

Пример выполнения задания 1.

На стержень, закрепленный между двумя жесткими заделками, действуют продольные силы (см.рис.1). Стержень однородный, модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Задано соотношение площадей отдельных участков стержня:

$A_1 : A_2 : A_3 = 2 : 1 : 1.5$. Длины участков $l_1 = 2 \text{ м}$, $l_2 = 1 \text{ м}$, $l_3 = 3 \text{ м}$.

Выразим продольные усилия через внешние силы (как заданные активные силы, так и неизвестные пока реакции опор R_A и R_D):

$$N_{1 \text{ справа}} = R_A, N_{2 \text{ справа}} = R_A - 50, N_{3 \text{ слева}} = -R_D.$$

Напомним, что при определении знаков продольных сил здесь используется правило знаков, а направление реакций опор выбирается произвольно.

Запишем единственное в данном случае нетривиальное (т.е. не приводящее к тождеству $0 \equiv 0$) уравнение равновесия:

$$\sum F_x = -R_A + 50 - 30 - R_D = 0 \Rightarrow R_A + R_D = 20.$$

Здесь знаки проекций внешних сил связаны, как обычно, с их направлением относительно оси x .

Как видно, система один раз статически неопределима, поскольку для определения двух неизвестных реакций мы располагаем лишь одним уравнением равновесия. Дополнительное уравнение – уравнение совместности перемещений – получим на основе простого заключения о неизменности длины стержня ввиду наличия на его концах жестких закреплений:

$$\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Это уравнение не содержит, однако, в явном виде неизвестных реакций R_A и R_B , поэтому воспользуемся законом Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}, \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3}.$$

Учитывая выражения для продольных сил через внешние силы, перепишем уравнение совместности в виде:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{(R_A - 50) \cdot l_2}{EA_2} - \frac{R_D l_3}{EA_3} = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2A_2} + \frac{(R_A - 50) \cdot 1}{EA_2} - \frac{R_D \cdot 3}{E \cdot 1.5A_2} = 0.$$

Окончательно получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$R_A + R_D = 20,$$

$$2R_A - 50 - 2R_D = 0.$$

Решив ее, найдем $R_A = 22.5 \text{ (кН)}$, $R_D = -2.5 \text{ (кН)}$, затем определим продольные усилия: $N_1 = 22.5 \text{ (кН)}$, $N_2 = -27.5 \text{ (кН)}$, $N_3 = 2.5 \text{ (кН)}$, построим эпюру N_x (см. рис.1).

2. Теперь запишем условия прочности для отдельных участков и подберем их сечения, сохраняя заданные соотношения между ними:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma] \Rightarrow A_1 = 2A_2 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{22.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 1.4 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) = 1.4 (\text{см}^2),$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{A_2} \leq [\sigma] \Rightarrow A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{27.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 1.7 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) = 1.7 (\text{см}^2),$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq [\sigma] \Rightarrow A_3 = 1.5A_2 \geq \frac{2.5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \cong 0.2 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) = 0.2 (\text{см}^2).$$

Разрешив эти неравенства относительно A_2 , примем в соответствии с наиболее сильным из трех неравенств ($A_2 \geq 1.7 (\text{см}^2)$):

$$A_1 = 3.4 \text{ см}^2, \quad A_2 = 1.7 \text{ см}^2, \quad A_3 = 2.6 \text{ см}^2.$$

Отметим, что определение площадей с точностью более одной значащей цифры в десятых не имеет смысла, поскольку исходные данные задаются именно с такой точностью.

