**АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**

**Методические указания**

**для выполнения**

Контрольной работы

по дисциплине «Математика»

Специальность : 15.02.08 Технология машиностроения

Форма обучения: заочная

2020 г.

***Пояснительная записка:***

 Методические рекомендации по дисциплине «Математика» предназначены для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специально­сти 15.02.08 Технология машиностроения В результате освоения программы дисциплины студент заочной формы обучения должен **уметь:**

выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

решать дифференциальные уравнения;

**знать:**

основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

основы дифференциального и интегрального исчисления.

 Методические рекомендации не заменяют учебники, а помогают студентам в изучении всех разделов курса и ориентируют в использовании нужной литературы.

 Приступая к выполнению контрольных заданий, следует проработать теоретический материал.

 В соответствии с примерной программой при изучении дисциплины необходимо выполнить одну домашнюю контрольную работу и практиче­ские занятия.

 Домашняя контрольная работа и ее рецензирование по согласова­нию с образовательным учреждением может выполняться и представляться на проверку с использованием современных информационных технологий (электронная почта, сети ЭВМ и т.д.).

***Задания для контрольной работы и методические рекомендации по ее выполнению***

Вариант задания студент выбирает по последней цифре, присвоен­ного ему шифра.

При выполнении контрольной работы следует соблюдать следую­щие требования:

1. Четко и правильно переписать задание контрольной работы по своему варианту. Работы, выполненные по другому варианту, возвращаются без проверки.
2. Ответы на вопросы должны быть четкими, полными и аргументирован­ными.
3. При решении задач привести формулы, затем подставлять в них число­вые значения. Решение сопровождать пояснениями, указывать размер­ность величин.
4. Работу выполнять чернилами (пастой) четко и разборчиво; рисунки, графики, схемы с соблюдением ГОСТов (в отдельных случаях допуска­ется эскизное исполнение). Возможно выполнение работы на компью­тере.
5. В тетради необходимо оставлять поля и место в конце работы для заме­ток и заключения рецензента, страницы пронумеровать.
6. В конце работы привести перечень использованной литературы, про­ставить дату выполнения, подпись.
7. На обложке тетради указать номер контрольной работы, наименование дисциплины; фамилию, инициалы и шифр студента; домашний адрес.

8 Задание к контрольной работе составлено в десяти вариантах.

***Теоретический материал***

 **Линейные матричные операции**

1. По определению, чтобы *умножить матрицу на число*, нужно умножить на это число все элементы матрицы.
2. *Суммой двух матриц* одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

**ПРИМЕР 1.** Сложить матрицы А и В

**ПРИМЕР 2.** Выполнить вычитание матриц А и В

1. *Произведение матриц* определяется следующим образом. Пусть заданы две матрицы *A* и *B*, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

*Произведением матриц* *A* и *B*, называется матрица С

 , ,  ,

Элементы, которой вычисляются по формуле *c ij =a i1 b 1j + a i2 b 2j + ... +a in b nj ,*

 *i=1, .., m, j=1, ..., k.*

Произведение матриц *A* и *B* обозначается *AB*, т.е. *C=AB*.

 **ПРИМЕР 3**. Доказать, что произведение АВВА.





 Произведение матриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей.

Если *AB=BA*, то матрицы *A* и *B* называются *перестановочными*.

 Для квадратных матриц определена *единичная матрица* - квадратная матрица, все диагональные элементы которой единицы, а остальные - нули:



Единичная матрица чаще всего обозначается буквой *E* или *E n*, где *n* - порядок матрицы. Непосредственным вычислением легко проверить основное *свойство* единичной матрицы:

*AE=EA=A*.

*Скалярной матрицей* называется диагональная матрица с одинаковыми числами на главной диагонали; единичная матрица - частный случай скалярной матрицы.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/example.asp#ex3) **4.**  Умножение матрицы на матрицы специального вида

, но ВА не определено, поскольку число столбцов в матрице В не равно числу строк в матрице А.

б) .

1. Для квадратных матриц определена операция *возведения в целую неотрицательную степень*: *A 0 =E, A 1 =A, A 2 =AA, ..., A n =A n-1 A, ...*.
2. Для прямоугольных матриц определена операция *транспонирования*. Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу *A*. Матрица, получающаяся из матрицы *A* заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к матрице и обозначается *A T*.

