2.2 Пример РГР №4: Расчет плоской статически-неопределимой рамы методом сил

Для заданной статически-неопределимой рамы (рис. 2.3)

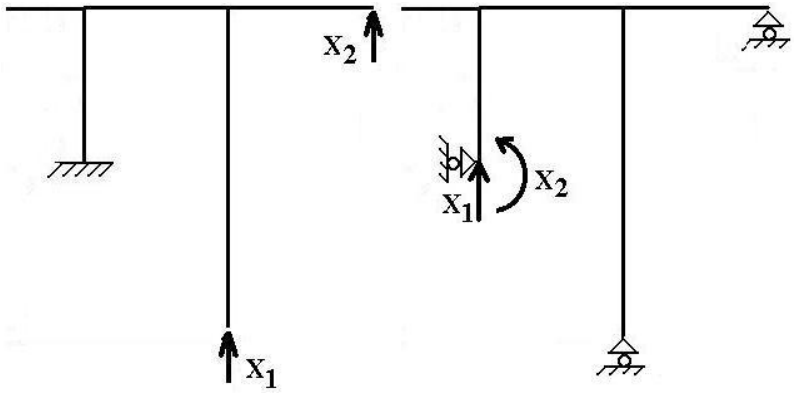
1) определить степень статической неопределимости;
2) выбрать две основные системы и соответствующие им лишние неизвестные X_1, X_2;
3) составить систему канонических уравнений в общем виде;

4) построить для выбранной основной системы эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки M_p и от единичных сил M_1, M_2 отдельно;
5) вычислить значения коэффициентов при лишних неизвестных и свободных членов в канонических уравнениях, пользуясь способом Верещагина;
6) решить систему канонических уравнений и определить значение лишних неизвестных X_1, X_2 с проверкой подставляя решение в каждое уравнение;
7) построить эпюры изгибающих моментов для основной системы от найденных значений лишних неизвестных M_{X_1}, M_{X_2};
8) построить методом наложения суммарную эпюру изгибающих моментов M;
9) составить выражения для поперечных сил Q и продольных сил N;
10) произвести статическую и деформационные проверки правильности построения эпюр;

Исходные данные $P = 50$ кН, $M = 100$ кН · м, $l = 1$ м, $h = 1$ м, $EI = const$

Решение.

1) <u>Степень статической неопределимости</u> (ССН) = 3+1+1-3=2 (три реактивных усилия в заделке и по одной вертикальной силе, возникающей на каждой из двух опор, минус три уравнения статического равновесия).



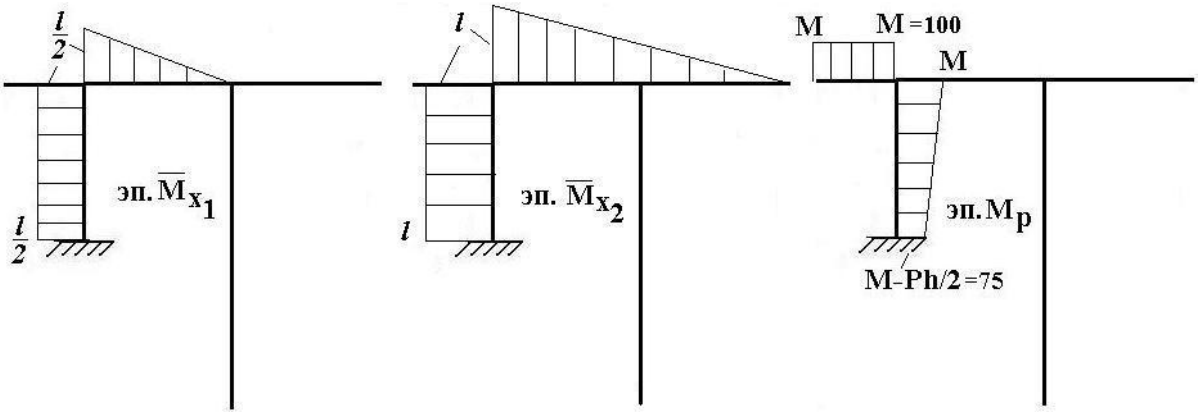
2) <u>Выбор основной системы</u> Основную систему № 1 получим, удалив две шарнирно-подвижные опоры и вводя вместо них две лишние неизвестные – вертикальные реакции. Основную систему № 2 получим, преобразовав жесткую заделку в шарнирно-подвижную в вертикальном направлении опору, вводя в качестве лишних неизвестных изгибающий момент и вертикальную силу (рис. 2.4). Для дальнейших расчетов будем использовать основную систему № 1, поскольку все эпюры внутренних усилий могут быть построены для нее без определения реактивных усилий, возникающих на опорах.

