Министерство образования и науки Российской Федерации

Красноярский государственный технический университет

А. Г. Мартынов
К. А. Редкоус
В. Ф. Терентьев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Красноярск 2004

УДК 531.3(075)
М 29

Рецензенты:

В. А. Игнатченко, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. теоретическим отделом Института физики им. Л. В. Киренского СО РАН;

И. О. Богульский, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой «Сопротивление материалов и теоретическая механика» КрасГАУ

Мартынов, А. Г.

М 29 Теоретическая механика. Динамика: Сб. заданий / А. Г. Мартынов, К. А. Редкоус, В. Ф. Терентьев; Под общ. ред. А. Г. Мартынова. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 72 с.

Приведены программа изучения раздела «Динамика», краткие теоретические сведения, задания для выполнения расчетно-графических заданий. Даны примеры их решения и оформления.

Предназначено для студентов направлений подготовки дипломированных специалистов 651400 – «Машиностроительные технологии и оборудование» (спец. 120300–120700), 651500 – «Прикладная механика» (спец. 071100, 071200), 652000 – «Мехатроника и робототехника» (спец. 210300), 653200 – «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы» (спец. 150100, 150600, 170900), 653300 – «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования» (спец. 150200, 150900), 654500 – «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» (спец. 180400, 180500, 180700), 657300 – «Оборудование и агрегаты нефтегазового производства» (спец. 170200), 657400 – «Гидравлическая, вакуумная и компрессорная техника» (спец. 121100), 657800 – «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» (спец. 120100, 120200).

УДК 531.3(075)

Редактор Е. А. Ермушева

Гигиенический сертификат № 24.49.04.953.П.000338.05.01 от 25.05.2001 г.
Подп. в печать 02.06.2004. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 500 экз. Заказ 188. С 146
Отпечатано в ИПЦ КГТУ
660074, Красноярск, ул. Киренского, 28

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для усвоения раздела «Динамика» курса теоретической механики необходимо изучить теорию, получить навыки в решении задач и выполнить индивидуальные расчетно-графические задания (РГЗ).

Настоящее издание включает раздел «Динамика», по которому приводится программа изучения и варианты РГЗ.

Задание выполняется в отдельной тетради или на листах писчей бумаги формата А4, которые затем брошюруются. Решение каждого задания должно сопровождаться чертежом, который выполняется согласно условиям конкретного варианта. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, выполнен с учетом применяемого масштаба. На рисунках должны быть показаны все заданные величины (размеры, векторы сил, скоростей, ускорений и т. п.) и координатные оси. Кроме того, необходимо иметь в виду, что все линии на рисунках и в условиях к задачам, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными.

Решение необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице оставлять поля для замечаний преподавателя.

ПРОГРАММА КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА»

Введение. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы классической механики или законы Галилея – Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Решение первой и второй задач динамики точки. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых прямоугольных координатах и в проекциях на оси естественного трехгранника.

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики. Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям.

Динамика относительного движения точки. Относительное движение точки. Дифференциальные уравнения относительного движения точки; переносная и Кориолиса силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы и при отсутствии сил сопротивления. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний.

Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Апериодическое движение.

Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивлений. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс системы и координаты центра масс.

Моменты инерции. Моменты инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции: однородного стержня, тонкого круглого кольца или полого тонкого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра. Центробежные моменты инерции. Главные оси и главные моменты инерции. Свойства главных осей и главных центральных осей инерции.

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Кинетическая энергия механической системы. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении.

Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Работа внутренних сил твердого тела.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы в дифференциальной и конечной формах.

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки и механической системы. Выражение количества движения механической системы через массу системы и скорость ее центра масс. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки и механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Главный момент количеств движения (кинетический момент) механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки и кинетического момента механической системы. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.

Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Принцип Даламбера. Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Приведение сил инерции твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции. Динамические реакции подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Связи, налагаемые на систему. Возможные (виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах. Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Потенциальная энергия в однородном поле сил тяжести.

Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа.

Малые колебания механической системы. Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы около положения устойчивого равновесия. Малые колебания механической системы с несколькими степенями свободы; собственные частоты и коэффициент формы. Затухающие и вынужденные колебания системы. Понятие о виброзащите. Динамический гаситель колебаний.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения материальной точки при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе. Действие ударных сил на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара.

ЗАДАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Варианты задания студенту выдает преподаватель. Чертеж к заданию следует выполнять с учетом условий решаемого варианта и с указанием всех заданных углов. Действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать условиям приведенным в таблице для каждого задания.

При выполнении заданий необходимо учитывать следующее:

нити (веревки, тросы) являются невесомыми и нерастяжимыми, по блокам не скользят;

катки и колеса катятся по плоскости без скольжения;

все связи, если не сделано других оговорок, считать идеальными;

преобразования и числовые расчеты производить с необходимыми пояснениями;

ответы давать с указанием единиц измерения определяемых величин.

Задание Д1. Определение уравнения движения материальной точки

Груз *D* массой *m*, получив в точке *A* начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости (рис. Д1.0 – Д1.9, табл. Д1).

На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости груза; трением груза о трубу пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя численного значения своей скорости, переходит на участок *BC*, где на него кроме силы тяжести действует сила трения (коэффициент трения $f = 0{,}2$) и переменная сила $\overline{F}$, параллельная оси *x*, проекция которой F_x на ось *x* задана в табл. Д1.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения от точки *A* до точки *B*, найти закон движения груза на участке *BC*, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

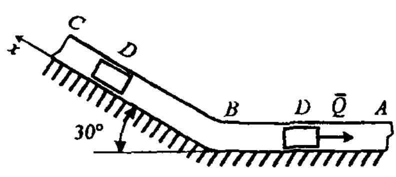


Рис. Д1.0

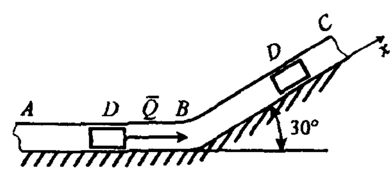


Рис. Д1.1

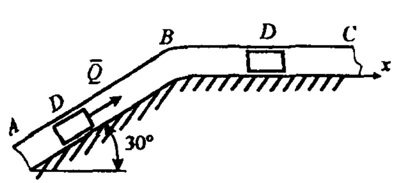


Рис. Д1.2

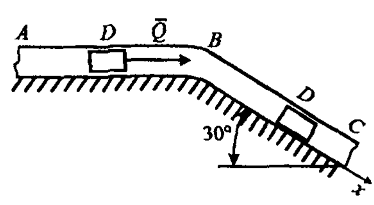


Рис. Д1.3

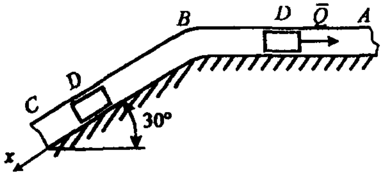


Рис. Д1.4

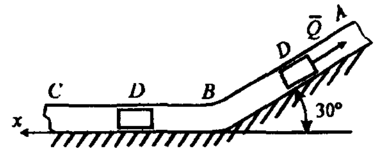


Рис. Д1.5

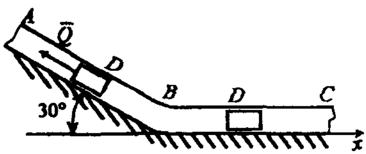


Рис. Д1.6

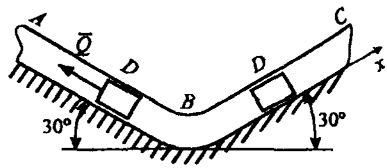


Рис. Д1.7

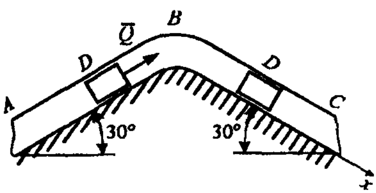


Рис. Д1.8

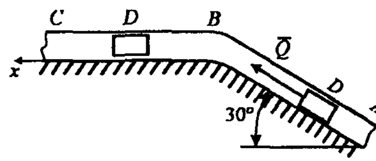


Рис. Д1.9

Указания. Задание Д1 – на составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки. Решение задания разбить на две части. Сначала составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке *AB* и определить ее скорость в точке *B*.

Эта скорость будет начальной для движения на участке *BC*. После этого составить и проинтегрировать дважды дифференциальное уравнение движения точки на участке *BC*, ведя отсчет времени от момента, когда она находится в точке *B*, (в этот момент $t = 0$). На участке *BC* направление координатной оси *x* задано, а на участке *AB* координатную ось следует выбрать самостоятельно.

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	V_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2,0	20	6,0	$0{,}4V$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6,0	$0{,}8V^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9,0	$0{,}5V$	–	3,0	$3\sin(2t)$
3	6,0	14	22,0	$0{,}6V^2$	5,0	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4,0	$0{,}4V$	–	2,0	$4\cos(4t)$
5	8,0	10	16,0	$0{,}5V^2$	4,0	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5,0	$0{,}3V$	–	2,0	$9t^2$
7	4,0	12	12,0	$0{,}8V^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3,0	22	9,0	$0{,}5V$	–	3,0	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12,0	$0{,}2V^2$	4,0	–	$-6\sin(4t)$

Составление и решение дифференциальных уравнений движения материальной точки

В основе составления дифференциальных уравнений движения материальной точки лежит второй закон механики, который выражается уравнением

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k, \tag{1}$$

где m – масса точки, $\bar{a}$ – ускорение точки, $\sum \bar{F}_k$ – геометрическая (векторная) сумма всех сил, действующих на точку. В случае несвободной материальной точки в число этих сил входят и силы реакций, наложенных на точку связей.

Для составления дифференциальных уравнений движения применяют уравнение (1) в проекциях либо на оси декартовой системы координат, либо на оси естественного трехгранника. В данном задании следует составить дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси декартовой системы координат.

Решение задач динамики точки путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений движения сводится к следующему порядку действий:

1. Выбрать начало отсчета (как правило, совмещая его с начальным положением точки) и провести оси декартовой системы координат.

2. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении так, чтобы ее координаты и проекции вектора скорости на координатные оси были положительными, и показать все действующие на точку силы.

3. Записать уравнение (1) в проекциях на координатные оси:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \tag{2}$$

Подсчитать сумму проекций всех сил на каждую координатную ось и подставить эту сумму в правую часть соответствующего уравнения (2), при этом необходимо переменные силы выразить через те величины, от которых они зависят.

Интегрирование дифференциальных уравнения движения

Интегрирование производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида полученного уравнения, т. е. от вида его правой части. В тех случаях, когда на точку кроме постоянных сил действует одна переменная сила, зависящая или только от времени, или только от координаты, или же только от скорости, уравнение движения можно проинтегрировать методом разделения переменных. В случаях, когда при решении задачи надо искать зависимость скорости от координаты, а не от времени (или когда сами силы зависят от координаты), левые части уравнений (2) преобразовать к переменной координате. Например,

$$m\ddot{x} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}.$$

Определение постоянных интегрирования

Для определения постоянных интегрирования надо по данным задания установить начальные условия:

$$t = 0, \ x = x_0, \ V_x = V_{x0}.$$

Могут встречаться задания, в которых для определения постоянных интегрирования вместо начальных задаются краевые условия, например могут быть заданы условия на «краях» интервала времени $[t_0, t_1]$ вида

$$t = t_0,\ x = x_0,\ V_x = V_{x0};$$

$$t = t_1,\ x = x_1,\ V_x = V_{x1}.$$

Постоянные интегрирования целесообразно определять непосредственно после каждого интегрирования.

Если дифференциальное уравнение движения является уравнением с разделяющимися переменными, то вместо введения постоянных интегрирования можно вычислять от обеих частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах. Если предстоит производить двойное интегрирование, то в качестве верхнего предела взять «текущее» значение переменной.

Пример Д1. На участке *AB* трубы (рис. Д1, *а*) на груз *D* массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления $\vec{R}$; время прохождения груза от точки *A* (где $V = V_0$) до точки *B* равно t_1. На участке *BC* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах, и сила трения.

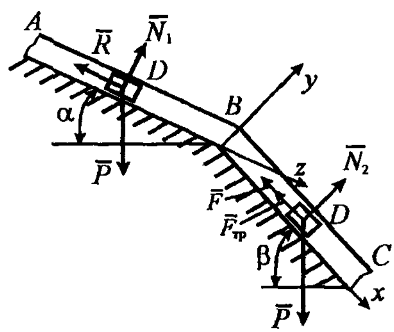


Рис. Д1, *а*

Дано: $m = 2$ кг; $R = \mu V$, где $\mu = 0{,}4$ кг/с; $V_0 = 5$ м/с; $t_1 = 5$ с; $F_x = -16\sin(4t)$; $f = 0{,}1$; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$. Определить $x = f(t)$ закон движения груза на участке *BC*, приняв $g = 10$ м/с^2.

Решение. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Проведем координатную ось *Az* и составим дифференциальное уравнение движения точки D в проекции на эту ось, предварительно изобразив действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{R}$ и $\overline{N}_1$:

$$m\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = \sum F_{kz} \quad \text{или} \quad m\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = P\sin\alpha - R. \tag{3}$$

Учитывая, что $P = mg$, $R = \mu V$ и $V_z = V$, получим

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - \mu V. \tag{4}$$

После подстановки численных значений постоянных величин и разделения переменных находим

$$\frac{\mathrm{d}V}{V-25} = -0{,}2\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Возьмем определенные интегралы от левой и правой частей равенства (5)

$$\int_{V_0}^{V_B}\frac{\mathrm{d}V}{V-25} = -0{,}2\int_0^{t_1}\mathrm{d}t,$$

т. е.

$$\ln\frac{V_B-25}{V_0-25} = -0{,}2t_1,$$

или

$$\frac{V_B-25}{V_0-25} = e^{-0{,}2t_1}.$$

откуда $V = 25 + (V_0 - 25)e^{-0{,}2\cdot 5} = 17{,}64$ м/с.

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Проведем из точки B оси Bx и By, приложим к грузу силы $\overline{P}$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F}$ и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = P_x + N_{2x} + F_{трx} + F_x;$$

или

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin\beta - F_{\text{тр}} + F_x. \qquad (6)$$

Так как $V_x = V$; $F_{\text{тр}} = fN_2$ и $F_x = -16\sin(4t)$, уравнение (6) примет вид

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin\beta - fN_2 - 16\sin(4t). \qquad (7)$$

Для определения N_2 составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось By:

$$m\frac{dV_y}{dt} = N_2 - P\cos\beta.$$

Так как $y = \text{const}$, то $dV_y/dt = 0$, получим $0 = N_2 - P\cos\beta$, откуда $N_2 = mg\cos\beta$. Следовательно, уравнение (7) примет вид

$$m\frac{dV}{dt} = mg(\sin\beta - f\cos\beta) - 16\sin(4t). \qquad (8)$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $g(\sin\beta - f\cos\beta) = 10(\sin 60° - 0{,}1\cos 60°) = 8{,}16$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (8). Тогда получим

$$\frac{dV}{dt} = 8{,}16 - 8\sin(4t). \qquad (9)$$

Умножая обе части уравнения (9) на dt и интегрируя, найдем

$$V = 8{,}16t + 2\cos(4t) + C_1. \qquad (10)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B (в этот момент $t = 0$). Тогда при $t = 0$ $V = V_0 = V_B$, где значение V_B определено в первой части решения задачи. Подставляя эти величины в (10), получим

$$C_1 = V_B - 2\cos(0) = 17{,}64 - 2 = 15{,}64 \text{ м/с}.$$

При найденном значении C_1 уравнение (10) дает

$$V = \frac{dx}{dt} = 8{,}16t + 2\cos(4t) + 15{,}64. \tag{11}$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 4{,}08t^2 + 0{,}5\sin(4t) + 15{,}64t + C_2. \tag{12}$$

Так как при $t = 0$, $x = 0$, то $C_2 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 4{,}08t^2 + 0{,}5\sin(4t) + 15{,}64t, \tag{13}$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат и на естественные оси.
2. Какая разница между дифференциальными уравнениями свободной и несвободной материальной точки?
3. Как определить произвольные постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения точки?
4. В каком случае проекция скорости точки на одну из декартовых осей координат остается постоянной?
5. Какое условие надо наложить на силы, действующие на материальную точку, чтобы последняя двигалась равномерно по криволинейной траектории?

Задание Д2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Тело (лыжник – рис. Д2.2, мотоциклист – рис. Д2.3) движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости (горизонтальной – рис. Д2.6), составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с (на рис. Д2.3 под действием постоянной силы P).

Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f (для рис. Д2.3 $f = 0$).

Таблица Д2

Вариант	Задача	Дано											Определить
		α, град	V_A, м/с	V_B, м/с	f	l, м	h, м	d, м	β, град	τ, с	P, кН	m, кг	
1	1	30	0	–	0,2	10	–	–	60	–	–	–	τ и h
2	2	20	–	–	0,1	–	40	–	30	0,2	–	–	l и V_C
3	3	30	0	4,5		40	–	3	–	–	≠ 0	–	τ и h
4	4	30	1	–	0,2	3	–	2,5	–	–	–	–	h и T
5	5	30	1	–	0,1	–	10	–	–	1,5	–	–	V_B и d
6	6	–	7	–	0,2	8	20	–	–	–	–	–	d и V_C
7	1	15	2	–	0,2	–	4	–	45	–	–	–	Уравнение траектории на участке BC и l
8	2	15	16	–	0,1	5	–	–	45	–	–	–	V_B и T
9	3	30	–	4,5	–	40	1,5	–	–	–	0	–	V_A и d
10	4	45	–	$2V_A$	–	6	6	–	–	1	–	–	d и f
11	5	45	0	–	–	10	–	–	–	2	–	–	Уравнение траектории на участке BC и f
12	6	–	4	–	0,1	–	–	2	–	2	–	–	V_B и h
13	1	30	2,5	–	≠ 0	8	–	10	60	–	–	–	V_B и τ
14	2		21	20	0	–	–	–	60	0,3	–	–	α и d
15	3	30	0	–	–	–	1,5	3	–	20	–	400	P и l
16	4	30	0	–	0,1	2	–	3	–	–	–	–	h и τ
17	5	–	0	–	0	9,8	20	–	–	2	–	–	α и T
18	6	–	–	3	0,3	3	5	–	–	–	–	–	V_A и T
19	1	–	0	–	0	9,8	–	–	60	2	–	–	α и T
20	2	15	–	–	0,1	–	$30\sqrt{2}$	–	45	0,3	–	–	V_B и V_A
21	3	30	0	–	–	40	–	5	–	–	2,2	400	V_B и V_C
22	4	15	–	3	≠ 0	3	–	2	–	1,5	–	–	V_A и h
23	5	30	0	–	0,2	10	–	12	–	–	–	–	τ и h
24	6	–	3	1	–	2,5	20	–	–	–	–	–	f и d
25	1	30	0	–	–	9,8	–	–	45	3	–	–	f и V_C
26	2	15	12	–	0	–	–	50	60	–	–	–	Уравнение траектории на участке BC и τ
27	3	30	0	–	–	50	2	4	–	–	2	–	T и m
28	4	45	0	–	0,3	–	4	2	–	–	–	–	l и τ
29	5	30	0	–	0,2	6	4,5	–	–	–	–	–	τ и V_C
30	6	–	–	–	0,25	4	5	3	–	–	–	–	V_A и τ

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку C плоскости, наклоненной под углом β к горизонту (рис. Д2.1, Д2.2), горизонтальной (рис. Д2.3, Д2.5, Д2.6), вертикальной (рис. Д2.4), находясь в воздухе T секунд.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Исходные данные и величины для определения взять из табл. Д2.

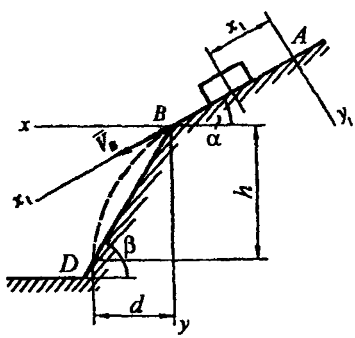


Рис. Д2.1

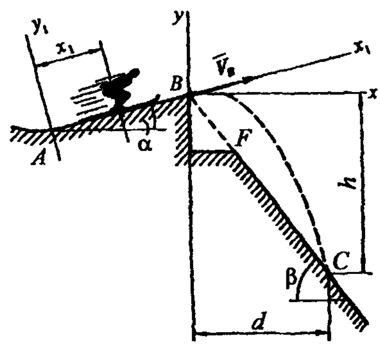


Рис. Д2.2

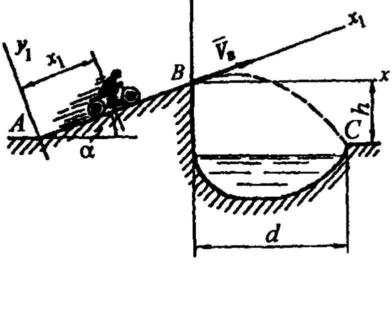


Рис. Д2.3

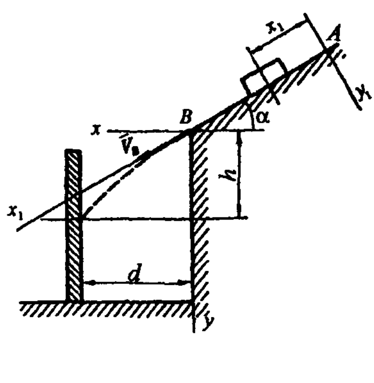


Рис. Д2.4

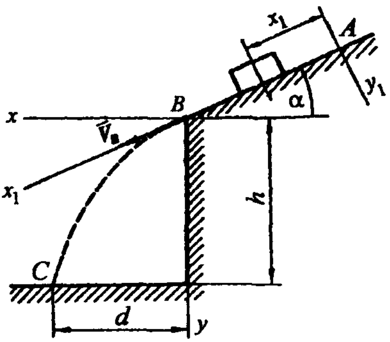


Рис. Д2.5

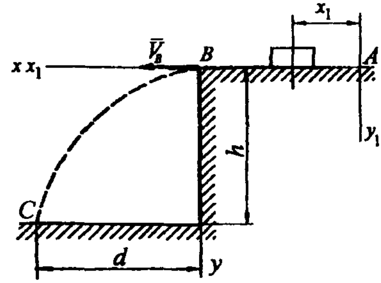


Рис. Д2.6

Пример Д2. Груз движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. Д2, *а*). Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ секунд груз в точке B со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точке C со скоростью V_C, при этом он находится в воздухе T секунд. Груз принять за материальную точку и сопротивление воздуха не учитывать.

Дано: $\alpha = 30°$; $V_A = 1$ м/с; $f = 0{,}1$; $\tau = 1{,}5$ с; $h = 10$ м. Определить V_B и s.

Решение. Рассмотрим движение груза на каждом участке в отдельности. На участке AB (рис. Д2, *б*) на груз действуют сила тяжести $\overline{P}$, сила трения $\overline{F}_{тр}$ и нормальная реакция плоскости $\overline{N}$.

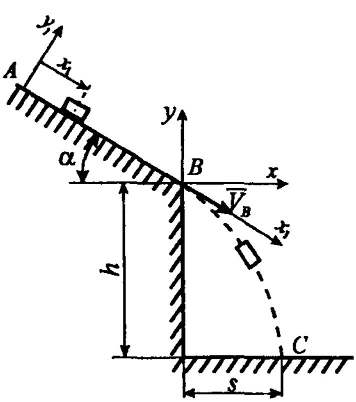


Рис. Д2, *а*

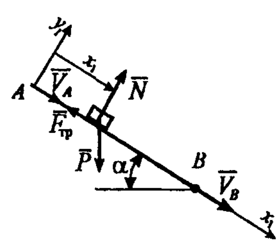


Рис. Д2, *б*

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ax_1:

$$m\ddot{x}_1 = P\sin\alpha - F_{тр} = P\sin\alpha - fN. \tag{14}$$

Для определения реакции N запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ay_1:

$$m\ddot{y}_1 = N - P\cos\alpha. \tag{15}$$

Так как координата y_1 остается во время движения постоянной ($y_1 = 0$), то $\ddot{y}_1 = 0$. Из уравнения (15) следует, что

$$N = P\cos\alpha.$$

Подставим значение N в уравнение (14):

$$m\ddot{x}_1 = P\sin\alpha - fP\cos\alpha. \tag{16}$$

Учитывая, что $P = mg$, найдем

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{17}$$

Равенство (17) перепишем в виде

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

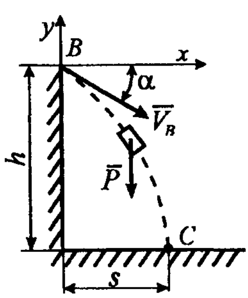


Рис. Д2, *в*

Разделим переменные, умножив обе части полученного равенства на dt и проинтегрируем, учитывая, что $\dot{x}_1 = V$, ($V_y = 0$)

$$\int_{V_A}^{V_B} d\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int_0^{\tau} dt.$$

В результате находим

$$V_B = V_A + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau = 1 + 9{,}81(0{,}5 -$$

$$- 0{,}1\cdot 0{,}866)1{,}5 = 7{,}08 \text{ м/с}.$$

Таким образом, груз в конце участка приобретет скорость $V_B = 7{,}08$ м/с.

Рассмотрим движение груза на участке BC (рис. Д2, *в*). Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Bx:

$$m\ddot{x} = 0,$$

откуда следует

$$\dot{x} = \text{const} = V_B \cos\alpha. \qquad (18)$$

В равенстве (18) разделим переменные и проинтегрируем

$$\int_0^s \mathrm{d}x = V_B \cos\alpha \int_0^T \mathrm{d}t.$$

В результате будем иметь

$$s = V_B \cos\alpha T. \qquad (19)$$

Для нахождения времени падения груза T составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось By:

$$m\ddot{y} = -mg \quad \text{или} \quad \ddot{y} = -g. \qquad (20)$$

С учетом того, что $\ddot{y} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}$, разделив переменные в равенстве (20) и проинтегрировав, получим

$$\dot{y} = -gt + C_1. \qquad (21)$$

Для нахождения постоянной интегрирования C_1 учтем начальные условия движения груза на участке BC при $t = 0$ $\dot{y} = -V_B \sin\alpha$.

Подставим эти значения в (21) и найдем

$$C_1 = -V_B \sin\alpha.$$

Таким образом, равенство (21) примет вид

$$\dot{y} = -V_B \sin\alpha - gt. \qquad (22)$$

Проинтегрируем выражение (22)

$$\int_0^{-h} dy = -V_B \sin\alpha \int_0^T dt - g\int_0^T t\,dt.$$

В результате интегрирования находим

$$-h = -V_B \sin\alpha T - gT^2/2$$

или

$$T^2 + 2TV_B \sin\alpha/g - 2h/g = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим

$$T = -V_B\frac{\sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(V_B\frac{\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} = -0{,}36 \pm \sqrt{0{,}13+2{,}04} = 1{,}68\ c.$$

Здесь перед квадратным корнем берем знак «+», так как время движения отрицательным быть не может.

После подстановки значения T в выражение (19) получаем

$$s = 7{,}08 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}68 = 10{,}3\ \text{м}.$$

Ответ: $V_B = 7{,}08$ м/с, $s = 10{,}3$ м.

Задание Д3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Механическая система (рис. Д3.0 – Д3.9, табл. Д3) состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$ м и радиусом инерции относительно оси вращения $i_3 = 0{,}2$ м, блока 4 радиусом $R_4 = 0{,}2$ м и катка (или подвижного блока) 5; тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0{,}2$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Таблица Д3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	$80(4 + 5s)$	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	$50(8 + 3s)$	V_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	$60(6 + 5s)$	V_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	$80(5 + 6s)$	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	$40(9 + 4s)$	V_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	$50(7 + 8s)$	V_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	$40(8 + 9s)$	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	$60(8 + 5s)$	V_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	$50(9 + 2s)$	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	$80(6 + 7s)$	V_{C5}

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 0{,}2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. Д3, где обозначено: V_1, V_2, V_{C5} – скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. 2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если $m_2 = 0$; остальные тела изобразить и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задание Д3 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задания учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задании надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей. При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

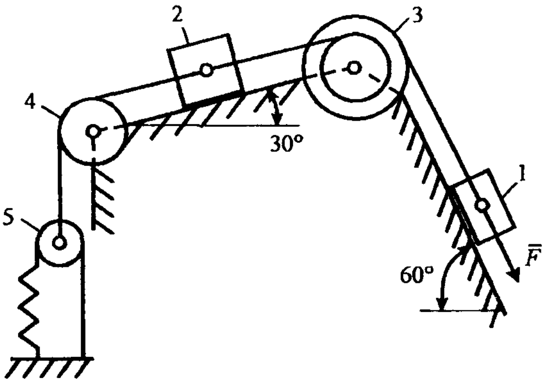


Рис. Д3.0

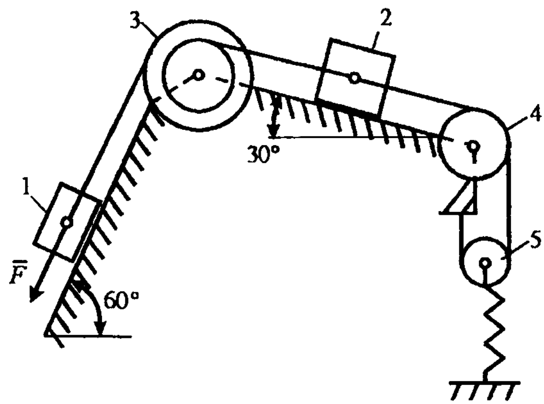


Рис. Д3.1

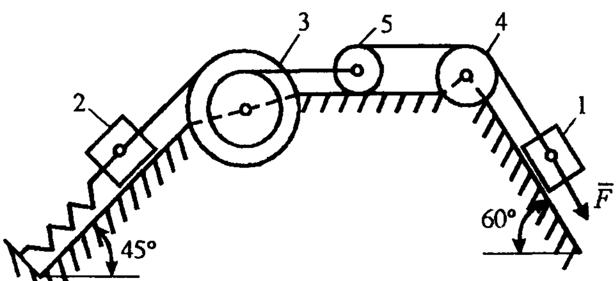


Рис. Д3.2

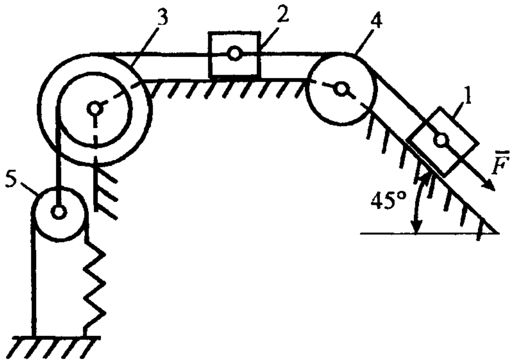


Рис. Д3.3

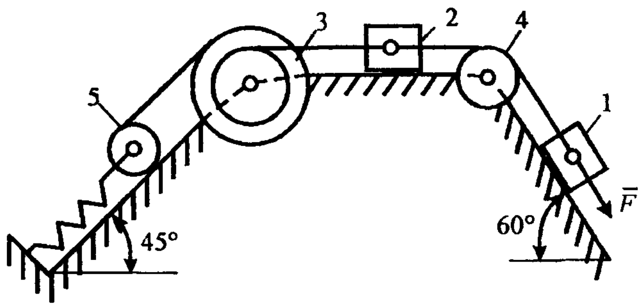


Рис. Д3.4

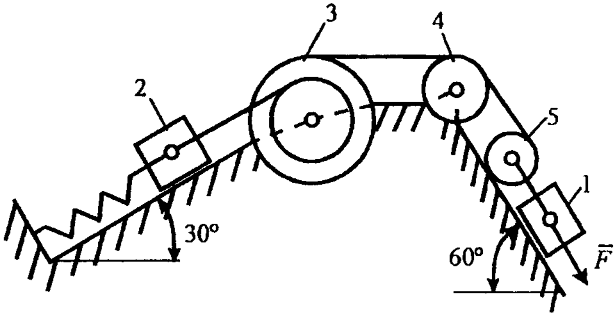


Рис. Д3.5

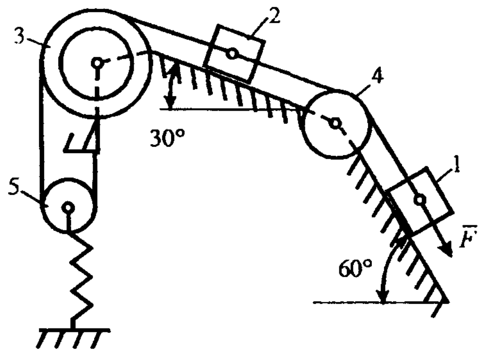


Рис. Д3.6

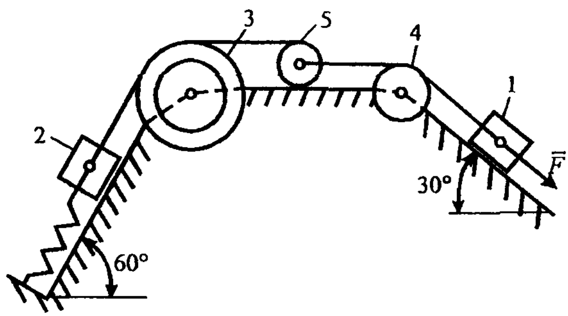


Рис. Д3.7

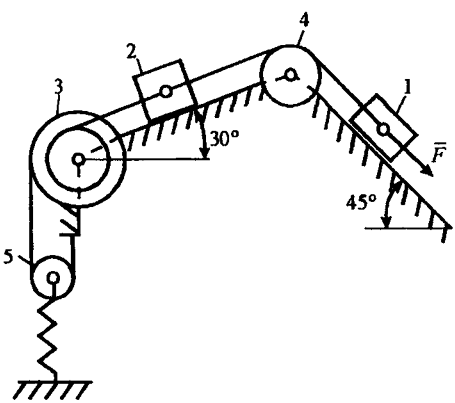


Рис. Д3.8

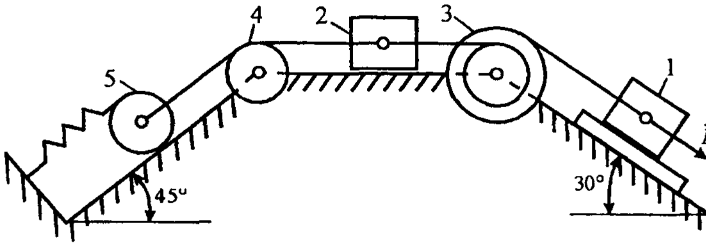


Рис. Д3.9

Формула, выражающая теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме, имеет вид

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

где T и T_0 – значения кинетической энергии системы в конечном и начальном положениях соответственно; $\sum A_k^e$ и $\sum A_k^i$ – сумма работ внешних сил и сумма работ внутренних сил, совершаемая на перемещениях их точек приложения из начального в конечное положение системы.

