МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________2013 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ ИКОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 3)

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
200100 «Приборостроение»
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»
140400 «Электроэнергетика и электротехника»

Составители **Л.И. Терехина, И.И. Фикс**

Семестр	**4**
Кредиты	4
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	10
Индивидуальные задания	4
Самостоятельная работа, часов	126
Формы контроля	экзамен

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 517

Дифференциальные уравнения. Ряды и комплексный анализ (Дифференциальные уравнения, Математический анализ 3): метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 200100 «Приборостроение»; 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»; 140400 «Электроэнергетика и электротехника» / сост. Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 98 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ФТИ «____» ________ 2013 года, протокол № ___.

Зав. кафедрой ВММВ,
доктор физ.-мат. наук, профессор ____________А.Ю. Трифонов

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Дифференциальные уравнения. Ряды и комплексный анализ (Дифференциальные уравнения, Математический анализ 3)» предназначены для студентов технических специальностей ИДО. Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Дифференциальные уравнения. Ряды и комплексный анализ (Дифференциальные уравнения, Математический анализ 3)» изучается во втором семестре второго курса студентами всех технических специальностей ИДО. Задачами дисциплины являются:

- развитие математической интуиции;
- воспитание математической культуры;
- формирование навыков, необходимых для использования математических знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- овладение студентами необходимым математическим аппаратом, дающим возможность анализировать, моделировать и решать технические задачи;
- воспитание у студентов отношения к математике как к инструменту исследования и решения технических задач, необходимому в их дальнейшей работе.

В результате изучения дисциплины студент должен *знать* основные понятия дифференциального и интегрального исчислений (предел, производная, дифференциал, неопределенный и определенный интегралы и их применение к решению прикладных задач); *уметь* применять изученные методы для решения профессиональных задач, устанавливать границы применимости методов, уметь анализировать найденные решения; *владеть* навыками применения современного математического инструментария для решения технических задач, методиками построения, анализа и применения математических моделей; *иметь опыт* применения математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов исследования, аналитического и численного решения задач.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения. Ряды и комплексный анализ (Дифференциальные уравнения, Математический анализ 3)» является базовой дисциплиной естественно-научного цикла. Для её успешного усвоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования, а именно, необходимо свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения, строить графики основных элементарных функций, находить области определения элементарных функций, оперировать с логарифмами.

Пререквизитами данной дисциплины являются «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление». Кореквизиты – «Информатика».

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Дифференциальные уравнения и системы

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие дифференциального уравнения 1-го порядка, его общего и частных решений. Некоторые типы уравнений, допускающие аналитическое решение (уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные уравнения и уравнения типа Бернулли, уравнения в полных дифференциалах).

Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Понятие дифференциального уравнения 2-го порядка, его общего и частных решений. Уравнения, допускающие понижение порядка. Интегрирование линейных однородных и неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Методы вариации и неопределённых коэффициентов.

Системы дифференциальных уравнений

Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений. Методы решения систем. Метод исключения, метод Эйлера (метод характеристического уравнения). Механический смысл системы и её решений. Фазовая плоскость и фазовые траектории. Устойчивость и асимптотическая устойчивость фазовых траекторий.

Рекомендуемая литература: [1, глава 13], [3, глава 4], [4, глава 3].

Методические указания

Необходимо освоить основные методы решения основных типов дифференциальных уравнений 1-го и высших порядков, и систем дифференциальных уравнений.

Тема 2. Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье

Числовые ряды

Понятие числового ряда. Сумма ряда. Признаки сходимости знакопостоянных и знакочередующихся числовых рядов. Оценка суммы ряда.

Степенные ряды

Понятие функционального ряда, интервал сходимости. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в ряды Тейлора. Использование рядов Тейлора в приближенных вычислениях.

Ряды Фурье

Понятие тригонометрического ряда. Разложение элементарных функций в ряды Фурье. Ряды Фурье четных и нечетных функций.

Рекомендуемая литература: [1, глава 14; глава 17], [3, глава 3], [4, глава 3].

Методические указания

Необходимо научиться исследовать на сходимость числовые знакоположительные и знакочередующиеся ряды с помощью достаточных признаков сходимости, находить интервалы сходимости степенных рядов, строить разложения функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена, применять ряды для приближенных вычислений, раскладывать функции в тригонометрические ряды Фурье.

Тема 3. Комплексные числа и функции

Комплексные числа

Понятие комплексного числа. Алгебраическая, показательная, геометрическая и тригонометрическая формы представления комплексного числа. Действия над комплексными числами.

Функции комплексной переменной

Линии на комплексной плоскости. Понятие элементарных функций комплексного переменного. Формулы Эйлера. Преобразование функций, решение простейших алгебраических и трансцендентных уравнений на комплексной плоскости. Дифференцирование и интегрирование функции на комплексной плоскости.

Рекомендуемая литература: [1, с. 240–270], [3, глава 7], [5, глава 3].

Методические указания

Необходимо научиться выполнять действия с комплексными числами в различных формах записи, находить значения функций комплексного переменного, строить линии и области на комплексной плоскости, дифференцировать и интегрировать функции комплексного переменного.

Тема 4. Операционный метод

Оригинал и его изображение

Понятие о преобразовании Лапласа и его свойства. Оригинал и его изображение. Нахождение изображений непрерывных и кусочно-непрерывных оригиналов. Восстановление оригинала по известному его изображению.

Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Нахождение частных решений линейных дифференциальных уравнений и систем операционным методом. Формула Дюамеля.

Рекомендуемая литература: [3, глава 8], [5, глава 4].

Методические указания

Необходимо научиться находить оригиналы и изображения, используя основные свойства и приемы операционного исчисления, решать линейные дифференциальные уравнения операционным методом.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка (2 часа).
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Системы дифференциальных уравнений (2 часа).
3. Числовые ряды. Признаки сходимости знакоположительных и знакочередующихся рядов (2 часа).
4. Функциональные и степенные ряды. Нахождение интервалов сходимости (2 часа).
5. Разложение функций в ряды Тейлора, Маклорена (2 часа).
6. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье (2 часа).
7. Комплексные числа. Действия над комплексными числами в различных формах представения. Функции комплексного переменного (2 часа).
8. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного (2 часа).
9. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Операционный метод. Основные свойства метода. Нахождение оригиналов и изображений (2 часа).
10. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем операционным методом (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком для студентов ИДО предусмотрено выполнение четырех индивидуальных домашних заданий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Номера индивидуальных заданий соответствуют темам раздела «Содержание теоретического раздела дисциплины».

Номер варианта индивидуального задания определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки З-3В11/24, то номер варианта задания равен 4. Если номер зачетной книжки оканчивается на 0 (например, З-3В11/30), то номер варианта задания равен 10.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, в обязательном порядке получают рецензию на каждое индивидуальное задание. Правильно выполненные работы студенту не возвращаются.

При оформлении индивидуального домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования:

1. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно (в отдельной тетради для студентов КЗФ и в отдельном файле для студентов ДОТ).
2. Индивидуальное задание должно иметь титульный лист, оформленный в соответствии со стандартами ТПУ. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр. Образец оформления и шаблон титульного листа размещен на сайте ИДО (http://portal.tpu.ru/ido-tpu) в разделе СТУДЕНТУ → ДОКУМЕНТЫ.
3. Индивидуальное задание должно содержать условия и исходные данные в соответствии с вариантом.
4. Решение должно быть подробным, с включением промежуточных расчётов и указанием использованных формул.
5. Страницы задания должны иметь сквозную нумерацию.
6. В задание обязательно включается список использованной литературы.
7. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.

8. Студент, не получивший положительной аттестации по всем индивидуальным заданиям, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2. Варианты индивидуального задания №1 «Дифференциальные уравнения и системы»

Вариант № 1

1. Найти общее решение уравнения:

1) $y^2(1+x)dx + xdy = 0;$ 2) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sin(y/x)};$

3) $y' + y\cos x = \cos x;$ 4) $y' + y = x\sqrt{y}.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $xy\,y' - \sqrt{y^2+1} = 0,$ $y(1) = 1;$

2) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0,$ $y(1) = 1;$

3) $\left(3x^2\cdot \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0,$ $y(1) = 0.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 4y' + 3y = (5x-2)\cdot e^{-3x};$

2) $y'' - 8y' + 16y = x^2 + 2x - 7;$

3) $y'' + 4y = 2\sin x.$

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y. \end{cases}$

Вариант № 2

1. Найти общее решение уравнения:

1) $x(1+y^2)dy - ydx = 0;$ 2) $xy' - y = x \cdot \cos^2(y/x);$

3) $y' - 2xy = 2xe^{x^2};$ 4) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $(x^2+1)y' - x(y-1) = 0,$ $y(1) = 2;$

2) $x^2 \cdot y' + xy + 1 = 0,$ $y(1) = 0;$

3) $(3y^3 \cos 3x + 9x)\, dx + (3y^2 \sin 3x - 5y^2)\, dy = 0,$ $y(0) = 1.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' - 2y' = (2x+3) \cdot e^{-x};$

2) $y'' + 7y' = 3x - 2x^2;$

3) $y'' + y = 2\cos 2x.$

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$

Вариант № 3

1. Найти общее решение уравнения:

1) $y \sin x\, dx - \cos^3 x\, dy = 0;$ 2 $x \cdot y' \cdot \ln\dfrac{y}{x} = x + y \cdot \ln\dfrac{y}{x};$

3) $y' - \dfrac{y}{x} = 4x^4;$ 4) $y' - 2y = xy^2.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y(1+x^2)y' + x(1-y^2) = 0,$ $\quad y(0) = 2;$

2) $xy' = x + 4y,$ $\quad y(1) = 1;$

3) $\left(2x \cdot e^{x^2+y^2} + 5x\right)dx + \left(2y \cdot e^{x^2+y^2} - 3y^2\right)dy = 0,$ $\quad y(0) = 1.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 3y' = -5x \cdot e^{-3x};$

2) $y'' + 10y' + 25y = 3x^2 - 2x + 4;$

3) $y'' + 3y = 2\sin x.$

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases}$ $\quad$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

Вариант № 4

1. Найти общее решение уравнения:

1) $\sin x\, dy - y\ln y\, dx = 0;$ $\quad$ 2) $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0;$

3) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x-1};$ $\quad$ 4) $y' + y = x\sqrt{y}.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y' = (2x-1)\cdot \mathrm{tg}\, y,$ $\quad y(0) = \pi/4;$

2) $(x-y)y - x^2y' = 0,$ $\quad y(1) = 1;$

3) $(e^x \cdot \cos y + e^y \cdot \cos x)\,dx + (e^y \cdot \sin x - e^x \cdot \sin y)\,dy = 0,$ $\quad y(0) = 0.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y''+4y'-5y=-7x\cdot e^{x}$;

2) $y''+2y'-15y=x^2+3x-4$;

3) $y''+9y=2\cos 4x-3\sin 4x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+5y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x+5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-5x+4y. \end{cases}$

Вариант № 5

1. Найти общее решение уравнения:

1) $(1+e^{x})y\,dy-e^{x}dx=0$; 2) $(y^2-2xy)\,dx+x^2dy=0$;

3) $xy'+y+xe^{-x^2}=0$; 4) $y'+2y=y^2e^{x}$.

2. Найти частное решение уравнения:

1) $\ln y\; y'=e^{2x}$, $y(0)=1$;

2) $2\sqrt{xy}-y+x\,y'=0$, $y(1)=4$;

3) $\left(\ln y+\dfrac{y}{x}-2x\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+\ln x+3y\right)dy=0$, $y(1)=1$.

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y''-2y'-8y=5x\cdot e^{4x}$;

2) $y''-6y'+10y=-x^2+2x$;

3) $y''+8y'+16y=\cos 2x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 5y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$$

Вариант № 6

1. Найти общее решение уравнения:

1) $(y^2+3)\,dx - \dfrac{e^x}{x}\,y\,dy = 0;$ 2) $xy' - y = x\cdot \mathrm{tg}^2\,(y/x);$

3) $xy' + y = \sin x;$ 4) $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y' = (2y+1)\,\mathrm{tg}\,x,$ $y(0) = 0;$

2) $x^2y' = y(x+y),$ $y(1) = 1;$

3) $(2x+2y-\cos y)\,dx + (2x+2y+x\cdot\sin y)\,dy = 0,$ $y(1) = 0.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + y' = e^{-x}\cdot(2x+1);$

2) $y'' - 14y' + 49y = 4x^2 + 5x - 1;$

3) $y'' + 25y = -2\sin 4x.$

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$$

Вариант № 7

1. Найти общее решение уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x\, dy + y = 3$; 2) $x\, y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

3) $(x+2)y' - y = x + 2$; 4) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0,$ $y(0) = \pi / 4$;

2) $xy\, y' = x^2 + y^2,$ $y(1) = 1$;

3) $(2x \cdot e^y + y^2 \cdot e^x)\, dx + (x^2 \cdot e^y + 2y \cdot e^x)\, dy = 0,$ $y(0) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' - y' = (2x - 3) \cdot e^x$;

2) $y'' + 6y' + 25y = 1 - x^2$;

3) $y'' + 12y' + 36y = \sin 2x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 13y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант № 8

1. Найти общее решение уравнения:

1) $(x+4)\, dy - xy\, dx = 0$; 2) $x\, y' + x + y = 0$;

3) $xy' + y = \ln x + 1$; 4) $y' + xy = x^3 y^3$.

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y' + y + y^2 = 0,\qquad y(0) = 2;$

2) $y^2 - 2xy + x^2 \cdot y' = 0,\qquad y(2) = 1;$

3) $(\sin y - y \cdot \sin x)\, dx + (x \cdot \cos y + \cos x)\, dy = 0,\quad y(0) = 1.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 4y' + 3y = 2x \cdot e^{-2x}$;

2) $y'' + 2y' + 50y = 5x^2 - x$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 3\sin 2x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 17y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Найти общее решение уравнения:

1) $(x^2 + x)\, dy + y^3 dx = 0;$ 2) $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)\, dy = 0;$

3) $(x^2 - 1)y' + xy = 1;$ 4) $x(x-1)y' - xy = -y^3.$

2. Найти частное решение уравнения:

1) $y' = 2xy + x,\qquad y(2) = 0;$

2) $(xy - y^2)\, y' + y^2 = 0,\qquad y(1) = 1;$

3) $y\, 5^{xy} \ln 5\, dx + (x\, 5^{xy} \ln 5 - 6y)\, dy = 0,\quad y(0) = 0.$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 3y' - 10y = (2x-1)\cdot e^{5x}$;

2) $y'' - 7y' = 5x - 1$;

3) $y'' + 6y' + 9y = -4\cos 2x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 3y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 17x - 5y. \end{cases}$

Вариант № 10

1. Найти общее решение уравнения:

1) $\sqrt{y^2+1}\,dx - xy\,dy = 0$; 2) $(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$;

3) $y' - 2xy - 2x^3$; 4) $y^2y' + y^3 = x$.

