Теорема о трёх моментах

1. Применение метода сил для расчёта статически-неопределимых балок

1.1 Основные понятия

Балки, лежащие более чем на двух опорах, называются неразрезными. Число лишних связей и реакций в неразрезной балке равно числу промежуточных опор (точнее больше этого числа на количество жестких заделок при их наличии). Выбор в качестве лишних неизвестных опорных реакций приводит к громоздким вычислениям, поскольку уравнения, выражающие отсутствие перемещений на промежуточных опорах содержали бы сразу все неизвестные (Рис.1).

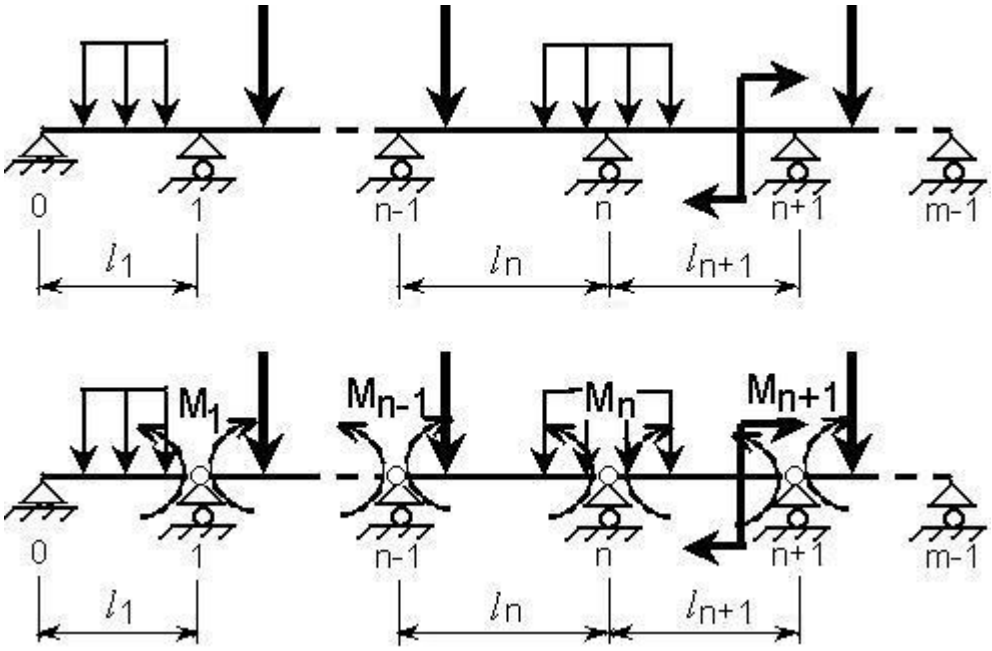

Рис. 1

В случае выбора в качестве лишних неизвестных опорных моментов основной системой будет система однопролетных балок, соединенных на опорах шарнирами. Эквивалентная система будет представлять из себя ряд простых шарнирно-опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами на опорах.

Дополнительное уравнение перемещений для каждой из промежуточных опор должно выражать условие равенства нулю взаимного угла поворота опорных сечений смежных балок. Поскольку каждая из двух опорных балок в основной системе может поворачиваться на некоторые углы $\theta_n^{лев}$ и $\theta_n^{прав}$. то из условия сплошности их взаимный угол поворота должен быть равен нулю $\theta_n = \theta_n^{лев} + \theta_n^{прав} = 0$ (рис.2)

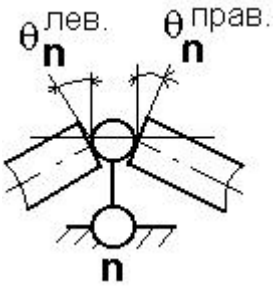

Рис.2

Так как основная система представляет из себя систему несвязанных между собой балок то взаимный угол поворота на n-ой опоре θ_n зависит только от нагрузок, действующих в рамках примыкающих к ней пролетов l_n и l_{n+1}. Данное условие в каноническом виде имеет вид

$$\delta_{n,n-1}\cdot M_{n-1}+\delta_{n,n}\cdot M_n+\delta_{n,n+1}\cdot M_{n+1}+\Delta_{nP}=0,$$

где $\delta_{n,n-1},\delta_{n,n},\delta_{n,n+1}$ - углы поворота на n-ой опоре от единичных моментов $\overline{M}_{n,n-1}=1,\overline{M}_{n,n}=1,\overline{M}_{n,n+1}=1$ соответственно, а Δ_{nP} - угол поворота на этой опоре от нагрузке действующей на двух примыкающих пролетах.