В случае неизменяемой механической системы, состоящей, например, из абсолютно твердых тел, сумма работ внутренних сил равна нулю. Сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити также равна нулю.

Элементарная работа δA силы равна скалярному произведению векторов силы $\bar{F}$ и элементарного перемещения $d\bar{r}$ (рис. Д3,*а*): $\delta A = \bar{F}\,d\bar{r}$.

Размерность работы в системе СИ [Н·м] или [Дж]. Элементарная работа может быть представлена в виде

$$\delta A = F dr \cos(\bar{F}, d\bar{r}) = F dr \cos(\alpha).$$

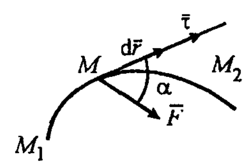


Рис. Д3, *а*

Элементарная работа силы через ее проекции на оси декартовых координат имеет вид

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы на конечном перемещении по произвольной траектории равна криволинейному интегралу, взятому вдоль траектории от M_1 до M_2 от элементарной работы

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \bar{F} d\bar{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F dr \cos\alpha,$$

или через проекции на оси декартовых координат:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\right).$$

В ряде случаев для вычисления работы удобнее использовать готовые формулы.

Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении $\bar{r}$

$$A = \bar{F}\,\bar{r} = Fr\cos(\bar{F}, \bar{r}).$$

Работа силы тяжести P

$$A_P = \pm Ph,$$

где h – высота, на которую опускается либо поднимается центр тяжести. Знак «+» соответствует опусканию центра тяжести.

Работа силы упругости

$$A_{\text{упр}} = 0{,}5c(\lambda_0^2 - \lambda^2),$$

где λ и λ_0 –конечное и начальное удлинения пружины, c – ее коэффициент жесткости.

Работа постоянного момента M силы (или момента пары сил), приложенного к твердому телу, может быть вычислена по формуле

$$A_M = \pm M\varphi,$$

где φ – угол поворота (в радианах) тела из начального положения в конечное. Если направление момента и направление поворота совпадают, то работа положительная.

Работа переменного момента силы

$$A_M = \int_{(\varphi_0)}^{(\varphi)} M\mathrm{d}\varphi.$$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формулам:

а) при поступательном движении

$$T = 0{,}5MV^2,$$

где M – масса тела, а V – его скорость;

б) при вращении вокруг неподвижной оси z

$$T = 0{,}5J_z\omega^2,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость тела;

в) при плоском движении

$$T = 0{,}5MV_C^2 + 0{,}5J_{Cz}\omega^2,$$

где M – масса тела, а V_C – скорость центра масс, J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через его центр масс перпендикулярно к плоскости движения, ω – мгновенная угловая скорость тела.

Пример Д3. Механическая система (рис. Д3, *б*) состоит из сплошного однородного катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 и радиусом инерции относительно оси вращения i, груза 3, блока 4 и подвижного сплошного однородного блока 5. Коэффициент трения груза о плоскость f. Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2. К центру подвижного блока прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, ее начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения точки ее приложения, на шкив действует постоянный момент сопротивления. Массу блока 4 считать равномерно распределенной по его ободу. Каток 1 катится по наклонной плоскости без скольжения.

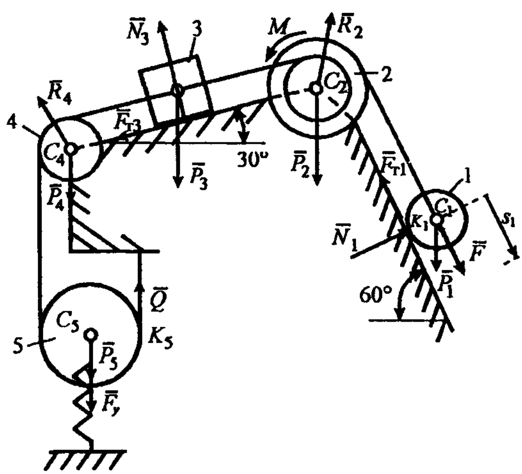


Рис. Д3, *б*

Дано: $m_1 = 10$ кг; $m_2 = 6$ кг; $m_3 = 2$ кг; $m_4 = 4$ кг; $m_5 = 5$ кг; $i = 0{,}2$ м; $R_2 = 0{,}3$ м; $r_2 = 0{,}1$ м; $R_4 = 0{,}1$ м; $f = 0{,}2$; $c = 200$ Н/м; $M = 0{,}4$ Н·м; $F = 50(4 + 2s)$ Н; $s_1 = 0{,}25$ м.

Определить угловую скорость блока 4 в тот момент, когда перемещение центра масс катка 1 станет равным s_1. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из твердых тел 1, 2, 3, 4 и 5, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: заданную силу $\overline{F}$, силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, $\overline{P}_5$, силу упругости пружины $\overline{F}_y$, а также реакции связей $\overline{N}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{R}_4$, натяжения нити $\overline{Q}$, силы трения $\overline{F}_{т1}$, $\overline{F}_{т3}$ и момент сопротивления M.

Для определения ω_4 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в конечной форме:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

2. Определим T_0 и T. Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Учитывая, что тела 1 и 5 совершают плоское (плоскопараллельное) движение, тела 2 и 4 – вращательное, а тело 3 поступательное, получим

$$T_1 = 0{,}5m_1V_{C1}^2 + 0{,}5J_{C1}\omega_1^2;\ T_2 = 0{,}5J_{C2}\omega_2^2;\ T_3 = 0{,}5m_3V_3^2;$$

$$T_4 = 0{,}5J_{C4}\omega_4^2;\ T_5 = 0{,}5m_5V_{C5}^2 + 0{,}5J_{C5}\omega_5^2.$$

Все входящие сюда скорости выразим через искомую ω_4. Однако учтем, что точки K_1 и K_5 – мгновенные центры скоростей тел 1 и 5 соответственно.

$$V_{C1} = \omega_4\frac{R_4R_2}{r_2};\ \omega_1 = \frac{V_{C1}}{C_1K_1} = \frac{V_{C1}}{r_1} = \omega_4\frac{R_4R_2}{r_1r_2};\ \omega_2 = \omega_4\frac{R_4}{r_2};\ V_3 = \omega_4R_4;$$

$$V_{C5} = \frac{1}{2}\omega_4R_4;\ \omega_5 = \frac{V_{C1}}{C_5K_5} = \omega_4\frac{R_4}{2r_5}.$$

Кроме того, осевые моменты инерции имеют значения: $J_{C1} = 0{,}5m_1r_1^2$; $J_{C2} = m_2i^2$; $J_{C4} = m_4R_4^2$; $J_{C5} = 0{,}5m_5r_5^2$.

С учетом полученных выражений и числовых значений заданных величин кинетические энергии тел принимают значения:

$$T_1 = 0{,}5m_1\left(\frac{R_4R_2}{r_2}\right)^2\omega_4^2 + 0{,}5\cdot 0{,}5m_1r_1^2\left(\frac{R_4R_2}{r_1r_2}\right)^2\omega_4^2 =$$

$$= 0{,}75\cdot m_1\left(\frac{R_4R_2}{r_2}\right)^2\omega_4^2 = 0{,}75\cdot 10\left(\frac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}1}\right)^2\omega_4^2 = 0{,}675\omega_4^2,$$

$$T_2 = 0{,}5m_2i^2\left(\frac{R_4}{r_2}\right)^2\omega_4^2 = 0{,}5\cdot 6\left(\frac{0{,}2\cdot 0{,}1}{0{,}1}\right)\omega_4^2 = 0{,}12\omega_4^2,$$

$$T_3 = 0{,}5m_3R_4^2\omega_4^2 = 0{,}5\cdot 2\cdot 0{,}1^2\omega_4^2 = 0{,}01\omega_4^2,$$

$$T_4 = 0{,}5m_4R_4^2\omega_4^2 = 0{,}5\cdot 4\cdot 0{,}1^2\omega_4^2 = 0{,}02\omega_4^2,$$

$$T_5 = 0{,}5m_5\left(\frac{R_4}{2}\right)^2\omega_4^2 + 0{,}5\cdot 0{,}5m_5r_5^2\left(\frac{R_4}{2r_5}\right)^2\omega_4^2 =$$

$$= 0{,}75m_5\left(\frac{R_4}{2}\right)^2\omega_4^2 = 0{,}75\cdot 5\left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2\omega_4^2 = 0{,}009\,\omega_4^2.$$

В результате кинетическая энергия системы в конечном положении принимает значение

$$T = 0{,}834\omega_4^2.$$

3. Найдем сумму работ всех действующих сил при перемещении, которое совершит система, когда точка приложения силы $\overline{F}$ пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_1 – перемещение точки C_1, φ_2 – угол поворота шкива 2, s_3 – перемещение тела 3, s_{C5} – перемещение точки C_5, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 50(4 + 2s)\mathrm{d}s = 50(4s_1 + s_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60°;$$

$$A(M) = -M\varphi_2;$$

$$A(\overline{P}_3) = -P_3 s_3 \sin 30°;$$

$$A(\overline{F}_{т3}) = -F_{т3}s_3 = -fN_3 s_3 = -fP_3 \cos 30° s_3;$$

$$A(\overline{P}_5) = -P_5 s_{C5};$$

$$A(\overline{F}_y) = 0{,}5c(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_5, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_{т1}$ и $\overline{Q}$ – мгновенные центры скоростей; точки приложения сил $\overline{P}_2$, $\overline{P}_4$, $\overline{R}_2$ и $\overline{R}_4$ неподвижны, а реакция $\overline{N}_3$ перпендикулярна перемещению груза 5.

По условиям задачи $\lambda_0 = 0$. Выразим перемещения точек приложения *сил и угловые перемещения тел через заданное перемещение* s_1:

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}; \quad s_3 = s_1\frac{r_2}{R_2}; \quad s_{C5} = \frac{1}{2}s_3 = s_1\frac{r_2}{2R_2}; \quad \lambda_1 = s_{C5} = s_1\frac{r_2}{2R_2}.$$

С учетом полученных зависимостей и числовых значений заданных величин работы сил принимают значения:

$$A(\overline{F}) = 50(4\cdot 0{,}25 + 0{,}25^2) = 53{,}125 \text{ Дж};$$

$$A(\overline{P}_1) = m_1 g s_1 \sin 60° = 10\cdot 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}866 = 21{,}65 \text{ Дж};$$

$$A(M) = -Ms_1/R_2 = -0{,}4\cdot 0{,}25/0{,}3 = -0{,}333 \text{ Дж};$$

$$A(\overline{P}_3) = -m_3 g s_1 (r_2/R_2)\sin 30° = -2\cdot 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}1\cdot 0{,}5/0{,}3 = -0{,}833 \text{ Дж};$$

$$A(\overline{F}_{т3}) = -fm_3 g \cos 30° s_1 (r_2/R_2) = -0{,}2\cdot 2\cdot 10\cdot 0{,}866\cdot 0{,}25\cdot(0{,}1/0{,}3) = -0{,}288 \text{ Дж};$$

$$A(\overline{P}_5) = -m_5 g s_1 r_2/(2R_2) = -5\cdot 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}1/(2\cdot 0{,}3) = -2{,}083 \text{ Дж};$$

$$A(\overline{F}_y) = 0{,}5c\lambda_1^2 = -0{,}5cs_1^2(r_2/2R_2)^2 = 0{,}5\cdot 200\cdot 0{,}25^2\cdot(0{,}1/2\cdot 0{,}3)^2 = -0{,}174 \text{ Дж};$$

Сумма работ всех сил на перемещении механической системы из начального положения в конечное

$$\sum A_k^e = 71{,}064 \text{ Дж}.$$

Приравнивая значение кинетической энергии системы сумме работ всех сил, находим

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{71{,}064}{0{,}834}} = 9{,}23 \text{ рад/с.}$$

Ответ: $\omega_4 = 9{,}23$ рад/с.

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равна кинетическая энергия точки?
2. Как подсчитать кинетическую энергию механической системы?
3. Две материальные точки $m_1 > m_2$ движутся по одной окружности так, что модули их количеств движения одинаковы. Равны ли их кинетические моменты относительно центра окружности и их кинетические энергии?
4. Как зависит от времени кинетическая энергия точки, совершающей равнопеременное движение с нулевой начальной скоростью?
5. Одно из двух тел равной массы с одинаковыми количествами движения совершает плоское движение, а второе поступательное. Какое тело имеет большую кинетическую энергию и почему?
6. Два тела вращаются вокруг неподвижных осей так, что их кинетические моменты относительно этих осей одинаковы. Равны ли их кинетические энергии, если $J_1 < J_2$?
7. Как определить элементарную работу силы?
8. Когда элементарная работа силы равна нулю?
9. Чему равна работа сил, приложенных в мгновенном центре скоростей?
10. Зависит ли работа силы на конечном перемещении от траектории точки ее приложения?
11. Как должна двигаться система материальных точек, чтобы сумма работ сил тяжести ее точек была равна нулю?
12. Чему равна работа упругой силы?
13. Когда работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна нулю?
14. В каких механических системах сумма работ внутренних сил равна нулю?
15. При каком движении твердого тела по шероховатой поверхности силы трения скольжения не совершают работу?
16. Зависит ли изменение кинетической энергии системы от внутренних сил?

Задание Д3-А. Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

По условиям задания Д3 (рис. Д3.0 – Д3.9, табл. Д3) определить кроме указанных скоростей соответствующие ускорения.

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме записывается в виде $\mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}A_k^e$ и ее удобнее применять для составления дифференциальных уравнений движения.

Пример Д3-А. Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме покажем для системы, приведенной в примере задания Д3.

Решение. 1. Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$\mathrm{d}T = \sum \mathrm{d}A_k^e.$$

Вычислим кинетическую энергию, выразив ее через угловую скорость блока 4

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение, поэтому его кинетическая энергия

$$T_1 = 0{,}5 m_1 V_{C1}^2 + 0{,}5 J_{C1} \omega_1^2,$$

где $J_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2$; $\omega_1 = \dfrac{V_{C1}}{r_1}$.

Следовательно, $T_1 = \dfrac{3}{4} m_1 V_{C1}^2$.

Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси и его кинетическая энергия

$$T_2 = 0{,}5 J_{C2} \omega_2^2,$$

где $J_{C2} = m_2 i^2$.

Таким образом, $T_2 = 0{,}5 m_2 i^2 \omega_2^2$.