2. Найти частное решение уравнения:

1) $xy' - y = y^2$, $y(1) = 1$;

2) $xy' = y - x$, $y(2) = 2$;

3) $\left(\dfrac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \dfrac{1}{x-y}\right)dy = 0$, $y(2) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

1) $y'' + 16y' + 64y = x^2$;

2) $y'' + y' = 2x + e^x$;

3) $y'' - 10y' + 34y = 3\sin 5x$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x - 2y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 6y; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 29y, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$$

4.3. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1 «Дифференциальные уравнения и системы»

1. Найти общее решение уравнения

1) $\operatorname{ctg} y\, dx + (x-1)dy = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на произведение функций, стоящих коэффициентами не у своих дифференциалов, т.е. на $\operatorname{ctg} y(x-1)$ и проинтегрируем:

$$\frac{dx}{x-1} + \frac{dy}{ctg\ y} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{\sin y\, dy}{\cos y} = 0;$$

$$\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{d(\cos y)}{\cos y} = c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|x-1| - \ln|\cos y| = \ln c;$$

$$\ln|x-1| = \ln|\cos y| + \ln c.$$

Ответ: $x - 1 = c \cdot \cos y$.

Полученное решение в виде неявной зависимости y от x называют общим интегралом уравнения.

2) $x\,y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$ – однородное уравнение 1-го порядка. После деления на x уравнение примет вид:

$$y' = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}.$$

Делаем замену $\dfrac{y}{x} = t, \rightarrow\ y = tx, \rightarrow\ y' = t'x + t$. Получим уравнение:

$$t'x + t = \sqrt{1+t^2} + t \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} \cdot x = \sqrt{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dx}{x} \qquad \ln|t + \sqrt{1+t^2}| = \ln|x| + \ln c \qquad t + \sqrt{1+t^2} = cx.$$

Возвращаемся к старым переменным.

Ответ: $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=cx$.

3) $(x-4)y'-y=2x$ – линейное уравнение 1-го порядка. Деля уравнение на $(x-4)$, получим

$$y'-\frac{y}{x-4}=\frac{2x}{x-4}.$$

Делаем замену: $y=uv,\ \Rightarrow\ y'=u'v+uv'$. Подставим в уравнение:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x-4}=\frac{2x}{x-4},$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x-4}\right)=\frac{2x}{x-4}.$$

Выражение в круглых скобках приравниваем к нулю, находим функции u и v:

$$v'-\frac{v}{x-4}=0, \qquad u'\,v=\frac{2x}{x-4},$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x-4}, \qquad u'(x-4)=\frac{2x}{x-4},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x-4}, \qquad u=\int\frac{2x\,dx}{(x-4)^2}=2\int\frac{(x-4)+4}{(x-4)^2}\,dx,$$

$$\ln|v|=\ln|x-4|\to v=x-4, \qquad u=2\ln|x-4|-\frac{8}{x-4}+c.$$

Общее решение: $y=uv=(x-4)\left(2\ln|x-4|-\frac{8}{x-4}+c\right)$.

4) $y'+xy=-y^2e^{x^2/2}$ – это уравнение Бернулли. Решается оно по той же схеме, что и линейное.

Делаем замену: $y=uv,\ \Rightarrow\ y'=u'v+uv'$. Подставим в уравнение:

$$u'v+uv'+x\,u\,v=u^2v^2e^{x^2/2},$$

$$u'v+u(v'+xv)=u^2v^2e^{x^2/2}.$$

Выражение в круглых скобках приравниваем к нулю, находим функции u и v:

$$v' + xv = 0, \qquad u'\,v = u^2 v^2 e^{x^2/2},$$

$$\frac{dv}{dx} = -xv, \qquad u' e^{-x^2/2} = u^2 e^{-x^2} e^{x^2/2},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int x\,dx, \qquad \int \frac{du}{u^2} = \int dx,$$

$$\ln|v| = \frac{-x^2}{2} \to v = e^{-x^2/2}; \quad -\frac{1}{u} = x - c \ \Rightarrow u = \frac{1}{c-x}.$$

Общее решение: $y = uv = e^{-x^2/2} \cdot \dfrac{1}{c-x} = \dfrac{e^{-x^2/2}}{c-x}$.

2. Найти частное решение уравнения

1) $y' \cdot \sqrt{1+x^2} - \sin^2 y = 0, \qquad y(0) = \pi/4$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Заменим $y' = dy/dx$:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2} - \sin^2 y = 0.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$dy\sqrt{1+x^2} - \sin^2 y\,dx = 0$$

Разделим уравнение на произведение функций, которые стоят не у своих дифференциалов:

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow -\mathrm{ctg}\ y = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c.$$

Мы получили общее решение уравнения. Чтобы найти частное решение, воспользуемся начальным условием $y(0) = \pi/4$, т.е. подставим в общее решение $x = 0,\ y = \pi/4$:

$$-\mathrm{ctg}\,(\pi/4) = \ln|0|1| + c \Rightarrow c = -1.$$

Подставим найденное значение в общее решение.

Частное решение: $-\operatorname{ctg} y = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| - 1$.

2) $xy\,y' = x^2 - y^2, \qquad y(1) = 0.$

Данное уравнение является однородным. Разделим обе части уравнения на xy:

$$y' = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

Делаем замену: $\frac{y}{x} = t, \quad y = tx, \quad y' = t'x + t$. Подставим в уравнение:

$$t'x + t = \frac{1}{t} - t, \quad \frac{dt}{dx}x = \frac{1}{t} - 2t, \quad \frac{dt}{dx}x = \frac{1-2t^2}{t}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{t}{1-2t^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{t}{1-2t^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2t^2| = \ln|x| - \ln c, \qquad \sqrt[4]{1-2t^2} = \frac{c}{x} \qquad \sqrt[4]{1-2\frac{y^2}{x^2}} = \frac{c}{x}.$$

В полученное общее решение подставим начальное условие $y(1) = 0$: $\sqrt[4]{1-0} = c; \quad c = 1$.

Частное решение: $\sqrt[4]{1-2\frac{y^2}{x^2}} = x.$

3) $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0, \quad y(1) = 1.$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.к. выполняется критерий

$$\begin{cases} P'_y(x;y) = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy, \\ Q'_x(x;y) = (6x^2y + 4y^3)'_x = 12xy, \end{cases} \Rightarrow \quad P'_y(x;y) = Q'_x(x;y).$$

Выполнение критерия означает, что существует некая функция $U(x;y)$ для которой

$$\begin{cases} P(x;y) = 3x^2 + 6xy^2 = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ Q(x;y) = 6x^2 y + 4y^3 = \dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases}$$

Из первого равенства, интегрируя по x, находим

$$U_1(x;y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2 y^2,$$

из второго равенства, интегрируя по y, находим

$$U_2(x;y) = \int (6x^2 y + 4y^3)dy = 3x^2 y^2 + y^4.$$

Искомая функция $U(x;y) = U_1 +$(недостающие слагаемые из $U_2) = x^3 + 3x^2 y^2 + y^4$.

Общий интеграл уравнения $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = c$. Так как $y(1) = 1$, то $1 + 3 + 1 = c,\ c = 5$.

Частное решение: $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = 5$.

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1) $y'' + 6y' + 25y = 25x^2 - 3x$.

Решение однородного уравнения:

$$y'' + 6y' + 25y = 0, \quad k^2 + 6k + 25 = 0, \quad k_{12} = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm 4i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{y} = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

Частное решение по виду правой части ищем в виде:

$$y^* = Ax^2 + Bx + C.$$

Имеем $(y^*)' = 2Ax + B,\quad (y^*)'' = 2A$. Подставим в исходное уравнение:

$$2A + 6(2Ax + B) + 25(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 3x.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные:

$$25Ax^2 + (12A + 25B)x + (2A + 6B + 25C) = 25x^2 - 3x.$$

Уравниваем коэффициенты при подобных членах. Имеем систему:

$$\begin{cases} \text{при } x^2: 25A = 25 \\ \text{при } x^1: 12A + 25B = -3 \\ \text{при } x^0: 2A + 6B + 25C = 0 \end{cases} \qquad A = 1,\ B = -\frac{3}{5},\ C = \frac{8}{125}$$

$$\Rightarrow\ y^* = \left(x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{8}{125}\right).$$

Общее решение:

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-3x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) + \left(x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{8}{125}\right).$$

2) $y'' + 3y' - 10y = -4e^{2x}$.

Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \quad k^2 + 3k - 10 = 0, \quad k_1 = 2, k_2 = -5 \Rightarrow \bar{y} = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}.$$

Частное решение по виду правой части ищем в виде

$$y^* = Ae^{2x}\cdot x.$$

Домножение на x связано с совпадением одного из корней характеристического уравнения с коэффициентом в показателе степени числа e, $\alpha = 2 = k_1$.

Дифференцируем выражение для y^*:

$$(y^*)' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x} = Ae^{2x}(2x+1),$$
$$(y^*)'' = Ae^{2x}\cdot 2\cdot(2x+1) + Ae^{2x}\cdot 2 = Ae^{2x}(4x+4).$$

Подставим в исходное уравнение и сокращаем e^{2x}:

$$A(4x+4) + 3A(2x+1) - 10Ax = -4,$$
$$4Ax + 4A + 6Ax + 3A - 10Ax = -4,$$
$$7A = -4, \quad A = -4/7 \Rightarrow y^* = -\frac{4}{7}x\,e^{2x}.$$

Общее решение: $y = \bar{y} + y^* = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} - \frac{4}{7}xe^{2x}$.

3) $y'' + 12y' + 36y = -3\cos 2x$.

Решение однородного уравнения:

$$y''+12y'+36y=0, \qquad k^2+12k+36=0,$$
$$k_1=k_2=-6 \Rightarrow \bar{y}=e^{-6x}(c_1+c_2x).$$

Частное решение по виду правой части ищем в виде

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Имеем: $(y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x, \quad (y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$

Подставим в исходное уравнение:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+12(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+$$
$$+36(A\cos 2x+B\sin 2x)=-3\cos 2x;$$
$$\cos 2x(-4A+24B+36A)+\sin 2x(-4B-24A+36B)=-3\cos 2x;$$
$$\cos 2x(32A+24B)+\sin 2x(-24A+32B)=-3\cos 2x.$$

Уравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях уравнения, имеем:

$$\begin{cases} 32A+24B=-3, \\ -24A+32B=0, \end{cases} \quad A=\frac{32\,B}{24}=\frac{4}{3}B, \quad \frac{32\cdot 4}{3}B+24B=-3.$$

$$B=-\frac{9}{200}, \quad A=-\frac{12}{200} \quad \Rightarrow \quad y^*=-\frac{1}{200}(12\cos 2x+9\sin 2x).$$

Общее решение:

$$y=\bar{y}+y^*=e^{-6x}(c_1+c_2x)-\frac{1}{200}(12\cos 2x+9\sin 2x).$$

4) $y''+2y'=2x-e^{2x}$.

Решение однородного уравнения:

$$y''+2y'=0, \qquad k^2+2k=0, \quad k_1=0, \; k_2=-2 \Rightarrow \bar{y}=c_1+c_2e^{-2x}.$$

Частное решение по виду правой части ищем в виде:

$$y^*=(Ax+B)x+Ce^{2x}.$$

Умножение на x многочлена $(Ax+B)$ обусловлено совпадением числа 0 с одним из корней характеристического уравнения.

Имеем: $(y^*)'=2Ax+B+2Ce^{2x}, \quad (y^*)''=2A+4Ce^{2x}.$

Подставим в исходное уравнение:

$$2A + 4Ce^{2x} + 2(2Ax + B + 2Ce^{2x}) = 2x - e^{2x}$$

$$4Ax + 2B + 2A + 8Ce^{2x} = 2x - e^{2x}$$

$$\begin{cases} \text{при } \ x^1: \ 4A = 2, \\ \text{при } \ x^0: \ 2A + 2B = 0, \ \ A = \dfrac{1}{2}, \ B = -\dfrac{1}{2}, \ \ C = -\dfrac{1}{8} \Rightarrow \\ \text{при } \ e^{2x}: 8C = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ y^* = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Общее решение: $y = \bar{y} + y^* = c_1 + c_2e^{-2x} + \dfrac{x}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}e^{2x}$.

4. Найти решение линейной системы методом исключения.

$$1) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение системы по x:

$$x'' = 7x' - 3y'.$$

Подставим из 2-го уравнения системы $y' = x + 3y$, получим:

$$x'' = 7x' - 3(x + 3y), \quad x'' = 7x' - 3x - 9y.$$

Из 1-го уравнения:

$$y = -\frac{1}{3}(x' - 7x).$$

Получим $x'' = 7x' - 3x + 3x' - 21x = 10x' - 24x; \qquad x'' - 10x' + 24x = 0.$

Находим решение полученного уравнения:

$$x'' - 10x' + 24x - 0, \quad k^2 - 10k + 24 = 0,$$

$$k_1 = 4, k_2 = 6 \ \Rightarrow \ x(t) = c_1e^{4x} + c_2e^{6x}.$$

Из 1-го уравнения:

$$y(t) = -\frac{1}{3}(x' - 7x) = -\frac{1}{3}(4c_1e^{4x} + 6c_2e^{6x} - 7c_1e^{4x} - 7c_2e^{6x}) = c_1e^{4x} + \frac{1}{3}c_2e^{6x}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{6x}, \\ y(t) = c_1 e^{4x} + \dfrac{1}{3} c_2 e^{6x}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 13y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$

Дифференцируем первое уравнение системы по x:

$$x'' = 2x' + 13y'.$$

Подставим из 2-го уравнения системы $y' = -x - 2y$, получим:

$$x'' = 2x' + 13(-x - 2y); \quad x'' = 2x' - 13x - 26y.$$

Из 1-го уравнения $y = \dfrac{1}{13}(x' - 2x)$. Получим:

$$x'' = 2x' - 13x - 2x' + 4x = -9x; \qquad x'' + 9x = 0.$$

Находим решение полученного уравнения:

$$x'' + 9x = 0, \quad k^2 + 9 = 0, \quad k_{12} = \pm 3i \Rightarrow x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t.$$

Из 1-го уравнения:

$$y(t) = -\frac{1}{13}(x' - 2x) = -\frac{1}{13}(-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t - 2c_1 \cos 3t - 2c_2 \sin 3t) =$$

$$= \frac{1}{13}((3c_2 - 2c_1)\cos 3t - (3c_1 + 2c_2)\sin 3t).$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t, \\ y(t) = \dfrac{1}{13}((3c_2 - 2c_1)\cos 3t - (3c_1 + 2c_2)\sin 3t). \end{cases}$

4.4. Варианты индивидуального задания №2 «Числовые и функциональные ряды»

Вариант № 1

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2}{(5n^2+1)\cdot\sqrt{n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\text{tg}^5\frac{3}{\sqrt{2n+7}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{5^n}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-2}{2n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{5n^2+3n-1}}{7n^3+4}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln^{2n}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-8)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n2^{2n}x^n$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции:

1) $y=\frac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$ 2) $y=(1+x)e^{-2x}$, $x_0=0$

3) $y=\frac{arctgx^3}{5x^3}$ $x_0=0$, 4) $y=\ln(x+2)^3$ $x_0=1$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{1/8}\sqrt{1-x^3}\,dx$ 2) $\int\limits_0^1\sin x^3\,dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}x+1, & -\pi<x\le 0,\\ 1/2, & 0<x<\pi\end{cases}$ 2. $y=-x/3,\quad -3<x<0$ по синусам

Вариант № 2

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-4)(6n-5)}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^3\dfrac{1}{2n+3}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)\cdot 7^{2n+1}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^3+1}{4n^3-2}\right)^{2n}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{5n+3}{2n-1}\right)^3$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}\,(n+1)}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{5n-3}{\sqrt{n\cdot 4^n}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+5}{2n}\right)^{n^2}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+2)x^n}{5^n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $x_0=-4.$ 2) $y=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$, $x_0=0$

3) $y=\ln 4x$ $x_0=2,$ 4) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ $x_0=0.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{1/9}\sqrt{x}e^{-x}\,dx$ 2) $\int\limits_0^{0,2}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}$ 2. $y=2x+3,\quad 0<x<2,$ *по косинусам*

Вариант № 3

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\sin^2(n\alpha)}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{100}}{2^n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n^2+1}{3n^2+3}\right)^{3n}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(3-e^{1/n^2}\right)$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(n+1)!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n^2}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}x^{n-1}}{n!}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции:

1) $y=\dfrac{e^{-2x}-1}{3x},\ x_0=0.$ 2) $y=\dfrac{1}{x+4},\quad x_0=3$

3) $y=\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x\quad x_0=0,$ 4) $y=(x-2)\cdot\ln x\quad x_0=2.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,3}\sqrt{1+x^3}\,dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $\begin{matrix} y = 3x + 7 \\ -\pi < x < \pi \end{matrix}$. 2. $y = \begin{cases} x, & -2 < x < -1, \\ \pi, & -1 \le x < 0 \\ & \text{по синусам} \end{cases}$.