Верны соотношения:
(AT )T =A; (A+B)T=AT +BT ;(AB)T =BT AT.

  , .

Квадратная матрица *A*, для которой *A T =A*, называется *симметричной*. Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

1. Квадратная матрица *A* называется *обратимой*, если существует такая матрица *X*, что *AX=XA=E*. Матрица *X* называется *обратной* к матрице *A* и обозначается *A -1*, т.е. *A A -1 =A -1A=E*.

Известно, что если матрица *A* *невырождена* (т.е. ее [определитель](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme2/theory.asp) отличен от нуля), то у нее существует обратная матрица *A -1*.

Верно соотношение: (A-1)T =(AT ) -1.

**Определитель матрицы и его свойства**

Пусть *A* квадратная матрица порядка *n, n>1*. *Определителем* квадратной матрицы *A* порядка *n* называется число

 *i=1,2,...,n, j=1,2,...,n*.

Определитель квадратной матрицы порядка полученной из матрицы *A* вычеркиванием первой строки и *j* -го столбца, называемый минором элемента *a1j* .

Формула  *=*  +…

называется формулой вычисления определителя *разложением по первой строке*.

 Пусть *Mi <j>* - определитель квадратной матрицы порядка *n-1*, полученной

матрицы *A* вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца (минор элемента *aij* ).
Число *(-1) j+i Mi <j>* называется *алгебраическим дополнением* элемента *aij* матрицы *A*.
Справедливы формулы вычисления определителя квадратной матрицы *A* *разложением по i-й строке и разложением по j-му столбцу* – формула (\*).

Для квадратной матрицы второго порядка формула вычисления определителя упрощается:

поскольку, например, в формуле разложения определителя по 1-ой строке
*M1 < 1> =a22 , M1 < 2> =a21*.

Для квадратной матрицы третьего порядка формула вычисления определителя разложением по 1-ой строке имеет вид:

.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme2/example.asp#ex1) **5.** Вычисление определителя разложением по 1-ой строке .

**Правило вычисления обратной матрицы**

1. Если матрица имеет обратную, то она невырожденная матрица



1. Cоставляем матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы А:

, тогда имеем .

1. Транспонируем полученную матрицу, т.е. меняем местами строки и столбцы, получаем матрицу, присоединенную к матрице А, обозначается А\*:

 .

1. Обратная по отношению к матрице А имеет вид

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/example.asp#ex5) **6**. Найти матрицу *А-1*, обратную для матрицы А, если .

 Решение:, имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические

 дополнения

и составим из них матрицу

. Полученную транспонируем .

 Докажем, что АА-1= Е =.

.

**Решение систем линейных уравнений**

Рассмотрим *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ) относительно *n* неизвестных *x1 , x2 , ..., xn*:



Эта система в "свернутом" виде может быть записана так:

 В соответствии с [правилом умножения матриц](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/theory.asp#1) рассмотренная система линейных уравнений может быть записана в *матричной форме* *Ax=b*, где

, , .

Матрица *A*, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками - коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении называется *матрицей системы*. Матрица-столбец *b*, элементами которой являются правые части уравнений системы, называется матрицей правой части или просто *правой частью системы*. Матрица-столбец ***x***, элементы которой - искомые неизвестные, называется *решением системы*.

Система линейных алгебраических уравнений, записанная в виде *Ax=b*, является *матричным уравнением*.

Если матрица системы невырождена, то у нее существует обратная матрица и тогда решение системы *Ax=b* дается формулой: *x=A -1 b*.

Справедливо следующее утверждение (*формулы Крамера*).

Если [определитель](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme2/theory.asp) *D=det A* матрицы системы *Ax=b* отличен от нуля, то система имеет единственное решение *x1 , x2 , ..., xn*, определяемое *формулами Крамера*

*xi =Di / D*, *i=1,2, ..., n*,

где D*i* - определитель матрицы *n* -го порядка, полученной из матрицы *A* системы заменой *i* -го столбца столбцом правых частей *b*.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme3/example.asp#ex1) **2**. Вычисление решения системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Ответ: ()

*Метод Гаусса* применим для решения системы линейных алгебраических уравнений c невырожденной матрицей системы. Идея метода Гаусса состоит в том, что систему *n* линейных алгебраических уравнений относительно *n* неизвестных *x1 , x2 , ..., xn*



приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей



решение которой находят по рекуррентным формулам:

*xn =dn , xi = di -*S *nk=i+1 cik xk , i=n-1, n-2, ...,1*.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme3/example.asp#ex1) **3**. Вычисление решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Ответ: ().

