

8.2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

8.2.1. Основные теоретические положения

При анализе переходных процессов в ЛРП делаются следующие допущения:

- рассматриваются переходные процессы, возникающие только в результате коммутаций;
- при анализе переходных процессов в ЛРП не требуется высокая точность, что позволяет сделать нижеприведенные допущения;
- пренебрегают резистивными элементами ЛРП r_0 и g_0 , то есть рассматриваются только линии без потерь. В этом случае расчёт упрощается, поскольку в ЛБП волны распространяются без затухания, а характеристическое сопротивление является чисто резистивным, благодаря чему не искажается фронт волны при её движении;
- в течение переходного процесса источники считаются постоянными, поскольку длительность пробега волны вдоль линии почти всегда значительно меньше периода переменного источника;
- при рассмотрении многократных отражений в линиях ограничиваются только резистивными цепями. Если источники считаются постоянными, то в линии будут только волны с прямоугольным фронтом.

Исходными для расчётов являются уравнения линии без потерь в частных производных:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.13)$$

Уравнения (8.13) сводятся к виду дифференциальных уравнений второго порядка без правой части

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (8.14)$$

Решение записывают в виде наложения двух встречных волн, прямой и обратной:

$$u(x;t) = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = u_{np} + u_{обр};$$
$$i(x;t) = \frac{1}{Z_C} \cdot \left[\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \right] = i_{np} - i_{обр}. \quad (8.15)$$

Поскольку линии без потерь имеют чисто активное волновое сопротивление, то закон Ома в пределах каждой из волн (но не для результирующих u, i) применим и к мгновенным значениям величин:

$$u_{np} = Z_C \cdot i_{np}; \quad u_{обр} = Z_C \cdot i_{обр}; \quad u \neq Z_C \cdot i. \quad (8.16)$$

Уравнения для тока и для напряжения волны совершенно одинаковы, причём, в них производные по координате пропорциональны производным по времени от тех же величин. Это означает, что в переходном процессе достаточно найти зависимость либо тока, либо напряжения от времени при фиксированной координате, а затем, для получения зависимости от координаты для фиксированного момента времени, перейти к аргументу $[t_\phi - x/v]$.

Началом линии будем называть место подключения к линии источни-

ка, а *концом* линии – место, где подключается нагрузка. Волны, движущиеся от начала линии к концу (в направлении возрастания координаты x , отсчитываемой от начала линии), называются *прямыми*. Волны, движущиеся обратно (в направлении возрастания координаты y , отсчитываемой от конца линии), называются *обратными*. Возникающую в результате коммутации волну назовём *падающей*, а возникшую в результате отражения падающей – *отражённой*. Таким образом, если коммутация происходит в начале линии, падающая волна является прямой, а отражённая обратной. В случае коммутации в конце линии обратная волна есть падающая, а прямая – отражённая.

Расчёт как возникающих волн, так и отражённых и преломлённых, выполняется по схемам замещения, составленным для сечений линии, где эти волны возникают. Если волна вызвана коммутацией в произвольном сечении линии, то её расчёт на основании принципа наложения сводится к рассмотрению переходного процесса *от включения* соответствующей пассивной цепи на эквивалентный источник ЭДС $e_{\text{экв}} = u_{\text{руб}}$ (при замыкании рубильника, см. задачи 8.30-8.33) или тока $j_{\text{экв}} = i_{\text{руб}}$ (при размыкании рубильника, см. задачи 8.34-8.36). Здесь $u_{\text{руб}}$ – напряжение на разомкнутом рубильнике, $i_{\text{руб}}$ – ток через замкнутый рубильник в докоммутационном режиме. В схему замещения для соответствующего сечения линии включаются все элементы с сосредоточенными параметрами, имеющиеся в данном сечении, а линия представляется резистором Z_C . Вычисленные в переходном процессе $i(t)$, $u(t)$ накладываются на установившиеся значения докоммутационного режима.

Расчёт переходного процесса, возникающего в результате прихода падающей волны в конец линии (в узел неоднородности 2-2'), нагруженной на произвольное сопротивление Z (рис.

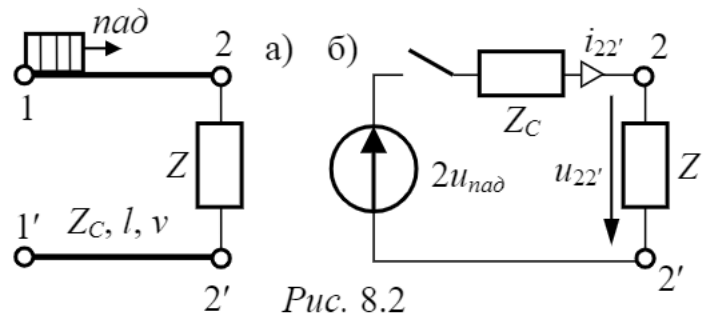


Рис. 8.2

8.2,а), выполняется по эквивалентной схеме с сосредоточенными параметрами (рис. 8.2,б) при нулевых независимых начальных условиях. Далее, из формул $i_{22'} = i_{\text{над}} - i_{\text{отр}}$ и $u_{22'} = u_{\text{над}} + u_{\text{отр}}$, основанных на принципе наложения, зная параметры падающей волны, можно рассчитать напряжение и ток отражённой волны в функции времени t для нулевой координаты $y = 0$ (см. задачу 8.37). Сопротивление Z может включать в себя другие линии, представленные своими характеристическими сопротивлениями. Рассчитанные для них токи и напряжения по схеме 8.2,б являются параметрами преломлённых волн, записанные в функции времени для нулевой координаты $x = 0$ (см. задачи 8.44-8.48).

При анализе многократных отражений расчет последующих волн ведётся через коэффициенты отражения от внутренних цепей источника (n_1) и от нагрузки (n_2):

$$n_1 = \frac{R_{BH} - Z_C}{R_{BH} + Z_C}; \quad n_2 = \frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C};$$

$$u_{\text{отр } k} = n_2 \cdot (n_1 \cdot n_2)^{k-1} \cdot u_{\text{над } 1}; \quad u_{\text{над } k+1} = (n_1 \cdot n_2)^k \cdot u_{\text{над } 1}. \quad (8.17)$$

Результирующие ток и напряжение на любой момент времени находятся наложением всех прошедших к данному моменту волн. Переходный процесс может иметь аperiодический или колебательный характер. Переходный процесс считают закончившимся, когда результирующие ток и напряжение достигают 95-98% от установившихся значений: $T_{ПП} = k \cdot t_{пробега}$.

8.2.2. Расчёт возникающих волн

ЗАДАЧА 8.30. Линия без потерь с параметрами $Z_C = 250 \text{ Ом}$, $l = 140 \text{ км}$, $v = 280 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ подключается к источнику постоянного напряжения $E_0 = 120 \text{ кВ}$ с внутренней индуктивностью $L_0 = 0,15 \text{ Гн}$. Конец линии разомкнут (рис. 8.3,а). Требуется построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для двух моментов времени: $t_1 = 0,75l/v$ и $t_2 = 1,5l/v$.

Решение

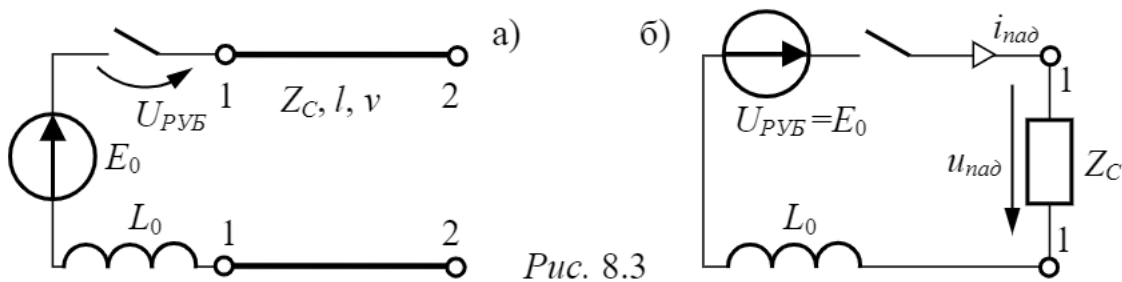


Рис. 8.3

1. На момент времени $t_\phi = t_1 = 0,75l/v = 0,375 \text{ мс}$ в линии будет только падающая волна. Её параметры рассчитываем по схеме замещения для сечения "1-1" (рис. 8.3,б): $i_{над}(t) = i_{np}(t) + Ae^{pt}$;

$$i_{над}(0+) = i_{над}(0-) = 0, \quad i_{np}(t) = E_0/Z_C = 120 \cdot 10^3 / 250 = 480 \text{ А},$$

$$A = i_{над}(0) - i_{np}(0) = 0 - 480 = -480, \quad p = -Z_C/L_0 = -250/0,15 = -1667 \text{ 1/с}.$$

$$i_{над}(t) = 480 - 480e^{-1667t} \text{ А};$$

$$u_{над}(t) = Z_C \cdot i_{над}(t) = 120 - 120e^{-1667t} \text{ кВ}.$$

Для получения зависимостей тока и напряжения от координаты, по которым будут построены графики, переходим к аргументу $[t_\phi - \frac{x}{v}]$:

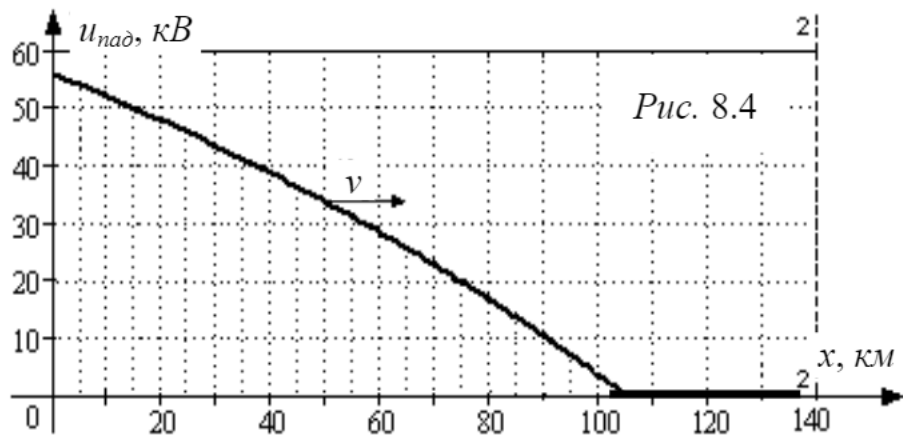
$$i_{над}(t_\phi; x) = 480 - 480e^{-1667[0,375 \cdot 10^{-3} - x/280 \cdot 10^3]} = 480 - 480e^{-1,667[0,375 - x/280]} \text{ А};$$

$$u_{над}(t_\phi; x) = 120 - 120e^{-1,667[0,375 - x/280]} \text{ кВ}.$$

При $t_\phi = 0,375 \text{ мс}$ выражения справедливы для координаты

$$x \leq v \cdot t_\phi = 105 \text{ км}.$$

График распределения напряжения $u_{над}(t_\phi; x)$ вдоль линии для момента времени t_1 представлен на рис. 8.4. Кривая тока $i_{над}(t_\phi; x)$ аналогична, так как $i_{над} = u_{над}/Z_C$.



2. К моменту времени $t_{\phi} = t_2 = 1,5l/v = 0,75 \text{ мс}$ в линии будут существовать падающая и отражённая волны. Поскольку конец линии разомкнут, волна отражается полностью и без перемены знака: $n_2 = 1$. Таким образом, выражения для построения графиков в этом случае будут:

$$u_{\text{пад}}(t_{\phi}; x) = 120 - 120 e^{-1,667 [0,75 - x / 280]} \text{ кВ}, \quad 0 \leq x \leq 210 \text{ км},$$

$$i_{\text{пад}}(t_{\phi}; x) = 480 - 480 e^{-1,667 [0,75 - x / 280]} \text{ А};$$

$$u_{\text{отр}}(t_{\phi}; y) = 120 - 120 e^{-1,667 [0,25 - y / 280]} \text{ кВ}, \quad 0 \leq y \leq 35 \text{ км},$$

$$i_{\text{отр}}(t_{\phi}; y) = 480 - 480 e^{-1,667 [0,25 - y / 280]} \text{ А}.$$

Заметим: время существования падающей волны $t' = t_2 = 0,75 \text{ мс}$, время существования отражённой волны $t'' = t_2 - t_{\text{пробега}} = 0,75 - 0,5 = 0,25 \text{ мс}$.

Расчётные значения волн в нескольких точках линии даны в табл. 8.1

Таблица 8.1

$x, \text{ км}$	$u_{\text{пад}}, \text{ кВ}$	$i_{\text{пад}}, \text{ А}$	$y, \text{ км}$	$u_{\text{отр}}, \text{ кВ}$	$i_{\text{отр}}, \text{ А}$
210	0	0	35	22,57	90,3
105	55,78	223,1	17,5	32,21	128,9
70	67,86	271,4	0	40,9	163,6
0	85,63	342,5	—	—	—

Графики падающей, отражённой волн и результирующих значений напряжения u и тока i рекомендуется строить отдельно (рис. 8.5). Напомним: $u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$; $i = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}$.

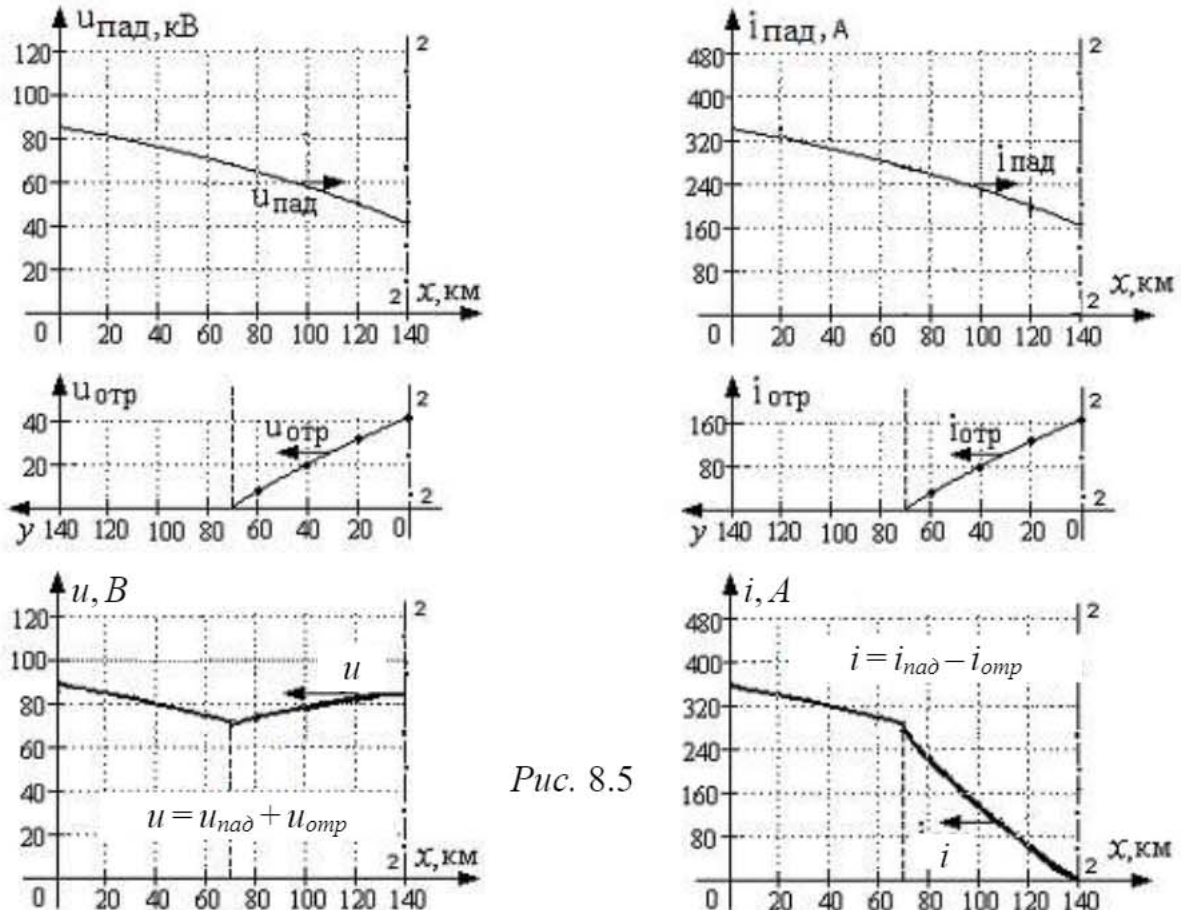
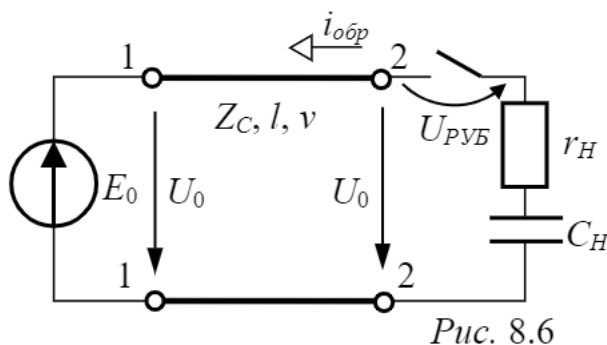


Рис. 8.5

ЗАДАЧА 8.31. К линии без потерь, работающей в режиме холостого хода, подключается rC -нагрузка (рис. 8.6). Определить параметры возникающей обратной волны и построить график распределения волны по линии через $t_{\phi} = 150 \text{ мкс}$ после подключения нагрузки. Числовые данные: $E_0 = 100 \text{ В}$, $Z_C = 250 \text{ Ом}$, $l = 25 \text{ км}$, $v = 100 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, $r_H = 150 \text{ Ом}$, $C_H = 0,125 \text{ мкФ}$.

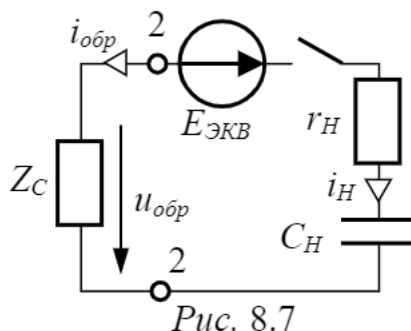


Решение

1. В докоммутационном установившемся режиме линии определяем величину напряжения на рубильнике: $u_{ycm}(0.) = U_0 = E_0 = 100 \text{ В}$,

$$i_{ycm}(0.) = 0, \quad U_{PYB} = U_0 = 100 \text{ В}.$$

2. Для сечения 2-2 в момент возникновения обратной волны составляем схему замещения (рис. 8.7): $E_{ЭКВ} = U_{PYB}$ направлена с полярностью, противоположной полярности напряжения на рубильнике, линия представлена своим волновым сопротивлением.



В схеме замещения рассчитаем ток нагрузки.