Пусть площади эпюр от нагрузок координаты их центров тяжестей и жесткости балки на пролете l_n будут равны ω_n, a_n, b_n и EI_n соответственно. Тогда $\Delta_{nP}=\frac{1}{EI_n}\cdot\omega_n\cdot\frac{a_n}{l_n}+\frac{1}{EI_{n+1}}\cdot\omega_{n+1}\cdot\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}$;

$$\delta_{n,n-1}=\frac{1}{EI_n}\cdot\frac{l_n}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{l_n}{6EI_n};\ \delta_{n,n}=\frac{1}{EI_n}\cdot\frac{l_n}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{EI_{n+1}}\cdot\frac{l_{n+1}}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{l_n}{3EI_n}+\frac{l_{n+1}}{3EI_{n=1}};$$

$$\delta_{n,n+1}=\frac{1}{EI_{n+1}}\cdot\frac{l_{n+1}}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}};$$

Подставляя найденные значения в выражение для взаимного угла поворота, получим

$$\frac{l_n}{I_n}\cdot M_{n-1}+2\left(\frac{l_n}{I_n}+\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\right)\cdot M_n+\frac{l_{n+1}}{I_{n+1}}\cdot M_{n+1}=-6\left(\frac{\omega_n a_n}{I_n l_n}+\frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{I_{n+1}l_{n+1}}\right)$$

Для балок постоянной жесткости $I_n=const$ уравнение трех моментов имеет вид

$$M_{n-1}\cdot l_n+2\cdot M_n\cdot(l_n+l_{n+1})+M_{n+1}\cdot l_{n+1}=-6\left(\frac{\omega_n a_n}{l_n}+\frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}\right)=-6EI\cdot(\theta_n^{прав.}-\theta_n^{лев.})$$

При расчете составляется столько уравнений трех моментов, сколько имеется промежуточных опор. Уравнение для второй и предпоследней опор будут содержать только два момента.

Частные случаи – один из концов балки представляет

А) жесткую заделку – на этом конце вводят промежуточную опору, а в сторону заделки вводят фиктивный пролет (имеющей нулевую длину) и для этой опоры составляется уравнение трех моментов.

Б) свободный конец – вся нагрузка, действующая в рамках пролета балки вплоть до ближайшей опоры приводится к изгибающему моменту, действующему на этой опоре.

После определения неизвестных моментов M_i определяются реакции на промежуточных опорах из уравнений равновесия каждой из шарнирно-опертых балок

1.2. Примеры решения задач

Пример 1

Для заданной неразрезной балки (рис.3) при $P=50$ кН, $M=100$ кН$\cdot$м, $q=50$ кН/м, $l=1$ м определить степень статической неопределимости (ССН)