***Теория пределов***

Число А называется *пределом функции* f(x) при , если для любого числа  можно указать такое , что для любого , удовлетворяющего неравенству  выполняется неравенство .  Функция f(x) называется *бесконечно малой* при , если . Функция f(x) называется *бесконечно большой* при , если  или .

 *Свойства б/м и б/б функций:*

* Если f(x) и g(x) – б/м при , то их сумма f(x) + g(x) при  также является б/м.
* Если f(x) - б/м при , а F(x) – ограниченная функция, то f(x)\* F(x) есть функция б/м.
* Если при функция f(x) имеет конечный предел , а функция  - б/б, то .
* Если f(x) - б/м при , то 1/ f(x) – б/б, причем в окрестности точки *a* функция f(x) в нуль не обращается.
* Если f(x) - б/б при , то 1/ f(x) – б/м.

*Теоремы о пределах.*

* 1. Если f(x) имеет предел при , то этот предел единственный.
	2. Предел суммы функций равен сумме пределов этих функций.
	3. Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций.
	4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.

 *Следствия*

* 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела 
	2. Если n – натуральное число, то .

 *Замечательные пределы:*

 1) и ;  и .

 2)  и .

[**Пример**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme4/example.asp#ex2) **1.** На основании определения предела переменной величины доказать, что

 .

 Решение: На основании определения предела переменной величины

 . При 

**Пример** **2.** Найти пределы функции:

 а)  Решение: При  получаем неопределенность  Сократим дробь

 и вычислим =

 б) . Решение: При  получаем неопределенность  Сократим дробь, умножив числитель и знаменатель дроби на одно и тоже выражение, сопряженное числителю. .

=

 в) . Решение: При  получаем неопределенность  Сократим дробь, разложив числитель и знаменатель дроби на множители, найдя корни квадратного трехчлена.

 =

г) . При  получаем неопределенность 

Решение: Сведем к бесконечно малым величинам, разделив каждое слагаемое числителя и знаменателя на наибольшую степень, т.е. х2.

 =,

 так как при   и т.д.

 д) . Решение: Разобьем дробь на две дроби, применяя теоремы о пределах, и воспользуемся формулой первого замечательного предела

 =

е)  Решение: Разобьем дробь на две дроби и воспользуемся формулой второго замечательного предела.

===.

ж) . Решение: Разобьем дробь на две дроби и воспользуемся одной из формул второго замечательного предела. ==.

***Производная функции.***

Производной функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю 

Правила:

1.  2.  3. 

4. Если **y=f(u)** и **u=q(x)** дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции **y=f(q(x))** существует и равна произведению производной данной функции **y** по промежуточному аргументу **u** на производную промежуточного аргумента **u** по независимой переменой **x**.

 .

Следствие: Постоянный множитель выносится за знак производной

 

Формулы дифференцирования для сложной функции, где *u(x)* –внутренняя функция



*Производной второго порядка* или второй производной функции y=f(x) называется производная от ее первой производной функции . Она обозначается

. Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков

 .

***Исследование функций и построение графиков функций с помощью производных***

**Общая схема анализа и построения графика функции**

1) Область определения функции; область значений функции (если это возможно).

2) Промежутки положительных и отрицательных значений функции. Координаты точек пересечения с осями Ох и Оу.

3) Исследование функции на четность, нечетность.

4) Исследование функции на периодичность.

5) Исследование функции по первой производной:

- промежутки монотонности;

- точки экстремумов; экстремумы функции.

6) Исследование функции по второй производной:

- промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз;

- точки перегиба.

7) Анализ области непрерывности. Анализ точек разрыва. Асимптоты графика функции.

8) Расчет координат дополнительных точек (если это необходимо).

9) Построение графика функции.