Груз 3 движется поступательно и его кинетическая энергия

$$T_3 = 0{,}5 m_3 V_3^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося вокруг неподвижной оси блока 4

$$T_4 = 0{,}5J_{C4}\omega_4^2 = 0{,}5m_4R_4^2\omega_4^2.$$

Движущийся плоскопараллельно блок 5 имеет кинетическую энергию

$$T_5 = \frac{3}{4}m_5V_{C5}^2.$$

Выразим все скорости через угловую скорость блока 4

$$V_{C1} = \omega_4\frac{R_4R_2}{r_2};\quad \omega_2 = \omega_4\frac{R_4}{r_2};\quad V_3 = \omega_4R_4;\ V_{C5} = \frac{1}{2}\omega_4R_4.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T_1 = \frac{3}{4}m_1R_4^2\frac{R_2^2}{r_2^2}\omega_4^2 + 0{,}5m_2i^2\frac{R_4^2}{r_2^2}\omega_4^2 + 0{,}5m_3R_4^2\omega_4^2 + \frac{3}{16}m_5R_4^2\omega_4^2.$$

После подстановки числовых значений заданных величин в итоге находим

$$T = 0{,}834\omega_4{}^2.$$

Вычислим дифференциал dT кинетической энергии:

$$\mathrm{d}T = 1{,}668\omega_4\mathrm{d}\omega_4.$$

Найдем сумму элементарных работ внешних сил $\sum A_k^e$, для этого приложим к соответствующим точкам и телам действующие внешние силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, $\overline{P}_5$, $\overline{F}$, M, реакции связей $\overline{N}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{R}_4$, силы трения $\overline{F}_{т1}$, $\overline{F}_{т3}$ и силу упругости пружины $\overline{F}_y$. Сообщим телу 1 элементарное перемещение dφ_1 (рис. Д3-А) при вращении этого тела вокруг МЦС – точки K_1. При этом блок 2 повернется на угол dφ_2, груз 3 получит перемещение $\mathrm{d}\overline{s}_3$, блок 5 повернется вокруг МЦС (точка K_5) на угол dφ_5, а центр масс этого блока получит перемещение $\mathrm{d}\overline{s}_5$.

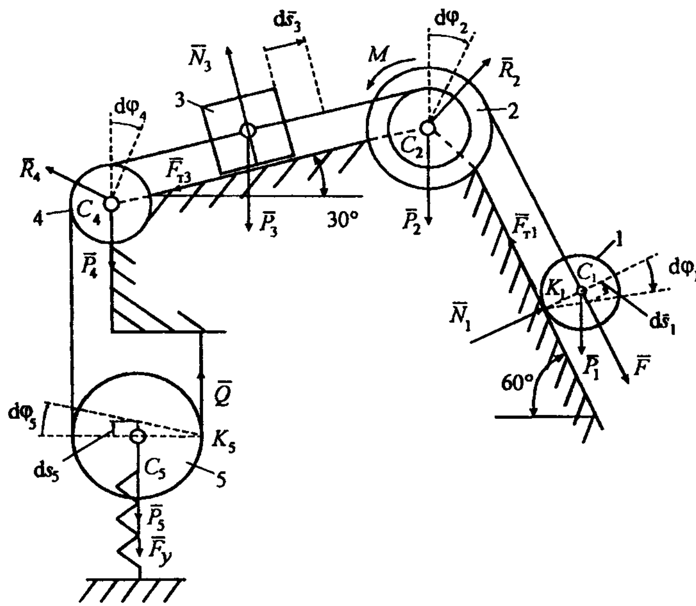


Рис. Д3-А

Выразим элементарные работы приложенных сил через $d\varphi_1$:

$$dA\,(\bar{P}_1) = P_1 ds_1 \sin 60° = m_1 g \sin 60° d\varphi_4 (R_4 R_2 / r_2);$$

$$dA\,(\bar{F}) = F ds_1 = 50(4 + 2s_1) ds_1 = 50(4 + 2s_1)(R_4 R_2 / r_2) d\varphi_4;$$

$$dA\,(M) = -M d\varphi_2 = -M(R_4 / r_2) d\varphi_4;$$

$$dA\,(\bar{P}_3) = -P_3 ds_3 \sin 30° = -m_3 g \sin 30° R_4 d\varphi_4;$$

$$dA\,(\bar{F}_{т3}) = -F_{т3} ds_3 = -f m_3 g \cos 30° R_4 d\varphi_4;$$

$$dA\,(\bar{P}_5) = -P_5 ds_{C5} = -0{,}5 m_5 g R_4 d\varphi_4;$$

$$dA\,(\bar{F}_y) = -c s_5 ds_5 = -0{,}5 \cdot 0{,}5 c R_4 \varphi_4 R_4 d\varphi_4;$$

Элементарные работы сил $\bar{N}_1$, $\bar{F}_{т1}$, $\bar{P}_2$, $\bar{R}_2$, $\bar{P}_4$ и $\bar{R}_4$ равны нулю, так как приложены в неподвижных точках.

Выразим все перемещения через перемещение $d\varphi_4$, учитывая, что $s_1 = \varphi_4 \dfrac{R_4 R_2}{r_2}$.

Подставляя числовые значения заданных величин и принимая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, находим:

$$dA(\overline{P}_1) = 25{,}98d\varphi_4;$$

$$dA(\overline{F}) = 9\varphi_4 d\varphi_4 + 60d\varphi_4;$$

$$dA(M) = -0{,}4d\varphi_4;$$

$$dA(\overline{P}_3) = -1d\varphi_4;$$

$$dA(\overline{F}_{т3}) = -0{,}346d\varphi_4;$$

$$dA(\overline{P}_5) = -2{,}5d\varphi_4;$$

$$dA(\overline{F}_y) = -0{,}5\varphi_4 d\varphi_4.$$

Сумма элементарных работ

$$\sum dA_k^e = 8{,}5\varphi_4 d\varphi_4 + 81{,}734d\varphi_4.$$

Таким образом,

$$1{,}668\omega_4 d\omega_4 = 8{,}5\varphi_4 d\varphi_4 + 81{,}734d\varphi_4,$$

или

$$\omega_4 d\omega_4 = 5{,}1\varphi_4 d\varphi_4 + 49d\varphi_4. \qquad (23)$$

Чтобы найти угловое ускорение блока 4, поделим обе части полученного равенства на dt

$$\omega_4 \frac{d\omega_4}{dt} = 5{,}1\varphi_4 \frac{d\varphi_4}{dt} + 49\frac{d\varphi_4}{dt}.$$

Но $\frac{d\omega_4}{dt} = \varepsilon_4$ и $\frac{d\varphi_4}{dt} = \omega_4$, тогда $\varepsilon_4 = (5{,}1\varphi_4 + 49)$, где $\varphi_4 = s_1\frac{r_2}{R_2 R_4} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}3\cdot 0{,}1} = 0{,}83$.

Таким образом, $\varepsilon_4 = 53{,}23$ рад/с^2.

Для определения угловой скорости блока 4 в момент, когда центр катка опустится по наклонной плоскости на расстояние s_1 проинтегрируем равенство (23)

$$\int_0^{\omega_4}\omega_4 d\omega_4 = 5{,}1\int_0^{\varphi_4}\varphi_4 d\varphi_4 + 49\int_0^{\varphi_4} d\varphi_4;$$

$$\frac{\omega_4^2}{2} = \frac{5{,}1}{2}\varphi_4^2 + 49\varphi_4,$$

где $\varphi_4 = s_1\dfrac{r_2}{R_2\cdot R_4} = \dfrac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}3\cdot 0{,}1} = 0{,}83.$

После подстановки имеем

$$\omega_4^2 = 5{,}1\cdot 0{,}83^2 + 98\cdot 0{,}83 = 3{,}51 + 81{,}84 = 85{,}35;$$

$$\omega_4 = \sqrt{85{,}35} = 9{,}238\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega_4 = 9{,}23$ рад/с.

Задание Д4. Динамика манипулятора

Рассматривается механизм типа манипулятора с двумя степенями свободы, предназначенный для перемещения груза. Варианты кинематических схем манипуляторов приведены на с. 38–42. Необходимые исходные данные приведены в табл. Д4.1. Переносимый точечный груз A массой m за время τ под действием двигателей управления, расположенных в шарнирах B и D, перемещается из точки a в точку b с заданной скоростью V_A (V_{Ay}), являющейся известной функцией времени

$$V_A = V_{Ay} = V\sin pt;\quad V = 0{,}45\ \text{м/с};\ p = 1{,}87\ \text{рад/с}. \qquad (24)$$

Динамический расчет манипулятора необходимо провести в интервале времени $\tau = 0{-}1{,}68$ с шагом 0,07 с.

Элементы конструкции механизма считаются абсолютно жесткими и безынерционными. Силы трения в шарнирах и ползунах отсутствуют, каток 2 относительно опорной поверхности не проскальзывает.

Требуется исследовать с помощью ЭВМ движение манипулятора. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указание. Задание Д4 на составление уравнений кинетостатики для моментов управления. Систему освободить от связей и разделить на отдельные звенья или группы звеньев, ввести реакции связей. Показать активные силы: внешнюю силу – вес точки A и внутренние – моменты управления M_B и M_D. При освобождении от связей в точках B и D к смежным звеньям приложить моменты противоположных знаков. За положительный для определенности принять момент, прилагаемый со стороны звена с большим индексом к звену с меньшим индексом. По принципу Даламбера к точке A условно прикладывается сила инерции $\overline{F} = -m\overline{a}_A$. Ее определить для заданного движения (24) точки A.

Уравнения для M_B, M_D образуются из уравнений кинетостатики для механической системы, включающей точку A, и уравнений статики для механических систем, образованных из безынерционных звеньев. Из этих уравнений:

$$M_B = M_B(\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; t); \quad M_D = M_D(\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; t).$$

Пример Д4. Манипулятор, кинематическая схема которого приведена на рис. Д4, *а*, перемещает точечный груз массы m за время τ из точки a в точку b с заданной скоростью $V_{Ax} = 0$, $V_{Ay} = V\sin(pt)$. Управляющие двигатели расположены в шарнирах B и E. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Дано: $BC = r_1 = 0{,}53$ м; $AC = 2 \cdot r_1$; $DB = r_2 = 0{,}47$ м; $ED = r_3 = 0{,}47$ м; $\varphi_1(0) = 0{,}57$ рад; $\varphi_2(0) = 5{,}77$ рад; $\varphi_3(0) = 5{,}17$ рад; $\tau = 1{,}68$ с; $V = 0{,}45$ м/с; $p = 1{,}87$ рад/с; $m = 17$ кг.

Массой элементов конструкции пренебречь.

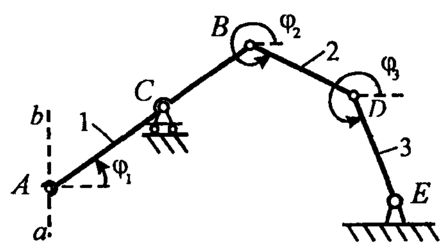


Рис. Д4, *а*

Требуется:

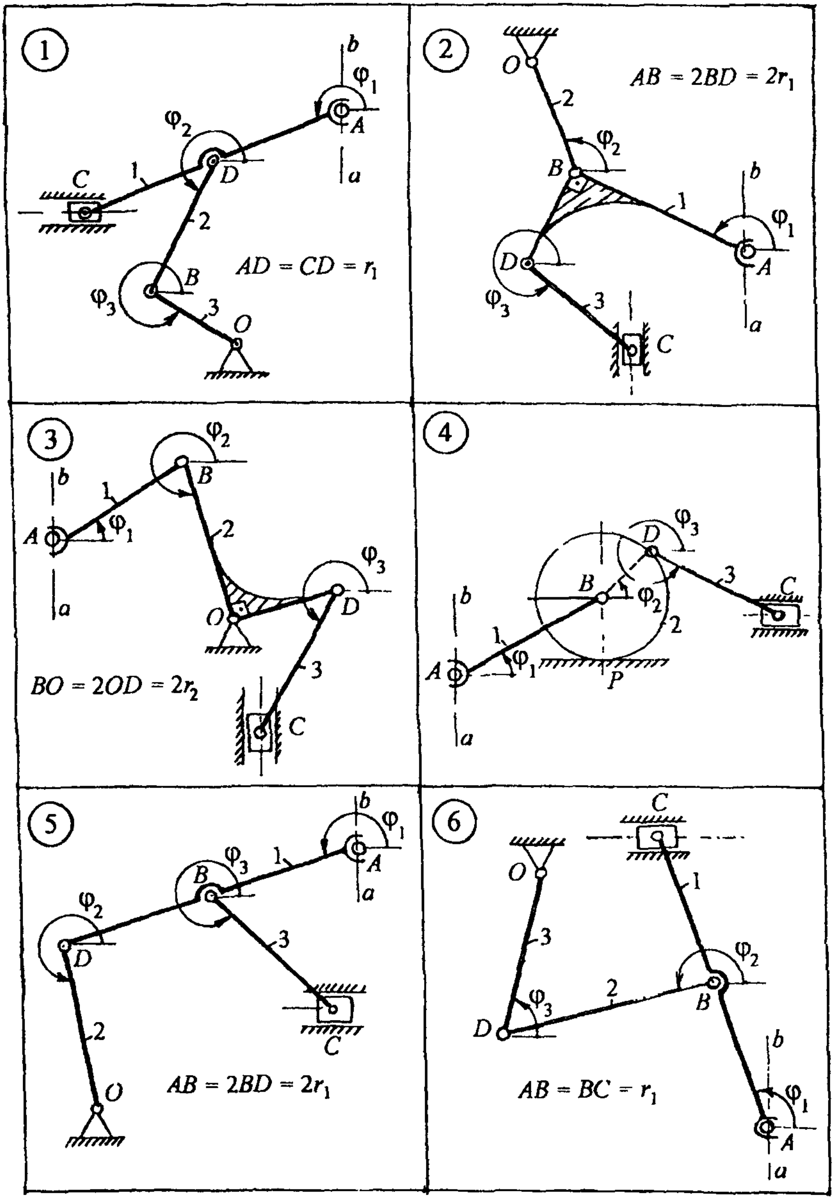
1. Составить уравнения кинетостатики для определения управляющих моментов, реализующих заданное программное движение груза.

2. Составить кинематические уравнения, определяющие изменение во времени угловых скоростей, углов поворота звеньев и скорости точки C.

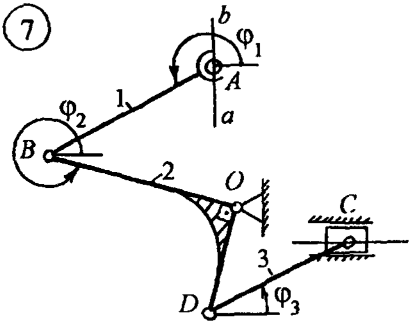
3. Решить полученные уравнения на ЭВМ в интервале времени τ.

4. Построить графики $M_B(t)$, $M_E(t)$, $\varphi_1(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_3(t)$.