3) <u>Система канонических уравнений</u> для дважды статически-неопределимой рамы в общем виде имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

4) <u>Построение эпюр от единичных значений лишних неизвестных и внешней нагрузки:</u>

Эпюры имеют вид, представленный на рис. 2.5



5) <u>Определение коэффициентов при лишних неизвестных и свободных членов</u>

$$EI\cdot\delta_{11}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\otimes\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\cdot\frac{h}{2}\otimes\frac{l}{2}=\frac{l^3}{24}+\frac{h\cdot l^2}{8}=\frac{1}{6}=0{,}167$$

$$EI\cdot\delta_{22}=\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\otimes\frac{2}{3}\cdot l+l\cdot\frac{h}{2}\otimes l=\frac{l^3}{3}+\frac{h\cdot l^2}{4}=\frac{7}{12}=0{,}583$$

$$EI\cdot\delta_{12}=EI\cdot\delta_{21}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\otimes\frac{5}{6}\cdot l+\frac{l}{2}\cdot\frac{h}{2}\otimes l=\frac{5l^3}{48}+\frac{h\cdot l^2}{4}=0{,}354$$

На горизонтальных участках грузовая эпюра и эпюры от единичных усилий не пересекаются, следовательно, перемножение эпюр осуществляется только в рамках вертикального участка

$$\mathrm{EI}\cdot\Delta_{1P}=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}-\mathrm{Ph}/2}{2}\cdot\frac{\mathrm{h}}{2}\cdot\left(-\frac{\mathrm{l}}{2}\right)=-21{,}875$$

$$\mathrm{EI}\cdot\Delta_{2P}=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}-\mathrm{Ph}/2}{2}\cdot\frac{\mathrm{h}}{2}\cdot(-\mathrm{l})=-43{,}750$$

6) <u>Решение системы канонических уравнений</u>

$$\begin{cases}0{,}167\cdot X_1+0{,}354\cdot X_2-21{,}875=0,\\0{,}354\cdot X_1+0{,}583\cdot X_2-43{,}750=0.\end{cases}$$

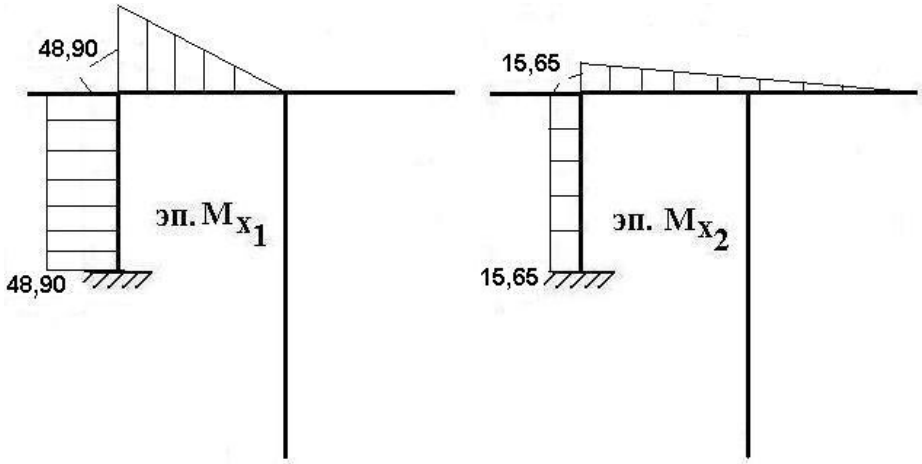
дает $X_1=97{,}81\ \text{кН}, X_2=15{,}65\ \text{кН}$

Подстановка найденных значений лишних неизвестных в систему уравнений подтверждает правильность их определения

$$\begin{cases}0{,}167\cdot 97{,}81+0{,}354\cdot 15{,}65-21{,}875\equiv 0,\\0{,}354\cdot 97{,}81+0{,}583\cdot 15{,}65-43{,}750\equiv 0.\end{cases}$$

7) <u>Построение эпюр от лишних неизвестных</u>

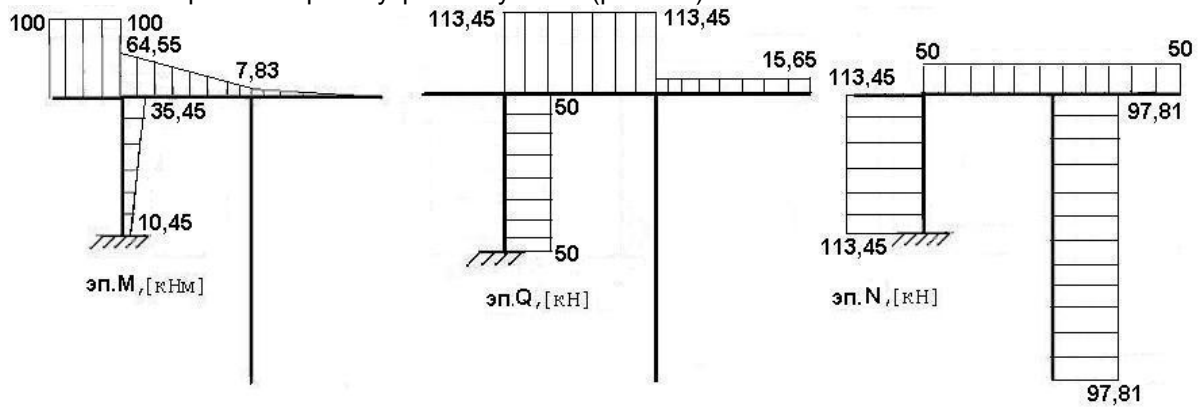
Данные эпюры получим умножением эпюр от единичных усилий на найденные значения от лишних неизвестных (рис. 2.6)