Промежутки монотонности

Функция *у = f(x)* называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке, если она определена во всех точках промежутка, и для любых двух точек *х1 и х2*, принадлежащих этому промежутку, таких что *х1 < x2*, выполняется условие *f(x1) < f(x2) (f(x1)) > f(x2)).*
 Теорема *(достаточное условие монотонности*). Пусть функция *у = f(x)* непрерывна на отрезке *[а; b]* и дифференцируема во всех точках интервала *(а; b)*. Если при этом*f(x) > 0*, то функция возрастает на отрезке *[а; b];* если *f′(x) < 0*, то функция убывает на отрезке *[а; b].*
Строго говоря, утверждение теоремы сохраняется, если производная обращается в ноль или не существует в конечном числе точек, в которых, однако, сама функция определена.
 Точка *х = х0*, называется точкой *максимума (минимума)* функции *f(x),* если существует двусторонняя окрестность этой точки, в которой функция определена и при этом *f(x) < f(x0), (f(x) > f(x0)), x≠ х0*.
 Теорема (*необходимые условия экстремума*). Если *х0* - точка экстремума функции, то либо производная в этой точке не существует, либо *f′(x0) = 0*. Обратное утверждение неверно.
Точки, в которых производная равна 0, называются *стационарными*. Точки, в которых производная равна 0 или не существует, называются *критическими*.
 Теорема (*достаточные условия экстремума*). Пусть функция *у = f(x)* непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки *х0*, включая и саму эту точку, и дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки *х0*. Если при переходе через точку *х0* производная меняет знак с плюса на минус, то *х0* - точка максимума. Если же производная меняет знак с минуса на плюс, то *х0* - точка минимума.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme4/example.asp#ex2) **1.** Найти промежутки монотонности следующих функций и экстремумы:

а) ; б)

Решение: а) область определения данной функции является вся числовая ось:

Расчет промежутков монотонности функции сводится к анализу знаков ее производной, который проводится методом интервалов.

Находим критические точки: , точек в которых производная не существует, нет.

 y

* +

 y 1,5 x

Получаем картину знаков производной:

Следовательно, функция убывает на промежутке (-∞;1,5], возрастает на промежутке [1,5; +∞).

Экстремум функции в точке точка минимума,

уmin=y(1,5)=2,25 - 4,5+2=-0,25.

б) область определения данной функции является вся числовая ось:

.

Критические точки , , точек в которых производная не существует, нет.

Получаем картину знаков производной:

y - + -



y -1 1  *х*



 Функция убывает на промежутке (-∞;-1] и [1; +∞), возрастает на промежутке [-1; 1].

Экстремум функции в точке точка минимума, точка максимума,

уmin=y(-1)= -1,5 и уmax=y(1)= 1,5.

**Промежутки выпуклости и вогнутости**

 Функция *у = f(x)* называется *выпуклой вверх (выпуклой вниз)* на промежутке, если она определена во всех точках промежутка и для любых двух точек *х1 и х2*, принадлежащих этому промежутку, таких, что *х1 < х2,* график функции на интервале *(х1; х2)* располагается выше (ниже) хорды, проходящей через точки *(х1; f(x1)) и (х2; f(x2))*.
Если функция дифференцируема во всех точках промежутка, то она выпукла вверх, если ее график располагается ниже касательных, проведенных в любой точке этого промежутка (за исключением, разумеется, самой точки касания). Дифференцируемая функция выпукла вниз, если ее график располагается выше касательных, проведенных в любой точке этого промежутка.
 Теорема (*достаточное условие направлений выпуклости*). Пусть функция *у = f(x)* дифференцируема на отрезке *[a, b]* и дважды дифференцируема на интервале *(а, b).* Если при этом *f′"(x) > 0*, то функция выпукла вниз на отрезке, если же *f′'′(x) < 0*, то функция выпукла вверх на отрезке.



Утверждение теоремы сохраняется, если вторая производная обращается в ноль или не существует в конечном числе точек, в которых, однако, сама функция определена.
 Точка *(x0; f(x0)),* в которой происходит смена направления выпуклости, называется *точкой перегиба* графика функции.
Теорема (*необходимые условия точки перегиба*). Если *х0* - точка перегиба графика функции у = f(x), то либо вторая производная в этой точке не существует, либо *f"′(x0) = 0*.
 Теорема (*достаточные условия точки перегиба*). Пусть функция *у = f(x)* непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки х0, включая и саму эту точку, и дважды дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки *х0*. Если при переходе через точку х0 вторая производная меняет знак, то точка *х0* является точкой перегиба графика функции.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme4/example.asp#ex2) **2.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

а) ; б)

Решение: а) ; область определения данной функции является вся числовая ось: Находим первую и вторую производную

Вторая производная всюду существует и обращается в нуль в точке х=0. Область определения разбивается этой точкой на интервалы (-∞; 0] и [0; +∞). В каждом из которых вторая производная сохраняет свой знак: f′′(x)<0 на интервале (-∞; 0] и функция выпукла вверх; f′′(x)>0 на интервале [0; +∞) и функция выпукла вниз. Точка х=0 – точка перегиба функции.