Вариант № 4

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{1/n^3}\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+2)!}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \sin\frac{\pi}{2n}\right)^n$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{9n+2}{7n-3}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt[5]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{2n-3}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! x^n}{n^4}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

1) $y = 6^{2x}$, $x_0 = 4$. 2) $y = \frac{\arcsin x}{x} - 1$, $x_0 = 0$

3) $y = \sin^2(3x/4)$ $x_0 = 0$, 4) $y = \ln(4+5x)$ $x_0 = 2$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ 2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y=\begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 2. $y = 4x+3, \quad 0 < x < 3$ *по косинусам*

Вариант № 5

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^3 \cdot \sqrt[5]{10n+1}}$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n! \cdot \sqrt[3]{n+3}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{4n^2+9}\right)^{5n/3}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\sqrt{5n^4+2}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{10}}{\sqrt{n+3} \cdot e^n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^3}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \cdot \sqrt[3]{n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции:

1) $y=\frac{1}{x^2}, \quad x_0=-2.$ 2) $y=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x_0=0$

3) $y=2^{-4x} \quad x_0=-3,$ 4) $y=\cos\frac{3x}{2} \quad x_0=\pi/4.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+5x)\,dx$ 2) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y = 5x + 2, \quad x \in (-\pi; \pi).$ 2. $y = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \\ -6, & 1 \le x < 2 \\ & \text{по синусам} \end{cases}$

Вариант № 6

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{5n^3+6}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \sin\frac{1}{n+1}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{7}{9n+1}\right)^{n^2}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n-5}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\frac{n}{\sqrt{n^6+3}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n! \cdot n^3}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7n+3}{2n+9}\right)^{3n/2}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

1) $y = \sin(x/2), \quad x_0 = \pi/2$ 2) $y = \frac{1}{8-x^3}, \quad x_0 = 0$

3) $y = \ln\sqrt[5]{(1-4x)^3} \quad x_0 = 0,$ 4) $y = 10^{-x} \quad x_0 = 2.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1-x^3}\,dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 1 - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 2. $y = x + 3, \quad -3 < x < 0$ *по косинусам*

Вариант № 7

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+4}}{n^2+5}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi n}{n^3+2n+3}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{3n-5}}{(n+2)!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^{2n}(n^2+1)}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \left(1 - \cos\dfrac{5}{n}\right)$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln^3\left(1 + \dfrac{4}{n+1}\right)$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{(3n+1)^4}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{5+3n^2}{1+3n^2}\right)^{-n^3}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^3\, x^{2n+1}}{3^n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{5^n\,(1-x)^n}{\sqrt{n+2}}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

1) $y = \dfrac{1 - \cos 5x}{x^2}, \quad x_0 = 0.$ 2) $y = 2^x, \quad x_0 = 1$

3) $y = \ln\left(\sqrt[3]{1+2x} \cdot (1+2x)^3\right) \quad x_0 = 0,$ 4) $y = \sqrt[5]{x} \quad x_0 = 32.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,2} x^5 \cos 3x\, dx$ 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y = 3x + 7$, $-\pi < x < \pi$

2. $y = \begin{cases} x, & -2 < x < -1, \\ 3, & -1 \le x < 0 \end{cases}$ *по синусам*

Вариант № 8

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^3 \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{5n+1}}{(n+5)!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2n^2}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{n}{3n+7}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+1}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{3}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{6n^2+3n-1}{6n^2-4n+2}\right)^{n^3}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n+3)^2}{(x+5)^n}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

1) $y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$ 2) $y = 2x\sqrt[3]{1+x^3}, \quad x_0 = 0$

3) $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 10} \quad x_0 = 0,$ 4) $y = \ln(1+x)^2 \quad x_0 = 2.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,25} \sqrt{x} \cos x \, dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5} e^{-2x^2} dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y = \pi/4 - x/2,$ $\pi < x < \pi.$ 2. $y = \begin{cases} -2, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 \le x < 0 \\ \quad \textit{по} \quad \textit{косинусам} & \end{cases}$

Вариант № 9

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{n^2 \cdot \sqrt{5n^4 + 7n - 2}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin^3 \frac{1}{\sqrt{n}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 5n - 1}{2n^2 + 5}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - e^{1/\sqrt{n}}\right)^2$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+2)!\sqrt{n+3}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin^n \frac{\pi}{5n}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n\, 5^n}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

1) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5x - 1,\ x_0 = 1$ 2) $y = \cos^2(x/2),\quad x_0 = 0$

3) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{27 + 4x} \quad x_0 = 0,$ 4) $y = \frac{1}{(x+1)^3} \quad x_0 = -3.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2}\, dx$ 2) $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y=\begin{cases}\pi-2x, & -\pi<x<0,\\ \pi/2, & 0\le x<\pi\end{cases}$

2. $y=5x+3,\quad 0<x<5$ *по синусам*

Вариант № 10

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n+3)(3n+8)}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\mathrm{tg}^4\dfrac{\pi}{n}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-5n}}{n^2+3n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n^2}$

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\dfrac{1}{n^3}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n^2+5}}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{10^n}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+3}{n+6}\right)^{n/5}$

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(5n+1)^4\cdot x^{2n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}$

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции:

1) $y=\ln x,\quad x_0=1.$ 2) $y=x^2\cdot\sin 5x,\quad x_0=0$

3) $y=\dfrac{7}{1+x-12x^2}\quad x_0=0,$ 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[7]{x}}\quad x_0=-1.$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,1}e^{-5x^2}dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1. $y=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

2. $y=3x-1,\ 0<x<3$ по косинусам

4.5. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2 «Числовые и функциональные ряды»

1. Исследовать на сходимость знакоположительные ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+2}{n\cdot\sqrt{4n^2+5n+1}}$

Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n\cdot\sqrt{4n^2+5n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n\sqrt{4n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}\neq 0$$

Так как необходимый признак сходимости не выполнен, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4-1}}$

Применим признак сравнения. Запишем выражение, эквивалентное общему члену ряда при $n\to\infty$ (см. таблицу эквивалентных).

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-1}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{n^4-1}}=\frac{1}{n^{4/3}},\quad k=\frac{4}{3}>1$$

Ответ: ряд сходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3 5^n}{n!}$

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}\,\frac{5^{n+1}}{5^n}\,\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1$$

Ответ: ряд сходится.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n+4}{2n+5}\right)^{-n^2}$

К данному ряду удобно применить радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+4}{2n+5}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+4}{2n+5}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}=0<1$$

Ответ: ряд сходится.

2. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(2-\cos\dfrac{5}{n}\right)$

Это знакочередующийся ряд. Проверяем выполнение признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left(2-\cos\frac{5}{n}\right)=2-\cos 0=1\neq 0$$

Признак Лейбница не выполняется.
Ответ: ряд расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[5]{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Это также знакочередующийся ряд. Проверяем выполнение признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Здесь использована формула из таблицы эквивалентных $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$.

Признак Лейбница выполняется – ряд сходится. Но сходимость может быть как абсолютной, так и условной. Установим это.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

При $n\to\infty$ имеем $a_n=\sqrt[5]{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}\sim\sqrt[5]{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{n^{2/5}},\quad k=\dfrac{2}{5}<1$

Поэтому ряд из абсолютных величин расходится.
Ответ: исходный ряд сходится условно.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n\cdot\sqrt{n^2+1}}{3^{2n}}$

Проверяем выполнение признака Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{3^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2)'}{(3^{2n})'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3^{2n}2\ln 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2}{3^{2n}4\ln^2 3} = 0$$

Признак Лейбница выполняется – ряд сходится.

Исследуем на сходимость ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{3^{2n}}$$

Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{(n+1)^2+1}}{3^{2(n+1)}}\cdot\frac{3^{2n}}{n\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{9} < 1$$

Ряд из абсолютных величин сходится.

Ответ: исходный ряд сходится абсолютно.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin^{2n}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)$

Находим

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\arcsin^{2n}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\arcsin^{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} = 0$$

Признак Лейбница выполняется – ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{2n}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)$ исследуем на сходимость по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arcsin^{2n}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\arcsin^{2}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \approx 0,25 < 1$$

Ряд из абсолютных величин сходится.

Ответ: исходный ряд сходится абсолютно.

3. Найти интервалы сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Сначала применим к ряду признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n x^n}\right| = 2|x|$$

Ряд, согласно признаку Даламбера, будет сходиться только в том случае, если найденный предел будет меньше 1.

Потребуем, чтобы $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2|x|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

Проверяем сходимость ряда на концах полученного интервала. Для этого подставим в исходный ряд вместо x значения концов интервала, получим числовые ряды, сходимость которых поверяем с помощью признаков сходимости числовых рядов.

При $x=\frac{1}{2}$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},$$

который сходится по признаку сравнения с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

При $x=-\frac{1}{2}$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1},$$

который является знакочередующимся, и он сходится по признаку Лейбница, так как $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$.

Таким образом, ряд сходится на концах интервала и мы их включаем в интервал сходимости.

Ответ: Интервал сходимости ряда $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n\,3^n}$

Применим к ряду признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}\cdot\frac{n\,3^n}{(x-5)^n}\right|=\frac{|x-5|}{3}$$

Потребуем, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x-5|}{3}<1,\ \Rightarrow\ |x-5|<3,\ \Rightarrow\ 2<x<8$$

Проверяем сходимость ряда на концах полученного интервала. Для этого подставляем в исходный ряд вместо x значения концов интервала и получаем числовые ряды, сходимость которых поверяем с помощью признаков сходимости числовых рядов.

При $x=8$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(8-5)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

Этот ряд является знакочередующимся и он сходится по признаку Лейбниуа, так как

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

При $x=2$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2-5)^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-3)^n}{n\,3^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n\cdot 3^n}{n\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

который является знакоположительным гармоническим рядом. Такой ряд расходится.

Таким образом, ряд сходится на правом конце промежутка и значение $x=8$ мы включаем в интервал сходимости.

На левом конце промежутка $x=2$ ряд расходится, поэтому это значение в интервал не включается

Ответ: Интервал сходимости ряда $(2;8]$.

4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ функции:

При решении данной задачи используем таблицу рядов Маклорена элементарных функций. Данную функцию предварительно преобразуем, подстраивая ее под табличный шаблон.

1) $y = \ln\left(\sqrt{1+5x}\cdot(1-2x)\right) \quad x_0 = 0$

$$\ln\left(\sqrt{1+5x}\cdot(1-2x)\right) = \frac{1}{2}\ln(1+5x) + \ln(1-2x) = |\ln(1+x)| =$$
$$= \frac{1}{2}(5x - \frac{(5x)^2}{2} + \frac{(5x)^3}{3} - \ldots) - (2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \ldots) =$$
$$= \left(\frac{5}{2} - 2\right)x + \left(\frac{25}{4} - \frac{4}{2}\right)x^2 - \left(\frac{125}{6} - \frac{8}{3}\right)x^3 + \ldots$$

2) $y = \dfrac{\mathrm{ch}3x - 1}{x^2}, \quad x_0 = 0$

$$\frac{\mathrm{ch}\,3x - 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\mathrm{ch}\,3x - 1) = |chx| =$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} + \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots - 1\right) = \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!}x^2 + \frac{3^6}{6!}x^4 + \ldots$$

3) $y = x\cdot e^{2x} \quad x_0 = 3$

$$x\cdot e^{2x} = ((x-3)+3)e^{2((x-3)+3)} = ((x-3)+3)e^{2(x-3)}e^6 = |e^x| =$$
$$= e^6((x-3)+3)\left(1 + 2(x-3) + \frac{2^2(x-3)^2}{2!} + \frac{2^3(x-3)^3}{3!} + \ldots\right) =$$
$$= e^6\left(3 + 7(x-3) + 8(x-3)^2 + 6(x-3)^3 + \ldots\right)$$

4) $y = \sqrt[5]{x} \quad x_0 = -1$

$$\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{(x+1)-1} = -(1-(x+1))^{1/5} = |(1+x)^m| =$$
$$= 1 - \frac{1}{5}(x-1) - \frac{1/5\cdot 4/5}{2!}(x+1)^2 - \frac{1/5\cdot 4/5\cdot 9/5}{3!}(x+1)^3 - \ldots =$$
$$= 1 - \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x+1)^2 - \frac{6}{125}(x+1)^3 - \ldots$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить интегралы с точностью не менее 0,01:

1) $\int\limits_0^{0,5} \sin 2x^2\,dx$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена (берем готовый ряд для функции $\sin x$), заменяя x на $2x^2$, проведем почленное интегрирование и вычислим интеграл.

$$=\frac{2}{3}(0,5)^3-\frac{4}{21}(0,5)^7+\frac{32}{1320}0,5^{11}-...\approx 0,083-0,001\approx 0,082$$

2) $\int\limits_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

$$\int\limits_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}=\int\limits_0^{0,6}\left(\frac{1}{3}(1+(x/3)^3)^{-1/3}\right)dx=$$

$$=\left|\frac{x}{3}=t\right|=\int\limits_0^{0,2}\left((1+t^3)^{-1/3}\right)dt=\left|(1+x)^m\right|=$$

$$=\int\limits_0^{0,2}\left(1-\frac{1}{3}t^3+\frac{-1/3(-4/3)}{2!}t^6+...\right)dt=\left(t-\frac{1}{12}t^4+\frac{4}{126}t^7+...\right)\Big|_0^{0,2}\approx$$

$$\approx=0,2-0,0001\approx 0,19999$$

6. Разложить в ряд Фурье функцию в указанном интервале:

1) $y=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 2-3x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Ряд Фурье функции, заданной в интервале $[-\pi;\pi]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

Находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx==\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2-3x)dx=\frac{1}{\pi}\left(2x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{\pi}=2-\frac{3\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(2-3x)\cos nx\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2-3x & du=-3dx \\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2-3x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]=|\sin 0=\sin n\pi=0|=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{3}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(2-3x)\sin nx\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2-3x & du=-3dx \\ dv=\sin nxdx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix}=$$