8) Суммарную эпюру изгибающих моментов получим наложением эпюры от заданной нагрузки и эпюр от лишних неизвестных. При этом значения изгибающего момента в узловых точках занесем в таблицу:

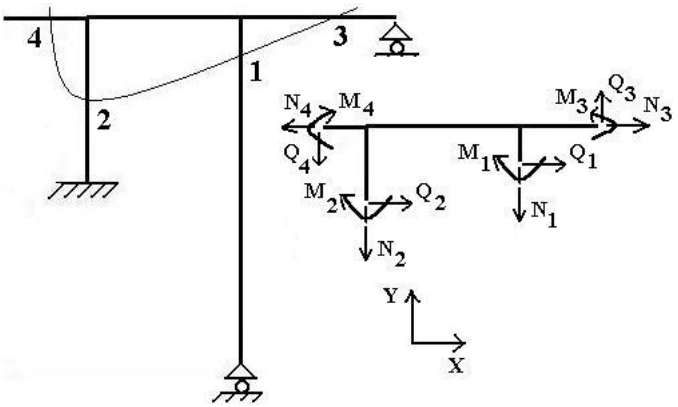
Точка	1	2(слева)	2(справа)	2(снизу)	3(слева)	3(справа)	3(снизу)	4	5	6
$M, [кН \cdot м]$	100	100	64,55	35,45	7,83	7,83	0	0	60,45	0
$Q, [кН]$	0	0	113,45	50	113,45	15,65	0	15,65	50	0
$N, [кН]$	0	0	50	113,45	50	50	97,81	50	113,45	97,81

По данным точкам строим эпюры внутренних усилий (рис. 2.7):



9) Проверка правильности построения эпюр

а) статическая проверка: Вырежем из рамы произвольный участок, рассекая ее в точках 1,2,3,4 (рис. 2.8) - точки 1 и 4 расположены произвольно по длине рассекаемых участков, а точки 2 и 3 посередине этих участков) и определим внутренние усилия, действующие в точках рассечения из построенных эпюр внутренних усилий:



$N_1 = -97{,}81$ кН, $Q_1 = 0$ кН, $M_1 = 0$ кН $\cdot$ м, $N_2 = 113{,}45$ кН, $Q_2 = 50$ кН, $M_2 = -22{,}95$ кН $\cdot$ м

$N_3 = -50$ кН, $Q_3 = 15{,}65$ кН, $M_3 = 3{,}92$ кН $\cdot$ м, $N_4 = 0$ кН, $Q_4 = 0$ кН, $M_4 = 100$ кН $\cdot$ м

Проверим выполнение уравнений статического равновесия для вырезанного участка рамы

$$\sum\nolimits_X = -N_4 + N_3 + Q_1 + Q_2 = 0 - 50 + 0 + 50 = 0,$$

$$\sum\nolimits_Y = -Q_4 - N_2 - N_1 + Q_3 = 0 - 113{,}45 + 97{,}81 + 15{,}65 = 0$$

Сумма моментов всех ненулевых внутренних усилий относительно произвольной точки (например, точки 2)

$$\sum\nolimits_2 M = 0 : M_2 + M_4 + N_1 \cdot \frac{l}{2} - M_3 + N_3 \cdot \frac{h}{4} - Q_3 \cdot \frac{3l}{4} =$$

$$-22{,}95 + 100 - 97{,}81 \cdot 0{,}5 - 3{,}92 - 50 \cdot 0{,}25 + 15{,}65 \cdot 0{,}75 = 0$$

б) деформационные проверки

Определим перемещения по направлению действия лишних неизвестных (они должны быть равны нулю) перемножением суммарной эпюры изгибающих моментов на эпюры от найденных значений лишних неизвестных, причем площади возьмем для эпюр от лишних неизвестных (рис. 2.5 и 2.6):

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\frac{l}{2} 48{,}90 \otimes \left(7{,}83 + \tfrac{2}{3}(64{,}55 - 7{,}83)\right) + 48{,}90 \frac{h}{2} \otimes \left(-\frac{35{,}45 + 10{,}45}{2}\right) = 0$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot 7{,}83 \otimes \frac{2}{3}\cdot 7{,}83 + 7{,}83\frac{l}{2} \otimes \frac{64{,}55+7{,}83}{2} + \frac{1}{2}\frac{l}{2}(15{,}65-7{,}83) \otimes (7{,}83+\frac{2}{3}(64{,}55-7{,}83)) +$$

$$+15{,}65\frac{h}{2} \otimes (-\frac{35{,}45+10{,}45}{2}) = 0$$

Проверки подтвердили правильность построения эпюр.