б) ;

область определения данной функции все числа, кроме нуля: (-∞; 0) и (0; +∞). Находим первую и вторую производную

Вторая производная всюду существует, кроме точки х=0. Область определения разбивается этой точкой на интервалы (-∞; 0) и (0; +∞). В каждом из которых вторая производная сохраняет свой знак: f′′(x)<0 на интервале (-∞; 0) и функция выпукла вверх, f′′(x)>0 на интервале (0; +∞) и функция выпукла вниз. Точка х=0 не является точкой перегиба функции, так как производная в этой точке не существует.

**Неопределенный интеграл.**

**Цель:**Совершенствование навыков нахождения неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования и методом замены переменной. Закрепление метода интегрирования по частям.

**Теоретическая часть**

Функция F(х), , называется ***первообразной*** для функции f(х) на множестве X, если она дифференцируема для любого и имеет место соотношение:

 ***или .***

Любая непрерывная на множестве X функция f(x) имеет на этом отрезке первообразнуюF(x).

Если F(x) – некоторая первообразная функция f(x) на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением: **F(x) +C**, где С – произвольная постоянная.

Операция отыскания первообразной F(x) функции f(x) называется ***интегрированием***.

Совокупность F(x)+C всех первообразных функции f(x) на множестве X называется ***неопределённым интегралом*** и обозначается:

Выражение f(x)dx называется ***подынтегральным выражением***, f(x) – ***подынтегральной функцией***, х - ***переменной интегрирования***, а С - ***постоянной интегрирования.***

**Основные методы интегрирования:**

1.Метод непосредственного интегрирования.

Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется ***непосредственным интегрированием***.

2. Метод замены переменной.

Суть метода замены переменной состоит в том, что в интеграле переменную х заменяют переменной t по формуле, учитывая .

3. Метод по частям.

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла сводится к вычислению другого интеграла . Применять её целесообразно, когда интеграл более прост для вычисления, чем исходный.

**Способ подстановки (замены переменных)**

  *Теорема:* Если требуется найти интеграл , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены *x =*(*t)* и *dx = (t)dt* получается:



[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme4/example.asp#ex2)**1.** Найти неопределенный интеграл:

а) Найти интеграл по свойству неопределенного интеграла 

б).Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt*.



 в) Замена  получаем:



**Интегрирование по частям**

Способ основан на известной формуле производной произведения:*(uv) = u′v + v′u*

где *u и v*– некоторые функции от х.

В дифференциальной форме: *d(uv) = udv + vdu.*

Проинтегрировав, получаем: , а в соответствии с приведенными выше

свойствами

неопределенного интеграла: или ;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многихэлементарных функций.Множитель **u**, стоящий в левом интеграле, при переходе к правому интегралу заменяется на *du*, т.е. дифференцируется. Другой же сомножитель *dv* из левого интеграла заменяется на *v*, т.е. интегрируется. Если в составе подынтегральной функции имеется множитель, упрощающийсяот дифференцирования, то следует попробовать применить формулу (2), приняв упомянутыймножитель за*u*, а всеостальное (включая *dx)* за *dv.*Полезно запомнить следующие 6 типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям:



 Найти интеграл методом интегрирования по частям:

а) 

б) 

в) 

***Вариант № 7***

1. Вычислить определители

|  |  |
| --- | --- |
|   а)    |  б)  |

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера.



3. Найти производную функции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) у=х4+7х3 | б) у =  • tqх | в) у = 2 | г) у = 5x3- |

4. Исследовать функцию и построить график.

у = х3+3х2-7х -2

5. Найти неопределенный интеграл и проверить дифференцированием.

|  |  |
| --- | --- |
| а) (4x-6) dх | б) (x+5)2 dх |

6. Вычислить определённый интеграл.

|  |  |
| --- | --- |
|  а)   | б)  |

7. Вычислить площадь фигуры ,ограниченной линиями

|  |  |
| --- | --- |
| у = -х2-6х-5;  | у = х+1 |