3. Построим теперь эпюру напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{22.5 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = 66.2 \text{ (МПа)}, \quad \sigma_2 = \frac{-27.5 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -161.8 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_3 = \frac{2.5 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = 9.6 \text{ (МПа)}.$$

Несмотря на то, что $|\sigma|_{\max} = |\sigma_2| > [\sigma]$, такой перегруз допустим, поскольку он не превышает 5%:

$$\frac{|\sigma|_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{161.8 - 160}{160} \cdot 100\% = 1.1\% < 5\%.$$

4. Найдем абсолютные удлинения участков, проверим условие совместности и определим перемещения сечений B и C :

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{66.2}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = 0.66 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0.66 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-161.8}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.81 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.81 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{9.6}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0.15 \text{ (мм)} \quad ;$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.66 - 0.81 + 0.15 = 0;$$

$$\Delta l_B = \Delta l_1 \approx 0.66 \text{ (мм)}, \quad \Delta l_C = -\Delta l_3 = -0.15 \text{ (мм)},$$

сечение B перемещается вправо, а сечение C - влево (см.рис.1).

5. Пусть стержень изготовлен неточно - длиннее, чем нужно, на $\delta = 0.5 \text{ мм}$ (рис.2). Тогда в нем при установке (сборке) возникнут внутренние усилия (напряжения) даже при отсутствии внешних сил.

Из уравнения равновесия для стержня в целом следует, что опорные реакции равны:

$$\sum F_x = -R_A - R_D = 0 \Rightarrow R_A = -R_D.$$

Методом сечений устанавливаем, что $N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D$.

Далее возможны два равноправных подхода: неточность δ может включаться в уравнение совместности или в физическое уравнение для одного из участков. После подстановки физических уравнений в уравнение совместности в обоих случаях получается одно и то же выражение:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{R_A l_2}{EA_2} - \frac{R_D l_3}{EA_3} + \delta = 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2A_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EA_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5A_2} + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = -\frac{\delta EA_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25 \text{ (кН)}$$

Найдем напряжения и построим эпюру:

$$\sigma_1 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{3.4 \cdot 10^{-4}} = -12.5 \text{ (МПа)}, \quad \sigma_2 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{1.7 \cdot 10^{-4}} = -25 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_3 = \frac{-4.25 \cdot 10^3}{2.6 \cdot 10^{-4}} = -16.35 \text{ (МПа)}.$$

Проверим выполнение условия совместности:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \frac{-12.5}{2 \cdot 10^5} \cdot 2 = -0.125 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.125 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \frac{-25}{2 \cdot 10^5} \cdot 1 = -0.125 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.125 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3}{E} l_3 = \frac{-16.35}{2 \cdot 10^5} \cdot 3 = -0.25 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0.25 \text{ (мм)},$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0.125 - 0.125 - 0.25 + 0.5 = 0.$$

Сечение B перемещается влево на $\Delta l_B = -0.125 \text{ мм}$, сечение C перемещается влево на $\Delta l_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0.25 \text{ мм}$ (см.рис.2).

Пусть второй участок рассматриваемого стержня нагрет на $\Delta t^\circ = 40^\circ \text{ C}$. Поскольку внешние силы на стержень не действуют, внутренние силы на всех участках равны (см.выше):

$$N_1 = N_2 = N_3 = R_A = -R_D.$$

Уравнение совместности запишем так же, как в п.1:

$\Delta l = 0 \Rightarrow \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$, а в физическое уравнение для второго участка внесем слагаемое, учитывающее изменение температуры:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \delta_{t^\circ}, \quad \delta_{t^\circ} = \alpha \cdot \Delta t^\circ l_2 = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 1 = 0.5 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 0.5 (\text{мм}).$$

Здесь $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} (1/^\circ)$ - температурный коэффициент линейного расширения.

Тогда окончательное уравнение для определения R_A запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{R_A l_2}{EA_2} + \delta_{t^\circ} - \frac{R_D l_3}{EA_3} &= 0 \Rightarrow \frac{R_A \cdot 2}{E \cdot 2A_2} + \frac{R_A \cdot 1}{EA_2} + \frac{R_A \cdot 3}{E \cdot 1.5A_2} + \delta_{t^\circ} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_A &= -\frac{\delta_{t^\circ} EA_2}{4} = -\frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{4} = -4.25 (\text{кН}) \end{aligned}$$

Таким образом, фактически расчет на температурное воздействие полностью аналогичен расчету на неточность изготовления.