Схемы манипуляторов

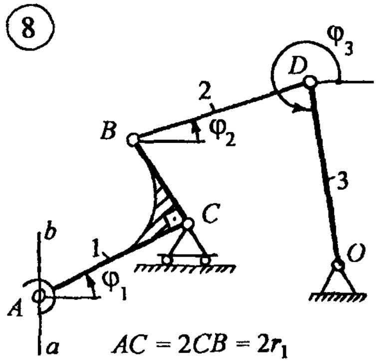


7



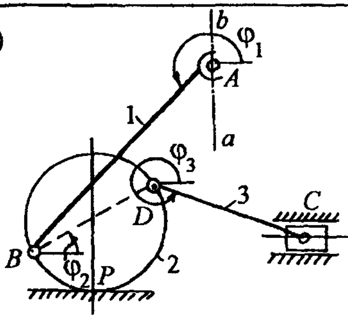
$OB = 2OD = 2r_2$

8

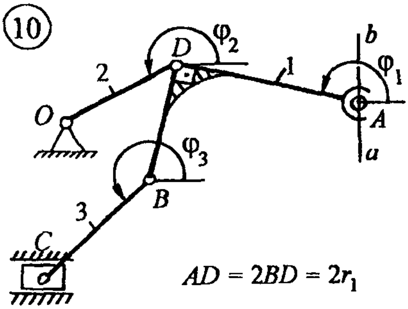


$AC = 2CB = 2r_1$

9

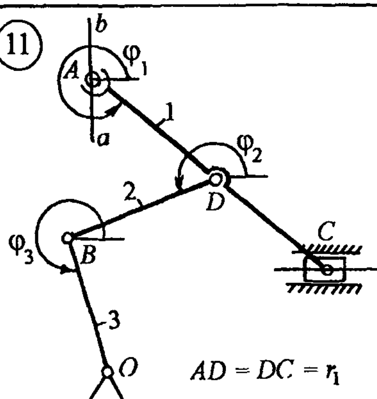


10



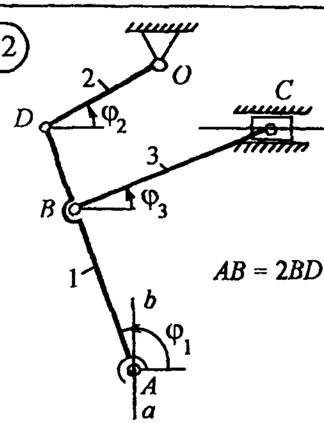
$AD = 2BD = 2r_1$

11

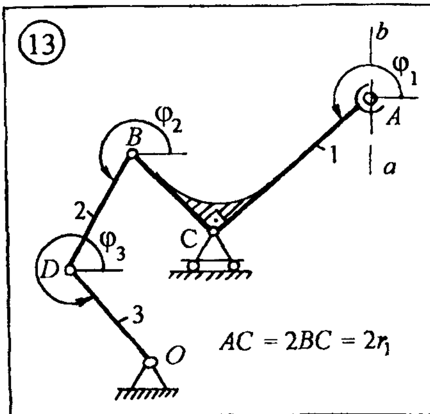


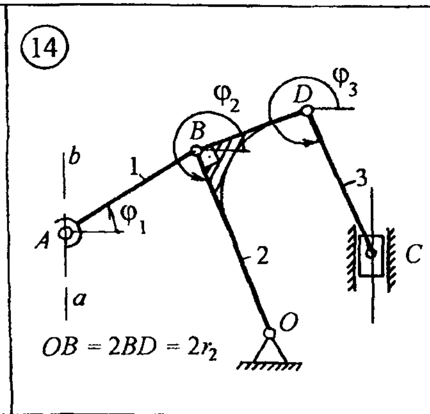
$AD = DC = r_1$

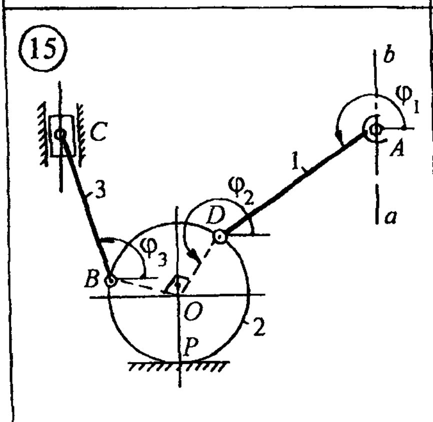
12

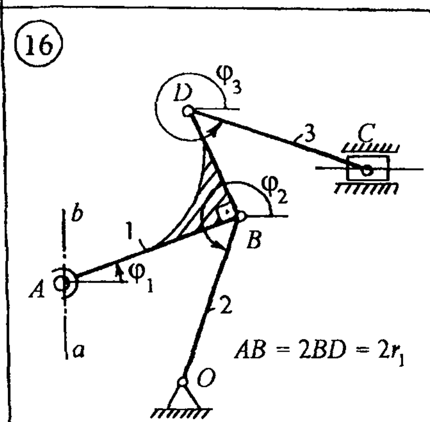


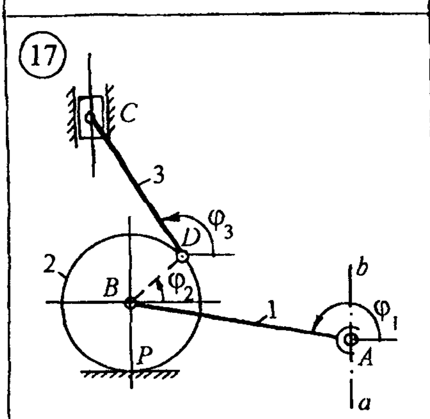
$AB = 2BD = 2r_1$

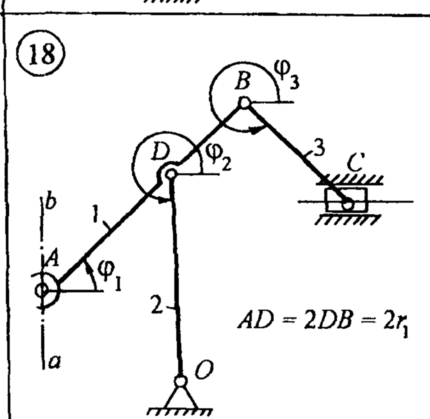

13
b
φ_1
A
a
1
φ_2
B
2
C
φ_3
D
3
O
$AC = 2BC = 2r_1$


14
φ_2
φ_3
D
B
b
1
3
A
φ_1
C
2
a
O
$OB = 2BD = 2r_2$

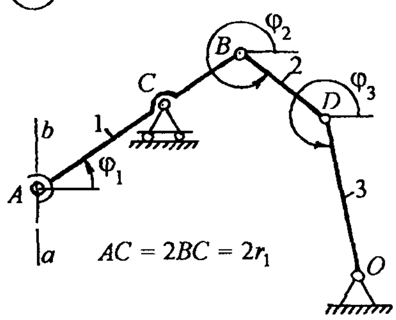

15
b
φ_1
C
A
1
3
φ_2
D
a
φ_3
B
O
2
P


16
φ_3
D
3
C
φ_2
b
1
B
A
φ_1
2
a
$AB = 2BD = 2r_1$
O


17
C
3
φ_3
D
2
B
φ_2
b
1
φ_1
A
P
a

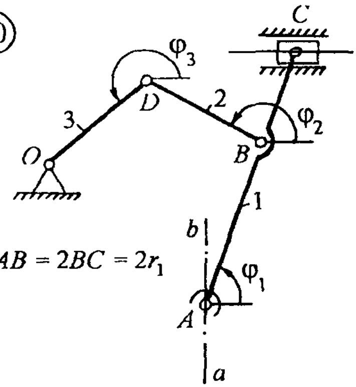

18
B
φ_3
D
φ_2
3
C
b
1
A
φ_1
2
$AD = 2DB = 2r_1$
a
O

19



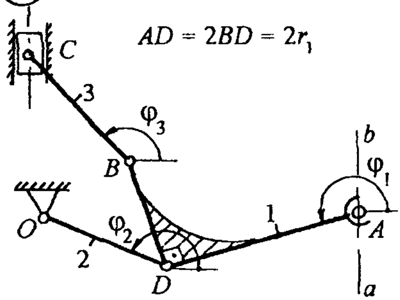
$AC = 2BC = 2r_1$

20



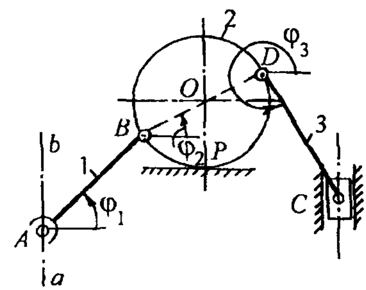
$AB = 2BC = 2r_1$

21

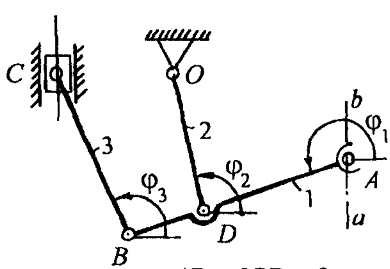


$AD = 2BD = 2r_1$

22

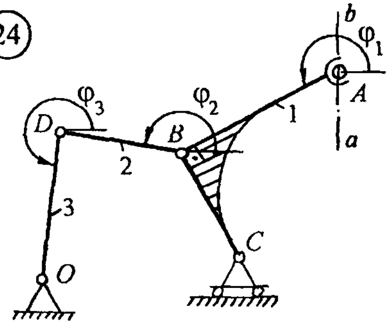


23

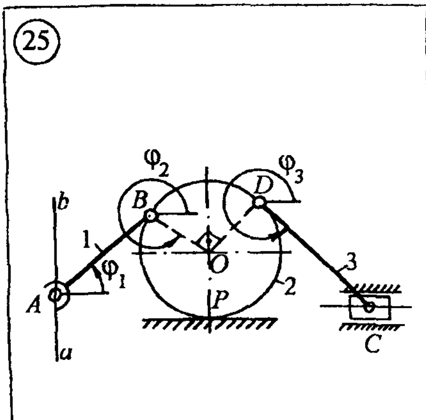


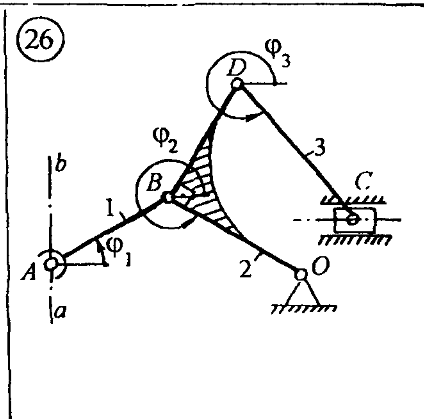
$AD = 2BD = 2r_1$

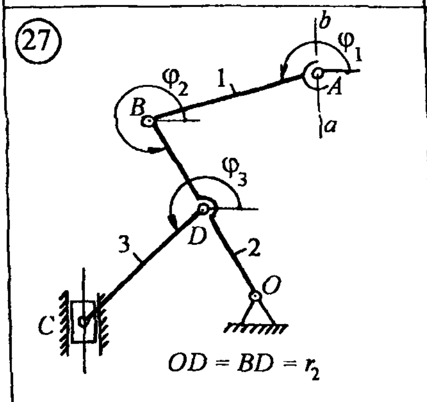
24

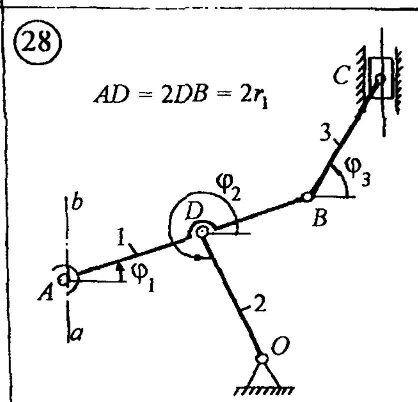


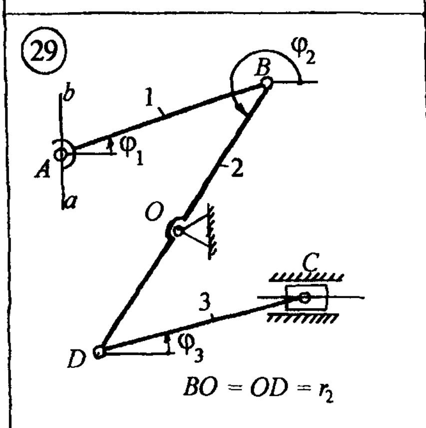
$AB = 2BC = 2r_1$


25
φ2
φ3
b
B
D
1
O
3
φ1
A
P
2
a
C


26
D
φ3
φ2
b
3
B
C
1
φ1
A
2
O
a


27
b
φ1
φ2
1
A
B
a
φ3
3
D
2
O
C
OD = BD = r2


28
C
AD = 2DB = 2r1
3
φ3
φ2
b
D
B
1
φ1
A
2
a
O


29
φ2
B
b
1
φ1
A
2
a
O
C
3
D
φ3
BO = OD = r2

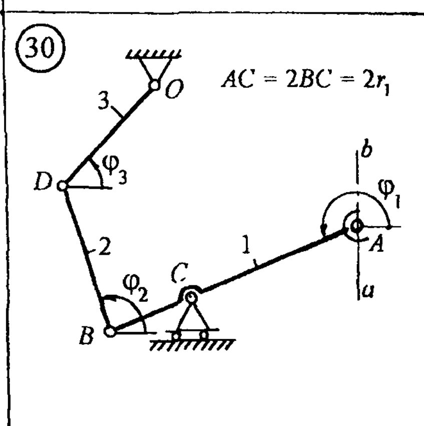

30
O
AC = 2BC = 2r1
3
b
φ3
D
φ1
A
1
2
C
φ2
a
B

Таблица Д4.1

Вариант	r_1, м	r_2, м	r_3, м	φ_1, рад	φ_2, рад	φ_3, рад
1	0,8	0,7	0,7	3,1	3,7	5,5
2	0,4	0,6	0,6	2,5	2,0	2,0
3	0,8	0,4	0,8	0,5	5,2	4,2
4	0,9	0,5	0,8	0,4	0,7	5,7
5	0,4	0,6	0,6	3,0	4,9	5,8
6	0,7	0,7	0,6	2,0	3,4	1,3
7	0,9	0,4	0,8	3,1	5,9	0,6
8	0,4	0,7	0,7	0,5	0,5	5,1
9	0,9	0,4	0,8	3,7	0,4	5,8
10	0,4	0,6	0,6	2,8	3,6	3,7
11	0,8	0,5	0,6	5,8	3,2	4,7
12	0,4	0,6	0,7	1,9	0,7	0,4
13	0,4	0,6	0,6	3,2	3,9	5,4
14	0,9	0,4	0,7	0,5	5,0	5,2
15	0,9	0,5	0,7	2,8	4,5	1,8
16	0,5	0,7	0,7	0,4	4,2	5,0
17	0,9	0,5	0,7	2,6	0,7	2,0
18	0,4	0,6	0,5	0,4	5,0	5,8
19	0,53	0,47	0,47	0,57	5,77	5,17
20	0,4	0,5	0,6	1,1	2,5	3,7
21	0,5	0,7	0,7	3,1	2,5	2,5
22	0,9	0,5	0,8	0,3	0,4	5,1
23	0,4	0,6	0,7	3,3	2,1	2,2
24	0,4	0,7	0,7	3,1	3,0	4,2
25	0,9	0,5	0,8	0,5	5,6	5,5
26	0,8	0,6	0,7	0,5	5,7	5,6
27	0,9	0,5	0,7	3,0	5,1	4,2
28	0,5	0,7	0,7	0,5	5,2	1,2
29	0,9	0,5	0,8	0,4	4,2	0,5
30	0,6	0,6	0,6	3,0	2,1	0,7

Решение. Составим уравнения кинетостатики для управляющих моментов. Освободим систему от связей, как показано на рис. Д4, *б*. Изобразим реакции связей, активную силу тяжести $\overline{P}$ груза *A* и моменты управления M_B и M_E. По принципу Даламбера условно приложим к точке *A* силу инерции $\overline{F}_и = -m\overline{a}_A$.

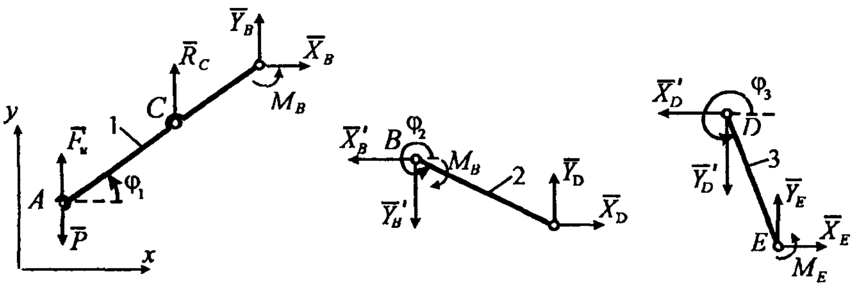


Рис. Д4, *б*

Для заданного движения точки A находим

$$F_и = -ma_A = -m\dot{V}_A = -mVp\cos(pt). \tag{25}$$

Составим уравнения равновесия систем сил, показанных на рис. Д4, *б*. Из уравнений проекций сил на ось x для звеньев 1, 2 и 3 с учетом, что $|\overline{X}'_B| = |\overline{X}_B|$, $|\overline{X}'_D| = |\overline{X}_D|$, получим

$$X_B = X_D = X_E = 0. \tag{26}$$

Из уравнений проекций сил на ось y с учетом, что $|\overline{Y}'_B| = |\overline{Y}_B|$, $|\overline{Y}'_D| = |\overline{Y}_D|$, получим

$$Y_E = Y_D = Y_B. \tag{27}$$

Составим уравнение моментов сил, действующих на звено 1, относительно точки С, имея в виду, что согласно (26) $X_B = 0$

$$P2r_1\cos\varphi_1 - F_и 2r_1\cos\varphi_1 + Y_B r_1\cos\varphi_1 + M_B = 0. \tag{28}$$

Уравнение моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки B, учитывая, что $X_D = 0$, имеет вид

$$Y_D r_2\cos\varphi_2 - M_B = 0. \tag{29}$$

Так как $Y_E = Y_D = Y_B$ из (29), найдем

$$Y_B = \frac{M_B}{r_2\cos\varphi_2} = Y_E. \tag{30}$$

Подставляя значение Y_B в (28) и учитывая (25) определим

$$M_B = \frac{2r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 m(g + Vp\cos(pt))}{r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2}. \tag{31}$$

Составим уравнение моментов сил, действующих на звено 3, относительно точки D, имея в виду, что согласно (26) $X_E = 0$

$$M_E + Y_E r_3 \cos\varphi_3 = 0,$$

где значение Y_E определено по формуле (30). Откуда

$$M_E = -\frac{r_3\cos\varphi_3}{r_2\cos\varphi_2} M_B. \tag{32}$$

Подставляя числовые значения заданных величин, находим

$$M_B = -\frac{8{,}47\cos\varphi_1\cos\varphi_2(9{,}8 + 0{,}842\cos(1{,}87t))}{0{,}53\cos\varphi_1 + 0{,}47\cos\varphi_2}. \tag{33}$$

$$M_E = -\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_2} M_B. \tag{34}$$

Составление кинематических уравнений

На рис. Д4, *в* представлен векторный контур, включающий точки A и C механизма и начало координат точку O. Согласно этому контуру

$$\bar{r}_C = \bar{r}_A + \overline{AC}.$$

Дифференцируя это выражение по времени, находим

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA},$$

где $\bar{V}_{CA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AC}$.