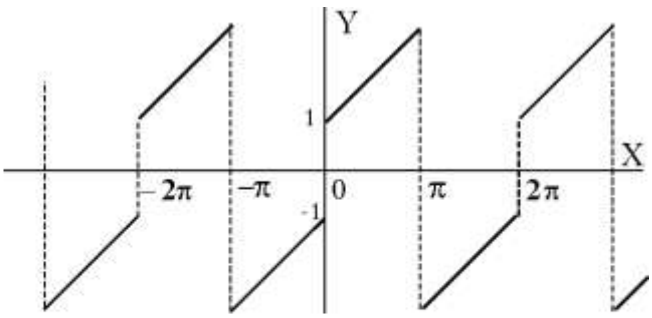
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2-3x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}-\frac{2-3\pi}{n}\cos n\pi-\frac{3}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{n\pi}-\frac{2-3\pi}{n\pi}\cos n\pi$$

$$f(x)=1-\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)\right)\cos nx+\left(\frac{2}{n\pi}-\frac{2-3\pi}{n\pi}\cos n\pi\right)\sin nx$$

2) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ выражением:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & -\pi<x<0; \\ x+1, & 0<x<\pi \end{cases}$$



Так как данная функция является нечетной, то можно заранее сказать, что все коэффициенты $a_n=0$, $(n=0,1,2,3,\ldots)$. Находим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} U = x+1, & dV = \sin nx\,dx \\ dU = dx, & V = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x+1}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x+1}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi+1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}+0\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)\cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(\pi+1)\cdot(-1)^n\right].$$

Ряд Фурье для данной функции выглядит так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(\pi+1)\cdot(-1)^n}{n}\sin nx.$$

Запишем несколько первых коэффициентов:

$$b_1 = \frac{2}{\pi}(2+\pi) \approx 3{,}27, \quad b_2 = \frac{2}{2\pi}(-\pi) = -1, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}(2+\pi) \approx 1{,}09,$$

$$b_4 = \frac{2}{4\pi}(-\pi) = -0{,}5, \quad b_5 = \frac{1}{5\pi}(2+\pi) \approx 0{,}65, \quad b_6 = 0{,}333\ldots$$

Тогда ряд Фурье

$$f(x) = 3{,}27\sin x - \sin 2x + 1{,}09\sin 3x - 0{,}5\sin 4x + 0{,}65\sin 5x - \ldots$$

Из графика функции видно, что в точках $x = \pi n$ функция терпит разрывы 1-го рода, поэтому нужно дополнить полученное разложение значениями функции в этих точках. Согласно теореме Дирихле, значения функции в точках разрыва или на границах интервалов равны полусумме значение слева и справа от соответствующей точки:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0-0) + f(x_0+0)\right)$$

Итак, в точках $x = 2\pi n$ получим:

$$f(2\pi n) = \frac{1}{2}\left(f(2\pi n-0) + f(2\pi n+0)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

В точках $x = \pi(2n-1)$ получим

$$f((2n-1)\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi-0) + f(\pi+0)\right) = \frac{1}{2}\left((\pi-1)+(\pi+1)\right) = \pi$$

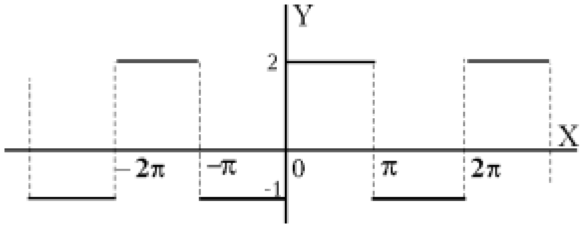
Значения суммы ряда в указанных точках можно отметить точками на графике функции.

Окончательный ответ:

$$f(x)=\begin{cases} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(\pi+1)\cdot(-1)^n}{n}\sin nx, & x\neq \pi n \\ 0 & x=2\pi n \\ \pi & x=(2n-1)\pi \end{cases}$$

3) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ выражением:

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x<0; \\ 2, & 0<x<\pi \end{cases}$$



Найдем коэффициенты ряда Фурье по соответствующим формулам, учитывая задание функции на каждой части интервала:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(2)\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-x\,|_{-\pi}^{0}+(2x)\,|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\pi+2\pi\right]=1.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(2)\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin nx\,|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\sin nx\,|_{0}^{\pi}\right]=0,\quad \text{т.к. } \sin n\pi=\sin 0=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(2)\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nx\,|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\cos nx\,|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{n\pi}\left[(\cos 0-\cos n\pi)-2(\cos n\pi-\cos 0)\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[\,3\cos 0-3\cos n\pi\,\right]=\frac{3}{n\,\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{3}{n\,\pi}\left[1-(-1)^n\right].$$

Здесь мы заменили $\cos n\pi = (-1)^n$. Далее, т.к. при $n = 2k$ выражение $[1-(-1)^{2k}] = 1-1 = 0$, то все коэффициенты с четными номерами обратятся в ноль: $b_{2k} = 0$, а при $n = 2k-1$ выражение $[1-(-1)^{2k-1}] = 1+1 = 2$, и все коэффициенты с нечетными номерами будут иметь следующий вид: $b_{2k-1} = \dfrac{6}{(2k-1)\pi}$, т.е. $b_1 = \dfrac{6}{\pi} \approx 1,91$, $b_3 = \dfrac{6}{3\pi} \approx 0,64$, $b_5 = \dfrac{6}{5\pi} \approx 0,38$.

С учетом найденных коэффициентов ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} =$$

$$= 0,5 + 1,91\sin x + 0,64\sin 3x + 0,38\sin 5x + \ldots$$

Из графика функции видно, что в точках $x = \pi n$ функция терпит разрывы 1-го рода, поэтому нужно дополнить полученное разложение значениями функции в этих точках. Согласно теореме Дирихле значения функции в точках разрыва или на границах интервалов равны полусумме значение слева и справа от соответствующей точки:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\big)$$

Итак, в точках $x = \pi n$ получим:

$$f(\pi n) = \frac{1}{2}\big(f(\pi n - 0) + f(\pi n + 0)\big) = \frac{1}{2}(-1+2) = \frac{1}{2}$$

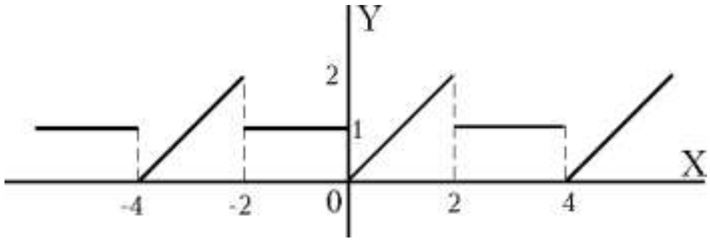
Значения суммы ряда в указанных точках можно отметить точками на графике функции.

Окончательный ответ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, & x \ne \pi n \\ \dfrac{1}{2} & x = \pi \end{cases}$$

4) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в интервале $(-2; 2)$ выражением

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0; \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$$



Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам, соответствующим случаю произвольного l, учитывая, что в нашем случае $l=2$, а также задание функции на каждой части интервала.

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}1\cdot dx+\int_{0}^{2}x\cdot dx\right]=\frac{1}{2}\left[x\,|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\,|_{-2}^{0}\right]=\frac{1}{2}[\,2+2\,]=2$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=$$

Второй интеграл берем по частям: $\begin{vmatrix} U=x, & dU=dx \\ dV=\cos\frac{n\pi x}{2}dx & V=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{vmatrix}=$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,|_{-2}^{0}+x\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,|_{0}^{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,|_{0}^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}(\sin 0+\sin n\pi)+\frac{4}{n\pi}\sin n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\right]=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n].$$

В итоге получаем, что $a_{2k}=0,\ \ a_{2k-1}=\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}.$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,|_{-2}^{0}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\,|_{0}^{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\,|_{0}^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+0\right]=-\frac{1}{n\pi}(1+\cos n\pi)=-\frac{1}{n\pi}[1+(-1)^n].$$

В итоге получаем, что $b_{2k}=-\dfrac{2}{2k\pi},\ \ b_{2k-1}=0.$

Запишем несколько первых коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,4, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \approx 0,05, \quad a_4 = 0, \ldots$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{2}{2\pi} \approx 0,32, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{2}{4\pi} \approx 0,16, \ldots$$

Окончательно, имеем ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$
$$= 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} - \frac{2}{\pi} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} =$$
$$= 1 + 0,4\cos x - 0,32\sin 2x + 0,05\cos 3x - 0,16\sin 4x + \ldots$$

Из графика функции видно, что в точках $x = 2n$ функция терпит разрывы 1-го рода, поэтому нужно дополнить полученное разложение значениями функции в этих точках. Согласно теореме Дирихле, значения функции в точках разрыва или на границах интервалов равны полусумме значение слева и справа от соответствующей точки:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0) \right)$$

Итак, в точках $x = 0, \pm 4, \pm 8, \ldots$ получим:

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(f(-0) + f(+0) \right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

В точках $x = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots$ получим:

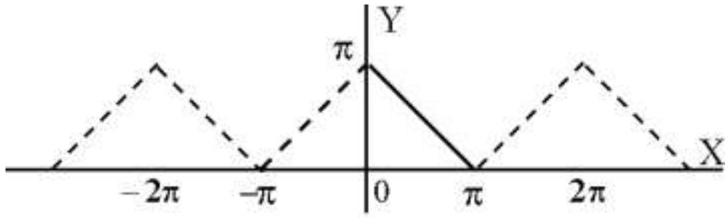
$$f(2) = \frac{1}{2}\left(f(2-0) + f(2+0) \right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

Значения суммы ряда в указанных точках можно отметить точками на графике функции.

Окончательный ответ:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4}{\pi^2} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} - \dfrac{2}{\pi} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2kx}{2k}, & x \neq 2n \\ \dfrac{1}{2} & x = 0, \pm 4, \pm 8, \ldots \\ \dfrac{3}{2} & x = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots \end{cases}$$

5) Разложить функцию, заданную в интервале $(0;\pi)$ выражением $f(x)=\pi-x,$ в ряд Фурье **по косинусам**



Предполагая продолжение функции на промежуток $(-\pi,0)$ четным образом, имеем, что все коэффициенты $b_n=0,$ а коэффициенты a_0, a_n находятся по формулам, соответствующим случаю четной функции в интервале $(-\pi;\pi)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\left|\begin{array}{l} U=\pi-x,\ dV=\cos nx\,dx, \\ V=\frac{1}{n}\sin nx,\ dU=-dx \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\Big)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2}\cos nx\,\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi n^2}[1-(-1)^n].$$

Итак, получили: $a_0=\pi\approx 3{,}14,\ a_{2k-1}=\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2},\ a_{2k}=0,$

т.е. $a_1=4/\pi\approx 1{,}27,$ $a_3=4/9\pi\approx 0{,}14,$ $a_5=4/25\pi\approx 0{,}05,\ldots$

Ряд Фурье $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=$

$=1{,}57+1{,}27\cos x+0{,}14\cos 3x+0{,}05\cos 5x+\ldots$

Точек разрыва функция не имеет, поэтому данное разложение является полным ответом.

4.6. Варианты индивидуального задания № 3 «Комплексные числа и функции»

Вариант № 1

1. Даны числа $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 - i$.
Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 2z_1 - 3z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \quad 3)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 5 + 5i$, $z_3 = 3 - 2i$.

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^8, \quad 2)\ \sqrt[4]{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_2 \cdot z_3}{z_2 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1, \quad 2)\ e^{-z_2}, \quad 3)\ \sin z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \mathrm{Im}\frac{1}{z+i} = C, \qquad 2)\ \mathrm{Re}\, z^2 = C.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$

$$f(z) = \frac{2z + 3i}{iz + 4}, \qquad z_0 = -2$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} \frac{dz}{\sqrt{z}},\quad \text{где}\quad L:\{\ |z|=1,\ \operatorname{Im} z<0\ \};$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} (\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)\,dz,\quad \text{где}\quad L - \text{ломаная}\ (0;1;1+2i).$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z+3}{z^2-5z+6}\,dz,\qquad \text{где}\ L:\begin{cases} 1)\ |z|=1;\\ 2)\ |z-1|=1,5;\\ 3)\ |z|=4.\end{cases}$$

Вариант № 2

1. Даны числа $z_1=-2\sqrt{3}+2i,\ \ z_2=2-6i.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 3z_1+5z_2,\quad 2)\ \ z_1\cdot z_2,\qquad 3)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1=3\sqrt{3}+3i,\ \ z_2=-1+4i,\ \ z_3=2-4i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме.

$$1)\ (z_2)^6,\quad 2)\ \sqrt[3]{z_1},\quad 3)\ \frac{z_2\cdot z_3}{z_2+z_3}.$$

3. Даны числа $z_1=-1-i,\ \ z_2=2+3i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1,\quad 2)\ e^{z_2},\quad 3)\ \cos z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ |z| = \frac{C}{\arg z}, \qquad 2)\ |z| = C\sin(\arg z).$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = (1+4i)e^{-4iz}, \qquad z_0 = 1+i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_{(L)} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \text{где} \quad L: \left\{\ |z| = \sqrt{3},\ \operatorname{Re} z > 0\ \right\};$$

$$2)\ \int_{(L)} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,dz, \quad \text{где}\ L: \text{отрезок} \quad [0, 1+2i].$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint_{(L)} \frac{z^2 - z}{z^2(z+1)^2}\,dz, \qquad \text{где}\ L: \begin{cases} 1)\ |z| = 0{,}5; \\ 2)\ |z+1| = 1; \\ 3)\ |z| = 2. \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Даны числа $z_1 = -3+4i, \quad z_2 = 5+3i.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 4z_1 - 3z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \qquad 3)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = 3-7i, \quad z_3 = -1+4i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_1)^{12}, \quad 2)\ \sqrt{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_2 \cdot z_3}{z_2 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = 3 - \sqrt{3}i, \quad z_2 = 2+6i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1,\quad 2)\ e^{z_2},\quad 3)\ \sin z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \operatorname{Im}(\ln z) = C,\qquad 2)\ |z| = C\arg z.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = \frac{5z + 2i - 1}{4iz - 3},\qquad z_0 = 1 - i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} \frac{dz}{z},\ \ где\ \ L:\{\ |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\ \};$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} \operatorname{Im} z\, dz,\ \ где\ \ L:\ отрезок\ [1,\ i].$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{e^z - z - 1}{z^2(z-1)^2}\,dz,\qquad где\ \ L:\begin{cases} 1)\ |z| = 0{,}5; \\ 2)\ |z-1| = 1; \\ 3)\ |z| = 2. \end{cases}$$

Вариант № 4

1. Даны числа $z_1 = -6 + 3i,\ \ z_2 = 3 - 7i.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 5z_1 - 2z_2,\quad 2)\ z_1 \cdot z_2,\qquad 3)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1 = -8 - 8\sqrt{3}\cdot i,\ \ z_2 = 2 - 2i,\ z_3 = 5 + 4i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^{10}, \quad 2)\ \sqrt[4]{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_2 \cdot z_3}{z_2 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = -4 + i$, $z_2 = 2 - 3i$.
Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1, \quad 2)\ e^{-z_1}, \quad 3)\ \sin z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \mathrm{Re}(\ln z) = C, \qquad 2)\ \mathrm{Re}\left(\frac{i}{z}\right) = C.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = 3z^2 + iz + 4i - 2, \qquad z_0 = 2 - i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} \bar{z}\,dz, \quad где\ L: отрезок\ [1,\ i];$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} (z-2)^2\,dz, \quad где\ L: \{\ |z-2| = 4,\ \mathrm{Im}\,z < 0\ \}.$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{e^z}{z(z-2i)}dz, \qquad где\ \ L: \begin{cases} 1)\ |z| = 1{,}5; \\ 2)\ |z-2i| = 1; \\ 3)\ |z| = 3. \end{cases}$$

Вариант № 5

1. Даны числа $z_1 = 6 + 5i$, $z_2 = 8 - 6i$.