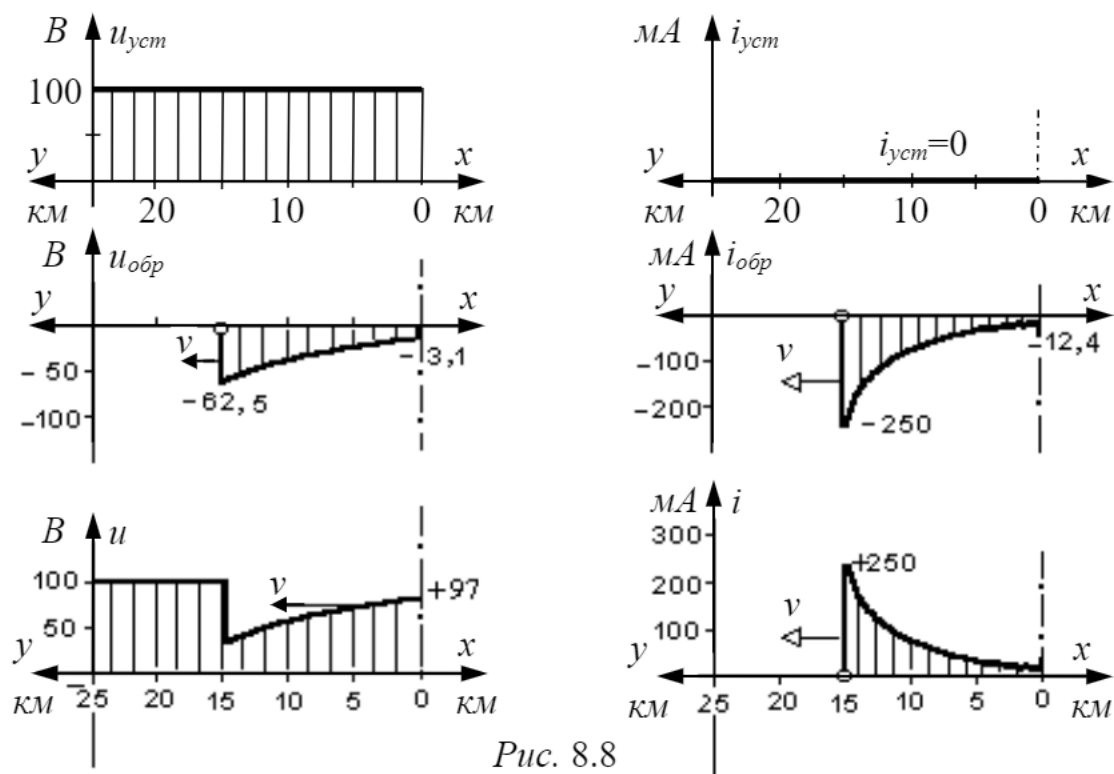
$$u_C(0+) = u_C(0.) = 0, \quad p = -1/[(r_H + Z_C) \cdot C_H] = -20 \cdot 10^3 \text{ 1/с},$$

$$i_H(t) = i_{ce} = \frac{E_{ЭКВ}}{r_H + Z_C} e^{-20000t} = 0,25 e^{-20000t} \text{ А}.$$

Ток и напряжение обратной волны запишутся:

$$i_{обр}(t, y = 0) = -i_H = -0,25 e^{-20000t} \text{ А},$$

$$u_{обр}(t, y = 0) = Z_C \cdot i_{обр} = -62,5 e^{-20000t} \text{ В}.$$



3. Для построения графиков тока и напряжения в функции координаты переходим к аргументу $[t_\phi - y/v]$.

$$i_{обр}(y; t_\phi) = -0,25e^{-20 \cdot [0,15 - y/100]} \text{ A}, \quad y \leq v \cdot t_\phi = 15 \text{ км};$$

$$u_{обр}(y; t_\phi) = -62,5e^{-20 \cdot [0,15 - y/100]} \text{ В}.$$

Графики падающей, отражённой и преломлённой волн, а потом и результирующий график ($u = u_{уст} + u_{обр}$ и $i = i_{уст} - i_{обр}$) целесообразно выполнять отдельно, как это и показано на рис. 8.8.

ЗАДАЧА 8.32. Воздушная линия ($l = 70 \text{ км}$, $Z_C = 400 \text{ Ом}$), присоединённая к генератору с напряжением $U_0 = 100 \text{ кВ}$ ($r_0 = 0$), длительно работала в режиме холостого хода.

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии для момента времени спустя $0,2 \text{ мс}$ после подключения к концу линии неразветвлённой активно-индуктивной нагрузки: $r = 200 \text{ Ом}$, $L = 100 \text{ мГн}$.

Решение

Для наглядности выполним рисунок исходной схемы и составим расчётную схему для определения параметров возникающей обратной волны (рис. 8.9, а и б).

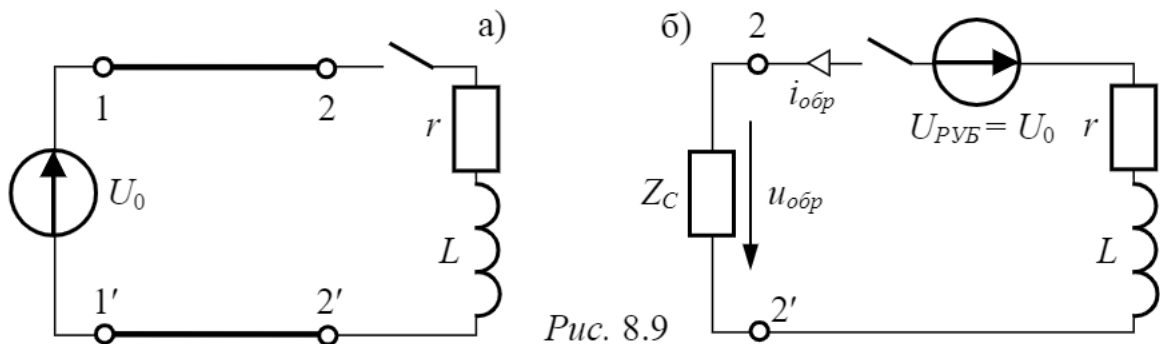


Рис. 8.9

Напряжение и ток вдоль линии до коммутации:

$$u(t_-) = U_0 = 100 \text{ кВ}, \quad i(t_-) = 0.$$

Напряжение на рубильнике в момент коммутации: $U_{руб} = U_0 = 100 \text{ кВ}$.

Расчёт возникающей обратной волны выполняем по схеме рис. 8.9, б при нулевом независимом начальном условии ($i_{обр}(0) = 0$):

$$i_{обр}(t) = \frac{-U_0}{r + Z_C} (1 - e^{-\frac{r+Z_C}{L}t}) = \frac{-100 \cdot 10^3}{200 + 400} (1 - e^{-\frac{600}{0,1}t}) = -167 + 167 \cdot e^{-6000t} \text{ A},$$

$$u_{обр}(t) = Z_C \cdot i_{обр} = 400 \cdot (-167 + 167 \cdot e^{-6000t}) \cdot 10^{-3} = -66,7 + 66,7 \cdot e^{-6000t} \text{ кВ}.$$

Формулы $u_{обр}(t)$ и $i_{обр}(t)$ получены для координаты $y = 0$. Для перехода от функций времени к функциям координат при $t_\phi = 0,2 \text{ мс}$ делаем замену $t \rightarrow (t_\phi - y/v)$:

$$i_{обр}(t_\phi, y) = -167 + 167 \cdot \exp[-6000(2 \cdot 10^{-4} - \frac{y}{3 \cdot 10^5})],$$

$$u_{обр}(t_\phi, y) = -66,7 + 66,7 \cdot \exp[-6000(2 \cdot 10^{-4} - \frac{y}{3 \cdot 10^5})].$$

Расстояние, которое волна пройдёт за заданное фиксированное время t_ϕ : $y_\phi = v \cdot t_\phi = 3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 60 \text{ км}$. Поэтому формулы $u_{обр}(t_\phi, y)$ и $i_{обр}(t_\phi, y)$

справедливы для координат $y \leq y_\Phi = 60$ км. При $y > y_\Phi$ $u_{обр}$ и $i_{обр}$ равны нулю.

Результирующие значения напряжения и тока в линии определяются наложением докоммутационного режима и обратной волны:

$$u = u(t_-) + u_{обр}; \quad i = i(t_-) - i_{обр}.$$

Таким образом,

$$u(y) = \begin{cases} 33,3 + 66,7 \exp(-6000(2 \cdot 10^{-4} - \frac{y}{3 \cdot 10^5})) \text{ кВ} & \text{при } 0 \leq y \leq 60 \text{ км}, \\ 100 \text{ кВ} & \text{при } 60 \text{ км} \leq y \leq 70 \text{ км}. \end{cases}$$

$$i(y) = \begin{cases} 167 - 167 \exp(-6000(2 \cdot 10^{-4} - \frac{y}{3 \cdot 10^5})) \text{ А} & \text{при } 0 \leq y \leq 60 \text{ км}, \\ 0 & \text{при } 60 \text{ км} \leq y \leq 70 \text{ км}. \end{cases}$$

Эпюры напряжения и тока для момента времени $t_\Phi = 2$ мс приведены на рис. 8.10.

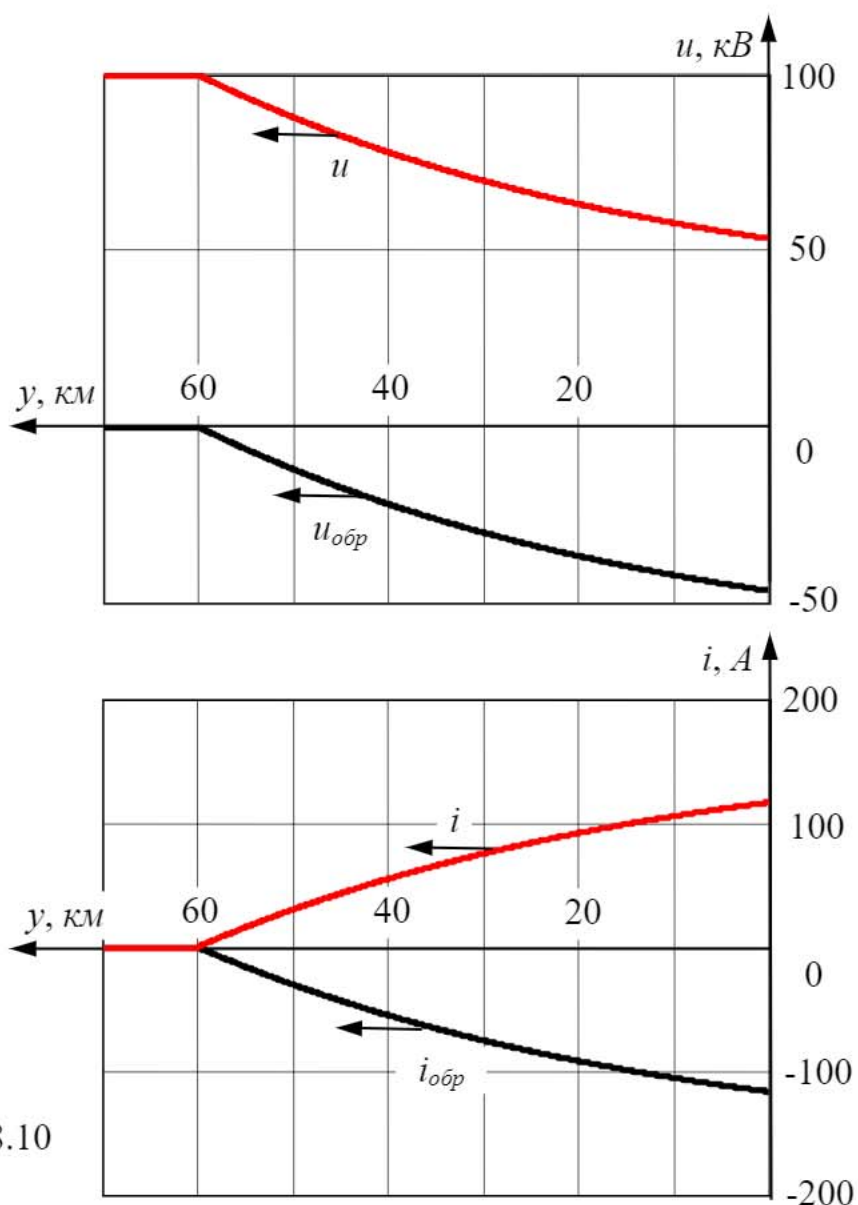


Рис. 8.10

ЗАДАЧА 8.33. Индуктивная нагрузка $L = 0,015 \text{ Гн}$ подключается по-середине работающей линии (рис.8.11,а) с параметрами $Z_C = 300 \text{ Ом}$, $v = 240 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, $l = 120 \text{ км}$. Сопротивление резистивной нагрузки и ЭДС источника: $r = 600 \text{ Ом}$, $E_0 = 1,2 \text{ кВ}$. Определить параметры возникающих обратной и прямой волн, построить графики напряжения и тока вдоль линии через $t_\phi = 200 \text{ мкс}$ после коммутации.

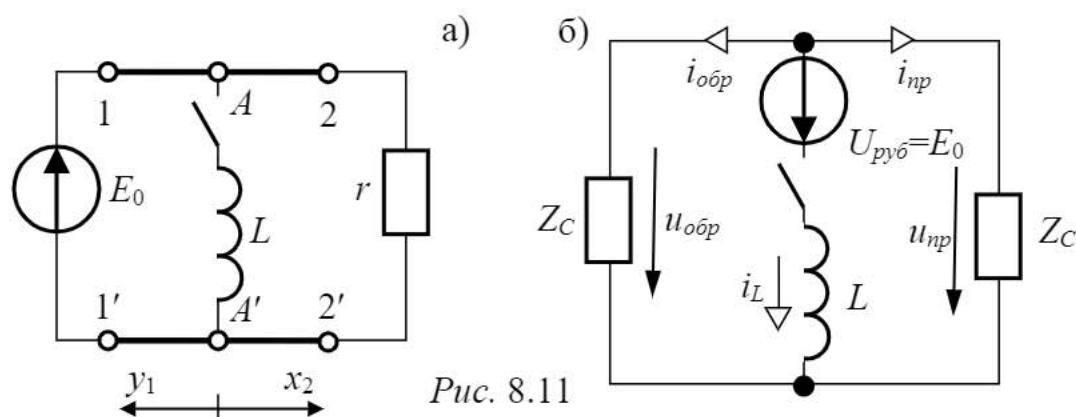


Рис. 8.11

Ответы: докоммутационный режим:

$$i_{ycm}(t) = E_0/r = 2 \text{ А}, \quad u_{ycm}(t) = E_0 = 1,2 \text{ кВ}, \quad U_{py\phi} = 1,2 \text{ кВ};$$

схема замещения для расчёта прямой и обратной волн на рис. 8.11,б:

$$i_L(t) = 8 - 8e^{-10000t} \text{ А}, \quad i_{np}(t, x_2=0) = i_{обп}(t, y_1=0) = -0,5i_L(t) = -4 + 4e^{-10000t} \text{ А};$$

$$t_\phi = 0,20 \text{ мс}, \quad i_{np}(t_\phi, x_2) = -4 + 4\exp[-10 \cdot (0,2 - x_2/240)] \text{ А}, \quad 0 \leq x_2 \leq 48 \text{ км};$$

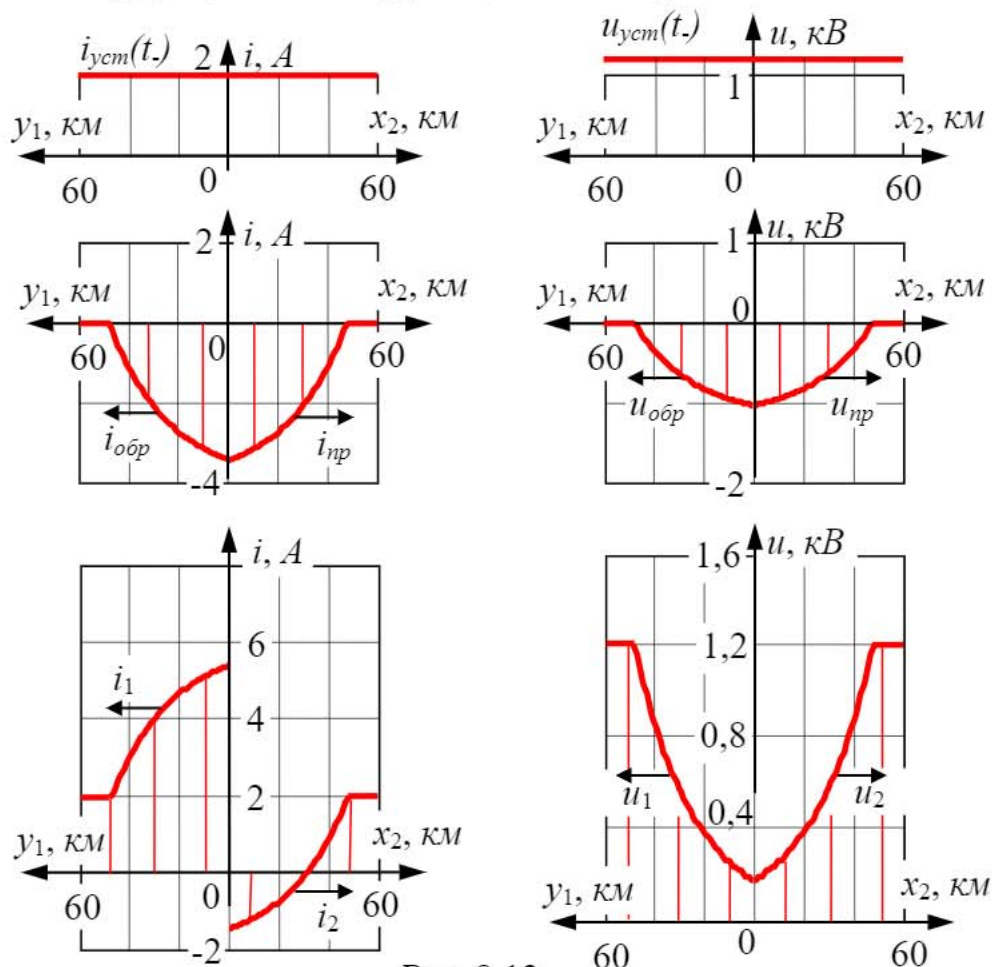


Рис. 8.12

$$\begin{aligned}
u_{np}(t_\phi, x_2) &= -1,2 + 1,2 \exp[-10 \cdot (0,2 - x_2/240)] \text{ кВ}, & 0 \leq x_2 \leq 48 \text{ км}; \\
i_{обр}(t_\phi, y_1) &= -4 + 4 \exp[-10 \cdot (0,2 - y_1/240)] \text{ А}, & 0 \leq y_1 \leq 48 \text{ км}; \\
u_{обр}(t_\phi, y_1) &= -1,2 + 1,2 \exp[-10 \cdot (0,2 - y_1/240)] \text{ кВ}, & 0 \leq y_1 \leq 48 \text{ км};
\end{aligned}$$

результатирующие значения тока и напряжения в каждой из половин линии определяются в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned}
i_1 &= i_{ycm}(t) - i_{обр}, & u_1 &= u_{ycm}(t) + u_{обр}, \\
i_2 &= i_{ycm}(t) + i_{np}, & u_2 &= u_{ycm}(t) + u_{np};
\end{aligned}$$

эпюры тока и напряжения для момента времени t_ϕ представлены на рис. 8.12.

ЗАДАЧА 8.34. Антенный кабель с параметрами $l = 10 \text{ м}$, $L_0 = 0,1 \text{ мГн/м}$, $C_0 = 0,1 \text{ нФ/м}$, был нагружен в соответствии с рис. 8.13,а: $R_1 = 1000 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГн}$, напряжение на входе кабеля $U = 100 \text{ В}$. В результате коммутации (отключение ветви с R_2) в кабеле возникает ПП. Построить графики распределения напряжения u и тока i вдоль кабеля для момента времени t_ϕ , когда возникшая волна пройдет $3/4$ длины кабеля.

Решение

Предварительные вычисления:

- фазовая скорость волны $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \cdot 10^{-10}}} = 10^7 \text{ м/с}$;
- характеристическое сопротивление $Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-10}}} = 1000 \text{ Ом}$;
- длительность времени пробега волны $t_{проб} = \frac{l}{v} = \frac{10}{10^7} = 10^{-6} \text{ с} = 1 \text{ мкс}$;
- заданный фиксированный момент времени $t_\phi = 3/4 t_{проб} = 3/4 \text{ мкс}$.