Таким образом,

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + (\bar{\omega}_1 \times \overline{AC}). \tag{35}$$

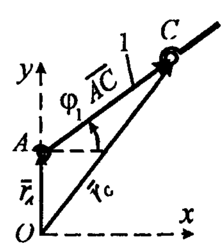


Рис. Д4, *в*

Проецируя равенство (34) на координатные оси x и y, получим

$$V_{Cx} = V_{Ax} - \omega_1 AC \sin\varphi_1;$$

$$V_{Cy} = V_{Ay} + \omega_1 AC \cos\varphi_1.$$

Учитывая, что $V_{Cx} = V_C = 0$, $V_{Cy} = 0$, $V_{Ax} = 0$, $V_{Ay} = V_A = V\sin pt$, а также подставляя числовые значения заданных постоянных величин, находим

$$1{,}06\omega_1\cos\varphi_1 + 0{,}45\sin(1{,}87t) = 0, \qquad (36)$$

$$1{,}06\omega_1\sin\varphi_1 + V_C = 0. \qquad (37)$$

На рис. Д4, *г* представлен векторный контур, включающий точки C, B, D, E и начало координат, из которого следует

$$\bar{r}_E = \bar{r}_C + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DE}. \qquad (38)$$

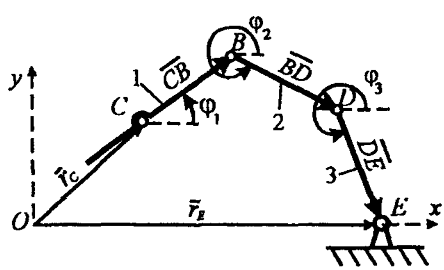


Рис. Д4, *г*

Дифференцируя по времени равенство (38), находим

$$\bar{V}_E = \bar{V}_C + \bar{V}_{BC} + \bar{V}_{DB} + \bar{V}_{ED},$$

или

$$\bar{V}_E = \bar{V}_C + (\bar{\omega}_1 \times \overline{CB}) + (\bar{\omega}_2 \times \overline{BD}) + (\bar{\omega}_3 \times \overline{DE}). \qquad (39)$$

Перепишем равенство (39) в проекциях на координатные оси x и y

$$V_{Ex} = V_{Cx} - \omega_1 CB \sin\varphi_1 - \omega_2 BD \sin\varphi_2 - \omega_3 DE \sin\varphi_3,$$

$$V_{Ey} = V_{Cy} + \omega_1 CB \cos\varphi_1 + \omega_2 BD \cos\varphi_2 + \omega_3 DE \cos\varphi_3.$$

Учитывая, что $V_{Ex} = 0$, $V_{Ey} = 0$, $V_{Cx} = V_C$, $V_{Cy} = 0$ и подставляя числовые значения заданных постоянных величин, последние равенства принимают вид

$$0{,}53\omega_1 \sin\varphi_1 + 0{,}47\omega_2 \sin\varphi_2 + 0{,}47\omega_3 \sin\varphi_3 - V_C = 0, \qquad (40)$$

$$0{,}53\omega_1 \cos\varphi_1 + 0{,}47\omega_2 \cos\varphi_2 + 0{,}47\omega_3 \cos\varphi_3 = 0. \qquad (41)$$

Полученная система четырех линейных уравнений (36), (37), (40) и (41) позволяет определить искомые величины ω_1, ω_2, ω_3 и V_C.

Для проведения расчетов по формулам (36), (37), (40) и (41) с помощью универсальной математической системы MathCAD приведем эти уравнения к стандартной матричной форме:

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) X(\mathrm{t}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = B(t), \qquad (42)$$

где $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – матрица коэффициентов при ω_1, ω_2, ω_3 и V_C; $X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – матрица-столбец неизвестных; $B(t)$ – матрица свободных членов.

Расположим элементы матрицы столбца $X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ в следующем порядке:

$$X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ V_C \end{vmatrix}.$$

В этом случае матрица $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и столбец свободных членов $B(t)$ таковы:

$$A = \begin{vmatrix} 1{,}06\cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}06\sin\varphi_1 & 0{,}5\cos\varphi_2 & 0 & 1 \\ 0{,}53\sin\varphi_1 & 0{,}47\sin\varphi_2 & 0{,}47\sin\varphi_3 & -1 \\ 0{,}53\cos\varphi_1 & 0{,}47\cos\varphi_2 & 0{,}47\cos\varphi_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B(t) = \begin{vmatrix} -0{,}45\sin(1{,}87t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Выражение (41) можно записать как

$$X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{-1} \cdot B(t). \qquad (43)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3. \qquad (44)$$

Из (43) получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \qquad (45)$$

Для решения полученных уравнений используем функцию rkfixed ($f0$, $t0$, τ, n, D), возвращающую матрицу решений методом Рунге-Кутта. Задаем решение уравнений

$$z = \text{rkfixed}\,(f0, t0, \tau, n, D),$$

где $f0$ – вектор начальных условий для углов $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$; $t0$ – начальный момент времени; τ – конечный момент времени; n – число шагов; D – вектор правых частей дифференциальных уравнений (45).

В результате расчетов получим: $z^{<0>}$ – вектор значений времени; $z^{<1>}$ – вектор значений φ_1; $z^{<2>}$ – вектор значений φ_2; $z^{<3>}$ – вектор значений φ_3 для каждого шага времени n.

Значения управляющих моментов M_B и M_E определяем по формулам (33) и (34).

Ниже приведена программа расчета, а результаты решения по изложенному методу – в табл. Д4.2 и на рис. Д4, *д*.

Программа динамического расчета манипулятора

Матрица левой части системы уравнений

$$A(\phi 1, \phi 2, \phi 3) := \begin{pmatrix} 1.06 \cdot \cos(\phi 1) & 0 & 0 & 0 \\ 1.06 \cdot \sin(\phi 1) & 0 & 0 & 1 \\ 0.53 \cdot \sin(\phi 1) & 0.47 \cdot \sin(\phi 2) & 0.47 \cdot \sin(\phi 3) & -1 \\ 0.53 \cdot \cos(\phi 1) & 0.47 \cdot \cos(\phi 2) & 0.47 \cdot \cos(\phi 3) & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица правой части системы уравнений

$$B(t) := \begin{pmatrix} -0.45 \cdot \sin(1.87 \cdot t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система уравнений в матричном виде, записаная относительно угловых скоростей звеньев и скорости точки C

$$X(t, \phi 1, \phi 2, \phi 3) := A(\phi 1, \phi 2, \phi 3)^{-1} \cdot B(t)$$

$$D(t, \phi) := \begin{pmatrix} X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_0 \\ X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_1 \\ X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_2 \end{pmatrix}$$

$$f1(t, s1, s2, s3) := X(t, s1, s2, s3)_0$$
$$f2(t, s1, s2, s3) := X(t, s1, s2, s3)_1$$
$$f3(t, s1, s2, s3) := X(t, s1, s2, s3)_2$$
$$f4(t, s1, s2, s3) := X(t, s1, s2, s3)_3$$

Вектор столбец начальных условий $\phi 1(0)$, $\phi 2(0)$, $\phi 3(0)$

$$f0 := \begin{pmatrix} 0.57 \\ 5.77 \\ 5.17 \end{pmatrix} \qquad z := \mathrm{rkfixed}(f0, 0, 1.68, 24, D)$$

$$\omega 1 := \overrightarrow{f1\left(z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}\right)} \qquad \omega 2 := \overrightarrow{f2\left(z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}\right)}$$

$$\omega 3 := \overrightarrow{f3\left(z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}\right)} \qquad Vc := \overrightarrow{f4\left(z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}\right)}$$

Длины звеньев $\quad r1 := 0.53 \quad r2 := 0.47 \quad r3 := 0.47$

Масса груза A $\quad m1 := 17$

Шаг по времени $\quad i := 0, 1 .. 24$

$$Mb(i) := \frac{-2 \cdot r1 \cdot r2 \cdot \cos(z_{i,1}) \cdot \cos(z_{i,2}) \cdot m1 \cdot (9.81 + 0.45 \cdot 1.87 \cdot \cos(1.87 \cdot z_{i,0}))}{r1 \cdot \cos(z_{i,1}) + r2 \cdot \cos(z_{i,2})}$$

$$Me(i) := \frac{-r3 \cdot \cos(z_{i,3})}{r2 \cdot \cos(z_{i,2})} \cdot Mb(i)$$

Таблица Д4.2

t	φ_1	φ_2	φ_3	M_B	M_E
0,0000	0,5700	5,7700	5,1700	– 77,3270	39,2150
0,0700	0,5677	5,7767	5,1617	– 77,4799	38,4854
0,1400	0,5608	5,7955	5,1381	– 77,8971	36,4151
0,2100	0,5496	5,8235	5,1024	– 78,4812	33,2908
0,2800	0,5343	5,8575	5,0581	– 79,1262	29,4376
0,3500	0,5152	5,8948	5,0085	– 79,7470	25,1393
0,4200	0,4929	5,9335	4,9561	– 80,2853	20,6201
0,4900	0,4677	5,9722	4,9029	– 80,7051	16,0543
0,5600	0,4402	6,0102	4,8505	– 80,9869	11,5791
0,6300	0,4110	6,0471	4,8000	– 81,1229	7,3048
0,7000	0,3805	6,0827	4,7525	– 81,1145	3,3193
0,7700	0,3493	6,1169	4,7086	– 80,9693	– 0,3099
0,8400	0,3179	6,1498	4,6690	– 80,7001	– 3,5355
0,9100	0,2869	6,1813	4,6339	– 80,3237	– 6,3297
0,9800	0,2567	6,2114	4,6037	– 79,8598	– 8,6843
1,0500	0,2277	6,2401	4,5784	– 79,3305	– 10,6092
1,1200	0,2004	6,2672	4,5578	– 78,7597	– 12,1303
1,1900	0,1753	6,2924	4,5416	– 78,1725	– 13,2870
1,2600	0,1527	6,3155	4,5294	– 77,5946	– 14,1283
1,3300	0,1329	6,3359	4,5206	– 77,0516	– 14,7093
1,4000	0,1163	6,3534	4,5145	– 76,5678	– 15,0868
1,4700	0,1031	6,3675	4,5107	– 76,1656	– 15,3148
1,5400	0,0935	6,3778	4,5084	– 75,8637	– 15,4404
1,6100	0,0876	6,3841	4,5072	– 75,6765	– 15,5003
1,6800	0,0857	6,3863	4,5068	– 75,6131	– 15,5176

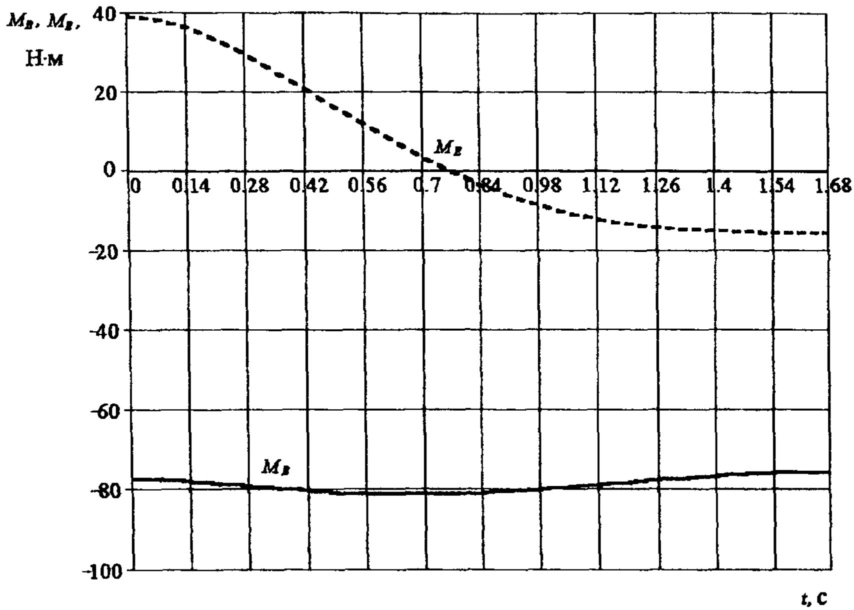


Рис. Д4, *д*

Для составления программ на языке *Pascal* уравнения (36), (37), (40) и (41) представим в явном виде относительно ω_1, ω_2, ω_3 и V_C:

$$\omega_1 = -0{,}425\sin(1{,}87t)/\cos\varphi_1,$$

$$\omega_2 = -0{,}53\,\omega_1\left[\frac{2\sin\varphi_1\cos\varphi_3 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{0{,}47\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}\right],$$

$$\omega_3 = -\frac{0{,}53\,\omega_1\cos\varphi_1 + 0{,}47\,\omega_2\cos\varphi_2}{0{,}47\cos\varphi_3}, \qquad (46)$$

$$V_C = -1{,}06\,\omega_1\sin\varphi_1.$$

Дополним систему уравнений (46) уравнениями (44). Конечно-разностная схема Эйлера для (46), (44) приводит к следующим уравнениям, связывающим значения углов и угловых скоростей в начале и конце k-го шага интегрирования:

$$\varphi_1(k+1) = \varphi_1(k) + \omega_1(k)\Delta t,$$

$$\varphi_2(k+1) = \varphi_2(k) + \omega_2(k)\Delta t,$$

$$\varphi_3(k+1) = \varphi_3(k) + \omega_3(k)\Delta t.$$

Учитывая начальные условия $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$ и шаг по времени Δt, организуем цикл по времени с помощью стандартного оператора

repeat

. . . . . .

Тело цикла (формулы (45) для вычислений ω_1, ω_2, ω_3, V_C (33), (34) для M_B и M_E)

. . . . .

until t > τ.

На печать с шагом $\Delta t = \tau/24 = 0{,}07$ с выводятся переменные t, φ_1, φ_2, φ_3, M_B, M_E.