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 4z_1 + 2z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \qquad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

2. Даны числа $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 4 + 9i$, $z_3 = -3 - i$.

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_3)^9,\quad 2)\ \sqrt[3]{z_1},\quad 3)\ \frac{z_2\cdot z_3}{z_2+z_3}.$$

3. Даны числа $z_1=3-3\sqrt{3}\cdot i,\quad z_2=-4-5i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1,\quad 2)\ e^{-z_2},\quad 3)\ \cos z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z+2}\right)=C,\qquad 2)\ |z|=C\cos(2\arg z).$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w=f(z)$ в точке $z=z_0$:

$$f(z)=-4i\ln(z+5i+8),\qquad z_0=2+i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} z\,\mathrm{Re}(z^2)\,dz,\quad \textit{где } L: \textit{ломаная}\quad z_1=1,\ z_2=1+2i,\ z_3=2+2i;$$

$$2)\ \int\limits_{(L)}\frac{dz}{z^2},\ \textit{где } L:\ \{\ |z|=5\ \ \mathrm{Im}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,z<0\ \}.$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)}\frac{z\,dz}{z^2-1},\qquad \textit{где } L: \begin{cases}1)\ |z-1|=1/2;\\ 2)\ |z+2|=2;\\ 3)\ |z|=2.\end{cases}$$

Вариант № 6

1. Даны числа $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 1 + 7i$.

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 5z_1 + 2z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \quad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

2. Даны числа $z_1 = 6 - 6i$, $z_2 = 5\sqrt{3} + 5i$, $z_3 = -2 + 3i$.

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^{15}, \quad 2)\ \sqrt[4]{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -4 - 4i$.

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_2, \quad 2)\ e^{z_1}, \quad 3)\ \sin z_1.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \mathrm{Im}\,\frac{1}{z} = C, \qquad 2)\ \mathrm{Re}\,(z + 3i)^2 = C.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = (2 + i)e^{(5-2i)z}, \qquad z_0 = -3i$$

6. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{(L)} z\,\mathrm{Im}\,z^2\,dz$, *где* L: *ломаная* $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 2 + 2i$;

2) $\int\limits_{(L)} \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, *где* $L: \{\ |z| = 1,\ 0 < \arg z < \pi/2\ \}$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{(z+1)\,dz}{z(z-1)^2(z-3)}, \qquad где\ \ L: \begin{cases} 1)\ |z|=1/2; \\ 2)\ |z-1|=1/2; \\ 3)\ |z|=2. \end{cases}$$

Вариант № 7

1. Даны числа $z_1=-12+5i,\ \ z_2=1-i.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 6z_1+2z_2, \quad 2)\ z_1\cdot z_2, \qquad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

2. Даны числа $z_1=4\sqrt{3}-4i,\ \ z_2=-3-3i,\ \ z_3=6+5i.$
Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^6, \quad 2)\ \sqrt[3]{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_2\cdot z_3}{z_2+z_3}.$$

3. Даны числа $z_1=\sqrt{3}+3i,\ \ z_2=-1+4i.$
Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1, \quad 2)\ e^{z_2}, \quad 3)\ \cos z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ |z|=C\sin(2\arg z), \qquad 2)\ |z|=C(1+\sin(\arg z)).$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w=f(z)$ в точке $z=z_0$:

$$f(z)=\frac{2i-3z}{4z-4+i}, \qquad z_0=1$$

6. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{(L)} \bar{z}\, dz$, *где* $L: \{\ |z| = 5,\ \operatorname{Im} z < 0\ \}$;

2) $\int\limits_{(L)} (2x - 3iy)\, dz$, *где* L: *ломаная* $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1 + 2i$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{e^{z-1}\, dz}{z^2(z-1)}, \quad где\ L: \begin{cases} 1)\ |z-1| = 1/2; \\ 2)\ |z+1| = 1/2; \\ 3)\ |z| = 2. \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Даны числа $z_1 = -8 + 6i,\ \ z_2 = 3 + 5i$.

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 2z_1 - 5z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \quad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

2. Даны числа $z_1 = 12\sqrt{3} + 12i,\ \ z_2 = 1 - i,\ \ z_3 = -7 - 2i$.

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^9, \quad 2)\ \sqrt[4]{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_2 \cdot z_3}{z_2 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = 4 - 3i,\ \ z_2 = -3 + 7i$.

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1, \quad 2)\ e^{z_2}, \quad 3)\ \sin z_1.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \frac{1}{\sin(arg\ z)} = C, \qquad 2)\ |z| = C(1 - \cos(arg\ z)).$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z)=iz^2+(6-3i)z+2i, \qquad z_0=i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z\cdot Jm\, z\, dz,\ \ \text{где}\ \ L:\{\ |z|=2,\ \operatorname{Re} z<0\ \};$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} z^2 \operatorname{Im} z\, dz,\ \ \text{где}\ \ L:\text{отрезок}\ \ z_1=0,\ z_2=1-2i.$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{e^{\pi z}\,dz}{z^2(z^2+1)}, \qquad \text{где}\ L:\begin{cases} 1)\ |z|=1/2; \\ 2)\ |z+i|=1/2; \\ 3)\ |z|=2. \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Даны числа $z_1=-3+4i,\ \ z_2=2i-7.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 4z_1+5z_2,\quad 2)\ \ z_1\cdot z_2,\qquad 3)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1=2-2\sqrt{3}\cdot i,\ \ z_2=-4-8i,\ \ z_3=5+5i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_3)^{12},\quad 2)\ \sqrt[3]{z_1},\quad 3)\ \frac{z_2\cdot z_3}{z_2+z_3}.$$

3. Даны числа $z_1=-6+3i,\ \ z_2=2-2\sqrt{3}\cdot i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_2,\quad 2)\ e^{z_1},\quad 3)\ \cos z_1.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \operatorname{Re}(z-2i)^2=C,\qquad 2)\ |z+2i|^2=C$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = (1-i)\ln(z+5-3i), \qquad z_0 = -2$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} (\bar{z})^2\, dz, \ \ \text{где} \ \ L: \{\ |z| = 1\ \};$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} \frac{dz}{|z|}, \ \ \text{где} \ \ L: \text{отрезок}\ [1, i].$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{e^z\, dz}{z(1-z)^3}, \qquad \text{где} \ \ L: \begin{cases} 1)\ |z| = 1/2; \\ 2)\ |z-1| = 1/2; \\ 3)\ |z| = 2. \end{cases}$$

Вариант № 10

1. Даны числа $z_1 = 3 - 3i, \ \ z_2 = 5 + 4i.$

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 2z_1 + 7z_2, \quad 2)\ \ z_1 \cdot z_2, \qquad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

2. Даны числа $z_1 = 4 + 7i, \ \ z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, \ \ z_3 = -5 + 8i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме.

$$1)\ (z_2)^8, \quad 2)\ \sqrt{z_1}, \quad 3)\ \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = -5 + 4i, \ \ z_2 = \sqrt{3} + i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_2, \quad 2)\ e^{-z_1}, \quad 3)\ \sin z_1.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \operatorname{Im}(z-i)^2 = C, \qquad 2)\ \frac{1}{\cos(\arg z)} = C.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = 2i\,e^{(i-2)z}, \qquad z_0 = 2+i$$

6. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{(L)} \frac{dz}{z+5},\ \textit{где}\ \ L:\ \textit{ломаная}\quad z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1+i;$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} (z-|z|)\,dz,\ \ \textit{где}\ \ L:\ \{\ |z|=1,\ \operatorname{Re} z > 0\ \}.$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}, \qquad \textit{где}\ \ L: \begin{cases} 1)\ |z+3i|=1; \\ 2)\ |z-3i|=1; \\ 3)\ |z|=4. \end{cases}$$

4.7. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3 «Комплексные числа и функции»

1. Даны числа $z_1 = -1+4i$, $z_2 = 3+2i$.

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1)\ 2z_1 + 7z_2, \quad 2)\ z_1 \cdot z_2, \qquad 3)\ \frac{z_2}{z_1}.$$

Решение:

1) $2z_1 + 7z_2 = 2(-1+4i) + 7(3+2i) = -2+8i+21+6i = 19+10i$

2) $z_1 \cdot z_2 = (-1+4i)(2+3i) = -2+8i-3i+12i^2 = -2+5i-12 = -14+5i$

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+4i}{2+3i} = \dfrac{(-1+4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{-2+8i+3i-12i^2}{4+9} =$

$$=\frac{-2+11i+12}{13}=\frac{10+11i}{13}=\frac{10}{13}+i\frac{11}{13}.$$

2. Даны числа $z_1=1+i,\quad z_2=1-i\sqrt{3},\; z_3=-2\sqrt{3}-2i,\quad z_4=-5+2i.$

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1)\ (z_2)^{12},\quad 2)\ \sqrt[4]{z_1},\quad 3)\ \frac{z_1\cdot z_4}{z_1+z_4}.$$

Решение. Построим числа на плоскости (рис. 1).

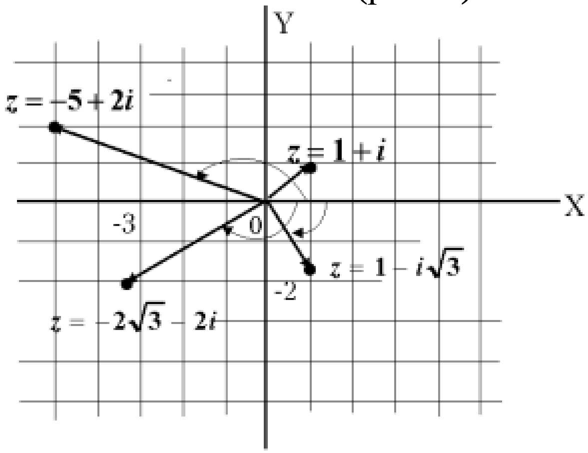


Рис. 1.

Таким образом, зная алгебраическую запись числа:

$$z=x+iy$$

можно перевести числа

$$z=r(\cos\phi+i\sin\phi),\qquad z=re^{i\phi},$$

в тригонометрическую и показательную формы записи, используя формулы перехода:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \phi=\arg z;\ \operatorname{tg}\phi=\frac{y}{x}$$

Находим модуль и аргумент каждого числа. Записываем их в тригонометрической и показательной формах:

$$1)\ z_1=1+i=\left|\begin{array}{l} r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \\ \phi=\arg z=\operatorname{arctg}1=\pi/4 \end{array}\right|$$

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$2)\ z_2 = 1 - i\sqrt{3} = \left|\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \phi = \arg z = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3 \end{array}\right|$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

$$3)\ z_3 = -2\sqrt{3} - 2i = \left|\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4, \quad \phi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right|$$

$$z_3 = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4e^{-\frac{5\pi}{6}i}.$$

$$4)\ z = -5 + 2i = \left|\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}, \quad \phi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -0,38 + 3,14 = 2,76 \\ \operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -21,8^o + 180^o = 158,2^o \end{array}\right|$$

$$z_4 = -5 + 2i = \sqrt{29}e^{2,76i} = \sqrt{29}\left(\cos 2,76 + i\sin 2,76\right) =$$
$$= \sqrt{29}\left(\cos 158,2^o + i\sin 158,2^o\right).$$

Выполним заданные действия с комплексными числами в показательной форме и затем переведем результат в алгебраическую:

$$1)\ (z_2)^{12} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12} = \left(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2^{12}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}\cdot 12} = 2^{12}\cdot e^{-4\pi i} =$$

$$= 2^{12}\cdot\left(\cos(-4\pi i) + i\sin(-4\pi i)\right) = 2^{12}\cdot\left(\cos(4\pi i) - i\sin(-4\pi i)\right) =$$

$$= 2^{12}\cdot\left(1 - i\cdot 0\right) = 2^{12} = 4096.$$

2) $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{1+i} \quad = \sqrt[4]{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}{4}} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right)} =$

Записываем число в показательной форме, используя полное значение аргумента, т.е. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. При извлечении корня 4-ой степени получим 4 значения корня. Для этого перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=4-1=3$.

Ниже запишем выражение для вычисления всех корней.

$$\sqrt[4]{z_2} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right)} = \begin{cases} k=0:\ = \sqrt[8]{2}\,e^{i(\pi/16)} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right) = \\ \approx 1{,}1\cdot\left(0{,}98+0{,}19i\right)\approx 1{,}08+0{,}21i. \\ k=1:\ \sqrt[8]{2}\,e^{i(\pi/16+\pi/2)} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)\approx \\ \approx 1{,}1\cdot(-0{,}19+0{,}98i)\approx -0{,}21+1{,}08i. \\ k=2:\ \sqrt[8]{2}\,e^{i(\pi/16+\pi)} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right) \\ \approx 1{,}1\cdot\left(-0{,}98-0{,}19i\right)\approx -1{,}08-0{,}21i. \\ k=3:\ \sqrt[8]{2}\,e^{i(\pi/16+3\pi/2)} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right) \\ \approx 1{,}1\cdot(0{,}19-0{,}98i)\approx 0{,}21-1{,}08i. \end{cases}$$

3) $\frac{z_1\cdot z_4}{z_1+z_4} =$

Выполним действия сначала в алгебраической форме, затем в показательной и сравним полученные результаты.

$$\frac{z_1\cdot z_4}{z_1+z_4}=\frac{(1+i)\cdot(-5+2i)}{(1+i)+(-5+2i)}=\frac{-5-5i+2i+2i^2}{-4+3i}=\frac{-5-3i-2}{-4+3i}=\frac{-7-3i}{-4+3i}$$

$$=\frac{7+3i}{4-3i}=\frac{(7+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{28+12i+21i+9i^2}{4^2+3^2}=\frac{28+33i-9}{16+9}=$$

$$=\frac{19+33i}{25}=\frac{19}{25}+i\cdot\frac{33}{25}\approx 0,76+1,32i$$

Теперь выполним действия в показательной форме, переведя предварительно в показательную форму сумму комплексных чисел:

$$z_1+z_4=-4+3i=\left|\begin{array}{c}|z_1+z_4|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5\\ tg\varphi=-\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\pi-arctg\frac{3}{4}\approx180^0-37^0=143^0\end{array}\right|=$$

$$=5\cdot e^{i\cdot143^0}$$

$$\frac{z_1\cdot z_4}{z_1+z_4}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot45^0}\cdot\sqrt{29}\cdot e^{i\cdot158^0}}{5\cdot e^{i\cdot143^0}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{e^{i\cdot(45^0+158^0)}}{e^{i\cdot143^0}}=$$

$$=\frac{\sqrt{58}}{5}\cdot e^{i\cdot(45^0+158^0-143^0)}\approx\approx1,5\cdot e^{i\cdot60^0}\approx1,5(\cos60^0+i\cdot\sin60^0)\approx$$

$$\approx1,5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx1,5\cdot(0,5+0,86i)\approx0,75+1,3i$$

Заметим, что:

a) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

b) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Сравнивая полученные результаты вычислений в алгебраической и показательной формах, видим их хорошее совпадение.