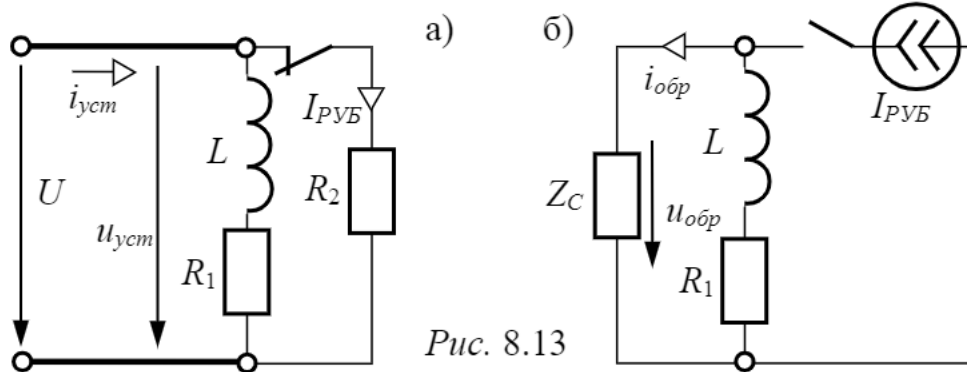


Рис. 8.13

Анализируем докоммутационное состояние цепи:

$$u_{ycm} = U = 100 \text{ В}, \quad R_H = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1000 \cdot 100}{1000 + 100} = 90,9 \text{ Ом},$$

$$i_{ycm} = u_{ycm}/R_H = 100/90,9 = 1,1 \text{ А}, \quad I_{PYB} = u_{ycm}/R_2 = 100/100 = 1 \text{ А}.$$

Напряжение и ток возникающей обратной волны рассчитываем по схеме замещения рис. 8.13,б при нулевом независимом начальном условии $i_L(0) = 0$. Обращаем внимание, что независимое начальное условие считается нулевым, не взирая на то, что до коммутации ток в индуктивности имел место.

$$i_{обр}(t) = i_{np} + A e^{pt}; \quad i_{np} = I_{PYB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + Z_C} = 1 \cdot \frac{1000}{1000 + 1000} = 0,5 \text{ А},$$

$$p = \frac{-R_1 - Z_C}{L} = \frac{-1000 - 1000}{0,001} = -2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Постоянная времени цепи и длительность переходного процесса:

$$\tau = |p|^{-1} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}, \quad T_{\text{ПП}} = 4\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 2 \text{ мкс}.$$

Начальное значение тока $i_{\text{обр}}(0)$ с учётом $i_L(0) = 0$:

$$i_{\text{обр}}(0) = I_{\text{РВБ}} = 1 \text{ А}.$$

Тогда постоянная интегрирования $A = i_{\text{обр}}(0) - i_{\text{пр}} = 1 - 0,5 = 0,5$.

Ток и напряжение обратной волны в функции времени при нулевой координате: $i_{\text{обр}}(t) = 0,5 + 0,5e^{-2000000t} \text{ А}, \quad u_{\text{обр}}(t) = Z_C \cdot i_{\text{обр}} = 500 + 500e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ В}.$

Ток и напряжение обратной волны в функции координаты при фиксированном моменте времени t_ϕ :

$$i_{\text{обр}}(t_\phi, y) = 0,5 + 0,5 \exp[-2 \cdot 10^6 \cdot (0,75 \cdot 10^{-6} - y/v)] = 0,5 + 0,5 \exp[-2 \cdot (0,75 - y/10)] \text{ А},$$

$$u_{\text{обр}}(t_\phi, y) = 500 + 500 \exp[-2 \cdot (0,75 - y/10)] \text{ В}.$$

Последние формулы справедливы для $y \leq v \cdot t_\phi = 7,5 \text{ м}$. При $y \geq 7,5 \text{ м}$ обратная волна отсутствует.

Результирующие ток и напряжение в линии находим в соответствии с формулами: $u = u_{\text{уст}} + u_{\text{обр}}, \quad i = i_{\text{уст}} - i_{\text{обр}}$. Эпюры тока и напряжения приведены на рис. 8.14.

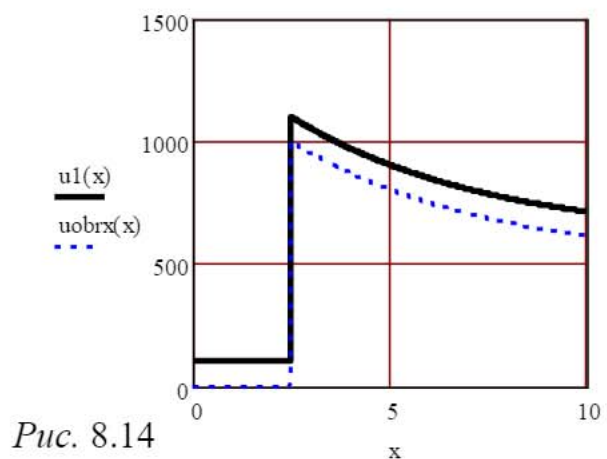
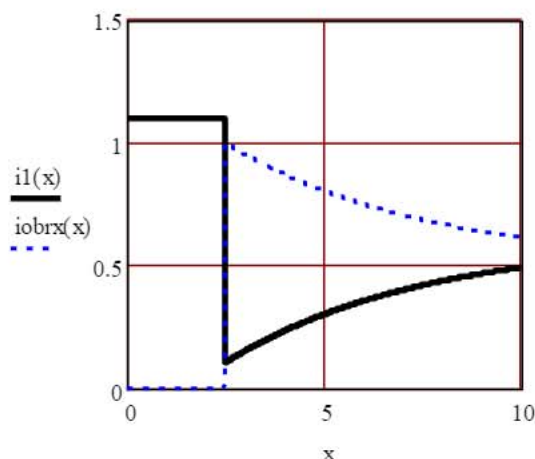


Рис. 8.14

ЗАДАЧА 8.35. Решить задачу 8.34 при условии, на входе кабеля действует источник переменного напряжения $u(t) = 100 \sin(10^6 t) \text{ В}$.

Решение

Воспользуемся результатами предварительных вычислений задачи 8.34:

$$v = 10^7 \text{ м/с}; \quad Z_C = 1000 \text{ Ом}; \quad t_{\text{проб}} = 1 \text{ мкс}; \quad t_\phi = 3/4 \text{ мкс}.$$

Дополнительно находим коэффициент фазы:

$$\beta = \omega/v = 10^6/10^7 = 0,1 \text{ рад/м}.$$

Установившийся режим до коммутации ввиду синусоидального источника рассчитаем символическим методом.

$$x_L = \omega L = 10^6 \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_1 = R_1 + jx_L = 1000 + j1000 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_H = \frac{\underline{Z}_1 R_2}{\underline{Z}_1 + R_2} = \frac{(1000 + j1000) \cdot 100}{1000 + j1000 + 100} = 95,13 \cdot e^{j2,73^\circ} \text{ Ом}.$$

Значения комплексных амплитуд тока и напряжения в конце кабеля получим, используя основные уравнения ЛБП в комплексной форме с учётом закона Ома $\underline{U}_{2m} = \underline{Z}_H \cdot \underline{I}_{2m}$:

$$\underline{U}_{1m} = \underline{U}_{2m} \cdot \cos(\beta l) + j \cdot Z_C \underline{I}_{2m} \sin(\beta l) = \underline{U}_{2m} \cdot (\cos(\beta l) + j \cdot \frac{Z_C}{\underline{Z}_H} \sin(\beta l)),$$

отсюда
$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{U}_{1m}}{\cos(\beta l) + j \cdot \frac{Z_C}{\underline{Z}_H} \sin(\beta l)} = \frac{100}{\cos 1 + j \cdot \frac{1000}{95,13} \sin 1} = 11,25 \cdot e^{-j83,79^\circ}$$

В,

$$\underline{I}_{2m} = \underline{U}_{2m} / \underline{Z}_H = 11,25 \cdot e^{-j83,79^\circ} / 95,13 \cdot e^{j2,73^\circ} = 0,118 \cdot e^{-j86,52^\circ} \text{ A.}$$

Ток рубильника найдём по закону Ома:

$$\underline{I}_{\text{рубм}} = \frac{\underline{U}_{2m}}{R_2} = \frac{11,25 \cdot e^{-j83,79^\circ}}{100} = 0,1125 \cdot e^{-j83,79^\circ} \text{ A.}$$

Возникающую обратную волну рассчитываем по схеме рис. 8.13,б:

$$\underline{I}_{\text{нрм}} = \underline{I}_{\text{рубм}} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + Z_C} = 0,1125 \cdot e^{-j83,79^\circ} \cdot \frac{1000 + j1000}{1000 + j1000 + 1000} = 0,071 \cdot e^{-j65,36^\circ} \text{ A.}$$

$$i_{\text{нр}}(t) = 0,071 \sin(\omega t - 65,36^\circ) \text{ A}, \quad i_{\text{нр}}(0) = 0,071 \sin(-65,36^\circ) = 0,065 \text{ A},$$

$$p = -2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}, \quad i_{\text{обр}}(0) = i_{\text{руб}}(0) = 0,1125 \sin(-83,79^\circ) = -0,112 \text{ A},$$

$$A = i_{\text{обр}}(0) - i_{\text{нр}}(0) = -0,112 + 0,065 = -0,047,$$

$$i_{\text{обр}}(t) = i_{\text{нр}}(t) + A e^{pt} = 0,071 \sin(\omega t - 65,36^\circ) - 0,047 e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ A},$$

$$u_{\text{обр}}(t) = Z_C \cdot i_{\text{обр}} = 71 \sin(\omega t - 65,36^\circ) - 47 e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ B.}$$

Ток и напряжение обратной волны в функции координаты y при фиксированном моменте времени t_ϕ :

$$i_{\text{обр}}(t_\phi, y) = 0,071 \sin(1 \text{ рад} \cdot (0,75 - y/10) - 65,36^\circ) - 0,0476 \exp[-2 \cdot (0,75 - y/10)] \text{ A},$$

$$u_{\text{обр}}(t_\phi, y) = 71 \sin(1 \text{ рад} \cdot (0,75 - y/10) - 65,36^\circ) - 47 \exp[-2 \cdot (0,75 - y/10)] \text{ B.}$$

Последние формулы справедливы для $y \leq v \cdot t_\phi = 7,5 \text{ м}$. При $y \geq 7,5 \text{ м}$ обратная волна отсутствует.

Мгновенные значения напряжения и тока установившегося до коммутации режима в любом месте линии можно рассчитать по следующим формулам:

$$\underline{U}_m(y) = \underline{U}_{2m} \cdot \cos(\beta y) + j \cdot Z_C \underline{I}_{2m} \sin(\beta y),$$

$$\underline{I}_m(y) = j \cdot \frac{\underline{U}_{2m}}{Z_C} \sin(\beta y) + \underline{I}_{2m} \cdot \cos(\beta y),$$

$$u_{\text{ycm}}(t, y) = \text{Im}(\underline{U}_m(y) \cdot e^{j\omega t}), \quad i_{\text{ycm}}(t, y) = \text{Im}(\underline{I}_m(y) \cdot e^{j\omega t}).$$

Значения напряжения и тока установившегося режима в фиксированный момент времени t_ϕ в функции координаты y : $u_{\text{ycm}}(t_\phi, y)$, $i_{\text{ycm}}(t_\phi, y)$. Представление этих значений в виде формул – сложная задача, поэтому для построения эпюр напряжения и тока определим их численным способом с помощью компьютерной математической системы MathCAD:

$$U_{2m} := 11,25 \cdot e^{-j \cdot 83,79 \text{ deg}} \quad I_{2m} := 0,118 \cdot e^{-j \cdot 86,52 \text{ deg}}$$

$$\beta := 0,1 \quad Z_C := 1000 \quad t_\phi := 0,75 \cdot 10^{-6}$$

$$U(y) := U_{2m} \cdot \cos(\beta \cdot y) + j \cdot Z_C \cdot I_{2m} \cdot \sin(\beta \cdot y)$$

$$I(y) := j \cdot \frac{U_{2m}}{ZC} \cdot \sin(\beta \cdot y) + I_{2m} \cdot \cos(\beta \cdot y)$$

Ответ для $\underline{U}_m(y)$:

$$U(y) \Big|_{\substack{\text{simplify} \\ \text{float}, 4}} \rightarrow (.6087 - 5.593i) \cdot (2 \cdot \cos(.1000 \cdot y) + \sin(.1000 \cdot y) + 21 \cdot i \cdot \sin(.1000 \cdot y))$$

$$u_{ust}(t, y) := \text{Im}(U(y) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}) \quad i_{ust}(t, y) = \text{Im}(I(y) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t})$$

Напряжение и ток обратной волны:

$$i_{obr}(x) :=$$

$$:= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq 2.5 \\ 0.071 \cdot \sin[0.75 - (l - x)/10 - 1.141] - 0.047 \cdot \exp[-2 \cdot (0.75 - (l - x)/10)] & \text{if } 2.5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$u_{obr}(x) := ZC \cdot i_{obr}(x)$$

Результирующие значения напряжения и тока в функции координаты:

$$i(x) := i_{ust}(t_f, l - x) - i_{obr}(x) \quad u(x) := u_{ust}(t_f, l - x) + u_{obr}(x)$$

Эпюры тока и напряжения для фиксированного момента времени представлены на рис. 8.15.

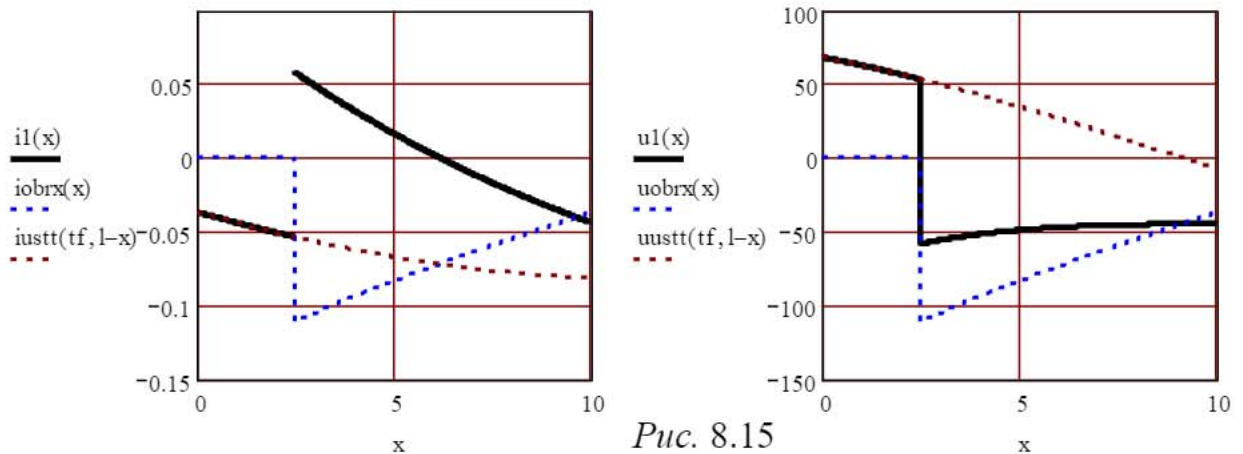


Рис. 8.15

ЗАДАЧА 8.36. В цепи рис. 8.16,а с параметрами $E = 100 \text{ В}$, $r_0 = 100 \text{ Ом}$, $C = 0,4 \text{ мкФ}$, $R = 400 \text{ Ом}$, $L = 0,09 \text{ Гн}$, $Z_C = 500 \text{ Ом}$, $l = 10 \text{ км}$, $v = 100 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ происходит коммутация. Построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, x)$ и тока $i(t_\phi, x)$ вдоль линии для момента времени t_ϕ , когда падающая волна достигнет середины линии.

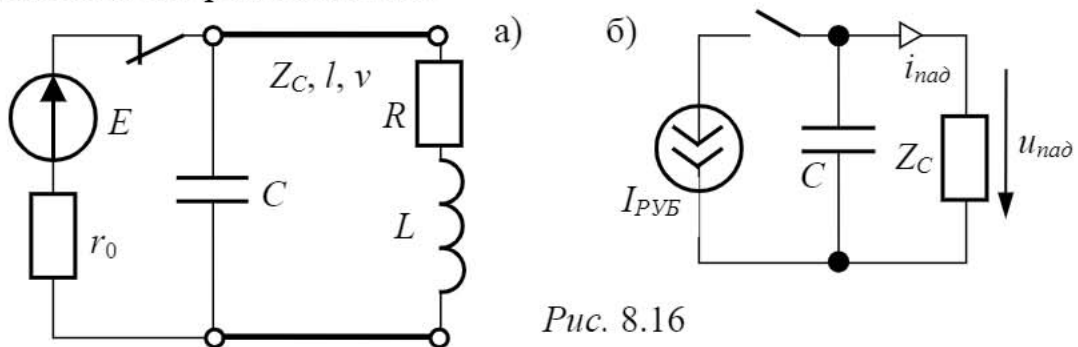


Рис. 8.16

Ответы. $I_{ПУБ} = i(t) = 0,2 \text{ А}$, $u(t) = 80 \text{ В}$; схема для расчёта падающей волны на рис. 8.16,б: $u_{nad}(t) = -100 + 100e^{-5000t} \text{ В}$, $i_{nad}(t) = -0,2 + 0,2e^{-5000t} \text{ А}$; $t_\phi = 0,05 \text{ мс}$,
 $u_{nad}(t_\phi, x) = -100 + 100 \exp[-5 \cdot (0,05 - x/100)] \text{ В}$, $0 \leq x \leq 5 \text{ км}$,

$i_{nad}(t_\phi, x) = -0,2 + 0,2 \exp[-5 \cdot (0,05 - x/100)] \text{ A};$
 $u(t_\phi, x) = u(t) + u_{nad}(t_\phi, x), \quad i(t_\phi, x) = i(t) + i_{nad}(t_\phi, x);$
 эпюры тока и напряжения на рис. 8.17.

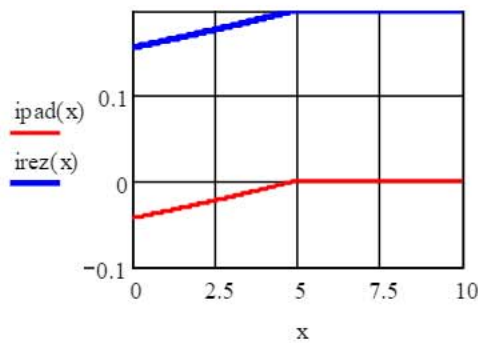
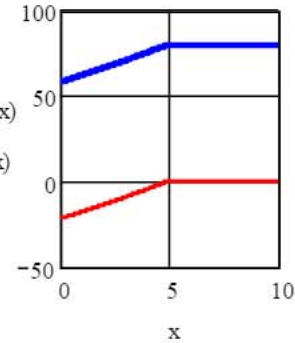


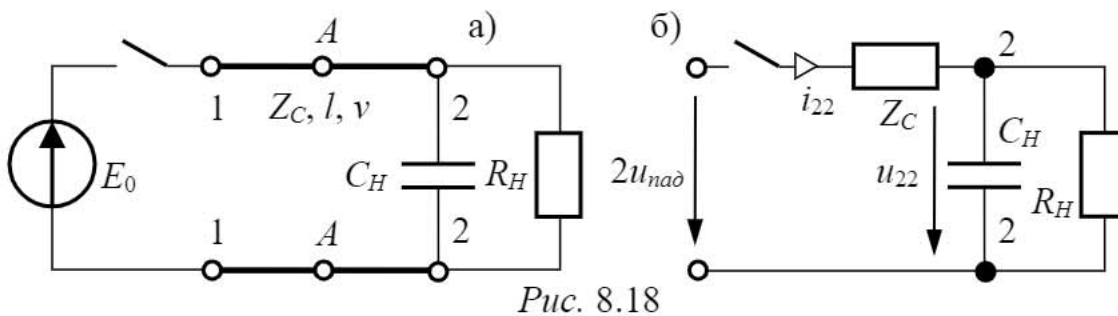
Рис. 8.17



8.2.3. Расчёт отраженных волн

ЗАДАЧА 8.37. Нагруженная линия без потерь с параметрами $Z_C = 250 \text{ Ом}$, $l = 140 \text{ км}$, $v = 280 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, подключается к идеальному источнику постоянного напряжения $E_0 = 120 \text{ кВ}$ (рис. 8.16,а). Параметры нагрузки: $R_H = 750 \text{ Ом}$, $C_H = 1,066 \text{ мкФ}$. Требуется:

- построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для момента времени $t_\phi = 0,75 \text{ мс}$ после включения линии;
- построить график изменения напряжения $u_A(t)$ в сечении AA посередине линии в течение времени, равного 2,5 пробега волны: $0 \leq t \leq 2,5 t_{\text{пробега}}$.