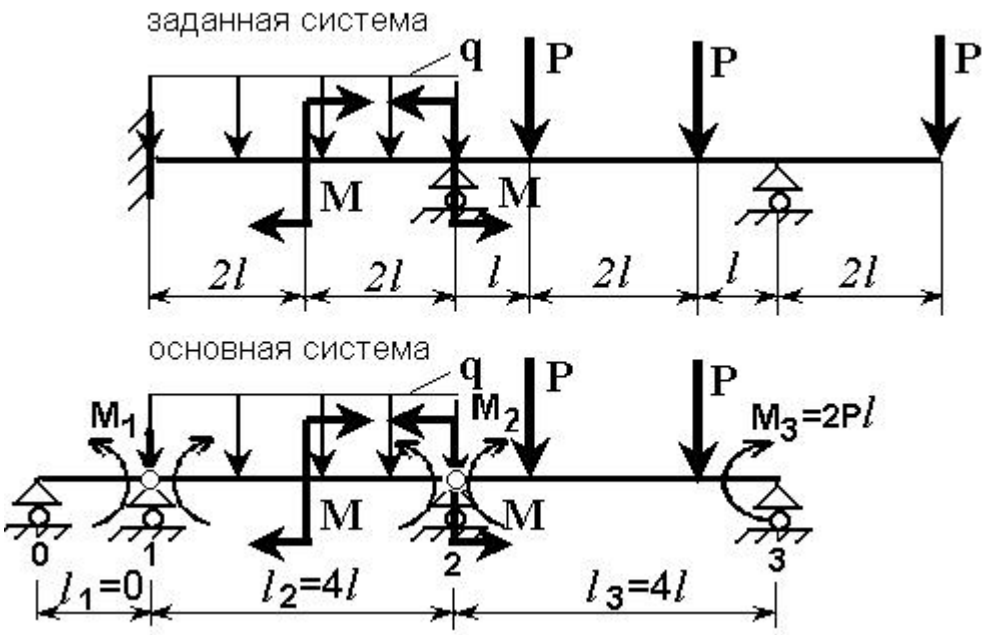

Рис. 3

1) изобразить основную систему
2) определить углы поворота опорных сечений $\theta_n^{лев}$ и $\theta_n^{прав}$ для отдельных пролетов от заданной нагрузки
3) составить систему уравнений трех моментов и найти значения опорных моментов на промежуточных опорах
4) определить значения опорных реакций
5) построить эпюры поперечных сил $\mathbf{Q}$ и изгибающих моментов $\mathbf{M}$
6) определить величину наибольшего изгибающего момента и поперечной силы в каждом пролете
7) подобрать поперечное сечение из двутавровых профилей по ГОСТу при $[\sigma]=160\ \mathbf{МПа}$ с проверкой выполнения условия прочности по касательным напряжениям при $[\tau]=100\ \mathbf{МПа}$
8) по эпюре изгибающих моментов дать приближенной очертание изогнутой оси

Решение:

1) ССН=3+1+1-3=2 (три неизвестных в заделке и по одной неизвестной реакции на каждой из опор минус три уравнения равновесия для их определения)
2) При построении основной системы жесткая заделка была заменена на шарнирную опору 1 и в ее сторону был добавлен фиктивный пролет $\mathbf{l}_1=0$ Свободный конец был заменен на момент $\mathbf{M}_3=2\mathbf{Pl}$ действующий на опоре 3
3) Определяем углы поворота отдельно от каждой из нагрузок для каждой опоры При этом момент на второй опоре отнесем ко второму пролету Угол поворота будет считаться положительным если он направлен по часовой стрелке

Для опоры № 1

$\theta_1^{лев.}$=0

$$\theta_1^{прав.}=\theta_1^{прав.}(\mathbf{q})+\theta_1^{прав.}(\mathbf{M}^1)+\theta_1^{прав.}(\mathbf{M}^2)=\frac{1}{\mathbf{EI}}\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_1^3}{24}-\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{l}_1}{24}+\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{l}_1}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mathbf{EI}}(133{,}33-16{,}67+66{,}67)=\frac{183{,}33}{\mathbf{EI}}$$

Для опоры № 2

$$\theta_2^{лев.} = \theta_2^{лев.}(\mathbf{q}) + \theta_2^{лев.}(\mathbf{M}^1) + \theta_2^{лев.}(\mathbf{M}^2) = \frac{1}{\mathbf{EI}}\left(-\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_1^3}{24} - \frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{l}_1}{24} - \frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{l}_1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{EI}}(-133{,}33 - 16{,}67 - 133{,}33) = -\frac{283{,}33}{\mathbf{EI}}$$

$$\theta_2^{прав.} = \theta_2^{прав.}(\mathbf{P}) = \frac{3\mathbf{P}\cdot\mathbf{l}_2^2}{32\mathbf{EI}} = \frac{75}{\mathbf{EI}};$$