3. Даны числа $z_1=-\sqrt{3}+3i,\quad z_2=1-2i.$

Вычислить значения функций:

$$1)\ \ln z_1,\quad 2)\ e^{-z_2},\quad 3)\ \sin z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

Решение. Для нахождения логарифма комплексного числа переведем его в показательную форму записи, а затем воспользуемся свойством логарифмов, согласно которому логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

1) $\ln z_1 = \ln(-\sqrt{3}+3i) =$

$$= \left| \begin{array}{l} \left|-\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} \\ \arg z_1 = \arg(-\sqrt{3}+3i) = \pi - arctg\,\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \ln\left(\sqrt{12}\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}\right) = \ln\sqrt{12} + \ln e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} = \ln\sqrt{12} + i\cdot\frac{2\pi}{3} \approx 1,24 + 2,1\cdot i.$$

2) $e^{-z_2} = e^{-(1-2i)} = e^{-1+2i} = e^{-1}\cdot e^{2i} = e^{-1}\cdot(\cos 2 + i\sin 2) \approx$

$\approx 0,37(-0,41+0,91\cdot i) \approx -0,15+0,34\cdot i.$

В этих расчетах мы пользовались формулой Эйлера:

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi.$$

3) $\sin z_2 = \sin(1-2i) = \sin 1\cdot\cos(2i) - \cos 1\cdot\sin(2i) = \sin 1\cdot \operatorname{ch} 2 - i\cdot\cos 1\cdot \operatorname{sh} 2 \approx$

$\approx 0,84\cdot 3,76 - i\cdot 0,54\cdot 3,63 \approx 3,16 - i\cdot 1,96.$

Здесь использованы следующие формулы:

$$\sin z = \sin(x\pm iy) = \sin x\cdot\cos(iy) \pm \cos x\cdot\sin(iy) =$$
$$= \sin x\cdot \operatorname{ch} y \pm \cos x\cdot(i\cdot \operatorname{sh} y) = \sin x\cdot \operatorname{ch} y \pm i\cdot\cos x\cdot \operatorname{sh} y$$
$$\cos z = \cos(x\pm iy) = \cos x\cdot\cos(iy) \mp \sin x\cdot\sin(iy) =$$
$$= \cos x\cdot \operatorname{ch} y \mp \sin x\cdot(i\cdot \operatorname{sh} y) = \cos x\cdot \operatorname{ch} y \mp i\cdot\sin x\cdot \operatorname{sh} y$$

Вычисления всех тригонометрических и гиперболических функций нужно выполнять с помощью калькулятора, при этом значения аргументов нужно брать в радианах.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1)\ \left|\frac{z-2}{z+i}\right| = 3; \qquad 2)\ \mathrm{I}m(z^2-3z) = -1.$$

Решение.

1) $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3.$

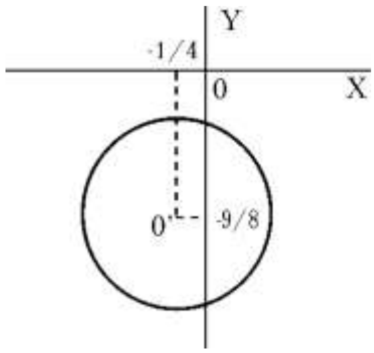
Ниже проведем необходимые преобразования.

$$\left|\frac{z-2}{z+i}\right|=3\Rightarrow|z-2|=3|z+i|$$

$$|z-2|=3|z+i|\Rightarrow|x+iy-2|=3|x+iy+i|\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=3\sqrt{x^2+(y+1)^2}\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=9(x^2+y^2+2y+1)$$

$$\Rightarrow 8x^2+8y^2+4x+2y-4=0\Rightarrow(x+1/4)^2+(y+9/8)^2=45/64.$$



Получили уравнение окружности с центром в точке

$$O'(-1/4;-9/8)$$

и радиусом

$$R=\sqrt{45/64}\approx 0{,}84.$$

2) $\mathrm{I}m(z^2-3z)=-1.$

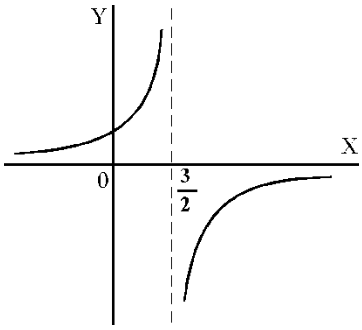
Проведем преобразования, для этого запишем комплексное число в алгебраической форме:

$$z^2-3z=(x+iy)^2-3(x+iy)=x^2+2ixy-y^2-3x-3iy=$$

$$=x^2-3x-y^2+i(2xy-3y).$$

Выделяем мнимую часть выражения:

$$\mathrm{I}m(z^2-3z)=-1\Rightarrow 2xy-3y=-1\Rightarrow y=\frac{-1/2}{x-3/2}.$$



Это уравнение определяет гиперболу, смещенную на 3/2 по оси ОХ и ветвями, расположенными во второй и четвертой четвертях, так как в уравнении знак минус.

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$:

$$f(z) = z^2 + (7i+2)\ln(2z),\quad z_0 = 2i$$

Находим производную функции:

$$f'(z) = \left(z^2 + (7i+2)\ln(2z)\right) = 2z + \frac{7i+2}{z}$$

Подставим в производную значение $z = z_0 = 2i$:

$$f'(2i) = 4i + \frac{7i+2}{2i} = 4i + \frac{(7i+2)(-2i)}{2i\cdot(-2i)} = 4i + \frac{14-4i}{4} = 4i + \frac{7-2i}{2} =$$
$$= 4i + \frac{7}{2} - i = \frac{7}{2} + 3i = 3{,}5 + 3i$$

Находим модуль и аргумент полученного комплексного числа:

$$|f'(z_0)| = |3{,}5 + 3i| = \sqrt{3{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{21{,}25} \approx 4{,}6$$
$$\arg f'(z_0) = \operatorname{arctg}\frac{3}{3{,}5} = \operatorname{arctg} 0{,}86 \approx 0{,}7 \ \ \textit{или} \ \approx 40{,}6^0$$

Модуль производной функции в данной точке равен коэффициенту растяжения, а аргумент - углу поворота при отображении этой функцией.

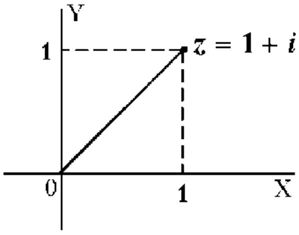
6. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{(L)} z^2\,dz$, где $(L)-$ отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1+i$.

1-ый способ (сведение к криволинейному интегралу):

$$\int\limits_{(L)} z^2\,dz = \int\limits_{(L)} (x+iy)^2(dx+idy) = \left| \begin{matrix} \textit{уравнение} \quad \textit{линии}\ (L): y = x \\ \textit{тогда}\ \ dy = dx,\ 0 \le x \le 1 \end{matrix} \right| =$$
$$= \int\limits_0^1 (x+ix)^2(dx+idx) = (1+i)^3\int\limits_0^1 x^2\,dx == (1+i)^3\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3} =$$

$$=\frac{1+3i+3i^2+i^3}{3}=\frac{1+3i-3-i}{3}=\frac{-2+2i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i.$$



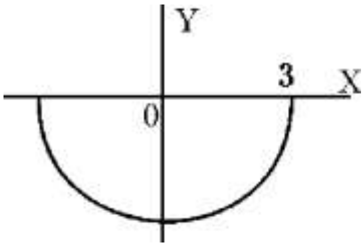
2-ой способ. Так как функция $f(z)=z^2$ является аналитической, то для нее существует первообразная и интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точки, поэтому его можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{(L)} z^2\,dz=\frac{z^3}{3}\Big|_0^{1+i}=\frac{1}{3}(1+i)^3=\frac{1}{3}(1+3i+3i^2+i^3)=\frac{1}{3}(1+3i-3-i)=$$

$$=\frac{1}{3}(-2+2i)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

2) Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)}\frac{dz}{z^2}$, где $(L)-$ нижняя полуокружность $|z|=3,\quad \operatorname{Im} z\le 0.$

Воспользуемся показательной формой представления функции.



$$z=|z|e^{i\phi},\ \frac{1}{z^2}=\frac{1}{|z|^2}e^{-2i\phi},\qquad dz=|z|ie^{i\phi}\,d\phi.$$

На контуре (L) имеем:

$$|z|=3,\ dz=3ie^{i\phi}\,d\phi,\quad -\pi\le\phi\le 0.$$

$$\int\limits_{(L)}\frac{dz}{z^2}=\int\limits_{-\pi}^{0}3ie^{i\phi}\frac{1}{9}e^{-2i\phi}\,d\phi=i/3\int\limits_{-\pi}^{0}e^{-i\phi}\,d\phi=$$

$$=-1/3e^{-i\phi}\Big|_{-\pi}^{0}=\ldots=$$

$$= -1/3(e^{0i} - e^{\pi i}) = -1/3(1 - \cos\pi - i\sin\pi) = -1/3(1+1-0) = -2/3.$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z^3 dz}{(z-1)^2(z^2+4)}, \qquad \text{где } L: \begin{cases} 1)\ |z| = 1{,}5; \\ 2)\ |z-2i| = 2; \\ 3)\ |z| = 3. \end{cases}$$

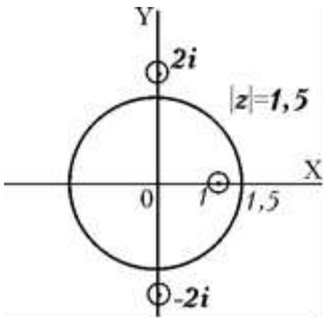
Запишем подынтегральную функцию в следующем виде:

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2(z^2+4)} = \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)}$$

Теперь видно,что подынтегральная функция имеет 3 особые точки (в данном случае точки разрыва): $z_1 = 1$, $z_{2;3} = \pm 2i$.

$$1)\ \oint\limits_{|z|=1{,}5} \frac{z^3 dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$$

Рассмотрим интеграл для первого контура.



Подынтегральная функция имеет 3 особые точки (в данном случае точки разрыва): $z_1 = 1$, $z_{2;3} = \pm 2i$, но только $z_1 = 1$ находится внутри рассматриваемого контура интегрирования. Таким образом, в качестве аналитической функции здесь выступает

$$f_1(z) = \frac{z^3}{z^2+4},$$

и по формуле (II)

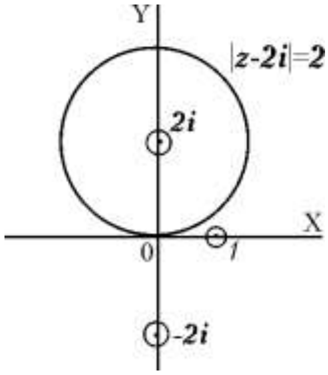
$$\oint\limits_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(z_0) \qquad \text{(II)}$$

имеем

$$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3\,dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi i \left(\frac{z^3}{z^2+4}\right)'\Big|_{z=1} = 2\pi i \frac{3z^2(z^2+4)-2z\cdot z^3}{(z^2+4)^2}\Big|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \frac{13}{25} \approx 3,27i.$$

2) $$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = \oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)}.$$



В данном случае внутрь контура интегрирования попадает только точка $z = 2i$, поэтому в качестве аналитической в области функции будет выступать

$$f_2(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)},$$

и по формуле (I)

$$\oint\limits_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i \cdot f(z_0) \qquad (I)$$

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)} = 2\pi i \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)}\Big|_{z=2i} =$$

$$= \frac{2\pi i(-8i)}{4i(2i-1)^2} = \frac{-4\pi i}{(-4-4i+1)} = \frac{-4\pi i}{(-3-4i)} = \frac{4\pi i}{(3+4i)} = \frac{4\pi i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$

$$= \frac{16\pi}{25} + i\frac{12\pi}{25} \approx 2,01 + 1,51 \cdot i.$$

3) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}=\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^3dz}{(z-1)^2(z+2i)(z-2i)}.$

В данном случае внутрь контура интегрирования попадают все три особые точки. По двум точкам интеграл уже вычислен. В точке $z=-2i$ решение аналогично предыдущему случаю, только теперь в качестве аналитической функции будет выступать функция

$$f_3(z)=\frac{z^3}{(z-1)^2(z-2i)}$$

и по формуле (I) получим:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^3dz}{(z-1)^2(z-2i)}=2\pi i\frac{z^3}{(z-1)^2(z-2i)}\Big|_{z=-2i}=$$

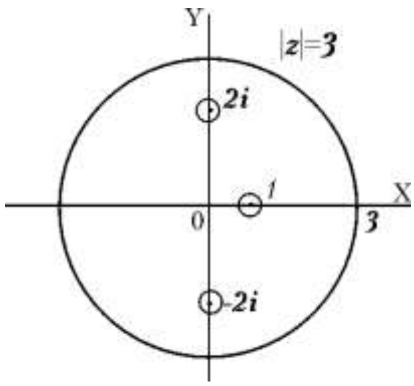
$$=\frac{2\pi i(8i)}{-4i(-2i-1)^2}=\frac{-4\pi i}{(-4+4i+1)}=\frac{-4\pi i}{(-3+4i)}=\frac{4\pi i}{(3-4i)}=\frac{4\pi i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=$$

$$=-\frac{16\pi}{25}+i\frac{12\pi}{25}\approx-2{,}01+1{,}51\cdot i.$$

Окружим каждую точку контурами и представим интеграл в виде суммы трех интегралов, каждый из которых уже вычислен:

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}=\oint\limits_{|z|=1,5}f_1(z)dz+\oint\limits_{|z-2i|=2}f_2(z)dz+\oint\limits_{|z+2i|=2}f_3(z)dz\approx$$

$$\approx 3{,}27i+2{,}01+1{,}51\cdot i-2{,}01+1{,}51\cdot i=3{,}27i+3{,}02i=6{,}29i.$$



Замечание. Если внутри контура интегрирования не окажется ни одной особой точки, то интеграл по замкнутому крнтуру от аналитической функции будет равен нулю.