Ниже представлена программа и результаты расчета на языке *Pascal* (табл. Д4.3), а также график изменения моментов в зависимости от времени (рис. Д4, *е*).

```
Program Met_Dinamika; {вычисление кинематических и }
                      {динамических характеристик }
                      {манипулятора}

const dt=1.68/24;     {инетрвал изменения времени}
      m1=17; r1=0.53; r2=0.47; r3=0.47; V=0.45;
      p=1.87;

Var
om1, om2, om3, Vc, f1, f2, f3, t, K1, K2, Mb, Me: REAL;
F, S, M: Text;

Begin

     t := 0; f1 := 0.57; f2 := 5.77; f3 := 5.17;

    Assign(F, 'S41.dat');

    Assign(S, 'S42.dat');
```

```
  Assign(M, 'S43.dat');
 ReWrite(F);
 ReWrite(S);
 ReWrite(M);
 Repeat
 K1 := 2·sin(f1)·cos(f3) + sin(f1 - f3);
 K2 := r1·cos(f1) + r2·cos(f2);
 om1 := - 0.425·sin(1.87·t)/cos(f1);
 om2 := - 0.53·om1·(K1/(0.47·sin(f2 - f3)));
 om3 := -(0.53·om1·cos(f1)+0.47·om2·cos(f2))/(0.47·cos(f3));
 Vc := - 1.06·om1·sin(f1);
 Mb := - (2·r1·r2·cos(f1)·cos(f2)·m1·(9.81+V·p·cos(1.87·t)))/K2;
 Me := - r3·cos(f3)·Mb/(r2·cos(F2));
     Writeln(F, t:8:3, f1:8:3, f2:8:3, f3:8:3,
om1:10:4, om2:10:4, om3:10:4, Vc:10:4);
     Writeln(S, t:8:3, om1:8:3, om2:10:3, om3:10:3,
Vc:12:3);
     Writeln(M, t:8:3, Mb:8:3, Me:10:3);
     t := t + dt;
    f1 := f1 + om1·dt;
    f2 := f2 + om2·dt;
    f3 := f3 + om3·dt;
      Until  t >= 1.68 + 0.25;
End.
```

Таблица Д4.3

t	φ_1	φ_2	φ_3	M_B	M_E
0,0000	0,5700	5,7700	5,1700	– 77,3270	39,2150
0,0700	0,5700	5,7700	5,1700	– 77,2750	39,1890
0,1400	0,5650	5,7840	5,1530	– 77,5300	37,6870
0,2100	0,5560	5,8090	5,1220	– 78,0260	34,8930
0,2800	0,5430	5,8420	5,0790	– 78,6460	31,1470
0,3500	0,5250	5,8810	5,0290	– 79,2800	26,7990
0,4200	0,5050	5,9210	4,9750	– 79,8500	22,1330
0,4900	0,4810	5,9620	4,9190	– 80,3100	17,3590
0,5600	0,4540	6,0020	4,8640	– 80,6320	12,6360
0,6300	0,4250	6,0410	4,8100	– 80,8090	8,0840
0,7000	0,3950	6,0780	4,7580	– 80,8390	3,7980
0,7700	0,3640	6,1130	4,7110	– 80,7300	– 0,1460
0,8400	0,3320	6,1470	4,6670	– 80,4950	– 3,6940
0,9100	0,3010	6,1790	4,6280	– 80,1500	– 6,8120
0,9800	0,2700	6,2090	4,5930	– 79,7160	– 9,4810
1,0500	0,2400	6,2380	4,5640	– 79,2150	– 11,7040
1,1200	0,2120	6,2660	4,5400	– 78,6690	– 13,4980
1,1900	0,1860	6,2920	4,5200	– 78,1040	– 14,8960
1,2600	0,1620	6,3150	4,5050	– 77,5430	– 15,9420
1,3300	0,1400	6,3370	4,4940	– 77,0130	– 16,6880
1,4000	0,1220	6,3560	4,4860	– 76,5370	– 17,1900
1,4700	0,1070	6,3710	4,4810	– 76,1380	– 17,5070
1,5400	0,0950	6,3830	4,4780	– 75,8350	– 17,6910
1,6100	0,0880	6,3920	4,4760	– 75,6440	– 17,7880
1,6800	0,0840	6,3960	4,4760	– 75,5770	– 17,8340

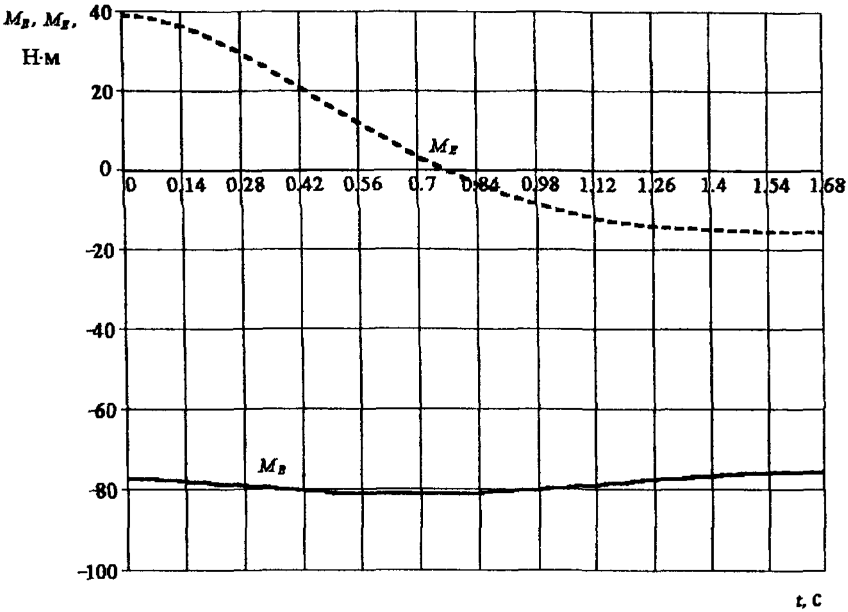


Рис. Д4, *е*

Из рис. Д4, *д* и Д4, *е* видно, что результаты численного и аналитического расчета совпадают.

Задание Д5. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

Общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0,$$

где $\sum \delta A_k^a$ – сумма элементарных работ активных сил, действующих на механическую систему с идеальными связями, на любом возможном перемещении системы; $\sum \delta A_k^и$ – сумма элементарных работ сил инерции на возможном перемещении системы.

В том случае, когда связи являются неидеальными (связи при наличии трения), силы трения условно относят к активным силам и учитывают их элементарную работу.

Если механическая система состоит из твердых тел, то силы инерции их точек приводят к главному вектору сил инерции $\overline{R}^{и}$ и главному моменту этих сил $\overline{M}_O^{и}$ относительно центра приведения.

При поступательном движении твердого тела силы инерции приводятся к главному вектору

$$\overline{R}^{и} = M\overline{a},$$

где M – масса всего тела, $\overline{a}$ – ускорение тела. В этом случае главный вектор является равнодействующей сил инерции точек тела.

При вращении тела вокруг неподвижной оси z силы инерции точек приводятся к главному вектору, приложенному в центре масс и главному моменту относительно этой оси:

$$\overline{R}^{и} = M\overline{a}_C, \quad M_Z^{и} = -J_z\varepsilon,$$

где $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс тела; J_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ε – угловое ускорение.

В случае, когда тело совершает плоское (плоскопараллельное) движение, силы инерции приводят к главному вектору $\overline{R}^{и} = M\overline{a}_C$, приложенному в центре масс и главному моменту относительно оси, проходящей через центр масс:

$$M_C^{и} = -J_z\varepsilon,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси проходящей через центр масс.

Целью данной задачи является исследование движения механической системы, описание которой представлено в задании Д3. Варианты к задаче Д5 приведены на рис. Д3.0 – Д3.9 и в табл. Д3.

Пример Д5. Механическая система (рис. Д5) состоит из сплошного однородного катка 1, ступенчатого шкива 2 с радиусами ступеней R_2 и r_2 и радиусом инерции относительно оси вращения i, груза 3, блока 4 и подвижного сплошного однородного блока 5. Коэффициент трения груза 3 о плоскость равен f. Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкив 2. К центру подвижного блока прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c, ее начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения точки ее приложения; на шкив действует постоянный момент сопротивления. Массу блока 4 считать равномерно распределенной по его ободу. Каток 1 катится по наклонной плоскости без скольжения.

Дано: m_1 = 10 кг; m_2 = 6 кг; m_3 = 2 кг; m_4 = 4 кг; m_5 = 5 кг; i = 0,2 м; R_2 = 0,3 м; r_2 = 0,1 м; R_4 = 0,1 м; f = 0,2; с = 200 Н/м; M = 0,4 Н·м; $F = 50(4 + 2s)$ Н; s_1 = 0,25 м.

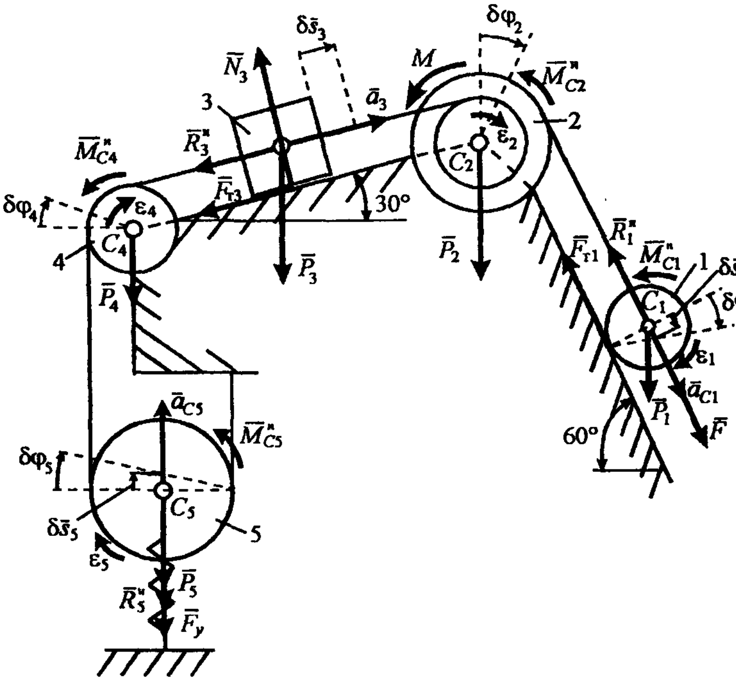


Рис. Д5

Определить угловую скорость блока 4 в тот момент, когда перемещение центра масс катка 1 станет равным s_1. Принять ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение. Предположим, что центр масс катка 1 движется по наклонной плоскости с ускорением $\bar{a}_{C1}$. Выразим ускорения центров масс и угловые ускорения остальных тел системы через a_{C1}:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{C1}}{r_1};\ \varepsilon_2 = \frac{a_{C1}}{R_2};\ a_3 = a_{C1}\frac{r_2}{R_2};$$

$$\varepsilon_4 = a_{C1}\frac{r_2}{R_2R_4};\ \varepsilon_5 = a_{C1}\frac{r_2}{R_2 2r_5};\ a_{C5} = a_{C1}\frac{r_2}{2R_2}.$$

Вычислим модули угловых скоростей главных векторов и главных моментов сил инерции всех тел (направление их противоположно соответствующим ускорениям)

$$R_1^{и} = m_1 a_{C1};\ M_{C1}^{и} = J_{C1}\varepsilon_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\frac{a_{C1}}{r_1};\ M_{C2}^{и} = J_{C2}\varepsilon_2 = m_2 i^2\frac{a_{C1}}{R_2};\ R_3^{и} = m_3\frac{r_2}{R_2}a_{C1};$$

$$M_{C4}^{и} = J_{C4}\varepsilon_4 = m_4 R_4^2\frac{r_2}{R_2R_4}a_{C1} = m_4\frac{R_4 r_2}{R_2}a_{C1};\ R_5^{и} = m_5 a_{C5} = m_5\frac{r_2}{2R_2}a_{C1};$$

$$M_{C5}^{и} = J_{C5}\varepsilon_5 = \frac{1}{2}m_5 r_5^2\frac{r_2}{2R_2 r_5}a_{C1} = \frac{1}{4}m_5\frac{r_5 r_2}{R_2}a_{C1}.$$

Приложим к телам соответствующие силы инерции и действующие силы (силы тяжести, силы трения, момент сопротивления и силу упругости пружины). Сила трения $F_{т3} = fN_3 = fP_3\cos 30° = fm_3g\cos 30°$. Сила упругости $F_y = cs_{C5} = cr_2s_1/(2R_2)$, где s_1 – перемещение центра масс катка 1.

Сообщим системе возможное перемещение, при этом точка C_1 получит возможное перемещение $\delta\bar{s}_1$. Возможные перемещения точек приложения сил к другим телам и угловые перемещения выразим через $\delta\bar{s}_1$:

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_1}{r_1};\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R_2};\ \delta s_3 = \delta s_1\frac{r_2}{R_2};\ \delta\varphi_4 = \delta s_1\frac{r_2}{R_2R_4};$$

$$\delta\varphi_5 = \delta s_1\frac{r_2}{R_2 2r_5};\ \delta s_5 = \delta s_1\frac{r_2}{2R_2}.$$

Вычислим возможные работы активных сил:

$$\delta A(\bar{P}_1) = P_1\sin 60°\delta s_1 = m_1 g\sin 60°\delta s_1;$$

$$\delta A(\bar{F}) = F\delta s_1 = 50(4 + 2s_1)\delta s_1;$$

$$\delta A(M) = -M\delta\varphi_2 = -M(1/R_2)\delta s_1;$$

$$\delta A(\bar{P}_3) = -P_3\sin 30°\delta s_3 = -m_3 g\sin 30°(r_2/R_2)\delta s_1;$$

$$\delta A(\overline{F}_{т3}) = -F_{т3}\delta s_3 = -fm_3 g\cos 30°(r_2/R_2)\delta s_1;$$

$$\delta A(\overline{P}_5) = -P_5\delta s_5 = -m_5 g(0{,}5r_2/R_2)\delta s_1;$$

$$\delta A(\overline{F}_y) = -F_y\delta s_5 = -c(0{,}5r_2/R_2)s_1(0{,}5r_2/R_2)\delta s_1 = -c(0{,}5r_2/R_2)^2 s_1\delta s_1.$$

Возможные работы сил инерции:

$$\delta A(\overline{R}_1^{и}) = -m_1 a_{C1}\delta s_1;$$

$$\delta A(M_{C1}^{и}) = -M_{C1}^{и}\delta\varphi_1 = -0{,}5m_1 r_1 a_{C1}\delta s_1/r_1 = -0{,}5m_1 a_{C1}\delta s_1;$$

$$\delta A(M_{C2}^{и}) = -M_{C2}^{и}\delta\varphi_2 = -m_2 i^2(a_{C1}/R_2)\delta s_1/R_2 = -m_2 i^2(a_{C1}/R_2^2)\delta s_1;$$

$$\delta A\,(\overline{R}_3^{и}) = -m_3 a_3\delta s_3 = -m_3(r_2/R_2)a_{C1}(r_2/R_2)\delta s_1 = -m_3(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1;$$

$$\delta A\,(M_{C4}^{и}) = -M_{C4}^{и}\delta\varphi_4 = -m_4(R_4 r_2/R_2)a_{C1}(r_2/R_2R_4)\delta s_1 = -m_4(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1;$$

$$\delta A\,(\overline{R}_5^{и}) = -R_5^{и}\delta s_5 = -m_5(r_2/2R_2)a_{C1}(r_2/2R_2)\delta s_1 = -m_5(r_2/2R_2)^2 a_{C1}\delta s_1;$$

$$\delta A\,(M_{C5}^{и}) = -M_{C5}^{и}\delta\varphi_5 = -0{,}25m_5(r_2 r_5/R_2)a_{C1}r_2/(R_2 2r_5)\delta s_1 =$$

$$= -0{,}125m_5(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1;$$

Согласно общему уравнению динамики сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю. Составим эту сумму:

$$m_1 g\sin 60°\delta s_1 + 50(4 + 2s_1)\delta s_1 - M(1/R_2)\delta s_1 - m_3 g\sin 30°(r_2/R_2)\delta s_1 -$$

$$-fm_3 g\cos 30°(r_2/R_2)\delta s_1 - m_5 g(0{,}5r_2/R_2)\delta s_1 - c(0{,}5r_2/R_2)^2 s_1\delta s_1 - m_1 a_{C1}\delta s_1 -$$

$$-0{,}5m_1 a_{C1}\delta s_1 - m_2 i^2(a_{C1}/R_2^2)\delta s_1 - m_3(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1 - m_4(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1 -$$

$$-m_5(r_2/2R_2)^2 a_{C1}\delta s_1 - 0{,}125m_5(r_2/R_2)^2 a_{C1}\delta s_1 = 0.$$

Сокращая это равенство на δs_1 и подставляя числовые значения заданных величин после несложных преобразований получим

$$a_{C1} = 14{,}69 + 5{,}1s_1.$$

Преобразуем левую часть этого равенства

$$a_{C1} = \frac{\mathrm{d}V_{C1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V_{C1}}{\mathrm{d}s_1}\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} = \frac{V_{C1}\mathrm{d}V_{C1}}{\mathrm{d}s_1}.$$

Тогда

$$V_{C1}\mathrm{d}V_{C1} = 14{,}69\mathrm{d}s_1 + 5{,}1s_1\mathrm{d}s_1.$$

Интегрируя, находим

$$\left.\frac{V_{C1}}{2}\right|_0^{V_{C1}} = 14{,}69s_1\Big|_0^{s_1} + 5{,}1\left.\frac{s_1}{2}\right|_0^{s_1}.$$

Подставив заданное значение $s_1 = 0{,}25$ м, найдем

$$V_{C1} = 2{,}768 \text{ м/с}.$$

Искомая угловая скорость ω_4 следующая:

$$\omega_4 = V_{C1}\frac{r_2}{R_2R_4} = 2{,}768\frac{0{,}1}{0{,}3\cdot 0{,}1} = 9{,}23 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega_4 = 9{,}23$ с$^{-1}$. Полученный результат совпадает с результатом решения задачи Д4.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте общее уравнение динамики для механической системы с идеальными связями?
2. Как следует поступить, чтобы применить общее уравнение динамики для механических систем, содержащих неидеальные связи?
3. Зависят ли от выбора центра приведения главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела?
4. Чему равны главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела при его поступательном, вращательном и плоскопраллельном движении? Как направлен главный вектор и главный момент сил инерции тела?