4) Составляем уравнения трех моментов для каждой из опор

Для опоры № 1 (n=1)

$$\mathbf{M}_0\cdot\mathbf{l}_1 + 2\cdot\mathbf{M}_1\cdot(\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2) + \mathbf{M}_2\cdot\mathbf{l}_2 = -6\mathbf{EI}\cdot(\theta_1^{прав.} - \theta_1^{лев.})$$

Для опоры № 2 (n=2)

$$\mathbf{M}_1\cdot\mathbf{l}_2 + 2\cdot\mathbf{M}_2\cdot(\mathbf{l}_2+\mathbf{l}_3) + \mathbf{M}_3\cdot\mathbf{l}_3 = -6\mathbf{EI}\cdot(\theta_2^{прав.} - \theta_2^{лев.})$$

Подставляя найденные значения углов и учитывая, что $\mathbf{M}_0 = 0, \mathbf{M}_3 = -\mathbf{P}\cdot 2\mathbf{l} = -100\ \mathbf{кН\cdot м}, \mathbf{l}_1 = 0$ окончательно получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$8\mathbf{M}_1 + 4\mathbf{M}_2 = -1100,$$

$$4\mathbf{M}_2 + 16\mathbf{M}_2 = -1750$$

Решение данной системы $\mathbf{M}_1 = -94{,}64\ \mathbf{кН\cdot м}, \mathbf{M}_2 = -85{,}71\ \mathbf{кН\cdot м}$.

5) Определение опорных реакций

Рассмотрим уравнения равновесия отдельных статически-определимых шарнирно-опертых балок

Изображаем все внешние силы и найденные моменты, действующие на первый ненулевой пролет (рис. 4)

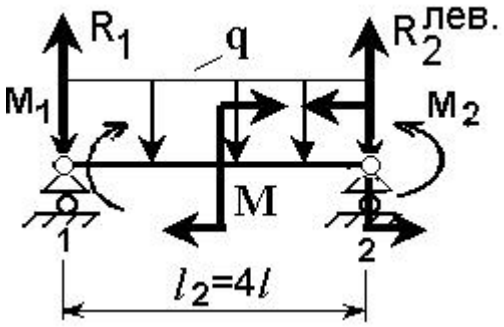

Рис.4

$$\sum_{\mathbf{Y}} = 0: -\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2^{лев.} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_2 = 0$$

$$\sum_1 \mathbf{M} = 0: -\mathbf{R}_2^{лев.}\cdot\mathbf{l}_2 - \mathbf{M} + \mathbf{M} - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_2\cdot\frac{\mathbf{l}_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_2^{лев.} = \frac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + 0{,}5\mathbf{q}\mathbf{l}_2^2}{\mathbf{l}_2} = \frac{-94{,}64 + 85{,}71 + 0{,}5\cdot 50\cdot 4^2}{4} = 97{,}77\ \mathbf{кН},$$

$$\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2^{лев.} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{l}_2 = -97{,}77 + 50\cdot 4 = 102{,}23\ \mathbf{кН};$$

Реакция $\mathbf{R}_2^{лев}$ представляет часть целой реакции, действующей на второй опоре приходящей на нее с левого пролета.

Изображаем все внешние силы и найденные моменты, действующие на второй пролет; сохраняем свободный конец балки (рис.5)

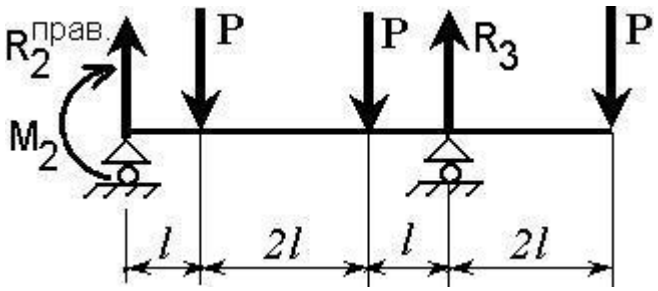

Рис.5

$$\sum_{\mathbf{Y}} = 0 : -\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2^{\text{прав.}} + 3\mathbf{P} = 0$$