4.8. Варианты индивидуального задания № 4 «Операционный метод»

Вариант № 1

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t) = \cos^2 t. \qquad 2)\ f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}. \qquad 2)\ F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p^2+1)}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ x'' - 2x' + x = \sin t, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$2)\ x'' + 7x' + 6x = 3t + 1, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$3)\ 9x'' + x = e^{3t} + 2, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x'' - 36x = \begin{cases} 0, & t<0, \\ 1, & 0 \le t \le 2, \\ -2, & 2 < t \le 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases} x' = 7x - 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0)=0, \\ y(0)=2. \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{cases} x' = 6x + 5y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0)=1, \\ y(0)=0. \end{matrix}$$

Вариант № 2

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t) = e^{-4t}\sin 3t \cos 2t. \qquad 2)\ f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ F(p)=\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}. \qquad 2)\ F(p)=-\frac{e^{-p}}{p^2-1}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ x''+2x'+x=6t+2, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$2)\ x''-16x=3e^t, \qquad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$3)\ x''+x'=\sin 2t, \qquad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''+9x=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1, & 1\le t\le 3,\\ 3, & 3<t\le 5,\\ 0, & t>5,\end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases}x'=x-7y\\ y'=-3x+5y\end{cases}, \quad \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=1\end{matrix}. \qquad 2)\ \begin{cases}x'=5x+y\\ y'=-10x+7y\end{cases}, \quad \begin{matrix}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{matrix}$$

Вариант № 3

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t)=\sin^4 t. \qquad 2)\ f(t)=t\,\mathrm{ch}t\cos at.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ F(p)=\frac{p+1}{p(p-1)(p+2)}. \qquad 2)\ F(p)=\frac{pe^{-2p}}{p^2-4}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ x''-x=te^t, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$2)\ x''+2x'=3\cos t, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$3)\ 9x''+4x=5t-2, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''-25x=\begin{cases}0, & t<0,\\ 3, & 0\le t<1,\\ 2, & 1\le t\le 3,\\ 0, & t>3,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases}x'=4x-5y\\ y'=-2x+7y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=2,\\ y(0)=0.\end{matrix}\qquad 2)\ \begin{cases}x'=x+y\\ y'=-5x+3y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=-2.\end{matrix}$$

Вариант № 4

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t)=\cos^4 t.\qquad 2)\ f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ F(p)=\frac{1}{(p+1)^2(p+3)}.\qquad 2)\ F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ 2x''+5x'=2\cos t,\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

$$2)\ x''+6x=t^2,\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

$$3)\ x''-4x'+3x=5e^{4t},\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''+16x=\begin{cases}0, & t<1,\\ -2, & 1\le t\le 2,\\ 1, & 2<t\le 3,\\ 0, & t>3,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases}x'=6x+2y\\ y'=2x+9y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=-1,\\ y(0)=0.\end{matrix}\qquad 2)\ \begin{cases}x'=4x-5y\\ y'=x+2y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=3,\\ y(0)=-1.\end{matrix}$$

Вариант № 5

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ \ f(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t\sin at. \qquad 2)\ \ f(t)=\frac{1-e^{at}}{t}.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ \ F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)^2}. \qquad 2)\ \ F(p)=\frac{p\ \ -1}{(p^2+1)}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ 4x''-8x'+5x=5\cos t, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$2)\ 9x''-6x'+x=2e^{-t}, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

$$3)\ x''+x=t^2-1, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''-x=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & 0\le t\le 1,\\ -1, & 1<t\le 2,\\ 0, & t>2,\end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases}x'=2x-2y\\ y'=x+5y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{matrix} \qquad 2)\ \begin{cases}x'=-2x-4y\\ y'=4x-2y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=-4,\\ y(0)=0.\end{matrix}$$

Вариант № 6

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ \ f(t)=\cos^2 3t. \qquad 2)\ \ f(t)=t\left(e^t+\operatorname{ch}t\right).$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ \ F(p)=\frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}. \qquad 2)\ \ F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''+x'+x=7e^{2t}$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

2) $x''-x'=t^2$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

3) $x''-4x=4\sin t$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''-4x=\begin{cases}0, & t<1,\\ -1, & 1\le t\le 2,\\ 1, & 2<t\le 4,\\ 0, & t>4,\end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

1) $\begin{cases}x'=7x-4y\\ y'=-x+4y\end{cases}, \begin{matrix}x(0)=-2,\\ y(0)=0.\end{matrix}$ $\qquad$ 2) $\begin{cases}x'=6x-2y\\ y'=8x+6y\end{cases}, \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=-3.\end{matrix}$

Вариант № 7

1. Найти изображения следующих функций:

1) $f(t)=e^t \operatorname{sh} t.$ $\qquad$ 2) $f(t)=t^2\cos t.$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

1) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+p^2}.$ $\qquad$ 2) $F(p)=\dfrac{(p-2)e^{-2p}}{p^2+4p+5}.$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''-3x'+2x=t-2$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

2) $x''+x=te^t$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

3) $x''+4x'=\sin t$, $\quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''+25x=\begin{cases}0, & t<0,\\ -1, & 0\le t<2,\\ 1, & 2\le t\le 4,\\ 0, & t>4,\end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 4x - 6y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0) = 5, \\ y(0) = 0. \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{cases} x' = 7x - y \\ y' = 4x + 7y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = -2. \end{matrix}$$

Вариант № 8

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t) = e^{-t} t^2. \qquad 2)\ f(t) = (1+t)\sin 2t.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

$$1)\ F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}. \qquad 2)\ F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p^2 - 1)(p+4)}.$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

$$1)\ x'' - 4x' = e^{-t}, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

$$2)\ x'' + 3x' + 2x = 1 + t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = .$$

$$3)\ x'' + x = -5\cos 2t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x'' - 9x = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \le t \le 2, \\ 2, & 2 < t \le 4, \\ 0, & t > 4, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases} x' = -4x + y \\ y' = -2x - y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = -3. \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$$

Вариант № 9

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ f(t) = t e^{3t} \cos t. \qquad 2)\ f(t) = t \operatorname{sh} t.$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

1) $F(p)=\dfrac{p-8}{p^2+4}$. 2) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2(p-2)}$.

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''-x'=te^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.
2) $x''-9x=1-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.
3) $x''-2x'+x=\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''+x=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t<1,\\ 0, & 1\le t<2,\\ -1, & 2\le t\le 3,\\ 0, & t>3,\end{cases}\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

1) $\begin{cases}x'=4x-y\\ y'=-3x+6y\end{cases}$, $\begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=5.\end{matrix}$ 2) $\begin{cases}x'=4x+2y\\ y'=-2x+4y\end{cases}$, $\begin{matrix}x(0)=-4,\\ y(0)=0.\end{matrix}$

Вариант № 10

1. Найти изображения следующих функций:

1) $f(t)=e^{3t}\cos^2 4t$. 2) $f(t)=\dfrac{e^t-1+2t}{t}$.

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$. 2) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+1}e^{-t}$.

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''+x=te^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.
2) $x''+4x'=4\sin 3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.
3) $x''+6x'+9x=2t+1$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''+4x=\begin{cases}0, & t<2\\ 1, & 2\le t\le 3,\\ -1, & 3<t\le 4,\\ 0, & t>4,\end{cases}\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

$$1)\ \begin{cases}x'=2x-5y\\ y'=x+6y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=6,\\ y(0)=0.\end{matrix}\qquad 2)\ \begin{cases}x'=5x+2y\\ y'=4x+3y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=3.\end{matrix}$$

4.9. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4 «Операционный метод»

1. Найти изображения следующих функций:

$$1)\ \ f(t)=t^2\cos 2t.\qquad\qquad 2)\ \ f(t)=\frac{e^t-1+2t}{t}.$$

1) $f(t)=t^2\cos 2t.$

Используем таблицу оригиналов и изображений и свойство дифференцирования:

$$\cos at\doteq\frac{p}{p^2+a^2}\quad\Rightarrow\quad\cos 2t\doteq\frac{p}{p^2+2^2}=\frac{p}{p^2+4}$$

Умножение оригинала на t соответствует дифференцированию его изображения по p.

$$t\cdot\cos 2t\doteq(-1)\cdot F'(p)=-\left(\frac{p}{p^2+4}\right)'=-\frac{p^2+4-p\cdot 2p}{(p^2+4)^2}=\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}.$$

$$t^2\cdot\cos 2t\doteq(-1)^2\cdot F''(p)=\left(\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\right)'=$$

$$=\frac{2p(p^2+4)^2-(p^2-4)\cdot 2(p^2+4)\cdot 2p}{(p^2+9)^4}=$$

$$=\frac{2p(p^2+4)-(p^2-4)\cdot 4p}{(p^2+9)^3}=\frac{-2p^3+24p}{(p^2+9)^3}.$$

2) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}-1+2t}{t}$.

Используем таблицу оригиналов и изображений и свойство интегрирования изображения.

Сначала произведем почленное деление:

$$f(t)=\frac{e^{-2t}-1+2t}{t}=\frac{e^{-2t}-1}{t}+\frac{2t}{t}=\frac{e^{-2t}-1}{t}+2.$$

Изображения костант: $2\doteq\dfrac{2}{p}$, $1\doteq\dfrac{1}{p}$.

Изображение показательной функции:

$$e^{-at}\doteq\frac{1}{p+a}\quad\Rightarrow\quad e^{-2t}\doteq\frac{1}{p+2}.$$

Свойство интегрирования изображения: делению оригинала на t соответствует интегрирование изображения:

$$\frac{f(t)}{t}\doteq\int_p^{\infty}F(p)\,dp$$

$$\frac{e^{-2t}}{t}\doteq\int_p^{\infty}\left(\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p}\right)dp=(\ln(p+2)-\ln p)\Big|_p^{\infty}=$$

$$=\ln\frac{p+2}{p}\Big|_p^{\infty}=\ln 1-\ln\frac{p+2}{p}=\ln\left(1+\frac{2}{p}\right).$$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

1) $F(p)=\dfrac{1}{(p+3)(p^2-4)}$. 2) $F(p)=\dfrac{e^{-5t}}{p^2+4p+13}$.

1) $F(p)=\dfrac{1}{(p+3)(p^2-4)}$.

Раскладываем рациональную дробь на простейшие слагаемые:

$$F(p)=\frac{1}{(p+3)(p^2-4)}=\frac{1}{(p+3)(p-2)(p+2)}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}.$$

Находим неопределенные коэффициенты:

$$\frac{1}{(p+3)(p-2)(p+2)}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}$$

$$1=A(p-2)(p+2)+B(p+3)(p+2)+C(p+3)(p-2)$$

$$p=-3 \quad : \quad 1=A(-5)(-1) \quad \Rightarrow A=\frac{1}{5};$$

$$p=2 \quad : \quad 1=B(5)(4) \quad \Rightarrow B=\frac{1}{20};$$

$$p=-2 \quad : \quad 1=C(1)(-4) \quad \Rightarrow C=-\frac{1}{4};$$

Получаем сумму дробей и по таблице находим оригинал для каждой:

$$\frac{1}{(p+3)(p-2)(p+2)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}\doteq$$

$$\doteq\frac{1}{5}\cdot e^{-3t}+\frac{1}{20}\cdot e^{2t}-\frac{1}{4}\cdot e^{-2t}.$$

2) $F(p)=\dfrac{e^{-5t}}{p^2+4p+13}$.

Здесь нужно использовать свойство запаздывания оригинала

$$f(t-\tau)\doteq F(p)e^{-\tau p}$$

При запаздывании оригинала на время τ его изображение умножается на $e^{-\tau p}$.

Итак, сначала находим оригинал для функции

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+13}=\frac{1}{p^2+4p+4+9}=\frac{1}{(p+2)^2+9}.$$

Из таблицы берем формулу

$$e^{-at}\sin bt\doteq\frac{b}{(p+a)^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{(p+a)^2+b^2}\doteq e^{-at}\sin bt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(p+a)^2+b^2}\doteq\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt;$$

$$\frac{1}{(p+2)^2+3^2}\doteq\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

Теперь заменяем t на $t-5$ и получаем

$$\frac{e^{-5t}}{(p+2)^2+3^2} \doteq \frac{1}{3}e^{-2(t-5)}\sin 3(t-5).$$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''-7x'-8x=3t, \qquad x(0)=x'(0)=0.$

2) $x''+12x'+36x=2e^{-t}, \qquad x(0)=x'(0)=0.$

3) $x''+25x=3\cos t, \qquad x(0)=x'(0)=0.$

1) $x''-7x'-8x=3t, \quad x(0)=x'(0)=0$

Если $X(p)$ есть изображение искомого решения $x(t)$, то изображение производных при нулевых начальных условиях и изображение правой части уравнения

$$x'(t) \doteq pX(p), \quad x''(t) \doteq p^2X(p), \quad f(t)=3t \doteq \frac{3}{p^2}.$$

Тогда изображение данного уравнения, т.е. операторное уравнение имеет вид:

$$x''-7x'-8x=3t \quad \doteq \quad p^2X(p)-7pX(p)-8X(p)=\frac{3}{p^2},$$

$$(p^2-7p-8)X(p)=\frac{3}{p^2}$$

Решение операторного уравнения

$$X(p)=\frac{3}{p^2(p^2-7p-8)}=\frac{3}{p^2(p+1)(p-8)}$$

Для получения оригинала, т.е. функции $x(t)$, разложим изображение на простые слагаемые и восстановим оригинал, используя таблицу.

$$X(p)=\frac{3}{p^2(p+1)(p-8)}$$

$$\frac{3}{p^2(p+1)(p-8)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-8}$$

$$3=A(p+1)(p-8)+Bp(p+1)(p-8)+Cp^2(p-8)+Dp^2(p+1)$$

$$p=0 \quad : \quad 3=A(1)(-8) \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{3}{8};$$

$$p=-1 \quad : \quad 3=C(1)(-9) \quad \Rightarrow \quad =C=-\frac{1}{3};$$

$$p=8 \quad : \quad 3=D(64)(9) \quad \Rightarrow \quad =D=\frac{1}{3\cdot 64}=\frac{1}{192};$$

$$p^3 \quad : \quad 0=B+C+D \quad \Rightarrow \quad =B=-C-D=\frac{1}{3}-\frac{1}{192}=\frac{64-1}{192}=\frac{63}{192}=$$

$$=\frac{21}{64}$$

$$\frac{3}{p^2(p+1)(p-8)}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{21}{64}\cdot\frac{1}{p}+-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{192}\cdot\frac{1}{p-8}$$

$$=-\frac{3}{8p^2}+\frac{21}{64p}-\frac{1}{3(p+1)}+\frac{1}{192(p+8)}.$$

Искомое решение $x(t)=-\frac{3}{8}t+\frac{21}{64}-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{192}e^{8t}$.

2) $x''+12x'+36x=2e^{-t}, \quad x(0)=x'(0)=0$

По аналогии с примером (1) составляем операторное уравнение и его решение:

$$x'(t)\doteq pX(p), \quad x''(t)\equiv p^2X(p),$$

$$(p^2+12p+36)X(p)=\frac{2}{p+1}, \quad (p+6)^2X(p)=\frac{2}{p+1},$$

$$X(p)=\frac{2}{(p+6)^2(p+1)}$$

Разложим изображение на простые слагаемые и восстановим оригинал, используя таблицу.

$$\frac{2}{(p+6)^2(p+1)}=\frac{A}{(p+6)^2}+\frac{B}{p+6}+\frac{C}{p+1}$$

$$2=A(p+1)+B(p+6)(p+1)+C(p+6)^2$$

$$p=-1 \quad\Rightarrow\quad 2=C(25) \quad\Rightarrow\quad C=\frac{2}{25};$$

$$p=-6 \quad\Rightarrow\quad 2=A(-5) \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{2}{5};$$

$$p^2 \quad:\quad 0=B+C \quad\Rightarrow\quad 0=B+\frac{2}{25}\Rightarrow \quad B=-\frac{2}{25};$$

$$\frac{2}{(p+6)^2(p+1)}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(p+6)^2}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{p+6}+\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{p+1}$$

Искомое решение: $x(t)=-\frac{2}{5}t\,e^{-6t}-\frac{2}{25}e^{-6t}+\frac{2}{25}e^{-t}.$

3) $x''+25x=3\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0$

Если $X(p)$ есть изображение искомого решения $x(t)$, то изображение производных при нулевых начальных условиях и правой части уравнения

$$x'(t)\doteq pX(p),\quad x''(t)\doteq p^2X(p),\quad f(t)=3\cos t\doteq\frac{3p}{p^2+1}.$$

Изображение данного уравнения, т.е. операторное уравнение имеет вид:

$$(p^2+25)X(p)=\frac{3p}{p^2+1},\qquad X(p)=\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+25)};$$

$$\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+25)}=\frac{Ap+B}{(p^2+1)}+\frac{Cp+D}{(p^2+25)};$$

$$3p=Ap(p^2+25)+B(p^2+25)+Cp(p^2+1)+D(p^2+1);$$

$$p=0 \quad:\quad 0=25B+D;$$

$$p^2 \quad:\quad 0=B+D; \quad\Rightarrow\quad B=-D \quad\Rightarrow\quad -25D+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=0,$$

$$B=0;$$

$$p^3 \quad:\quad 0=A+C; \quad\Rightarrow\quad C=-A \quad\Rightarrow$$

$$p \;\;:\;\; 3 = 25A + C \;\Rightarrow\; 3 = 25A - A \;\Rightarrow\; 24A = 3 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{8};$$

$$C = -\frac{1}{8}.$$

Таким образом, получили:

$$\frac{3p}{(p^2+1)(p^2+25)} = \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+25}\right).$$

По таблице находим оригиналы для каждого слагаемого и замисываем решение уравнения.