Задание Д6. Изучение движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа II рода

Механическая система состоит из тел 1, 2, ..., 5 весом P_1, P_2, ..., P_5 соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки 1 и 2 (рис. Д6.0 – Д6.9, табл. Д6). Радиусы ступенчатых блоков 1 и 2 равны соответственно $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4R$, $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$. При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R.

На систему кроме сил тяжести действует сила $\overline{F}$, приложенная к телу 3 или 4 (если тело 3 в систему не входит, сила приложена в точке B к тележке), и пары сил с моментами M_1, M_2, приложенные к блокам 1 и 2; когда $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в табл. Д6 в столбце «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости c (например, если в столбце стоит AB, то участок AB является пружиной, если AD, то AD – пружина и т. д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты x, т. е. $x = f(t)$, считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты x см. «Указания»).

Таблица Д6

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	$4P$	0	–	$3P$	–	$4P$	0	0	AB
1	0	$2P$	–	–	$3P$	0	0	$-2PR$	KE
2	0	$2P$	–	P	–	0	$2PR$	0	AB
3	–	0	$2P$	$5P$	–	0	0	$2PR$	BD
4	P	–	–	–	$4P$	0	$-PR$	0	KE
5	–	–	$4P$	$3P$	–	P	0	0	BD
6	$2P$	0	–	–	P	0	0	PR	KE
7	–	$4P$	–	$2P$	–	$3P$	0	$2PR$	AB
8	–	$4P$	$2P$	0	–	0	0	$3PR$	BD
9	$2P$	0	–	P	–	0	$2PR$	0	AB

Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а нуль – что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером 4, P_4 – их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

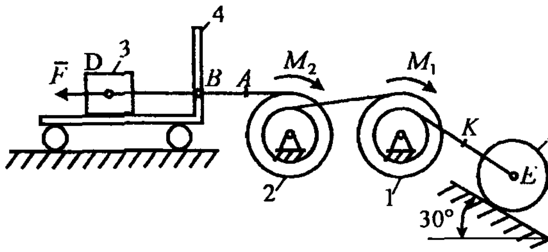


Рис. Д6.0

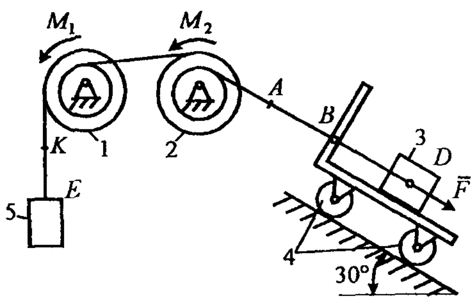


Рис. Д6.1

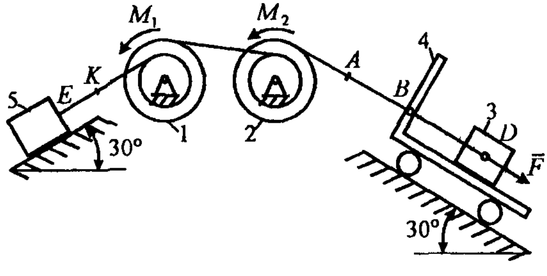


Рис. Д6.2

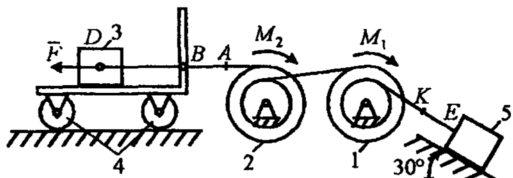


Рис. Д6.3

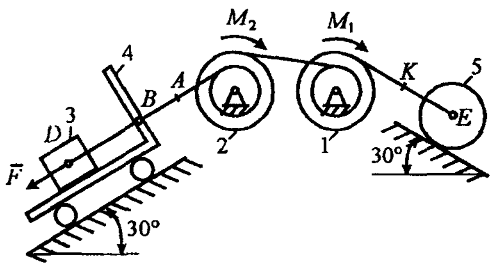


Рис. Д6.4

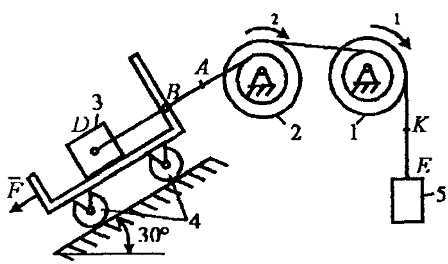


Рис. Д6.5

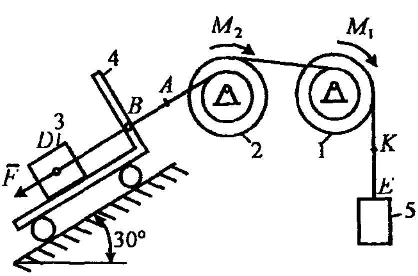


Рис. Д6.6

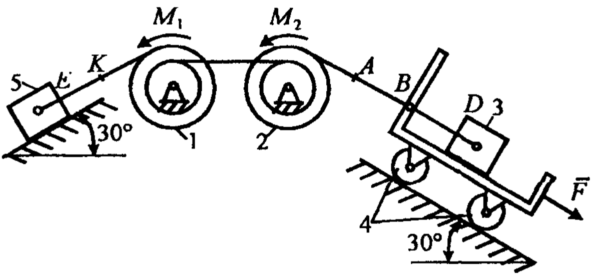


Рис. Д6.7

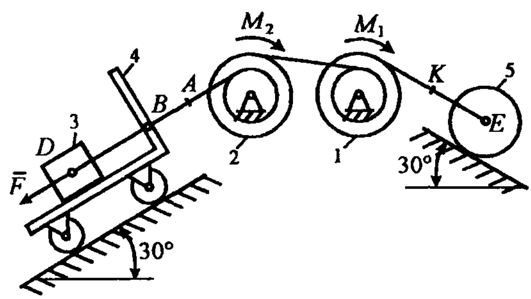


Рис. Д6.8

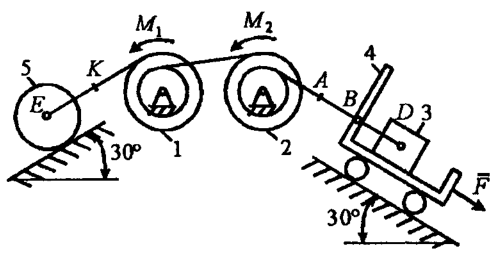


Рис. Д6.9

Указания. Задание Д6 на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа II рода. Система имеет две степени свободы, следовательно, ее положение нужно определить двумя обобщенными координатами q_1 и q_2 и составить два уравнения.

Решение начать с выбора обобщенных координат, обозначив их $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ или $q_1 = x$ и $q_2 = y$. За координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел 3, 4 или 5 системы, к которому пружина прикреплена. Например, если пружина прикреплена к этому телу в точке B и ее длина в произвольный момент времени равна AB, то $x = AB - l_0$, где l_0 – длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит, а входят лишь тела 3 и 4, за координату y принять расстояние тела 4 от начального положения.

Уравнения Лагранжа II рода дают общий метод составления дифференциальных уравнений движения механических систем с голономными связями в обобщенных координатах.

Для механических систем с одной степенью свободы вводится одна координата и уравнение имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ – частная производная от кинетической энергии системы по обобщенной скорости, $\frac{\partial T}{\partial q}$ – частная производная от кинетической энергии системы по обобщенной координате, Q – обобщенная сила.

Для механических систем с несколькими степенями свободы вводится столько же обобщенных координат, при этом каждой обобщенной координате будет соответствовать свое уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1,2,\dots,m),$$

здесь m – число степеней свободы механической системы.

При составлении уравнений Лагранжа II рода для данной механической системы рекомендуется следующая последовательность действий:

1) установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты;

2) изобразить систему в смещении в сторону положительных направлений обобщенных координат и показать на схеме все действующие на систему силы (для систем с идеальными связями – только активные силы);

3) вычислить обобщенные силы, последовательно задавая элементарные (возможные) положительные приращения обобщенных координат;

4) *выразить кинетическую энергию системы в ее абсолютном* движении через обобщенные координаты обобщенной скорости;

5) подсчитать соответствующие частные производные от T по q_i и $\dot{q}_i$ и подставить все величины в уравнение Лагранжа II рода. Из полученных дифференциальных уравнений при заданных силах находят законы изменения обобщенных координат, а при заданном законе движения определяют вызывающие его силы.

Пример Д6. Механическая система (рис. Д6) состоит из тел 1, 2, 3 весом P_1, P_2 и P_3 соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки 1 и 2. Радиусы ступенчатых блоков 1 и 2 равны соответственно $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4R$, $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$. При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R.

На систему кроме сил тяжести действует пара сил M_1, приложенная к *блоку 1. Между тележкой 3 и блокам 2 присоединена* пружина с коэффициентом жесткости c; в начальный момент времени пружина не деформирована. Массой колес тележки пренебречь.

Составить для системы уравнения Лагранжа II рода и найти закон изменения обобщенной координаты x, т. е. $x = x(t)$, считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении.

Дано: R; c; $P_1 = 2P$; $P_3 = P$; $M_1 = 2PR$; $P_2 = 0$.

Определить: 1) $x = x(t)$, где x – удлинение пружины (или перемещение тележки по отношению к концу пружины); 2) частоту k и период τ колебаний.

Решение. 1. Для решения задания воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$,). Тогда уравнения Лагранжа II рода будут иметь вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \qquad (47)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел

$$T = T_1 + T_3. \qquad (48)$$

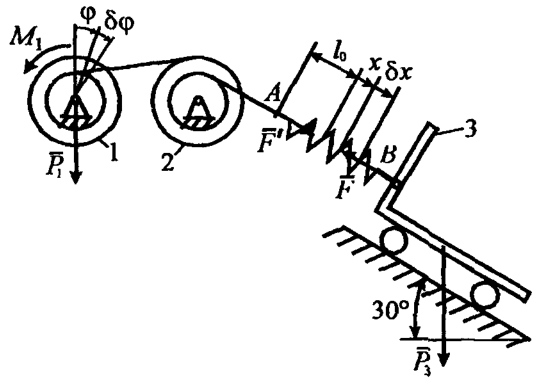


Рис. Д6

Барабан 1 совершает вращательное движение вокруг оси O, тележка движется поступательно, следовательно

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2; \quad T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g} V_3^2; \qquad (49)$$

где $J_0 = \frac{P_1}{2g} R^2$.

Все входящие сюда величины надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$. Для определения V_3 рассмотрим движение тележки как сложное. Учитывая, что x определяет положение тележки по отношению к пружине, получим

$$\overline{V}_3 = \overline{V}_3^{\text{пер}} + \overline{V}_3^{\text{отн}},$$

где $\overline{V}_3^{\text{отн}} = \dot{x}$, $\overline{V}_3^{\text{пер}} = \omega_1 \frac{r_1 r_2}{R_2} = \dot{\varphi}\frac{0{,}4R0{,}8R}{R} = 0{,}32R\dot{\varphi}$. Тогда принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $\overline{V}_3^{\text{пер}}$ и $\overline{V}_3^{\text{отн}}$ направлены в одну сторону, получим

$$V_3 = 0{,}32R\dot{\varphi} + \dot{x}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей в равенства (49), получим окончательно из (48) следующее выражение для T:

$$T = \frac{P}{g}\left(0{,}551R^2\dot{\varphi}^2 + 0{,}32R\dot{\varphi}\dot{x} + 0{,}5\dot{x}^2\right). \qquad (50)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{P}{g}\left(1{,}102R^2\dot\varphi+0{,}32R\dot x\right);\ \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot x}=\frac{P}{g}\left(0{,}32R\dot\varphi+\dot x\right);\ \frac{\partial T}{\partial x}=0. \quad (51)$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2. Изобразим действующие на систему силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, силы упругости $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M_1.

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает перемещение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т. е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка получит перемещение $\delta s_3 = \delta\varphi\frac{r_1r_2}{R_2} = 0{,}32R\delta\varphi$, направленное вдоль наклонной плоскости вниз. Элементарная работа действующих сил

$$\delta A_1 = -M_1\delta\varphi + F'\delta\varphi\frac{r_1r_2}{R_2} - F\delta\varphi\frac{r_1r_2}{R_2} + P_3\sin 30°\delta\varphi\frac{r_1r_2}{R_2},$$

или, учитывая числовые значения заданных величин,

$$\delta A_1 = -\ 1{,}84PR\delta\varphi.$$

Обобщенная сила $Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi} = -1{,}84PR.$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т. е. $\delta\varphi = 0$ (барабан 1 не поворачивается). Тогда элементарную работу совершат только силы $\overline{P}_3$ и $\overline{F}$:

$$\delta A_2 = P_3\sin 30°\delta x - F\delta x = (P_3\sin 30° - cx)\delta x.$$

С учетом заданных числовых значений имеем

$$\delta A_2 = (0{,}5P - cx)\delta x.$$

Обобщенная сила $Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta\varphi} = 0{,}5P - cx.$

Подставляя все найденные значения в уравнения (47), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{P}{g}\left(1{,}102R^2\ddot{\varphi}+0{,}32R\ddot{x}\right)=-1{,}84PR,$$

$$\frac{P}{g}\left(0{,}32R\ddot{\varphi}+\ddot{x}\right)=0{,}5P-cx. \tag{52}$$

4. Для определения $x = x\ (t)$ исключим из уравнений (52) $\ddot{\varphi}$. Получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+1{,}1\frac{cg}{P}x=1{,}108g.$$

Введя обозначения

$$k^2=1{,}1\frac{cg}{P}\ \text{и}\ A=1{,}108g,$$

получим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x}+k^2x=A. \tag{53}$$

Общее решение уравнения (53) имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x}+k^2x=0$, т. е. $x_1 = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)$, а x_2 – частное решение уравнения (53). Будем искать решение x_2 в виде $x_2 = B = \text{const}$. Подставляя значение x_2 в уравнение (53) получим $B = A/k^2$. Таким образом, общее решение уравнения (53) принимает вид

$$x = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt) + A/k^2, \tag{54}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще $\dot{x}$, т. е. производную от x по времени:

$$\dot{x} = C_1k\cos(kt) - C_2k\sin(kt). \tag{55}$$

По начальным условиям при $t = 0$ $x=\frac{P\sin 30^\circ}{c}=\frac{0{,}5P}{c}$, $\dot{x} = 0$ (движение начинается из состояния покоя).

После подстановки этих величин в уравнения (54) и (55), находим $C_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{0{,}5P}{c}$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = x\,(t)$ в виде

$$x = \frac{0{,}5P}{c}\cos(kt) + \frac{A}{k^2}. \tag{56}$$

Таким образом, тележка совершает по отношению к верхнему концу пружины колебания, закон которых дает равенство (56). Круговая частота k и период τ этих колебаний

$$k = \sqrt{\frac{1{,}1cg}{P}};\quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{1{,}1cg}}. \tag{57}$$

Ответ: $x = \dfrac{0{,}5P}{c}\cos(kt) + \dfrac{A}{k^2};\ \ k = \sqrt{\dfrac{1{,}1cg}{P}};\ \ \tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{P}{1{,}1cg}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие перемещения материальной точки называются возможными?
2. При каких связях действительное элементарное перемещение принадлежит к числу возможных?
3. Как зависят возможные перемещения от действующих на систему сил?
4. Что называется возможной работой?
5. Какие связи называются идеальными? Приведите примеры.
6. Дайте определение обобщенной координаты механической системы?
7. Каково число независимых координат, однозначно определяющих положение механической системы, состоящей из n точек?
8. Как определить степень свободы механической системы?
9. Как выражается сумма элементарных работ сил системы через обобщенные силы?
10. Как определяется обобщенная сила? Какова ее размерность?
11. Какой вид имеют уравнения Лагранжа II-рода? Чему равно число этих уравнений для данной механической системы?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Лань, 1998. 736 с.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. М.: Высш. шк, 1995. 416 с.

3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. М.; СПб.: Лань, 2001. 768 с.

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика: Учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. СПб: Политехника, 1995. 670 с.

5. Новожилов, И. В. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ / И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.

6. Мартынов, А. Г. Кинематический расчет манипулятора: Метод. указания / Сост. А. Г. Мартынов, К. А. Редкоус. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. 26 с.

7. Дьяконов, В. П., Mathcad 7.0 в математике, физике и в интернет / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. М.: Нолидж, 1998. 352 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