Решение

Часть I. Время пробега волны $t_{\text{пробега}} = l/v = 0,5 \text{ мс}$. Следовательно, на рассматриваемый момент $t_\phi = 0,75 \text{ мс}$ в линии будут существовать падающая и отражённая волны, причём время существования отражённой волны $t'_\phi = 0,25 \text{ мс}$. Рассчитаем их.

1. Параметры падающей волны: $u_{nad}(t; x=0) = E_0 = 120 \text{ кВ}$,
 $i_{nad}(t; x=0) = E_0/Z_C = 120 \cdot 10^3 / 250 = 480 \text{ A}$.

2. Через $t_{\text{пробега}} = 0,5 \text{ мс}$ волна достигнет сечения "2-2", где встретит неоднородность. Волна частично пройдёт в нагрузку, а частично отразится. Параметры отражённой волны рассчитываются через ток или напряжение i_{22} , u_{22} в сечении "2-2" линии. В схеме замещения линии для сечения "2-2" (рис. 8.18,б) проще рассчитать напряжение на конденсаторе, которое и будет равно искомому напряжению u_{22} :

$$u_{22}(t) = u_C(t) = u_{np} + Ae^{pt} = \frac{2u_{nad}}{Z_C + R_H} \cdot R_H + [u_C(0_+) - u_{np}(0_+)] \cdot e^{pt};$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0, \quad u_{np} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 10^3}{250 + 750} \cdot 750 = 180 \text{ кВ}, \quad A = 0 - 180 = -180 \text{ кВ},$$

$$Z_{ex}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{Z_C \cdot R_H}{Z_C + R_H} = \frac{1}{1,066 \cdot 10^{-6} \cdot p} + \frac{250 \cdot 750}{250 + 750} = 0, \quad p = -5000 \text{ 1/с},$$

Таким образом, $u_{22}(t) = 180 - 180e^{-5000t} \text{ кВ}$.

Из соотношения $u_{22}(t) = u_{nad} + u_{omp}$, а затем по закону Ома находим:

$$u_{omp}(t) = u_{22}(t) - u_{nad}(t) = 180 - 180e^{-5000t} - 120 = 60 - 180e^{-5000t} \text{ кВ},$$

$$i_{omp}(t) = \frac{u_{omp}}{Z_C} = \frac{(60 - 180e^{-5000t}) \cdot 10^3}{250} = 240 - 720e^{-5000t} \text{ А}.$$

3. Для построения графиков распределения напряжения и тока по линии, переходим к аргументу $[t_\phi - y/v]$:

$$u_{nad}(t_\phi; x) = 120 \text{ кВ}, \quad i_{nad}(t_\phi; x) = 480 \text{ А}, \quad 0 \leq x \leq 140 \text{ км};$$

$$u_{omp}(t'_\phi; y) = 60 - 180 \exp[-5 \cdot (0,25 - y/280)] \text{ кВ}, \quad t'_\phi = 0,25 \text{ мс},$$

$$i_{omp}(t'_\phi; y) = 240 - 720 \exp[-5 \cdot (0,25 - y/280)] \text{ А}, \quad 0 \leq y \leq 70 \text{ км}.$$

По этим выражениям на рис. 8.19 построены графики распределения тока и напряжения вдоль линии. Результирующие значения напряжения

$$u = u_{nad} + u_{omp} \quad \text{и тока} \quad i = i_{nad} - i_{omp}.$$

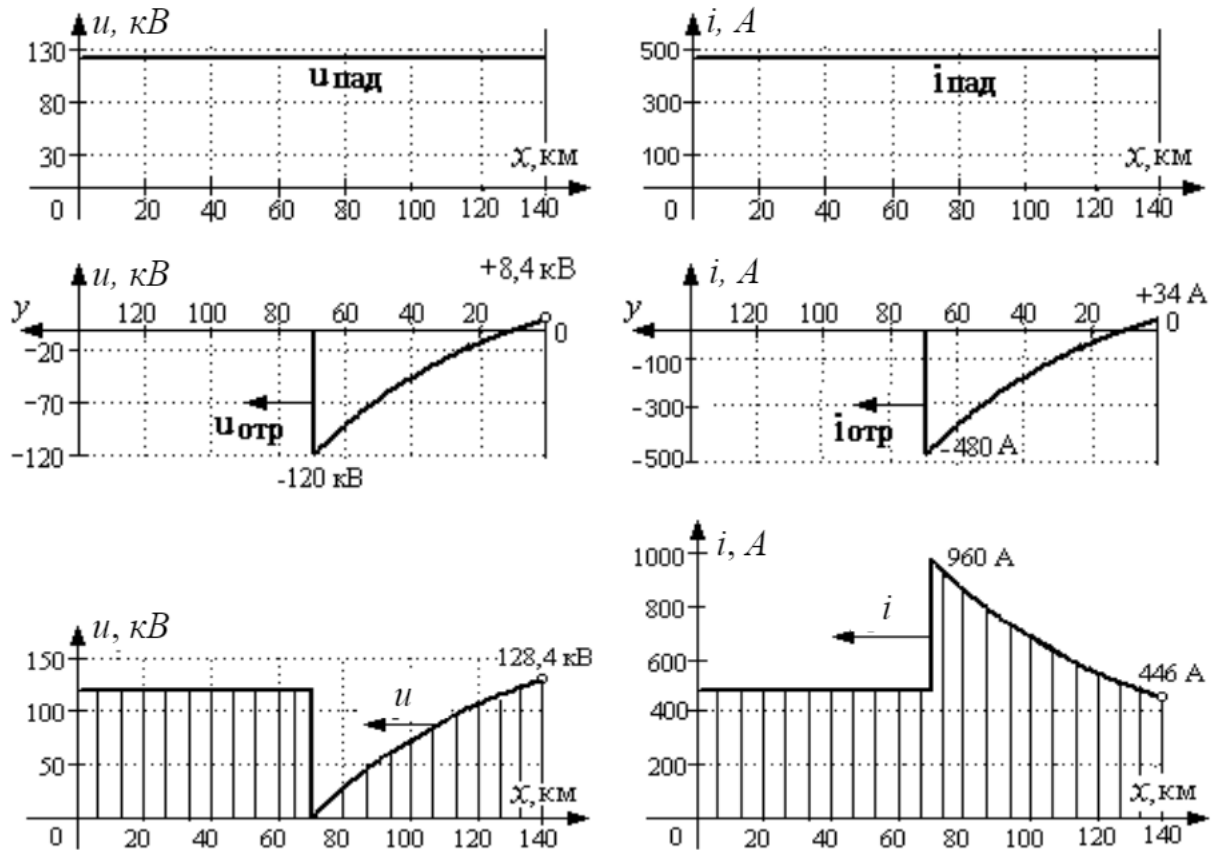


Рис. 8.19

Часть II. Для построения графика изменения напряжения $u_A(t)$ в сечении AA посередине линии в течение времени, равного 2,5 пробега волны $0 \leq t \leq 2,5t_{пробега}$, воспользуемся результатами, полученными в первой части решения.

В сечении AA до прихода падающей волны, т.е. в течение времени

$t \leq t_1 = 0,5t_{\text{пробега}} = 0,25 \text{ мс}$ будем иметь: $u_A(t) = 0$.

С момента $t_1 = 0,25 \text{ мс}$ до момента $t_2 = 0,75 \text{ мс}$, пока падающая волна достигнет конца линии, а затем отражённая волна достигнет точки A , напряжение $u_A(t)$ будет равно напряжению падающей волны $u_A(t) = u_{\text{пад}} = 120 \text{ кВ}$.

В момент t_2 отражённая волна приходит в точку A , происходит наложение падающей и отражённой волн:

$$u_A(t) = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = 120 + [60 - 180 \exp(-5000(t - 0,75 \cdot 10^{-3}))] \text{ кВ}.$$

Этот закон изменения $u_A(t)$ будет действовать в течение времени $t_{\text{пробега}}$, пока отражённая волна придёт в начало линии ($0,25 \text{ мс}$), и пока возникшая новая падающая волна достигнет точки A ($0,25 \text{ мс}$):

$$u_{\text{пад}2} = n_1 \cdot u_{\text{отр}}.$$

Процесс изменения напряжения во времени в точке A линии представлен на рис. 8.20:

$$t = 0 - 0,25 \text{ мс} \quad u_A(t) = 0;$$

$$t = 0,25 - 0,75 \text{ мс} \quad u_A(t) = 120 \text{ кВ};$$

$$t = 0,75 - 1,25 \text{ мс} \quad u_A(t) = 180 - 180 \exp(-5000(t - 0,75 \cdot 10^{-3})) \text{ кВ}.$$

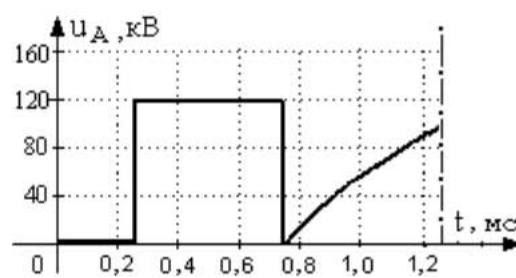


Рис. 8.20

ЗАДАЧА 8.38. К источнику постоянного напряжения $E_0 = 120 \text{ кВ}$ с внутренней индуктивностью $L_0 = 0,15 \text{ Гн}$ подключается нагруженная линия без потерь с параметрами $Z_C = 250 \text{ Ом}$, $l = 140 \text{ км}$, $v = 280 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ (рис. 8.21). $R_H = 750 \text{ Ом}$.

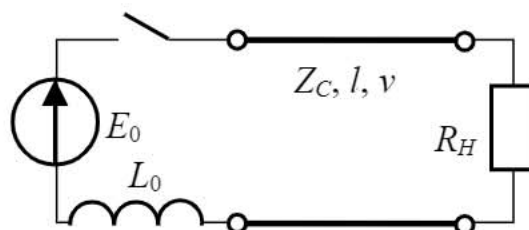


Рис. 8.21

Построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для момента времени $t_\phi = 1,5l/v$.

Ответы: $i_{\text{пад}}(t_\phi; x) = 480 - 480 e^{-1,667 [0,75 - x / 280]} \text{ А}$; $u_{\text{пад}}(t_\phi; x) = Z_C \cdot i_{\text{пад}}$;

$$i_{\text{отр}}(t'_\phi; y) = -0,5 i_{\text{пад}} = -240 + 240 e^{-1,667 [0,25 - y / 280]} \text{ А}.$$

Графики на рис. 8.22.

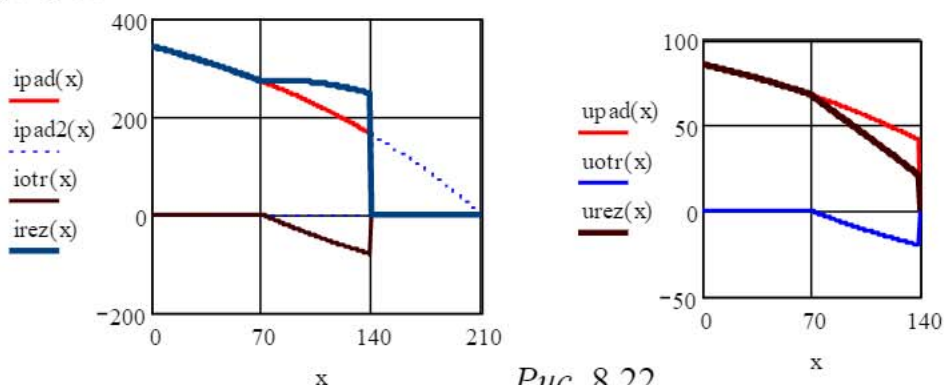


Рис. 8.22

ЗАДАЧА 8.39. Нагруженная кабельная линия с параметрами $Z_C = 75 \text{ Ом}$, $l = 50 \text{ км}$, $v = 125 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ подключается к источнику постоянного напряжения ($E_0 = 1,2 \text{ кВ}$, $r_{\text{вн}} = 5 \text{ Ом}$). На входе линия защи-

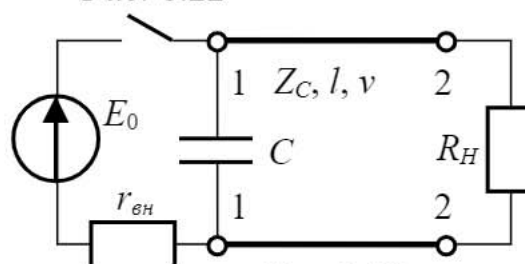


Рис. 8.23

щена от помех с помощью конденсатора $C = 53,33 \text{ мкФ}$ (рис. 8.23). Построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для момента времени $t_{1\phi} = 1,5l/v$. $R_H = 225 \text{ Ом}$.

Ответы: $i_{nad}(t_\phi; x) = 15 - 15e^{-4 \cdot [0,6 - x/125]} \text{ А}$; $u_{nad}(t_\phi; x) = Z_C \cdot i_{nad}$;
 $i_{omp}(t'_\phi; y) = -0,5i_{nad} = -7,5 + 7,5e^{-4 \cdot [0,2 - y/125]} \text{ А}$.

Графики на рис. 8.24.

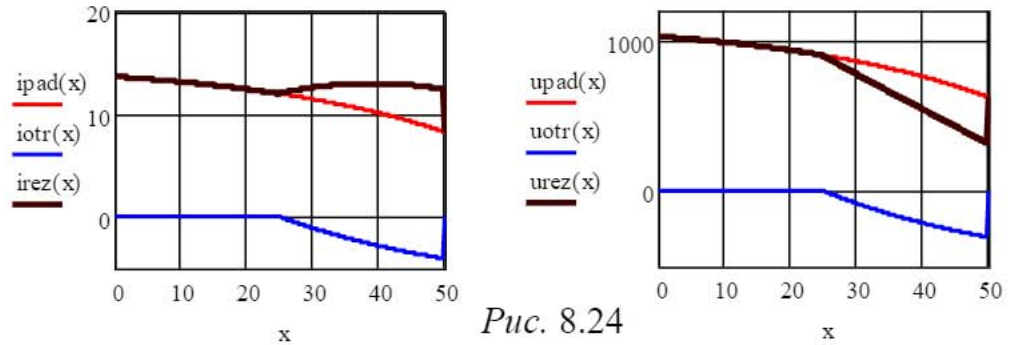


Рис. 8.24

ЗАДАЧА 8.41. Нагруженная линия без потерь с параметрами $Z_C = 250 \text{ Ом}$, $l = 140 \text{ км}$, $v = 280 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ подключается к идеальному источнику постоянного напряжения $E_0 = 120 \text{ кВ}$ (рис. 8.25). Параметры элементов нагрузки: $R_1 = 500 \text{ Ом}$, $L = 37,5 \text{ мГн}$, $R_2 = 250 \text{ Ом}$. Требуется:

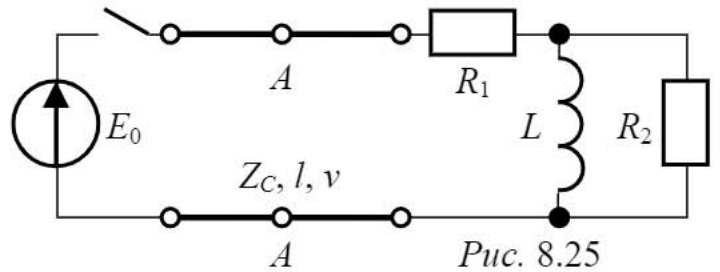


Рис. 8.25

- построить графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для момента времени $t_\phi = 0,9 \text{ мс}$ после включения линии;
- построить график изменения напряжения $u_A(t)$ в сечении AA посередине линии в течение времени, равного двум пробегам волны: $0 \leq t \leq 2t_{\text{пробега}}$.

Ответы: $i_{nad}(t) = 480 \text{ А}$, $u_{nad}(t) = 120 \text{ кВ}$;
 $u_{22}(t) = 160 + 20e^{-5000t} \text{ кВ}$, $i_{22}(t) = 320 - 80e^{-5000t} \text{ А}$, $t'_\phi = 0,4 \text{ мс}$,
 $u_{omp}(t'_\phi; y) = 40 + 20e^{-5 \cdot [0,4 - y/280]} \text{ кВ}$, $i_{omp}(t'_\phi; y) = 160 + 80e^{-5 \cdot [0,4 - y/280]} \text{ А}$.

Графики на рис. 8.26.

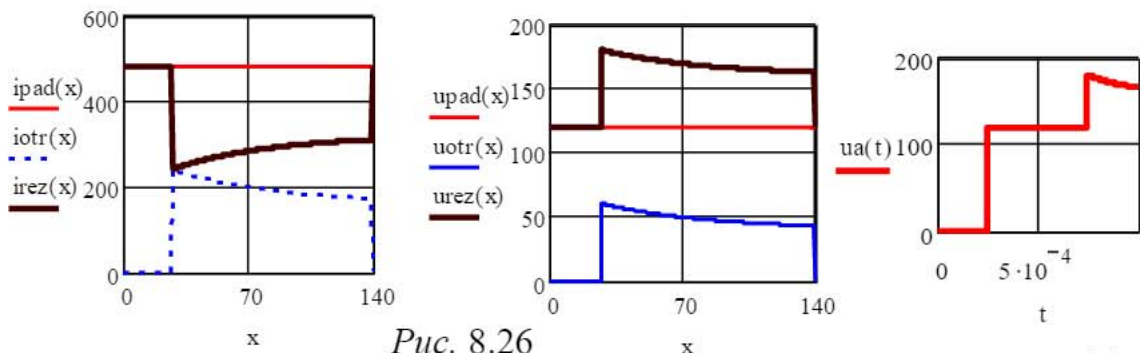


Рис. 8.26

ЗАДАЧА 8.42. Нагруженная линия без потерь с параметрами $Z_C = 300 \text{ Ом}$, $l = 140 \text{ км}$, $v = 280 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ подключается к идеальному источнику постоянного напряжения $E_0 = 120 \text{ кВ}$ (рис. 8.27). Па-

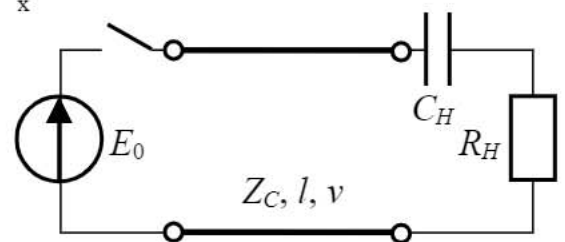


Рис. 8.27

параметры элементов нагрузки: $R_H = 950 \text{ Ом}$, $C_H = 0,1 \text{ мкФ}$. Построить:

- график тока i_{22} в конце линии в функции времени;
- графики распределения напряжения $u(t_\phi, y)$ и тока $i(t_\phi, y)$ вдоль линии для момента времени $t_\phi = 0,86 \text{ мс}$ после включения линии.

Ответы: $i_{22}(t) = 192e^{-8000t} \text{ А}$; $u_{omp}(t'_\phi; y) = 120 - 57,6e^{-8 \cdot [0,36 - y / 280]} \text{ кВ}$,
 $i_{omp}(t'_\phi; y) = 400 - 192e^{-8 \cdot [0,36 - y / 280]} \text{ А}$.

Графики на
рис. 8.28.

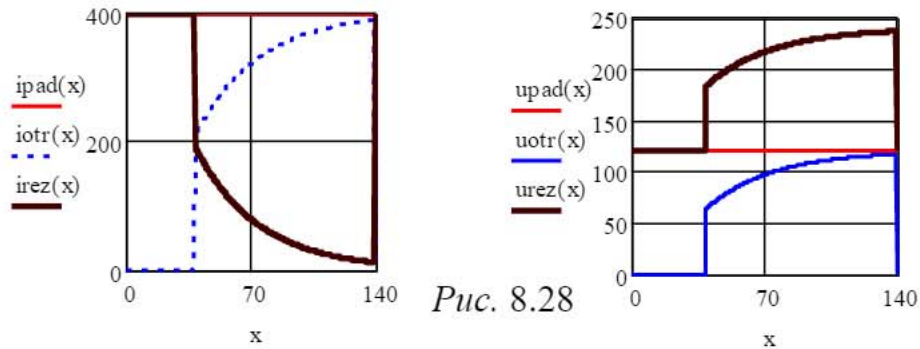


Рис. 8.28

ЗАДАЧА 8.43. В условиях задачи 8.34 построить графики распределения напряжения u и тока i вдоль кабеля для момента времени t_ϕ , когда отражённая от начала кабеля волна пройдёт $1/2$ длины кабеля.

Решение

Воспользуемся результатами вычислений задачи 8.34:

$v = 10^7 \text{ м/с}$; $Z_C = 1000 \text{ Ом}$; $t_{проб} = 1 \text{ мкс}$; $t_\phi = (1 + 1/2)t_{проб} = 1,5 \text{ мкс}$.

$u_{ycm} = U = 100 \text{ В}$, $i_{ycm} = 1,1 \text{ А}$,

$i_{обp}(t) = 0,5 + 0,5e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ А}$, $u_{обp}(t) = 500 + 500e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ В}$.

Ток и напряжение обратной волны в функции координаты при фиксированном моменте времени t_ϕ :
 $i_{обp}(t_\phi, y) = 0,5 + 0,5 \exp[-2 \cdot (1,5 - y/10)] \text{ А}$,
 $u_{обp}(t_\phi, y) = 500 + 500 \exp[-2 \cdot (1,5 - y/10)] \text{ В}$.

Внутреннее сопротивление источника равно нулю, поэтому коэффициент отражения от начала линии $n_1 = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1$. Тогда формулы тока и напряжения

прямой волны для нулевой координаты в функции времени, причём отсчёт времени ведётся с момента отражения, следующие:

$i_{np}(t) = -0,5 - 0,5e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ А}$, $u_{np}(t) = -500 - 500e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ В}$.

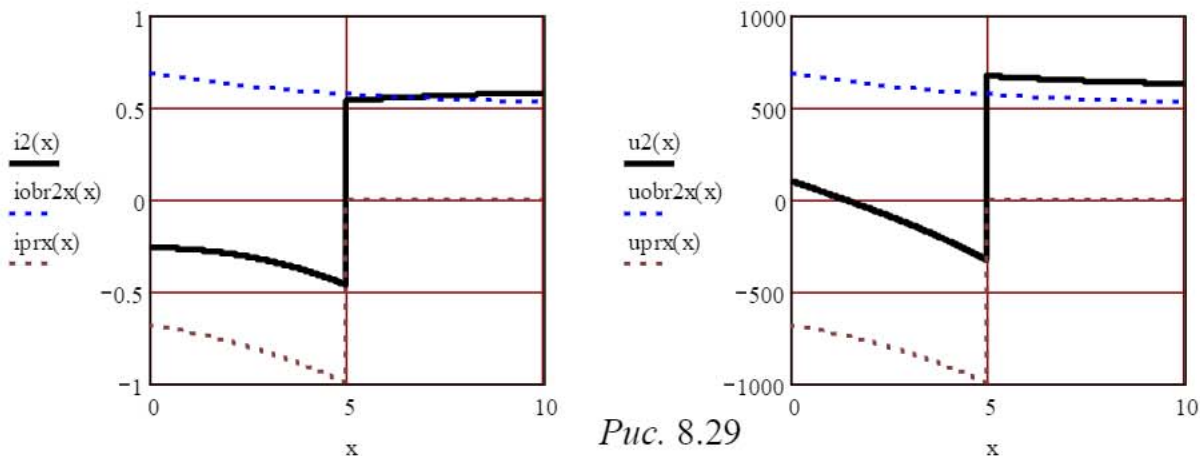


Рис. 8.29

Они же в функции координаты с учётом того, что время существования прямой волны равно $t_{\phi} - t_{\text{проб}} = 0,5 \text{ мкс}$:

$$i_{\text{пр}}(t_{\phi}, x) = -0,5 - 0,5 \exp[-2 \cdot (0,5 - x/10)] \text{ А},$$

$$u_{\text{пр}}(t_{\phi}, y) = -500 - 500 \exp[-2 \cdot (0,5 - x/10)] \text{ В}.$$

Формулы справедливы для $x \leq v \cdot (t_{\phi} - t_{\text{проб}}) = 5 \text{ м}$. При $x \geq 5 \text{ м}$ прямая волна отсутствует.

Результирующие ток и напряжение в линии находим в соответствии с формулами: $u = u_{\text{уст}} + u_{\text{обр}} + u_{\text{пр}}$, $i = i_{\text{уст}} - i_{\text{обр}} + i_{\text{пр}}$. Эпюры тока и напряжения приведены на рис. 8.29.

ЗАДАЧА 8.44. В условиях задачи 8.36 построить графики распределения напряжения $u(t_{\phi}, x)$ и тока $i(t_{\phi}, x)$ вдоль линии для момента времени t_{ϕ} , когда отражённая волна достигнет середины линии.

Комментарии и ответы: $i_{\text{уст}} = 0,2 \text{ А}$, $u_{\text{уст}} = 80 \text{ В}$;

$$u_{\text{над}}(t) = -100 + 100e^{-5000t} \text{ В}, \quad i_{\text{над}}(t) = -0,2 + 0,2e^{-5000t} \text{ А}.$$

Отражённую волну можно рассчитать двумя способами, причём расчёты выполним, используя MathCAD. В первом способе используем коэффициент отражения в операторной форме:

- оригинал и изображение тока падающей волны:

$$i_{\text{пад}}(t) := -0,2 + 0,2 \cdot e^{-5000 \cdot t} \quad i_{\text{пад}}(t) \Big|_{\text{float},4}^{\text{laplace},t} \rightarrow \frac{-0,2000}{s} + \frac{0,2000}{s + 5000}$$

$$I_{\text{пад}}(p) := \frac{-0,2000}{p} + \frac{0,2000}{p + 5000}$$

- операторное сопротивление нагрузки линии $Z(p) := R + p \cdot L$

- операторный коэффициент отражения $n(p) := \frac{Z(p) - ZC}{Z(p) + ZC}$

$$n(p) \Big|_{\text{float},4}^{\text{simplify}} \rightarrow 0,1111 \cdot \frac{(-0,1000e5) + 9 \cdot p}{0,1000e5 + p}$$

- изображение и оригинал тока отражённой волны:

$$I_{\text{отр}}(p) := n(p) \cdot I_{\text{пад}}(p)$$

$$I_{\text{отр}}(p) \Big|_{\text{float},4}^{\text{invlaplace},p} \rightarrow 0,2222 \cdot e^{(-0,1000e5) \cdot t} + 0,2222e-1 - 0,2444 \cdot e^{(-5000) \cdot t}$$

Во втором способе сначала рассчитаем ток переходного процесса в конце линии по схеме замещения рис. 8.30. Поскольку напряжение источника $2u_{\text{над}}$ имеет экспоненциальную форму, расчёт выполним с помощью интеграла Дюамеля.

$$u(t) := -200 + 200 \cdot e^{-5000 \cdot t}$$

$$g(t) := \frac{1}{R + ZC} - \frac{1}{R + ZC} \cdot \exp\left(-\frac{R + ZC}{L} \cdot t\right)$$

$$g(t) \Big|_{\text{float},4}^{\text{simplify}} \rightarrow 0,1111e-2 - 0,1111e-2 \cdot e^{(-0,1000e5) \cdot t}$$

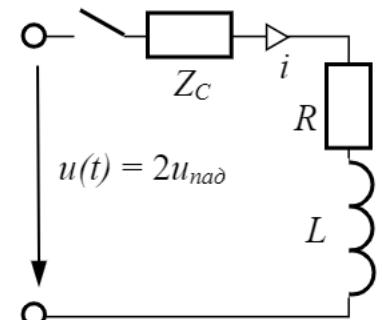


Рис. 8.30

$$i(t) := u(0) \cdot g(t) + \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} u(\tau) \right) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$i(t) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow .4444 \cdot e^{(-5000.) \cdot t} - .2222 - .2222 \cdot e^{(-1000e5) \cdot t}$$

$$i_{otr}(t) := i_{pad}(t) - i(t)$$

$$i_{otr}(t) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow .2222 \cdot e^{(-1000e5) \cdot t} + .2222e-1 - .2444 \cdot e^{(-5000.) \cdot t}$$

Таким образом, ток и напряжение отражённой волны для нулевой координаты $y = 0$:

$$i_{omp}(t) = 0,0222 + 0,2222 \cdot e^{-10000 \cdot t} - 0,2444 \cdot e^{-5000t} \text{ A},$$

$$u_{omp}(t) = Z_C \cdot i_{omp}(t) = 11,1 + 111,1 \cdot e^{-10000 \cdot t} - 122,2 \cdot e^{-5000t} \text{ B}.$$

Причём в этих формулах отсчёт времени начинается с момента отражения волны. Таким образом, к моменту $t_\phi = 1,5t_{проб} = 0,15 \text{ мс}$ падающая волна существует как раз $0,15 \text{ мс}$, а отражённая волна – $0,05 \text{ мс}$.

Напряжение и ток падающей и отражённой волн в функции координаты:

$$u_{nad}(t_\phi, x) = -100 + 100 \exp[-5 \cdot (0,15 - x/100)] \text{ B},$$

$$i_{nad}(t_\phi, x) = -0,2 + 0,2 \exp[-5 \cdot (0,15 - x/100)] \text{ A};$$

$$u_{omp}(t_\phi, x) = 11,1 + 111,1 \exp[-10 \cdot (0,05 - y/100)] - 122,2 \cdot \exp[-5 \cdot (0,05 - y/100)] \text{ B},$$

$$i_{omp}(t_\phi, x) = 0,0222 + 0,2222 \exp[-10 \cdot (0,05 - y/100)] - 0,2444 \cdot \exp[-5 \cdot (0,05 - y/100)] \text{ A}.$$

В этих формулах $y = 10 - x \leq 5 \text{ км}$.

Результирующие ток и напряжение в линии находятся в соответствии с формулами:

$$u(t_\phi, x) = u_{уст} + u_{nad}(t_\phi, x) + u_{omp}(t_\phi, x), \quad i(t_\phi, x) = i_{уст} + i_{nad}(t_\phi, x) - i_{omp}(t_\phi, x).$$

Эпюры тока и напряжения на рис. 8.31.

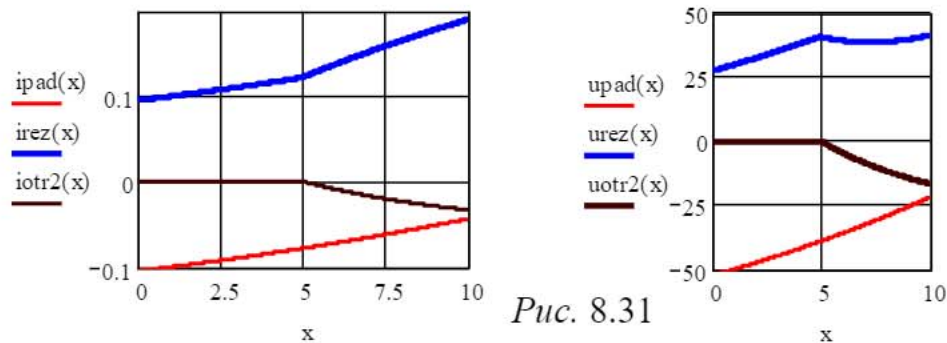


Рис. 8.31

8.2.4. Расчёт волн при прохождении через R, L, C -элементы

ЗАДАЧА 8.45. По воздушной линии с параметрами $Z_{C1} = 220 \text{ Ом}$, $l_1 = 150 \text{ км}$, $v_1 = 300 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ распространяется падающая волна с прямоугольным фронтом напряжением $u_{nad}(t) = 220 \text{ кВ}$, переходя затем через корректирующие элементы $R = 180 \text{ Ом}$, $L = 30 \text{ мГн}$ в кабель с параметрами $Z_{C2} = 88 \text{ Ом}$, $l_2 = 75 \text{ км}$, $v_2 =$

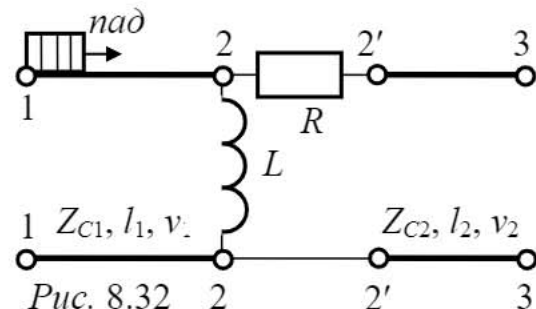


Рис. 8.32

$= 150 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, конец которого разомкнут (рис. 8.32).

Требуется: построить графики тока $i_{22}(t)$ и напряжения $u_{22}(t)$ в конце первой линии в функции времени, а также графики распределения вдоль обеих линий результирующего напряжения и тока для момента времени $t_{\phi} = 0,5l_1/v_1$, считая с момента прихода волны в узел соединения линий.

Решение

1. Записываем ток и напряжение падающей волны:

$$u_{nad}(t, x_1=0) = 220 \text{ кВ}; \quad i_{nad}(t, x_1=0) = u_{nad}/Z_{C1} = 220 \cdot 10^3/220 = 1000 \text{ А}.$$

2. Через время $t_{пробега} = l_1/v_1 = 0,5 \text{ мс}$ волна достигнет сечения “2-2”, где встретит неоднородность. Волна частично пройдёт в индуктивность, частично отразится, а частично, в виде преломлённой волны, пройдёт во вторую линию.

Для определения отражённой и преломлённой волн необходимо рассчитать либо ток i_{22} , либо напряжение u_{22} в сечении “2-2”, через которые затем можно записать выражения $u_{отр}$, $i_{отр}$, $u_{прел}$, $i_{прел}$.

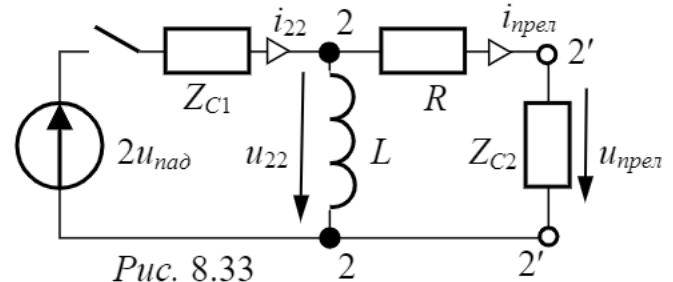


Рис. 8.33

Ток $i_{22}(t)$ рассчитываем по схеме замещения линии для сечения “2-2” (рис. 8.33). Расчёт выполняем классическим методом:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, \quad i_{22}(t) = i_{np} + Ae^{pt};$$

$$i_{np}(t) = 2u_{nad}/Z_{C1} = 2 \cdot 220 \cdot 10^3/220 = 2000 \text{ А},$$

$$i_{22}(0_+) = \frac{2u_{nad}}{Z_{C1} + R + Z_{C2}} = \frac{2 \cdot 220 \cdot 10^3}{220 + 180 + 88} = 902 \text{ А},$$

$$A = i_{22}(0_+) - i_{np}(0_+) = 902 - 2000 = -1098 \text{ А};$$

$$pL + \frac{Z_{C1} \cdot (R + Z_{C2})}{Z_{C1} + R + Z_{C2}} = 0, \quad p = -4027 \text{ 1/с}, \quad \tau = -1/p = 0,248 \text{ с} \approx 0,25 \text{ мс}.$$

$$\text{Таким образом, } i_{22}(t) = 2000 - 1098e^{-4027t} \text{ А}.$$

Напряжение $u_{22}(t)$ находим по II закону Кирхгофа:

$$u_{22}(t) = 2u_{nad} - Z_{C1} \cdot i_{22}(t) = 440 - 220 \cdot (2 - 1,098e^{-4027t}) = 241,6e^{-4027t} \text{ кВ}.$$

По этим выражениям на рис. 8.34 построены графики $u_{22}(t)$, $i_{22}(t)$. Выражения справедливы для отрезка времени $t \leq 2t_{пробега} = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ мс}$.

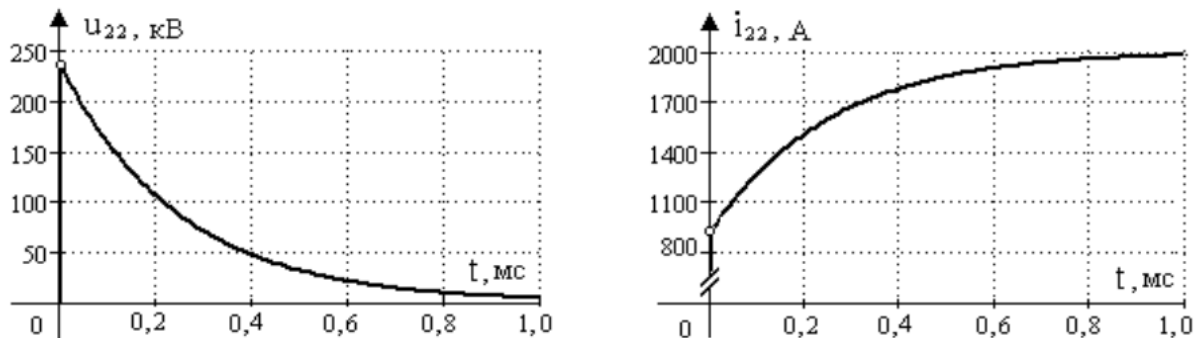


Рис. 8.34

3. Уравнения отражённой и преломлённой волн в функции времени находим через напряжение $u_{22}(t)$.

Отражённая волна: $u_{omp}(t, y_1=0) = u_{22}(t) - u_{nad} = -220 + 241,6e^{-4027t} \text{ кВ};$

$$i_{omp}(t, y_1=0) = u_{omp}/Z_{C1} = -1000 + 1098e^{-4027t} \text{ А}.$$

Преломлённая волна $i_{nрел}(t, x_2=0) = u_{22}/(R + Z_{C2}) = 901,5e^{-4027t} \text{ А};$

$$u_{nрел}(t, x_2=0) = Z_{C2} \cdot i_{nрел} = 88 \cdot 0,9015e^{-4027t} = 79,33e^{-4027t} \text{ кВ}.$$

4. Для построения графиков распределения тока и напряжения вдоль обеих линий (рис. 8.35) выражения отражённой и преломлённой волн переписываем в функции аргумента $[t_\phi - y_1/v_1]$ или $[t_\phi - x_2/v_2]$. В первой линии будут падающая и отражённая волны:

$$u_{omp}[t_\phi, y_1] = -220 + 241,6 \cdot \exp[-4,027 \cdot (0,25 - y_1/300)] \text{ кВ},$$

$$i_{omp}[t_\phi, y_1] = -1000 + 1098 \cdot \exp[-4,027 \cdot (0,25 - y_1/300)] \text{ А}, \quad y_1 \leq v_1 \cdot t_\phi = 75 \text{ км}.$$

Во второй линии будет только преломлённая волна:

$$u_{nрел}[t_\phi, x_2] = 79,33 \cdot \exp[-4,027 \cdot (0,25 - x_2/150)] \text{ кВ},$$

$$i_{nрел}[t_\phi, x_2] = 901,5 \cdot \exp[-4,027 \cdot (0,25 - x_2/150)] \text{ А}, \quad x_2 \leq v_2 \cdot t_\phi = 37,5 \text{ км}.$$

Для удобства построения графиков расчёт отдельных значений тока и напряжения в обеих линиях сведём в табл. 8.2.

Таблица 8.2

$y_1, \text{ км}$	$u_{omp}, \text{ кВ}$	$i_{omp}, \text{ А}$	$x_2, \text{ км}$	$u_{nрел}, \text{ кВ}$	$i_{nрел}, \text{ А}$
75	+21,65	+98,4	37,5	79,33	901,5
60	-22,42	-101,9	30,0	64,86	737,1
45	-58,46	-265,7	22,5	53,03	602,7
30	-87,92	-399,6	15,0	43,36	492,8
15	-112,0	-509,1	0	28,99	329,4
0	-131,7	-598,6	---	---	---

ЗАДАЧА 8.46. По воздушной линии с параметрами $Z_{C1} = 220 \text{ Ом}$, $l_1 = 150 \text{ км}$, $v_1 = 300 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ распространяется волна с прямоугольным фронтом, переходя затем через корректирующие элементы $R = 180 \text{ Ом}$, $L = 30 \text{ мГн}$ в кабель с параметрами $Z_{C2} = 88 \text{ Ом}$, $l_2 = 75 \text{ км}$, $v_2 = 150 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, конец которого разомкнут (рис. 8.36).

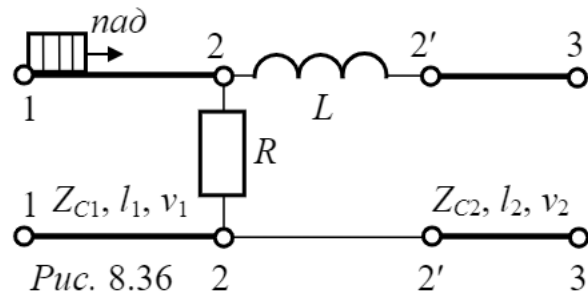


Рис. 8.36

Требуется: построить графики тока и напряжения в конце первой линии в функции времени, а также графики распределения вдоль обеих линий результирующего напряжения и тока для момента времени $t_\phi = 0,25 \text{ мс}$, считая с момента прихода волны в узел соединения линий. $u_{nad} = 220 \text{ кВ}$.

Пояснения. Чтобы было удобнее различать точки R,L-сечения, принадлежащие первой и второй линиям, на схеме они обозначены как 2-2 и 2'-2'.

$$\text{Ответы: } u_{22}(t) = 93,17 + 104,83e^{-8000t} \text{ кВ}, \quad i_{22}(t) = 1576,5 - 476,5e^{-8000t} \text{ А};$$

$$u_{omp}[t_\phi, y_1] = -126,8 + 104,8 \exp[-8 \cdot (0,25 - y_1/300)] \text{ кВ},$$

$$i_{omp}[t_\phi, y_1] = -576,5 + 476,5 \exp[-8 \cdot (0,25 - y_1/300)] \text{ А}, \quad y_1 \leq v_1 \cdot t_\phi = 75 \text{ км}.$$

Во второй линии будет только преломлённая волна:

$$u_{nрел}[t_\phi, x_2] = 93,18 - 93,18 \exp[-8 \cdot (0,25 - x_2/150)] \text{ кВ},$$

$$i_{\text{прел}}[t_{\Phi}; x_2] = 1059 - 1059 \exp[-8 \cdot (0,25 - x_2/150)] \text{ A}, \quad x_2 \leq v_2 \cdot t_{\Phi} = 37,5 \text{ км.}$$

Графики на рис. 8.37.

Рис. 8.35
Файл «Рисунки»

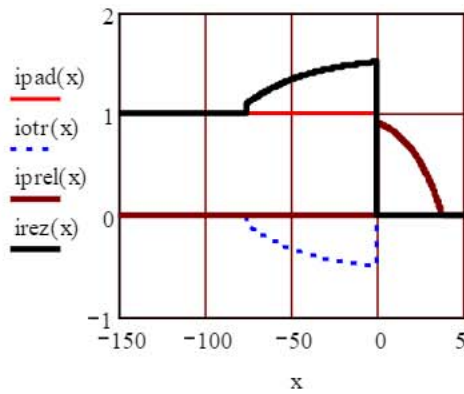
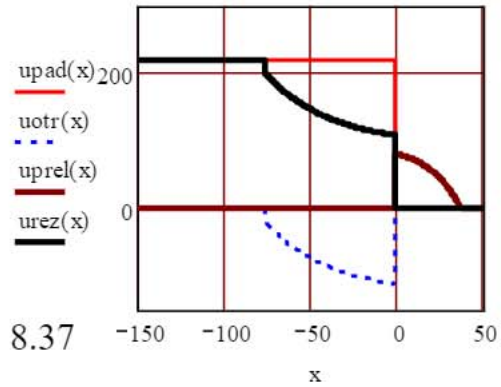


Рис. 8.37



ЗАДАЧА 8.47. Воздушная линия с параметрами $l_1 = 150 \text{ км}$, $Z_{C1} = 400 \text{ Ом}$, $v_1 = 300 \cdot 10^3 \text{ км/с}$, соединённая с другой воздушной линией $l_2 = 150 \text{ км}$, $Z_{C2} = 250 \text{ Ом}$, $v_2 = 300 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ через корректирующие элементы $R = 150 \text{ Ом}$, $C = 2 \text{ мкФ}$, включается на идеальный источник $E_0 = 110 \text{ кВ}$ (рис. 8.38). Требуется построить графики распределения вдоль обеих линий результирующих напряжения u и тока i для момента времени $t_{\phi} = 0,4 \text{ мс}$, считая с момента прихода волны в узел соединения линий. $L_H = 20 \text{ мГн}$.

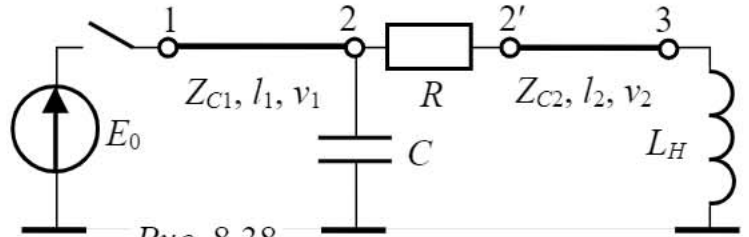


Рис. 8.38

Решение

1. Мысленно представляя себе схему замещения для сечения 1-1, запишем параметры падающей волны:

$$u_{nad}(t; x=0) = E_0 = 110 \text{ кВ}, \quad i_{nad}(t; x=0) = u_{nad}/Z_{C1} = 110/0,4 = 275 \text{ А}.$$

2. Через $t_{пробега} = 0,5 \text{ мс}$ волна достигнет сечения 2-2, где встретит неоднородность, частично отразится и частично пройдёт в виде преломлённой волны во вторую линию. Составляем схему замещения для узла 2-2, по которой классическим методом выполняем расчёт либо тока i_{22} , либо напряжения u_{22} (рис. 8.39). В нашем случае проще найти напряжение $u_{22} = u_C$:

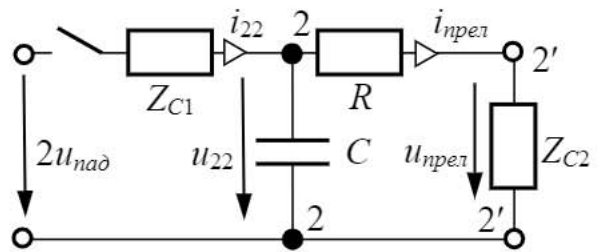


Рис. 8.39

В нашем случае проще найти напряжение $u_{22} = u_C$:

$$u_C(0) = 0, \quad p = -1/\tau;$$

$$\tau = \frac{Z_{C1}(R + Z_{C2})}{Z_{C1} + R + Z_{C2}} \cdot C = \frac{400 \cdot (150 + 250)}{400 + 150 + 250} \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad p = -2500 \text{ с}^{-1}.$$

$$u_C(t) = u_{Cnp} + A \cdot e^{pt}; \quad u_{Cnp} = 2u_{nad} \cdot \frac{R + Z_{C2}}{Z_{C1} + R + Z_{C2}} = 220 \cdot \frac{150 + 250}{400 + 150 + 250} = 110 \text{ кВ},$$

$$A = u_C(0) - u_{Cnp} = -110;$$

$$\text{Окончательно имеем: } u_{22}(t; y=0) = u_C(t) = 110 - 110 \cdot e^{-2500t} \text{ кВ},$$

$$i_{22}(t; y=0) = \frac{2u_{nad} - u_{22}}{Z_{C1}} = \frac{220 - 110 + 110e^{-2500t}}{0,4} = 275 + 275 \cdot e^{-2500t} \text{ А}.$$

Выражения справедливы в течение $2t_{\text{пробега}}$, т.е. в течение времени, пока волны дойдут до концов своих линий, отразятся и вновь достигнут сечения 2-2.

3. Через выражения тока и напряжения в конце первой линии записываем выражения отражённой и преломлённой волн:

$$u_{\text{отр}}(t; y_1=0) = u_{22} - u_{\text{над}} = -110 \cdot e^{-2500t} \text{ кВ}, \quad i_{\text{отр}}(t; y_1=0) = i_{\text{над}} - i_{22} = -275 \cdot e^{-2500t} \text{ А}.$$

$$i_{\text{прел}}(t; x_2=0) = \frac{u_{22}}{R + Z_{C2}} = \frac{110 - 110e^{-2500t}}{(150 + 250) \cdot 10^{-3}} = 275 - 275 \cdot e^{-2500t} \text{ А},$$

$$u_{\text{прел}}(t; x_2=0) = Z_{C2} \cdot i_{\text{прел}} = 68,75 - 68,75 \cdot e^{-2500t} \text{ кВ}.$$

4. Для построения графиков тока и напряжения в функции координаты, полученные выражения переписываем в функции $[t_{\phi} - y_1/v_1]$ и $[t_{\phi} - x_2/v_2]$:

$$u_{\text{отр}}(y_1; t_{\phi}) = -110 \cdot \exp[-2,5 \cdot (0,4 - y_1/300)] \text{ кВ}, \quad 0 < y_1 < v_1 \cdot t_{\phi} = 120 \text{ км},$$

$$i_{\text{отр}}(y_1; t_{\phi}) = -275 \cdot \exp[-2,5 \cdot (0,4 - y_1/300)] \text{ А};$$

$$u_{\text{прел}}(x_2; t_{\phi}) = 68,75 - 68,75 \cdot \exp[-2,5 \cdot (0,4 - x_2/300)] \text{ кВ}, \quad 0 < x_2 < v_2 \cdot t_{\phi} = 120 \text{ км},$$

$$i_{\text{прел}}(x_2; t_{\phi}) = 275 - 275 \cdot \exp[-2,5 \cdot (0,4 - x_2/300)] \text{ А}.$$

Результаты расчётов по построению графиков сведены в табл. 8.3. Графики представлены на рис. 8.40.

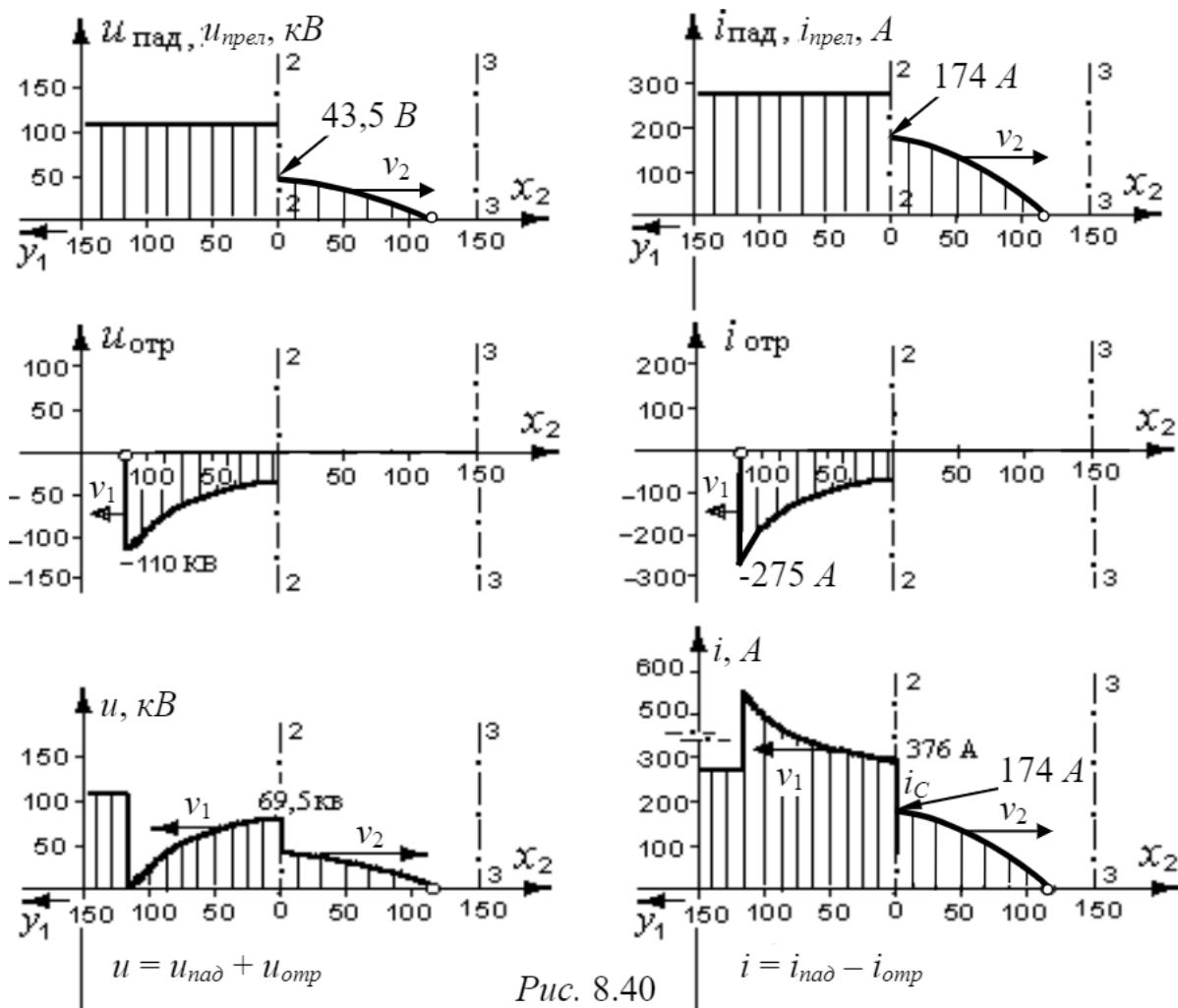


Рис. 8.40

Таблица 8.3

$y_1, x_2, \text{ км}$	$u_{\text{отп}}, \text{ кВ}$	$i_{\text{отп}}, \text{ А}$	$u_{\text{прел}}, \text{ кВ}$	$i_{\text{прел}}, \text{ А}$
120	-110	-275	0	0
90	-85,67	-214,2	15,2	60,83
60	-66,72	-166,8	27,05	108,2
30	-51,96	-129,9	36,25	145,1
0	-40,47	-101,2	43,46	173,8

ЗАДАЧА 8.48. По воздушной линии рис. 8.41, а с параметрами $Z_C = 220 \text{ Ом}$, $l = 200 \text{ км}$ распространяется падающая волна $U_0 = 220 \text{ кВ}$ с прямоугольным фронтом, переходя затем мимо корректирующих элементов $r = 440 \text{ Ом}$, $C = 0,455 \text{ мкФ}$ в следующую такую же воздушную линию.

Требуется: 1) построить графики тока и напряжения в конце первой линии в функции времени; 2) построить графики распределения вдоль обеих линий результирующих напряжений и токов для момента времени $t_\Phi = 0,5 \text{ мс}$, считая с момента прихода волны в узел соединения линий.

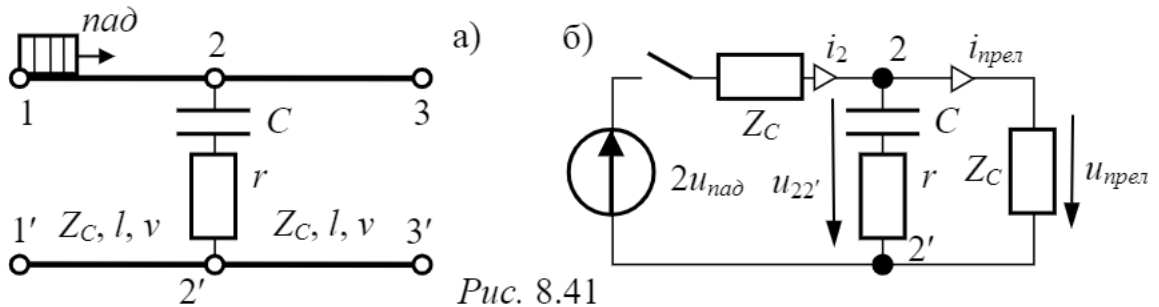


Рис. 8.41

Ответы: 1) расчётная схема для определения $i_2(t)$ и $u_{22'}(t)$ приведена на рис. 8.41, б, $i_2(t) = 1000 + 200 \cdot e^{-4000t} \text{ А}$, $u_{22'}(t) = 220 - 44 \cdot e^{-4000t} \text{ кВ}$;

2) $u_{\text{отп}}(t_\Phi, y_1) = -44 \cdot \exp[-4000 \cdot (5 \cdot 10^{-4} - y_1/(3 \cdot 10^5))] \text{ кВ}$,
 $i_{\text{отп}}(t_\Phi, y_1) = -200 \cdot \exp[-4000 \cdot (5 \cdot 10^{-4} - y_1/(3 \cdot 10^5))] \text{ А}$,
 $u_{\text{прел}}(t_\Phi, x_2) = 220 - 44 \cdot \exp[-4000 \cdot (5 \cdot 10^{-4} - x_2/(3 \cdot 10^5))] \text{ кВ}$,
 $i_{\text{прел}}(t_\Phi, x_2) = 1000 - 200 \cdot \exp[-4000 \cdot (5 \cdot 10^{-4} - x_2/(3 \cdot 10^5))] \text{ А}$,
 эмпоры напряжений и токов приведены на рис. 8.42.

ЗАДАЧА 8.49. По воздушной линии рис. 8.43 с параметрами: $l = 150 \text{ км}$, $Z_C = 220 \text{ Ом}$ распространяется волна $u_{\text{над}} = 220 \text{ кВ}$ с прямоугольным фронтом, переходя затем мимо корректирующих элементов $r = 50 \text{ Ом}$, $L = 20 \text{ мГн}$ в следующую такую же воздушную линию. Требуется:

- построить графики тока $i_{22}(t)$ и напряжения $u_{22}(t)$ в конце первой линии;
- построить графики распределения вдоль обеих линий результирующих напряжения u и тока i для момента времени $t_\Phi = 0,4 \text{ мс}$, считая с момента прихода волны в узел соединения линий.