Ответ: $x(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \cos 5t)$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x'' + x = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \le t \le \pi \\ t, & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi, \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

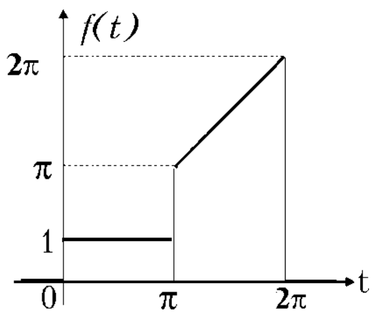
Решение $x(t)$ уравнения $x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \;\; x(0) = x'(0) = 0$ находится в виде свертки функций $x'_1(t)$ и $f(t)$, где $x_1(t)$ – решение уравнения

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 1, \quad x_1(0) = x'_1(0) = 0$$

$$x(t) = x'_1(t) * f(t) = \int_0^t x'_1(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t x'_1(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

Сначала находим решение задачи $x'' + x = 1, \;\; x(0) = x'(0) = 0.$

$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p} \;\Rightarrow\; pX(p) = \frac{1}{p^2+1} \;\Rightarrow\; x'_1(t) = \sin t.$$



Далее по формуле Дюамеля для каждого временного интервала $0 < t < \pi$: $f(t) = 1$,

$$x(t) = \int_0^t 1\cdot\sin(t-\tau)d\tau = \cos(t-\tau)\big|_0^t = \; = 1-\cos t.$$

Для $\pi \le t \le 2\pi$: $f(t) = t$,

$$x(t) = \int_0^\pi 1\cdot\sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^t \tau\sin(t-\tau)d\tau =$$
$$= \cos(t-\tau)\big|_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau)+\sin(t-\tau))\big|_\pi^t =$$
$$= \cos(t-\pi)-\cos t + t - \pi\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi) =$$
$$= (\pi-2)\cos t + t + \sin t.$$

Для $t > 2\pi$: $f(t) = 0$,

$$x(t) = \int_0^\pi 1\cdot\sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^{2\pi} \tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau + \int_{2\pi}^t 0\cdot\sin(t-\tau)d\tau =$$
$$= \cos(t-\tau)\big|_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau)+\sin(t-\tau))\big|_\pi^{2\pi} + 0 =$$
$$= \cos(t-\pi)-\cos t + 2\pi\cos(t-2\pi)+\sin(t-2\pi) -$$
$$-\pi\cos(t-\pi)-\sin(t-\pi) =$$
$$= -2\cos t + 2\pi\cos t + \sin t + \pi\cos t + 2\sin t =$$
$$= (3\pi-2)\cos t + 2\sin t.$$

Ответ: $x(t) = \begin{cases} 1-\cos t, & 0 < t < \pi, \\ (\pi-2)\cos t + t + \sin t, & \pi \le t \le 2\pi, \\ (3\pi-2)\cos t + 2\sin t, & t > 2\pi. \end{cases}$

5. Найти решение систем операционным методом:

1) $\begin{cases} x' = 7x - 3y \\ y' = x + 3y, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 2 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x' = 2x + 13y \\ y' = -x + 2y, \quad x(0) = -1,\ y(0) = 0 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x' = 7x - 3y \\ y' = x + 3y, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 2 \end{cases}$

Если $X(p),\ Y(p)$ – изображения решений системы $x = x(t),\ y = y(t)$, то изображения производных с учетом начальных условий:

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$$

и соответствующая операционная система будет иметь вид

$$\begin{cases} pX(p) = 7X(p) - 3Y(p) \\ pY(p) - 2 = X(p) + 3Y(p) \end{cases} \quad \begin{cases} (p-7)X(p) + 3Y(p) = 0 \\ X(p) - (p-3)Y(p) = -2 \end{cases}$$

Выражаем из 1-го уравнения $Y(p) = -\dfrac{1}{3}(p-7)X(p)$ и подставляем во 2-е:

$$X(p) + \frac{(p-3)(p-7)}{3}X(p) = -2, \quad 3X(p) + (p^2 - 10p + 21)\,X(p) = -6,$$

$$X(p)(p^2 - 10p + 24) = -6, \quad X(p) = -\frac{6}{p^2 - 10p + 24},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{3}(p-7)X(p) = \frac{2(p-7)}{p^2 - 10p + 24}$$

Приводим полученные изображения к табличным. Выделяем в знаменателях полный квадрат, разбиваем дробь для $Y(p)$ на 2 слагаемых:

$$X(p) = -\frac{6}{(p-5)^2 - 1}, \quad Y(p) = \frac{2(p-7)}{p^2 - 10p + 24} = \frac{2(p-5)}{(p-5)^2 - 1} - \frac{4}{(p-5)^2 - 1}$$

Находим по таблице оригиналы:

$$X(p) = -\frac{6}{(p-5)^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = -6e^{5t}\,\mathrm{sh}\,t;$$

$$Y(p) = \frac{2(p-5)}{(p-5)^2 - 1} - \frac{4}{(p-5)^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2e^{5t}\,\mathrm{ch}\,t - 4e^{5t}\,\mathrm{sh}\,t.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -6e^{5t}\,\mathrm{sh}\,t \\ y(t) = 2e^{5t}\,\mathrm{ch}\,t - 4e^{5t}\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = 2x + 13y \\ y' = -x + 2y, \quad x(0) = -1,\ y(0) = 0 \end{cases}$

Если $X(p),\ Y(p)$ – изображения решений системы $x = x(t),\ y = y(t)$, то изображения производных с учетом начальных условий

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1,$$
$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p)$$

Тогда операционная система

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = 2X(p) + 13Y(p) \\ pY(p) = -X(p) + 2Y(p) \end{cases} \qquad \begin{cases} (p-2)X(p) - 13Y(p) = -1 \\ X(p) + (p-2)Y(p) = 0 \end{cases}$$

Выражаем из 2-го уравнения $X(p) = -(p-2)Y(p)$ и подставляем в 1-е:

$$-(p-2)^2 Y(p) - 13Y(p) = -1, \quad Y(p) = \frac{1}{(p-2)^2 + 13},$$

$$X(p) = -\frac{p-2}{(p-2)^2 + 13}$$

Приводим полученные изображения к табличным:

$$X(p) = -\frac{p-2}{(p-2)^2 + 13} \doteq e^{2t} \cos\sqrt{13}t$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-2)^2 + 13} = \frac{1}{\sqrt{13}} \frac{\sqrt{13}}{(p-2)^2 + 13} \doteq \frac{1}{\sqrt{13}}\left(e^{2t} \sin\sqrt{13}t\right)$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos\sqrt{13}t \\ y(t) = e^{2t}\cos\sqrt{13}t. \end{cases}$

5. ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, обучающиеся по классической заочной форме (КЗФ), сдают экзамен во время экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит семь задач. Экзамен считается сданным, если решены 4 задачи и более. Преподаватель может задать вопросы по теории изучаемого материала.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают экзамен в тестовой форме (on-line режим).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

Дифференциальные уравнения и системы

1. Понятие дифференциального уравнения 1-го порядка, его общего и частного решений. Задача Коши. Геометрический смысл уравнения и его решений.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения 1-го порядка.
3. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. В каких случаях возможно разделение переменных?
4. Однородные уравнения 1-го порядка. Метод интегрирования однородных уравнений.
5. Линейные уравнения 1-го порядка. Методы решения линейных уравнений.
6. Уравнения Бернулли и их решение.
7. Уравнения в полных дифференциалах. Критерий и методы решения.
8. Определение дифференциального уравнения 2-го порядка, его общего и частного решений, их геометрический смысл.
9. Задача Коши для уравнения 2-го порядка. Теорема существования и единственности ее решения.
10. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Методы интегрирования таких уравнений.
11. Определение линейного дифференциального уравнения n-го порядка (однородного и неоднородного). Основные свойства частных решений линейного однородного уравнения.

12.Понятие и критерий линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского.

13.Теорема о структуре общего решения однородного линейного уравнения (на примере уравнения 2-го порядка).

14.Метод нахождения общего решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

15.Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

16.Метод вариации произвольных постоянных нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения.

17.Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения.

18.Понятие нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Задача Коши для такой системы. Методы решения систем.

Числовые и функциональные ряды

1. Понятие числового ряда, его суммы. Необходимый признак сходимости.
2. Свойства сходящихся рядов.
3. Сравнительный признак сходимости знакоположительных рядов. Эталонные ряды.
4. Признак Д'аламбера. Для каких видов числовых рядов он эффективен?
5. Радикальный признак Коши. Для каких видов числовых рядов он применяется?
6. Интегральный признак Коши-Маклорена. В каких случаях его следует применять?
7. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Как проводится оценка суммы и остатка такого ряда? Понятие абсолютной и условной сходимости.
8. Понятие функционального ряда и области его сходимости. Равномерная и абсолютная сходимость? Свойства равномерно и абсолютно сходящихся рядов.
9. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля.
10. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Способы нахождения интервалов сходимости.
11. Ряды Тейлора и Маклорена для данной функции. Условия разложения функции в ряд Тейлора. Схема построения ряда Тейлора (Маклорена).
12. Ряды Маклорена для некоторых элементарных функций, интервалы их сходимости. Использование готовых разложений для

получения разложения в ряд Маклорена более сложных функций. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

13.Понятие тригонометрического ряда. Формулы Фурье для нахождения коэффициентов ряда (функция периодическая и заданная на интервале $[-\pi;\pi]$).

14.Теорема Дирихле об условиях разложения функции в ряд Фурье.

15.Формулы Фурье для четных и нечетных функций.

16.Формулы Фурье для случая разложения функции, заданной в произвольном интервале $[-l;l]$.

17.Разложение в ряд Фурье непериодических функций.

Комплексные числа и функции

1. Понятие комплексного числа, его действительной и мнимой части.
2. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Какие комплексные числа называются равными, комплексно - сопряженными?
3. Арифметические действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.
4. Геометрическое представление комплексного числа, комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Триномометрическая и показательная форма записи комплексных чисел. Переход из одной формы записи комплексного числа к другой.
6. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа. Формулы Муавра.
7. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции.
8. Показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические и обратные тригонометрические функции комплексного переменного.
9. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
10. Сопряженные гармонические функции.
11. Понятие аналитической функции комплексного переменного в области. Необходимые и достаточные условия аналитичности.
12. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.
13. Понятие интеграла от функции комплексного переменного и его основные свойства. Вычисление интегралов.

14.Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши и ее следствия.

Операционный метод

1. Дайте определение преобразования Лапласа. Какая функция может служить оригиналом? Что называется изображением функции по Лапласу?
2. Запишите таблицу изображений наиболее часто используемых элементарных функций.
3. Сформулируйте и запишите свойство линейности. Как оно используется для нахождения изображения по оригиналу и наоборот?
4. Сформулируйте и запишите свойства дифференцирования изображения и оригинала. Как они используются для нахождения изображения по оригиналу и наоборот?
5. Сформулируйте и запишите свойства интегрирования изображения и оригинала. Как они используются для нахождения изображения по оригиналу и наоборот?
6. Сформулируйте и запишите свойства запаздывания и смещения. Как они используются для нахождения изображения по оригиналу и наоборот?
7. Дайте понятие свертки функций. Как записывается изображение свертки? Как можно использовать формулу свертки для. нахождения изображения по оригиналу и наоборот?
8. Изложите схему нахождения частного решения линейных дифференциальных уравнений операционным методом.
9. Изложите схему нахождения частного решения систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом.
10.Запишите и поясните формулу Дюамеля.
11.Понятие функций Хависайда (η-функция) и Дирака (δ-функция).

5.3.Образец билета к экзамену для студентов, обучающихся по классической заочной форме

1. Решить уравнения 1-го порядка:

$$1)\quad y' - 2xy - 2x^3.$$

$$2)\ y'\cdot\sqrt{1+x^2} - \sin^2 y = 0, \qquad y(0) = \pi/4.$$

2. Решить уравнение операционным методом:

$$y'' + 6y' + 25y = 3x, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

3. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{n\cdot\sqrt{4n^2+5n+1}}$$

4. Найти интервал сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n\,3^n}$$

5. Разложить в ряд Маклорена функцию:

$$y=x\cdot\ln(1-3x^2)$$

6. Вычислить в показательной форме:

$$1)\left(\frac{-1+i}{2\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{3}}\right)^6; \qquad 2)\ln(-7i)$$

Результат записать в алгебраической форме.

7. Найти интеграл

$$\int\limits_{(L)}(z^2+z-1)\,dz$$

по отрезку прямой от точки $z_1=0$ до точки $z_2=2i$.

5.4.Образец билета к экзамену для студентов, обучающихся с применением дистанционных технологий

Билет к зачету включает в себя 20 заданий: задания на выбор единственного ответа; задания на выбор множественных ответов; задания на установление последовательности; задания на установление соответствия; задания для краткого ответа.

1. Задания на выбор единственного ответа

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $\sin x dy = y\ln y dx$**.**

1. $y=e^{tg\frac{x}{2}}$
2. $y=e^{C\cdot\cos x}$

3. $y = e^{C \cdot tg\frac{x}{2}}$

4. $y = e^{C \cdot ctg\frac{x}{2}}$

2. Задания на выбор множественных ответов

Для нахождения частного решения дифференциального уравнения 1-го порядка необходимо знать

1. Общее решение этого уравнения $y = y(x; C)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$
2. Начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$
3. Общее решение этого уравнения $y = y(x; C)$
4. Общий интеграл уравнения $F(x; y; C) = 0$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$

3. Задания на установление последовательности

Укажите последовательно формы записи дифференциального уравнения 1-го порядка: неявная, дифференциальная, явная.

1. $f(x; y)dx + g(x; y)dy = 0$
2. $F(x; y; y') = 0$
3. $y' = f(x; y)$

4. Задания на установление соответствия

Установите соответствие уравнение и методов их решения.

1. $y'' + 9y = ctg 3x$ 2. $y'' - 8y' + 7y = 10 \cdot e^{2x}$ 3. $y'' + y \cdot (y')^3 = 0$ 4. $y'' x \ln x = y'$	1. Понижение порядка с помощью замены $y' = p(y)$, $y'' = p'_y \cdot p$ 2. Понижение порядка с помощью замены $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ 3. Метод вариации произвольных постоянных 4. Нахождение общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения по методу неопределенных коэффициентов

5. Задания для краткого ответа

Решить задачу Коши $(x+4)dy - xydx = 0$, $y(-3) = e$

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. — М.: Наука, 1978.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1971.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 2. – М.: Высш. шк., 1986.

6.2. Учебно-методические пособия

4. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика, часть 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие. – Томск, 2008. – 203 с.
5. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика, часть 4. Кратные интегралы. Теория поля. Функции комплексного переменного. Операционный метод: Учебное пособие. – Томск, 2009. – 192 с.

6.3. Internet-ресурсы

6. Сайт ТПУ.– Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный.

Учебное издание

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЯДЫ
И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ**

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

ТЕРЕХИНА Людмила Ивановна
ФИКС Александр Иванович

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры ВМ ФТИ
О.Н. Имас

Компьютерная верстка *Н.В. Шабалдина*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 1,16. Уч.-изд.л. 1,05.
Заказ . Тираж экз.

nqa. ISO 9001 Registered

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

UKAS 015

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru