобы понять, что подразумевает под собой механизм случайного выбора, следует попросту воспользоваться самыми обычными игральными костями. Однако на практике, как правило, применяются таблицы случайных чисел. Кроме того, на настоящий момент особой популярностью пользуются и специальные программы для компьютеров, которые среди специалистов именуются генераторами случайных чисел. На самом деле метод Монте-Карло достаточно прост, эффективен и удобен, что и обуславливает его повсеместное использование, как в экономике, так и в других точных науках. – Читайте подробнее на FB.ru: http://fb.ru/article/62591/chto-takoe-metod-monte-karlo

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. К разделам науки, где все в большей мере используется метод Монте-Карло, следует отнести задачи теории массового обслуживания, задачи теории игр и математической экономики, задачи теории передачи сообщений при наличии помех и ряд других.

Метод Монте-Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие метода вычислительной математики (например, развитие методов численного интегрирования) и при решении многих задач успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико-вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения. Трудность решения той или иной задачи на ЭВМ определятся в значительной мере трудностью переложения ее на «язык» машины. Создание языков автоматического программирования существенно упростило один из этапов этой работы. Наиболее сложными этапами поэтому в настоящее время являются: математическое описание исследуемого явления, необходимые упрощения задачи, выбор подходящего численного метода, исследование его погрешности и запись алгоритма. В тех случаях, когда имеется теоретико-вероятностное описание задачи, использование метода Монте-Карло может существенно упростить упомянутые промежуточные этапы. Впрочем, как будет следовать из дальнейшего, во многих случаях полезно и для задач строго детерминированных строить вероятностную модель (рандомизовать исходную задачу) с тем, чтобы далее использовать метод Монте-Карло.

РАЗДЕЛ 5. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА.

Аналитический метод вычисления площадей фигур имеет два основных преимущества перед двумя остальными, рассмотренными в Лабораторной работе:

1. Для широкого класса линий, ограничивающих фигуру можно найти точное значение площади (без дополнительных исследований на сходимость).
2. Для некоторых классов линий, ограничивающих фигуру можно быстро (примерно за минуту) найти точное значение площади, не прибегая к составлению алгоритмов и написания компьютерных программ.

Основной моделью, на котором базируется данный метод, является непрерывное одномерное числовое множество (числовая ось).

Действия, которые можно производить с этим множеством, сформулированы в ряде аксиом (утверждений, не требующих доказательства). Далее, по цепочке, на основе аксиом выводятся и доказываются теоремы, на основе доказанных теорем формулируются и доказываются другие теоремы, и так далее. Числовая ось, аксиомы и теоремы представляют собой область знаний, называемую математическим анализом.

Если имеются две непрерывные величины и при этом значения одной величины зависят от другой, то такая зависимость называется функцией. Исследование функций является одним из предметов математического анализа. Основными методами исследования функций являются дифференциальное исчисление и интегральное исчисление. Результаты, полученные на основе этих методов, имеют широкое применение во многих задачах, связанных с моделированием процессов.

Одним из многочисленных приложений интегрального исчисления является вычисление площадей “неправильных фигур”.

Основным понятием интегрального исчисления является первообразная.

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$. То есть

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

При этом для любой константы *C* имеет место следующее выражение

$$\frac{d[F(x)+C]}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

Из которого следует, что для каждой функции можно найти бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга на константу. Это множество (совокупность) называется *неопределённым интегралом*.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Задача нахождения первообразной в общем виде существенно сложнее нахождения производной. С точки зрения методов нахождения первообразной, функции можно разделить на три класса:

1. функции, у которых невозможно найти первообразную в аналитическом виде;
2. функции, у которых сложно найти первообразную (потребуется или выполнить много действий или применить специальные приёмы интегрирования);
3. функции, у которых легко найти первообразную (потребуется основная таблица интегралов и, возможно, несколько простых действий).

В многочисленных справочниках существуют, так же расширенные таблицы интегралов, в которых частично представлены функции, относящиеся ко второму классу.

В задании к Лабораторной работе фигурируют функции, относящиеся к третьему классу. Задача нахождения первообразной легко сводится к основной таблице интегралов.

Нахождение неопределённого интеграла является одним из этапов вычисления определённого интеграла.

Вычисление, криволинейного, поверхностного, объёмного и т.п. интегралов тоже сводятся к нахождению неопределённого интеграла. Действия, направленные на нахождение любого из интегралов называются *интегрированием*.

Определённым интегралом называется вещественное число, определяемое из выражения

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Выражение (2) называется формулой Ньютона-Лейбница. Эта формула является содержанием теоремы Ньютона-Лейбница (основной теоремы анализа). Вещественные числа a и b называются пределами интегрирования.

Замечательным свойством, которым обладает определённый интеграл, является то, что он равен площади фигуры, ограниченной четырьмя линиями в двумерной декартовой системе координат:

1) $x = a$,

2) $x = b$,

3) $y = 0$ и

4) $y = f(x)$.

Это свойство можно применить для вычисления фигур, ограниченных с одной из сторон кривой линией, заданной в виде функции. Если фигура ограничена с двух сторон такими линиями, то можно использовать один из двух подходов:

а) Один раз использовать формулу Ньютона-Лейбница для подынтегральной функции $f(x) = A2(x) - A1(x)$.

б) Использовать формулу Ньютона-Лейбница для каждой из двух подынтегральных функций: $A1(x)$ и $A2(x)$ отдельно. Потом вычесть из второго первый.

Метод обобщается так же и на случай трёх и четырёх кривых линий, ограничивающих фигуру, но в настоящей Лабораторной работе этот метод рассматриваться не будет.

В завершение следует отметить, что для выполнения задания потребуются, также формула для интеграла суммы двух функций, формула интегрирования сложной функции и основная (базовая) таблица интегралов. "Освежить" знания по интегральному исчислению можно воспользовавшись, например, учебником http://www.iprbookshop.ru/6298.html.

РАЗДЕЛ 6. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ МЕТОДОВ, РАССМОТРЕННЫХ В ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Аналитический метод вычисления площадей фигур имеет два основных преимущества перед двумя остальными, рассмотренными в Лабораторной работе:

1. Для широкого класса линий, ограничивающих фигуру можно найти точное значение площади (без дополнительных исследований на сходимость).
2. Для некоторых классов линий, ограничивающих фигуру можно быстро (примерно за минуту) найти точное значение площади, не

прибегая к составлению алгоритмов и написания компьютерных программ.

Метод прямоугольников имеет следующее преимущество перед аналитическим методом вычисления площадей фигур:

Реализация метода численного интегрирования в меньшей степени зависит от типа линий, ограничивающих фигуру (в смысле классификации функций, которая была приведена в Разделе 5).

В свою очередь (и это можно заметить в формулировке предыдущего предложения) у метода есть некоторые (общие с аналитическим методом) ограничения по сравнению с методом Монте-Карло.

Основное преимущество метода Монте-Карло перед двумя остальными, изложенными в Лабораторной работе заключается в том, что он позволяет работать с областями, содержащими "пустоты". Недостатком же метода в его реализации на ЭВМ является зависимость точности результата от технологии получения последовательности случайных чисел.

Аналитический метод и метод прямоугольников основываются на детерминированных моделях. Метод Монте-Карло основывается на стохастической модели и поэтому результаты в каждом эксперименте могут существенно отличаться друг от друга. Следовательно, необходимо проводить серии экспериментов, а результаты “подвергнуть” статистическому анализу (например, вычислить среднее арифметическое). С ростом количества случайных чисел точность метода возрастает.

РАЗДЕЛ 7. ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Первый пункт плана выполняется аналогично п.1 Лабораторной работы №2 с той разницей, что вместо одной функции $A(t)$ должно быть две функции $A1(t)$ и $A2(t)$.

2. Во втором пункте так же, как и в п.2 Лабораторной работы №2 формируется диапазон с шагом `hp=0.4`. Однако узлы сетки должны располагаться в серединах отрезков (элементов сетки). Диапазон задайте в виде `tp=[ap:hp:bp]`, вычислив предварительно пределы `ap` и `bp` исходя из принципов построения сетки для метода средних прямоугольников. Сформируйте сеточные функции `Ap1` и `Ap2`.

3. Постройте в одной графической области (канве) гистограмму и график воспользовавшись следующим кодом:

```
hold on
bar(tp,Ap2-Ap1,1)
plot(t,A2-A1,'LineWidth',3)
grid on
```

Первая команда листинга запрещает при каждом последующем вызова функции `plot()` удалять предыдущие построения из графической области. Параметр “`1`” во второй строке листинга нужен для того, чтобы заливка распространялась на весь прямоугольник без промежутков. Сохраните (в отчёте) и закройте график.

4. Вычислите площадь ступенчатой функции для шага сетки `hp=0.4` (значения сеточных функций и шаг сетки известны) и запишите результат в Таблицу 1 с точностью до пяти знаков после запятой. В третьей строчке поставьте прочерк – пока не с чем сравнивать. Далее, каждый раз уменьшая `hp` в два раза, сохраняйте график, значение площади, а также абсолютное изменение площади в третьей колонке по формуле, указанной в заголовке. Процесс завершите, когда выполнится условие $\Delta < 0.001$. Постройте точечный график кривой сходимости в логарифмическом масштабе. На оси абсцисс отмечается порядковый номер сетки (из первого столбца Таблицы 1 начиная со второго), на оси ординат величина изменения площади (из четвёртой колонки).

Таблица 1. Метод средних прямоугольников

№	hp	S	$\Delta = \lvert S_i - S_{i-1} \rvert$
1	0.4		–
2	0.2		
3	0.1		

Последнее значение площади запишите в Таблицу 3.

5. Вычислите площадь фигуры с методом Монте-Карло. Для этого сформируйте два множества случайных чисел размером (мощностью) в N=100 элементов в интервалах [1.0,3.0] и [–1.0,3.0] с помощью команд:

```
xm=2*rand(1,100)+1.0;
ym=4*rand(1,100)-1.0;
```

Постройте графики линий $A1(t)$ и $A2(t)$, ограничивающих фигуру, с "разбросанными" точками. Множество точек изобразите с помощью команды

```
plot(xm,ym,'.k')
```

Вычислите количество точек M, расположенных между линиями $A1(t)$ и $A2(t)$ и оцените площадь по методике, предложенной в Разделе 4. Для расчёта потребуется умение работать с циклами и условиями. Навыки программирования в среде MATLAB Вы можете получить, воспользовавшись литературой по системе MATLAB, например, из списка литературы приложенного к дисциплине. Результаты заносите в Таблицу 2.

Особенностью метода Монте-Карло является то, что даже при одинаковых числах N, результаты могут существенно меняться. Поэтому при каждом N проведите серию из пяти экспериментов. Вычислите среднее арифметическую площадь при каждом N. Оцените разброс значений Δ при каждом N как разницу между максимальным и минимальным значением площади;

Повторите эксперимент, увеличив количество точек в два раза. Процесс продолжайте до тех пор, пока не будет обеспечена сходимость с точностью $\Delta < 0.001$. Постройте точечный график в котором на оси абсцисс будут номера серий экспериментов i=1,2,… (см. Таблицу 2), а на оси ординат значения площади. Постройте кривую сходимости в логарифмическом масштабе.

Таблица 2. Метод Монте-Карло

N	***i***	***j***	***M***	***M/N***	***S***	$\bar{S}$	$\Delta = \max\left(S_{i=const,\,j}\right) - \min\left(S_{i=const,\,j}\right)$
100	1	1					
		2					
		3					
		4					
		5					
200	2	1					
		2					
		3					
		4					
		5					
	3						

6. Вычислите площадь аналитическим методом по *формуле Ньютона-Лейбница*. Все выкладки оформите в MS Word.

Таблица 3. Итоговые результаты вычисления площади

Метод	**Площадь фигуры *S***
Аналитический	
…	
…	

РАЗДЕЛ 8. ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по Лабораторной работе должен содержать следующее.

1. Титульный лист.

2. Цель Лабораторной работы.

3. Вариант задания.

4. Полный компилируемый листинг реализованной программы.

5. Графики.

6. Выводы.

РАЗДЕЛ 9. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие модели лежат в основе аналитического метода вычисления площади фигур произвольной формы?

2. В чём заключается метод средних прямоугольников?

3. Каковы особенности применения метода Мотне-Карло при вычислении площади фигур?