Следует отметить, что рассмотренный здесь подход – внесение температурной деформации и неточности изготовления в физические уравнения, а не в уравнение совместности, является более общим и облегчает решение задачи в сложных стержневых системах.

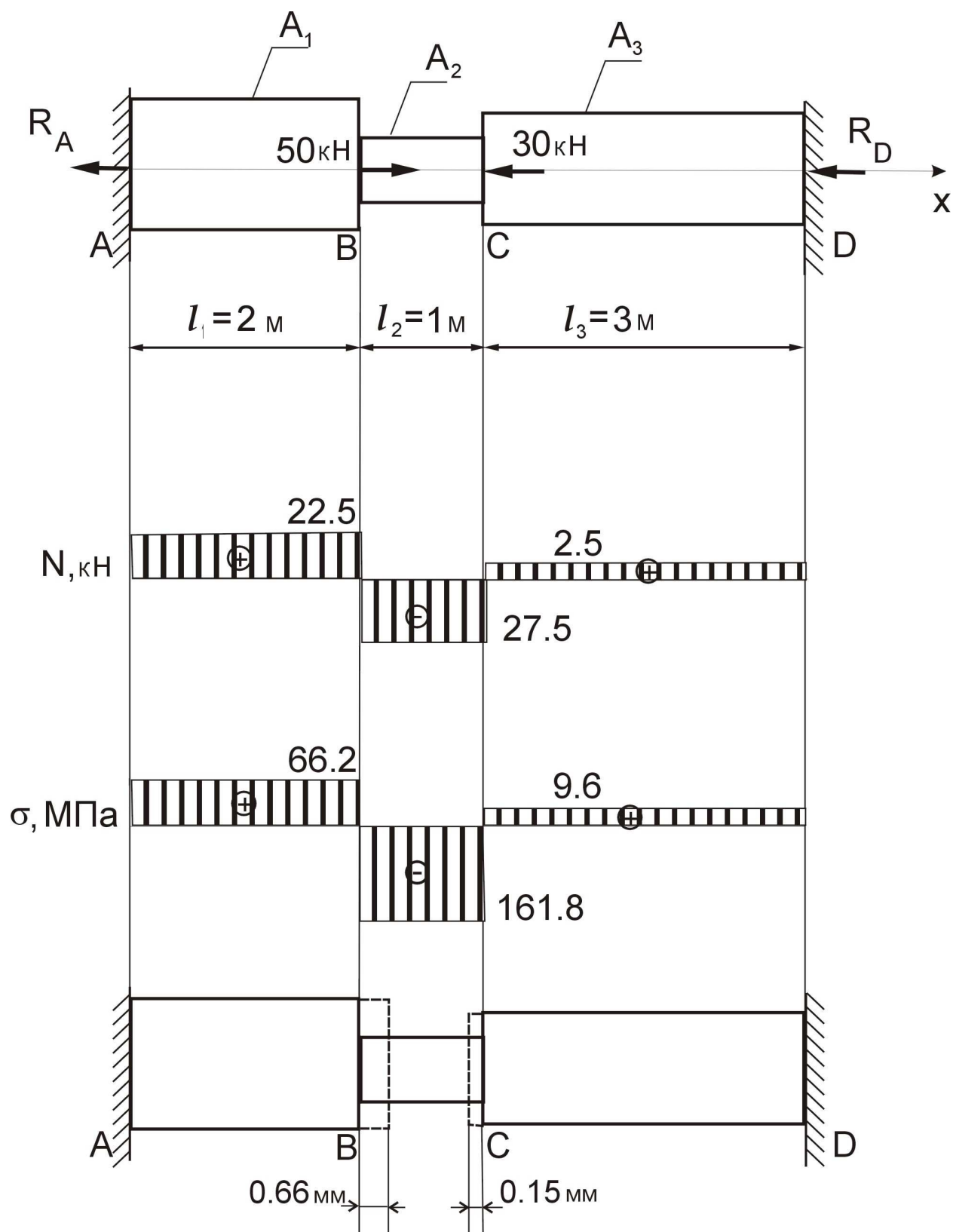


Рис.1

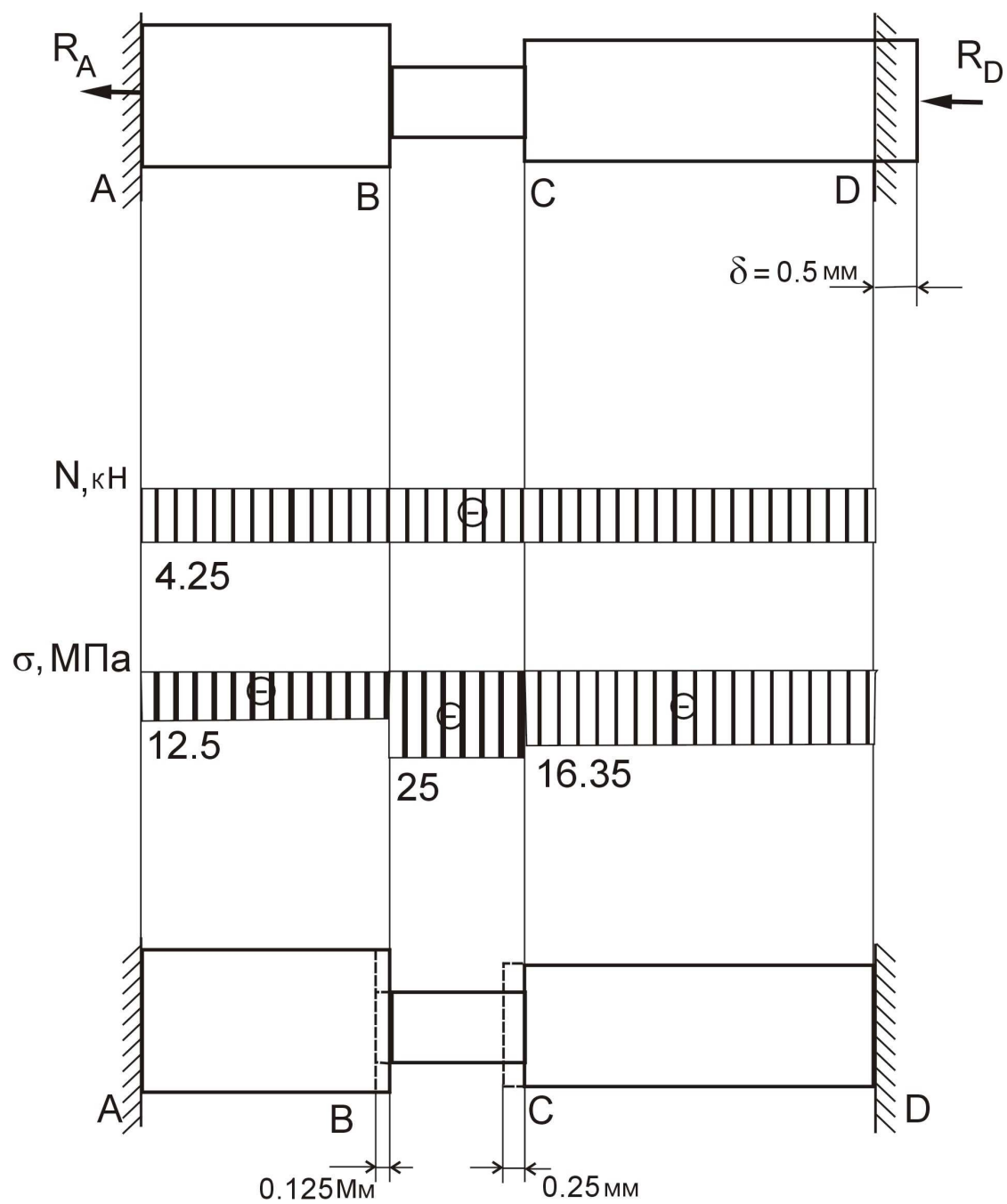


Рис.2