Ответы: $u_{22}(t) = 68,75 + 151,25e^{-8000t} \text{ кВ}$, $i_{22}(t) = 1688 - 688e^{-8000t} \text{ А}$,
 $u_{\text{отп}}(t_\Phi, y_1) = -151,3 + 151,3 \exp[-8 \cdot (0,4 - y_1/300)] \text{ кВ}$,
 $i_{\text{отп}}(t_\Phi, y_1) = -688 + 688 \exp[-8 \cdot (0,4 - y_1/300)] \text{ А}$, $y_1 \leq v_1 \cdot t_\Phi = 120 \text{ км}$;
 $u_{\text{прел}}(t_\Phi, x_2) = 68,8 + 151,3 \exp[-8 \cdot (0,4 - x_2/300)] \text{ кВ}$,
 $i_{\text{прел}}(t_\Phi, x_2) = 313 + 688 \exp[-8 \cdot (0,4 - x_2/300)] \text{ А}$, $x_2 \leq v_2 \cdot t_\Phi = 120 \text{ км}$.

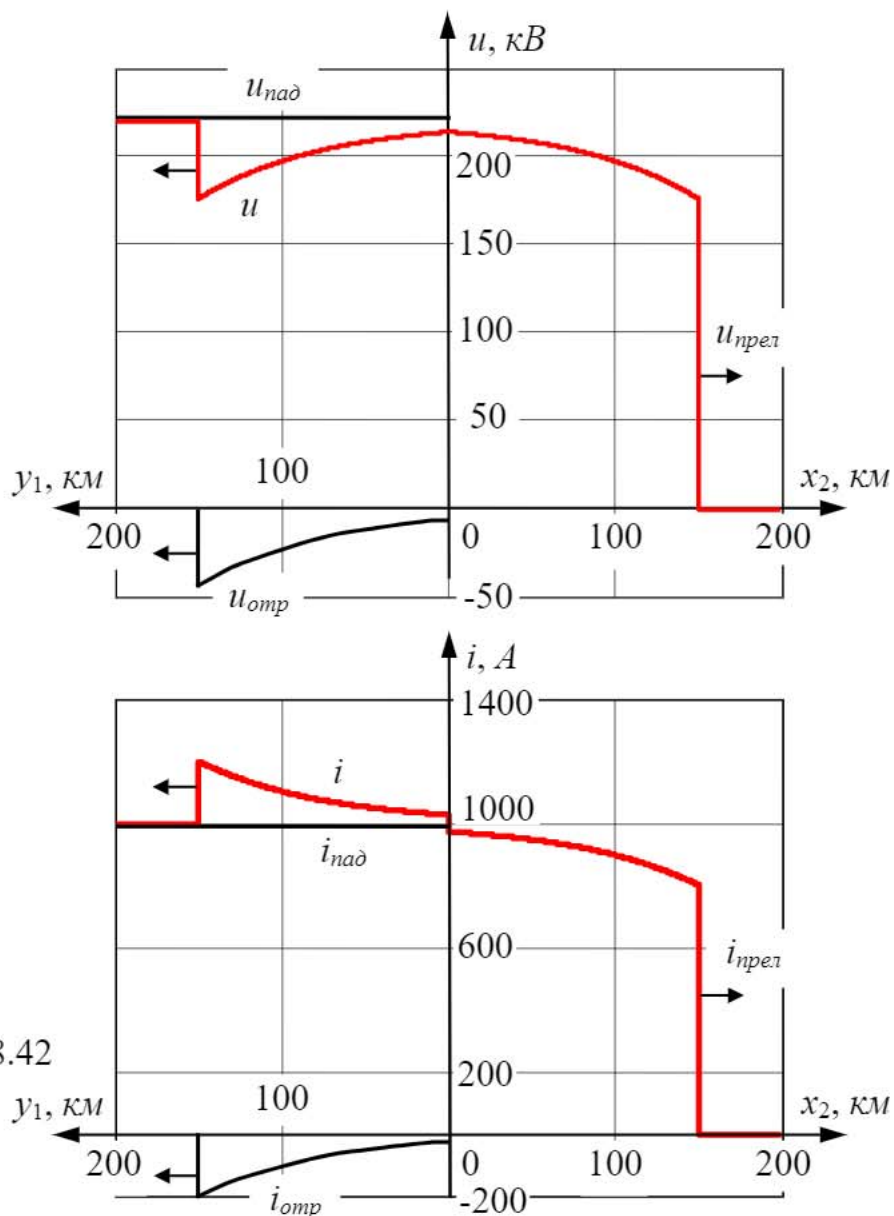


Рис. 8.42

Рис. 8.43. По кабелю рис. 8.44 с параметрами: $l = 60$ км, $Z_C = 80$ Ом распространяется волна $u_{nad} = 1,2$ кВ с прямоугольным фронтом, переходя затем через контролируемые элементы в следующую такую же кабельную линию. Построить графики распределения вдоль обеих линий результирующего напряжения u и тока i для момента времени $t_{\phi} = 0,3$ мс, считая $\epsilon = 2$.

а) $R = 120$ Ом, б) $L = 5$ мГн, в) $C = 6,25$ мкФ.

Решение. Случай $R = 120$ Ом.

1. Для случая падения волны

$$u_{nad}(t; x=0) = 1200 \text{ В} = \text{const}, \quad i_{nad}(t; x=0) = u_{nad}/Z_C = 1200/80 = 15 \text{ А} = \text{const}.$$

2. При чисто активной нагрузке отраженная волна может быть выражена через падающую волну с помощью ко-

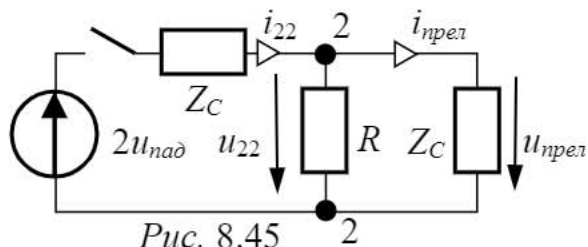
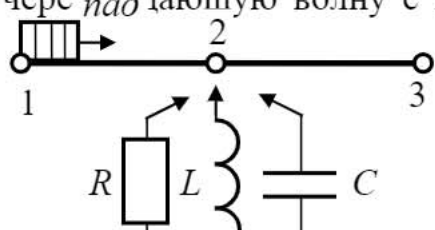


Рис. 8.45

коэффициента отражения $n = \frac{R_n - Z_C}{R_n + Z_C}$. Для наглядности расчёта коэффициента отражения волны от нагрузки, приведём схему замещения для сечения “2-2” линии (рис. 8.45): $R_n = \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = \frac{120 \cdot 80}{120 + 80} = 48 \text{ Ом}$, $n = \frac{48 - 80}{48 + 80} = -0,25$.

3. Тогда напряжение и ток отражённой волны будут:

$$u_{omp}(t; y_1) = n \cdot u_{nao} = -0,25 \cdot 1200 = -300 \text{ В} = \text{const},$$

$$i_{omp}(t; y_1) = n \cdot i_{nao} = -0,25 \cdot 15 = -3,75 \text{ А} = \text{const}, \quad y_1 \leq v_1 \cdot t_{\phi} = 45 \text{ км}.$$

4. Напряжение и ток в конце первой линии:

$$u_{22}(t) = u_{nao}(t) + u_{omp}(t) = 900 \text{ В}, \quad i_{22}(t) = i_{nao}(t) - i_{omp}(t) = 18,75 \text{ А}.$$

5. Напряжение и ток преломлённой волны (см. схему замещения):

$$u_{прел}(t; x_2) = u_{22} = 900 \text{ В} = \text{const},$$

$$i_{прел}(t; x_2) = u_{прел}/Z_C = 900/80 = 11,25 \text{ А} = \text{const}, \quad x_2 \leq v_2 \cdot t_{\phi} = 45 \text{ км}.$$

Графики распределения напряжения и тока вдоль линий для случая а) приведены на рис. 8.46.

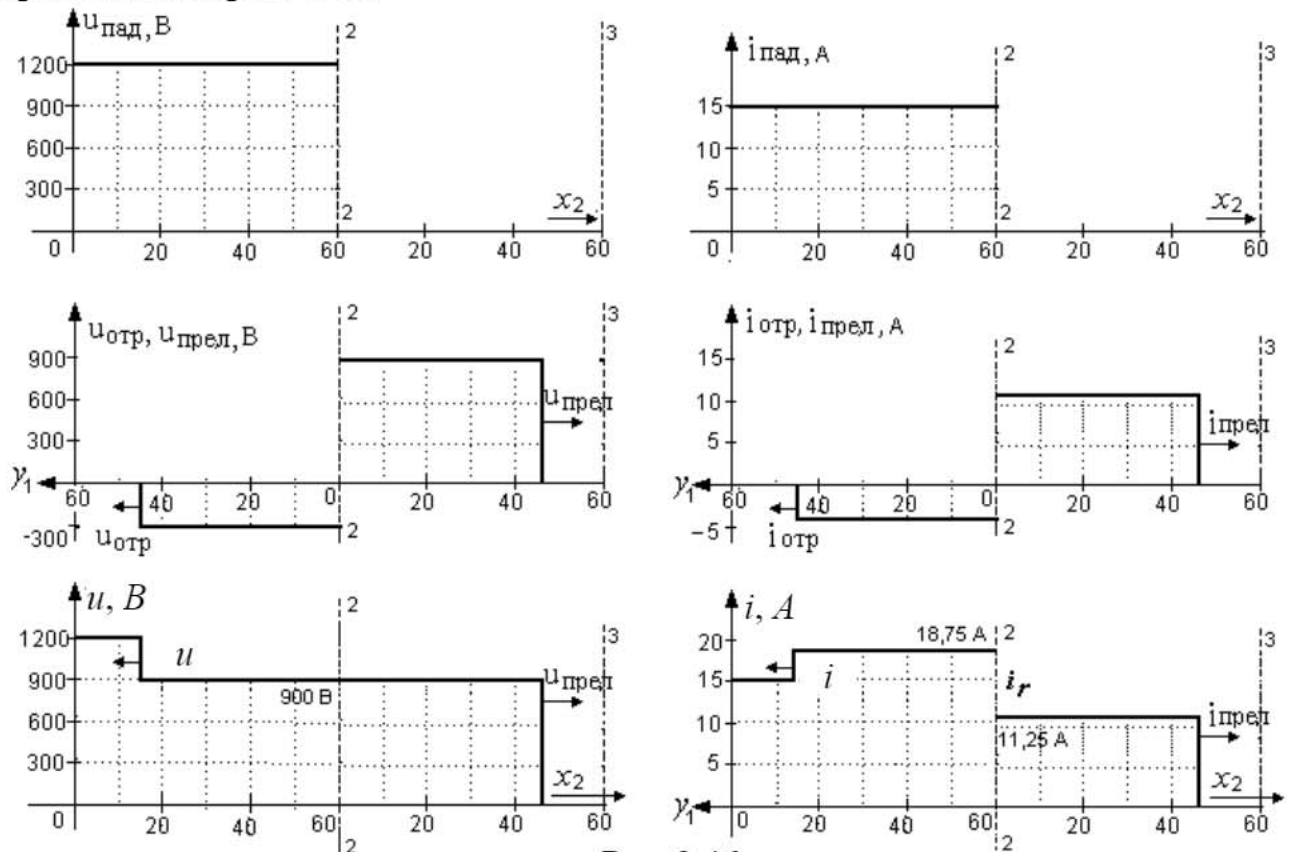


Рис. 8.46

Расчёт отражённой волны в **случаях б) и в)** ввиду наличия реактивного элемента выполняется с использованием коэффициента отражения в операторной форме.

$$\text{В случае б): } I_{nao}(p) = \frac{15}{p}; \quad Z(p) = \frac{pL \cdot Z_C}{pL + Z_C}; \quad n(p) = \frac{Z(p) - Z_C}{Z(p) + Z_C} = \frac{-8000}{p + 8000};$$

$$I_{omp}(p) = n(p) \cdot I_{nao}(p) = \frac{-1,2 \cdot 10^5}{p(p + 8000)}; \quad i_{omp}(t) = -15 + 15e^{-8000t} \text{ А},$$

$$\begin{aligned}
i_{omp}(t; y_1) &= -15 + 15 \exp[-8 \cdot (0,3 - y_1/150)] \text{ A}, & y_1 \leq v_1 \cdot t_{\phi} = 45 \text{ км}, \\
u_{omp}(t; y_1) &= Z_C \cdot i_{omp}(t; y_1) = -1,2 + 1,2 \exp[-8 \cdot (0,3 - y_1/150)] \text{ кВ}; \\
u_{22}(t) &= u_{nad}(t) + u_{omp}(t) = 1,2 e^{-8000t} \text{ кВ}, & i_{22}(t) &= i_{nad}(t) - i_{omp}(t) = 30 - 15 e^{-8000t} \text{ A}; \\
u_{nрел}(t; x_2) &= 1,2 \exp[-8 \cdot (0,3 - x_2/150)] \text{ кВ}, \\
i_{nрел}(t; x_2) &= 15 \exp[-8 \cdot (0,3 - x_2/150)] \text{ A}, & x_2 \leq v_2 \cdot t_{\phi} &= 45 \text{ км}.
\end{aligned}$$

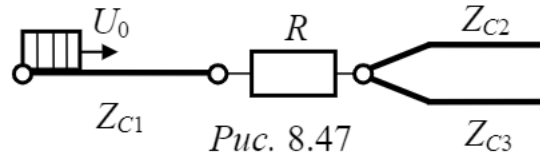
В случае в): $I_{nad}(p) = \frac{15}{p}$; $Z(p) = \frac{1/pC \cdot Z_C}{1/pC + Z_C}$; $n(p) = \frac{Z(p) - Z_C}{Z(p) + Z_C} = \frac{-p}{p + 4000}$;

$$I_{omp}(p) = n(p) \cdot I_{nad}(p) = \frac{-15}{p + 4000}; \quad i_{omp}(t) = -15 e^{-4000t} \text{ A},$$

$$\begin{aligned}
i_{omp}(t; y_1) &= -15 \exp[-4 \cdot (0,3 - y_1/150)] \text{ A}, & y_1 \leq v_1 \cdot t_{\phi} &= 45 \text{ км}, \\
u_{omp}(t; y_1) &= Z_C \cdot i_{omp}(t; y_1) = -1,2 \exp[-4 \cdot (0,3 - y_1/150)] \text{ кВ}; \\
u_{22}(t) &= u_{nad}(t) + u_{omp}(t) = 1,2 - 1,2 e^{-4000t} \text{ кВ}, & i_{22}(t) &= i_{nad}(t) - i_{omp}(t) = 15 + 15 e^{-4000t} \text{ A}; \\
u_{nрел}(t; x_2) &= 1,2 - 1,2 \exp[-4 \cdot (0,3 - x_2/150)] \text{ кВ}, \\
i_{nрел}(t; x_2) &= 15 - 15 \exp[-4 \cdot (0,3 - x_2/150)] \text{ A}, & x_2 \leq v_2 \cdot t_{\phi} &= 45 \text{ км}.
\end{aligned}$$

Попутно отметим, что задача в случаях б) или в) может быть решена и по схеме замещения аналогично задачам 8.45 – 8.49.

ЗАДАЧА 8.51. По первой линии с волновым сопротивлением $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_{C3} = 2R$ распространяется волна с прямоугольным фронтом $U_0 = 120 \text{ В}$, переходя затем через резистор R в две другие такие же линии. На рис. 8.47 все три линии даны в однолинейном изображении. Требуется:



- определить напряжение u_{omp1} отражённой волны в первой линии, а также напряжения $u_{nрел2}$ и $u_{nрел3}$ во второй и третьей линиях;
- выполнить расчёт при тех же параметрах, если волна распространяется по третьей линии.

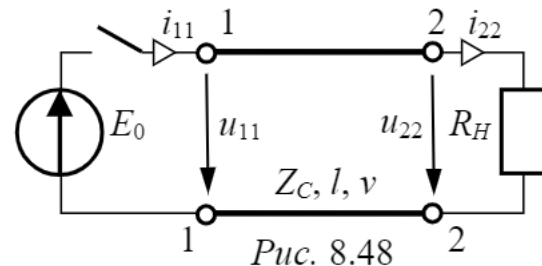
Методическое указание. Для наглядности расчётов рекомендуется линии представить в обычном двухпроводном изображении.

Ответы: 1) $u_{omp1} = 0$, $u_{nрел2} = u_{nрел3} = 60 \text{ В}$;

2) $u_{omp3} = -30 \text{ В}$, $u_{nрел2} = 90 \text{ В}$, $u_{nрел1} = 60 \text{ В}$.

8.2.5. Многократные отражения волн в линии

ЗАДАЧА 8.52. Воздушная линия без потерь (рис. 8.48) длиной l и волновым сопротивлением Z_C подключается к идеальному источнику ЭДС E_0 . Рассчитать переходный процесс и построить графики напряжения и тока u_{11} , i_{11} на входе и u_{22} , i_{22} – в конце линии для двух случаев: $R_H = 4Z_C$ и $R_H = Z_C/3$.



1. Сопротивление нагрузки больше волнового сопротивления линии $R_H = 4Z_C$.

Выполним некоторые подготовительные расчёты:

$$n_1 = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1, \quad n_2 = \frac{4Z_C - Z_C}{4Z_C + Z_C} = +0,6.$$

$$u_{ycm} = E_0, \quad i_{ycm} = E_0/(4Z_C) = 0,25I_0, \quad u_{1nad} = E_0, \quad i_{1nad} = E_0/Z_C = I_0.$$

Дальнейшие расчёты сводим в табл. 8.4, по которой строим графики (рис. 8.49).

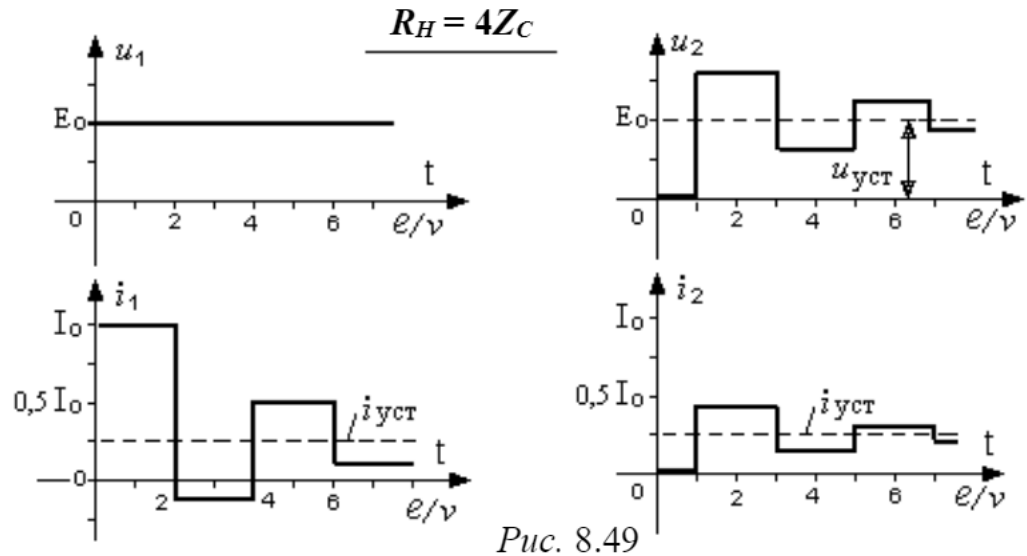


Таблица 8.4

№ п\п	Промежуток времени	u_{11}	i_{11}	Волна в линии	u_{22}	i_{22}
1	$0 \div 1l/v$	E_0	I_0	$u_{1nad} = E_0 \rightarrow$	0	0
2	$1 \div 2l/v$	E_0	I_0	$\leftarrow u_{1omp} = 0,6E_0$	$1,6E_0$	$0,4I_0$
3	$2 \div 3l/v$	E_0	$-0,2I_0$	$u_{2nad} = -0,6E_0 \rightarrow$	$1,6E_0$	$0,4I_0$
4	$3 \div 4l/v$	E_0	$-0,2I_0$	$\leftarrow u_{2omp} = -0,36E_0$	$0,64E_0$	$0,16I_0$
5	$4 \div 5l/v$	E_0	$0,52I_0$	$u_{3nad} = +0,36E_0 \rightarrow$	$0,64E_0$	$0,16I_0$
6	$5 \div 6l/v$	E_0	$0,52I_0$	$\leftarrow u_{3omp} = 0,216E_0$	$1,22E_0$	$0,304I_0$
7	$6 \div 7l/v$	E_0	$0,09I_0$	$u_{4nad} = -0,216E_0 \rightarrow$	$1,22E_0$	$0,304I_0$
15-й пробег				$u_{8nad} = [-0,6]^7 \cdot u_{1nad} = -0,028E_0 = 2,8\%u_{ycm}$		
17-й пробег				$u_{9nad} = [-0,6]^8 \cdot u_{1nad} = +0,0168E_0 = 1,68\%u_{ycm}$		

Из табл. 8.4 и графиков рис. 8.49 следует, что переходный процесс имеет колебательный характер, поскольку коэффициенты отражения в начале и конце линии ($n_1 = -1$ и $n_2 = +0,6$) являются разного знака. В данном случае ПП длится 14-15 пробегов волны, т.е. $t_{nn} = 15t_{пробега}$.

2. Сопротивление нагрузки меньше волнового сопротивления линии $R_H = Z_C/3$.

Выполним аналогичные подготовительные расчёты:

$$u_{ycm} = E_0, \quad i_{ycm} = E_0/(0,33Z_C) = 3I_0, \quad u_{1nad} = E_0, \quad i_{1nad} = E_0/Z_C = I_0,$$

$$n_1 = \frac{0 - Z_C}{0 + Z_C} = -1, \quad n_2 = \frac{0,33Z_C - Z_C}{0,33Z_C + Z_C} = -0,5.$$

Дальнейшие расчёты сводим в табл. 8.5, по которой строим графики (рис. 8.50).

Таблица 8.5

№ п\п	Промежу- ток времени	u_{11}	i_{11}	Волна в линии	u_{22}	i_{22}
1	$0 \div 1l/v$	E_0	I_0	$u_{1nad} = E_0 \rightarrow$	0	0
2	$1 \div 2l/v$	E_0	I_0	$\leftarrow u_{1omp} = -0,5E_0$	$0,5E_0$	$1,5I_0$
3	$2 \div 3l/v$	E_0	$2I_0$	$u_{2nad} = +0,5E_0 \rightarrow$	$0,5E_0$	$1,5I_0$
4	$3 \div 4l/v$	E_0	$2I_0$	$\leftarrow u_{2omp} = -0,25E_0$	$0,75E_0$	$2,25I_0$
5	$4 \div 5l/v$	E_0	$2,5I_0$	$u_{3nad} = +0,25E_0 \rightarrow$	$0,75E_0$	$2,25I_0$
6	$5 \div 6l/v$	E_0	$2,5I_0$	$\leftarrow u_{3omp} = -0,125E_0$	$0,875E_0$	$2,625I_0$
7	$6 \div 7l/v$	E_0	$2,75I_0$	$u_{4nad} = +0,125E_0 \rightarrow$	$0,875E_0$	$2,625I_0$
11-й пробег				$u_{6nad} = [n_1 \cdot n_2]^5 \cdot u_{1nad} = 0,031E_0 = 3,13\% u_{vcm}$		
12-й пробег				$u_{6omp} = n_2 \cdot [n_1 \cdot n_2]^8 \cdot u_{1nad} = 1,56\% u_{vcm}$		

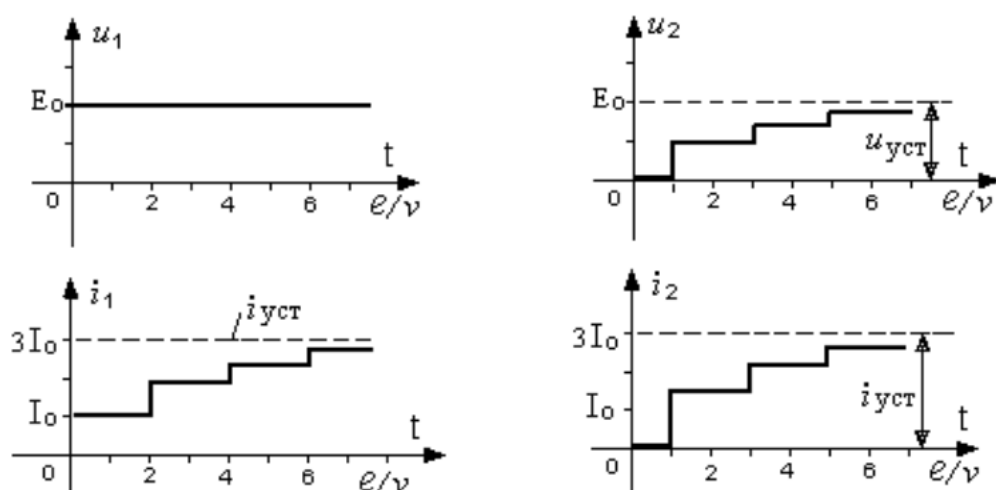


Рис. 8.50

В случае, если коэффициенты отражения ($n_1 = -1$ и $n_2 = -0,5$) одного знака, переходный процесс имеет аperiodический характер. В данном случае он длится 11-12 пробегов волны, т.е. $t_{nn} = 12t_{пробега}$.

ЗАДАЧА 8.53. Воздушная линия без потерь длиной l и волновым сопротивлением Z_C подключается к идеальному источнику E_0 (рис. 8.48). Рассчитать переходный процесс и построить графики напряжения и тока u_{11} , i_{11} на входе и u_{22} , i_{22} – в конце линии для двух случаев: $R_H = \infty$ и $R_H = 0,05Z_C$.

Ответы: - при $R_H = \infty$ в течение 4 пробегов в линии устанавливаются незатухающие колебания прямоугольной формы, амплитуда которых равна

$2E_0$, а частота зависит от параметров линии: $T = 4\frac{l}{v}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{4l} = \frac{1}{4l\sqrt{L_0C_0}}$.

- при $R_H = 0,05Z_C$ в линии, по сути, имеет место режим короткого замыкания. Ток в линии апериодически, скачками, равными $2I_0$, растет до бесконечности, в нашем случае – до величины $I_{KЗ} = E_0/0,05Z_C$.

ЗАДАЧА 8.54. Воздушная линия ($l = 300$ км, $Z_C = 200$ Ом), присоединённая к генератору ($E = 100$ кВ, $r_0 = 50$ Ом), длительно работала на нагрузку $R_1 = 950$ Ом. Нагрузка изменяется за счёт параллельного подключения к резистору R_1 сопротивления $R_2 = 111,8$ Ом. Построить графики изменения во времени тока и напряжения в сечении *A-A* посередине линии.

Решение

Для наглядности выполним рисунок исходной схемы и составим расчётную схему для определения параметров возникающей обратной волны (рис. 8.51, а и б).

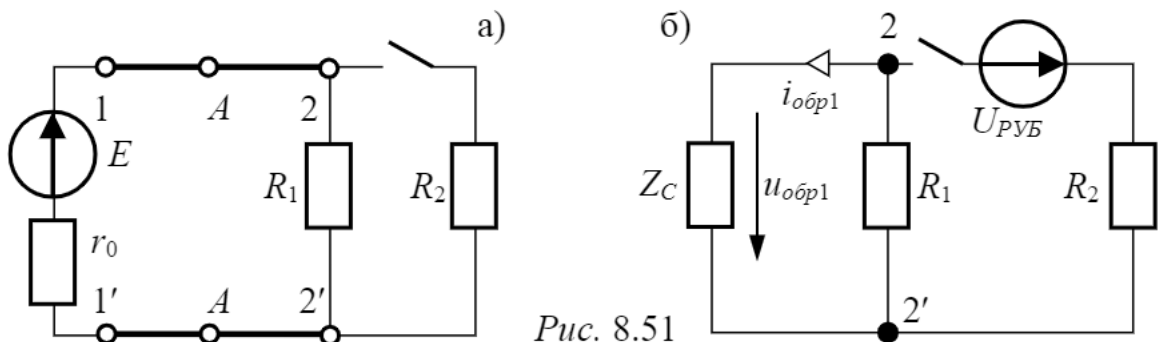


Рис. 8.51

Ток и напряжение вдоль линии до коммутации, а также напряжение на рубильнике в момент коммутации:

$$I(t.) = \frac{E}{r_0 + R_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{50 + 950} = 100 \text{ А}, \quad U(t.) = U_{ПУБ} = R_1 \cdot I(t.) = 950 \cdot 0,1 = 95 \text{ кВ}.$$

Рассчитаем установившийся режим в линии после коммутации:

$$I_{уст} = \frac{E}{r_0 + R_H} = \frac{100 \cdot 10^3}{50 + 100} = 666,7 \text{ А}, \quad U_{уст} = R_H \cdot I_{уст} = 100 \cdot 0,6667 = 66,67 \text{ кВ}.$$

Выполним вспомогательные вычисления:

- сопротивление нагрузки после коммутации

$$R_H = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{950 \cdot 111,8}{950 + 111,8} = 100 \text{ Ом};$$

- коэффициенты отражения в начале и конце линии:

$$K_1 = \frac{r_0 - Z_C}{r_0 + Z_C} = \frac{50 - 200}{50 + 200} = -0,6; \quad K_2 = \frac{R_H - Z_C}{R_H + Z_C} = \frac{100 - 200}{100 + 200} = -0,333;$$

- длительность пробега волны $t_{ПР} = \frac{l}{v} = \frac{300}{3 \cdot 10^5} \text{ с} = 1 \text{ мс};$

- 5% величины от установившихся значений напряжения и тока в линии:

$$5\% I_{уст} = 33,3 \text{ А}, \quad 5\% U_{уст} = 3,33 \text{ кВ}.$$

Расчёт первой обратной волны выполняем по схеме рис. 8.51,б:

$$i_{обp1} = \frac{-U_{ПВБ}}{R_2 + \frac{R_1 Z_C}{R_1 + Z_C}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + Z_C} = \frac{-95 \cdot 10^3}{111,8 + \frac{950 \cdot 200}{950 + 200}} \cdot \frac{950}{950 + 200} = -283,3 \text{ A},$$

$$u_{обp1} = Z_C \cdot i_{обp1} = 200 \cdot (-0,2833) = -56,67 \text{ кВ}.$$

Напряжение и ток последующих возникающих прямых и обратных волн рассчитываем по формулам: $i_{npq} = K_1 \cdot i_{обp q}$; $u_{npq} = K_1 \cdot u_{обp q}$;

$$i_{обp q+1} = K_2 \cdot i_{np q}; \quad u_{обp q+1} = K_2 \cdot u_{np q}.$$

Расчёт выполняем до тех пор, пока напряжение и ток новых возникающих волн не станут меньше 5% установившихся значений. Результирующие значения напряжения и тока в сечении А-А вычисляем по формулам:

$$u = U(t.) + \Sigma u_{обp} + \Sigma u_{np}; \quad i = I(t.) - \Sigma i_{обp} + \Sigma i_{np}.$$

Расчёты рекомендуется выполнять в виде табл. 8.6.

Таблица 8.6

№ про- бега	Интервал времени, мс	Параметры возникающих волн, А и кВ	Ток в сечении А-А $i_{рез}$, А	Напряжение в сечении А-А $u_{рез}$, кВ
1	0÷0,5	$i_{обp1} = -283,3$; $u_{обp1} = -56,67$	100	95
1-2	0,5÷1,5	$i_{np1} = 170$; $u_{np1} = 34$	383,3	38,33
2-3	1,5÷2,5	$i_{обp2} = -56,67$; $u_{обp2} = -11,33$	553,3	72,33
3-4	2,5÷3,5	$i_{np2} = 34$; $u_{np2} = 6,8$	610	61
4-5	3,5÷4,5	$i_{обp3} = -11,33$; $u_{обp3} = -2,27$	644	67,8
5-6	4,5÷5,5		655,3	65,53

По результатам табл. 8.6 строим графики $u(t)$, $i(t)$ (рис. 8.52).

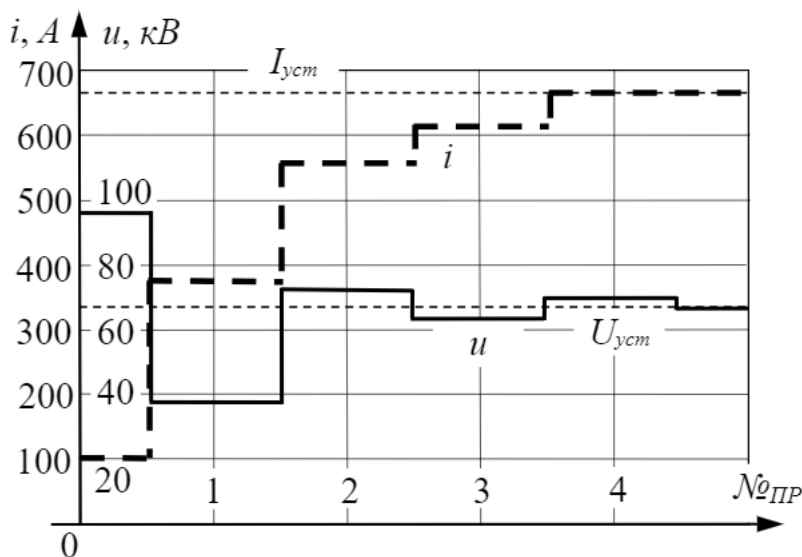


Рис. 8.52

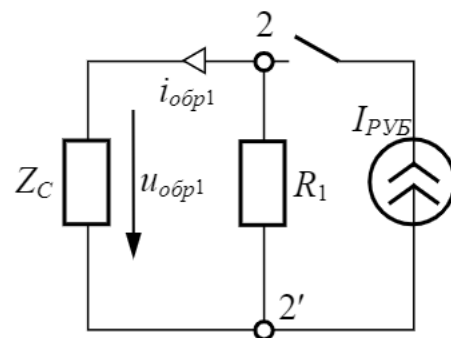


Рис. 8.53

ЗАДАЧА 8.55. Решить задачу 8.54 при условии размыкающегося рубильника и следующих числовых данных: $l = 3 \text{ км}$, $Z_C = 20 \text{ Ом}$, $v = 1,5 \cdot 10^5 \text{ км/с}$, $E = 6 \text{ кВ}$, $r_0 = 2 \text{ Ом}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Ответы: $I(t.) = 600 \text{ A}$, $U(t.) = 4,8 \text{ кВ}$,
 $I_{PYB} = 480 \text{ A}$; $I_{ycm} = 142,9 \text{ A}$, $U_{ycm} = 5716 \text{ В}$;
 $K_1 = -0,818$, $K_2 = 0,333$; схема для расчёта первой обратной волны на
 рис. 8.53;

значения токов и напряжений возникающих обратных и прямых волн:
 $i_{обр} = 320; -87,3; 23,8; -6,5 \text{ A}$; $u_{обр} = Z_C \cdot i_{обр} = 6400; -1746; 476; -130 \text{ В}$;
 $i_{пр} = -262; 71,3; -19,5 \text{ A}$; $u_{пр} = Z_C \cdot i_{пр} = -5240; 3426; -390 \text{ В}$;
 последовательность значений, которые принимают ток и напряжение в сече-
 нии А-А: $i_{А-А} = 600; 280; 18; 105,3; 176,6; 152,8; 133,3; 139,8 \text{ A}$;
 $u_{А-А} = 4800; 11200; 5960; 4214; 5640; 6116; 5726; 5596 \text{ В}$.

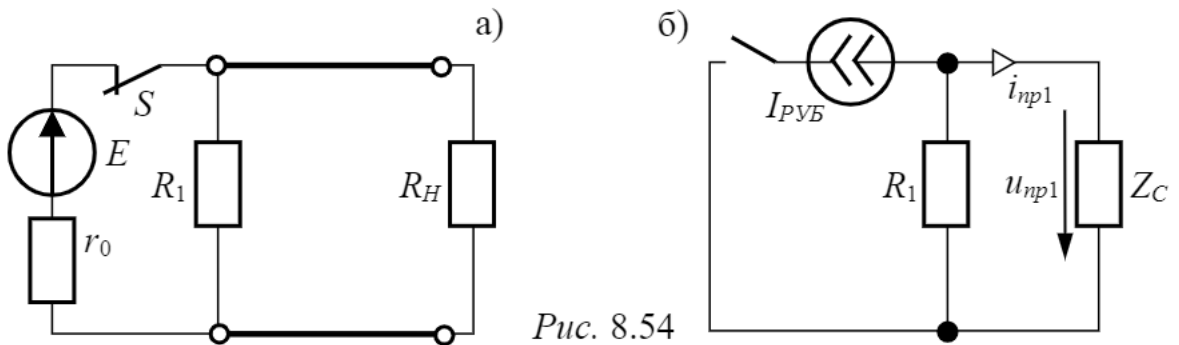


Рис. 8.54

ЗАДАЧА 8.56. Схема подключения нагрузки и линии к источнику
 представлена на рис. 8.54,а. Коммутация осуществляется размыканием
 рубильника S . Числовые данные: $l = 75 \text{ км}$, $Z_C = 110 \text{ Ом}$, $v = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$,
 $E = 110 \text{ кВ}$, $r_0 = 6,111 \text{ Ом}$, $R_1 = 440 \text{ Ом}$, $R_H = 55 \text{ Ом}$.

Построить графики изменения во времени тока в начале и напряжения
 в конце линии.

Ответы: $I_{PYB} = 2 \text{ кА}$, $I(t.) = 1,778 \text{ кА}$, $U(t.) = 97,78 \text{ кВ}$; $I_{ycm} = 0$, $U_{ycm} = 0$;
 $K_1 = 0,6$, $K_2 = -0,333$; схема для расчёта первой прямой волны на рис. 8.53,б;

значения токов и напряжений возникающих прямых и обратных волн:

$i_{пр} = -1,6; 0,32; -0,064 \text{ кА}$; $u_{пр} = -176; 35,2; -7,04 \text{ кВ}$;

$i_{обр} = 0,533; -0,107 \text{ кА}$; $u_{обр} = 58,7; -11,73 \text{ кВ}$;

последовательность результирующих значений тока и напряжения:

$i = 0,178; -0,035; 0,008 \text{ кА}$; $u = 97,78; -19,52; 3,95; -3,09 \text{ кВ}$;

графики представлены на рис. 8.55.

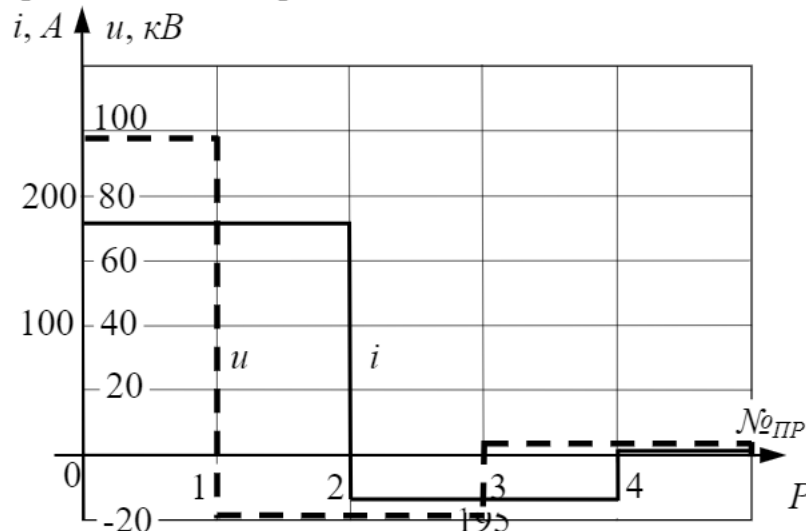


Рис. 8.55