$$\sum_2 \mathbf{M} = 0 : \mathbf{R}_3 \cdot 4\mathbf{l} - \mathbf{M}_3 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} - \mathbf{P} \cdot 3\mathbf{l} - \mathbf{P} \cdot 6\mathbf{l} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_3 = \frac{\mathbf{M}_2 + 10\mathbf{P} \cdot \mathbf{l}}{4\mathbf{l}} = \frac{-85{,}71 + 10 \cdot 50 \cdot 1}{4} = 103{,}57\ \textbf{кН},$$

$$\mathbf{R}_2^{\text{прав.}} = -\mathbf{R}_3 + 3\mathbf{P} = -103{,}57 + 3 \cdot 50 = 46{,}43\ \textbf{кН};$$

Окончательно $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2^{\text{лев.}} + \mathbf{R}_2^{\text{прав.}} = 97{,}77 + 46{,}43 = 144{,}20\ \textbf{кН}$

6) Выражения дли изгибающих моментов и поперечных сил для всей балки

Совмещаем начало координат с жесткой заделкой

А) по участкам

Б) в одну строку

$$\mathbf{Q_y}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_1 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \underset{\mathbf{x}>4\mathbf{l}}{||}[\mathbf{R}_2 + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - 4\mathbf{l})] - \underset{\mathbf{x}>5\mathbf{l}}{||}\mathbf{P} - \underset{\mathbf{x}>7\mathbf{l}}{||}\mathbf{P} + \underset{\mathbf{x}>8\mathbf{l}}{||}\mathbf{R}_3 =$$

$$= 102{,}23 - 50 \cdot \mathbf{x} + \underset{\mathbf{x}>4}{||}[144{,}20 + 50 \cdot (\mathbf{x} - 4)] - \underset{\mathbf{x}>5\mathbf{l}}{||}50 - \underset{\mathbf{x}>7\mathbf{l}}{||}50 + \underset{\mathbf{x}>8\mathbf{l}}{||}103{,}57$$

$$\mathbf{M_z}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}^2 / 2 + \underset{\mathbf{x}>2\mathbf{l}}{||}\mathbf{M} + \underset{\mathbf{x}>4\mathbf{l}}{||}[-\mathbf{M} + \mathbf{R}_2 \cdot (\mathbf{x} - 4\mathbf{l}) + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - 4\mathbf{l})^2 / 2] - \underset{\mathbf{x}>5\mathbf{l}}{||}\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - 5\mathbf{l}) -$$

$$- \underset{\mathbf{x}>7\mathbf{l}}{||}\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - 7\mathbf{l}) + \underset{\mathbf{x}>8\mathbf{l}}{||}\mathbf{R}_3 \cdot (\mathbf{x} - 8\mathbf{l}) = -94{,}64 + 102{,}23 \cdot \mathbf{x} - 25 \cdot \mathbf{x}^2 + \underset{\mathbf{x}>2\mathbf{l}}{||}100 +$$

$$+ \underset{\mathbf{x}>4}{||}[-100 + 144{,}20 \cdot (\mathbf{x} - 4\mathbf{l}) + 25 \cdot (\mathbf{x} - 4)^2] - \underset{\mathbf{x}>5}{||}50 \cdot (\mathbf{x} - 5) - \underset{\mathbf{x}>7}{||}50 \cdot (\mathbf{x} - 7) + \underset{\mathbf{x}>8}{||}103{,}57 \cdot (\mathbf{x} - 8)$$

Заносим значения внутренних силовых факторов в начале и в конце каждого из участков в таблицу

z, [м]	0	2-0	2+0	4-0	4+0	5-0	5+0	7-0	7+0	8-0	8+0	10
Q_y, [кН]	102,23	2,23	2,23	-97,77	46,43	46,43	-3,57	-3,57	-53,57	-53,57	50	50
M_x, [кНм]	-94,64	9,82	109,82	14,28	-85,72	-39,29	-39,29	-46,43	-46,43	-100	-100	0

По полученным точкам строим эпюры (рис.6)

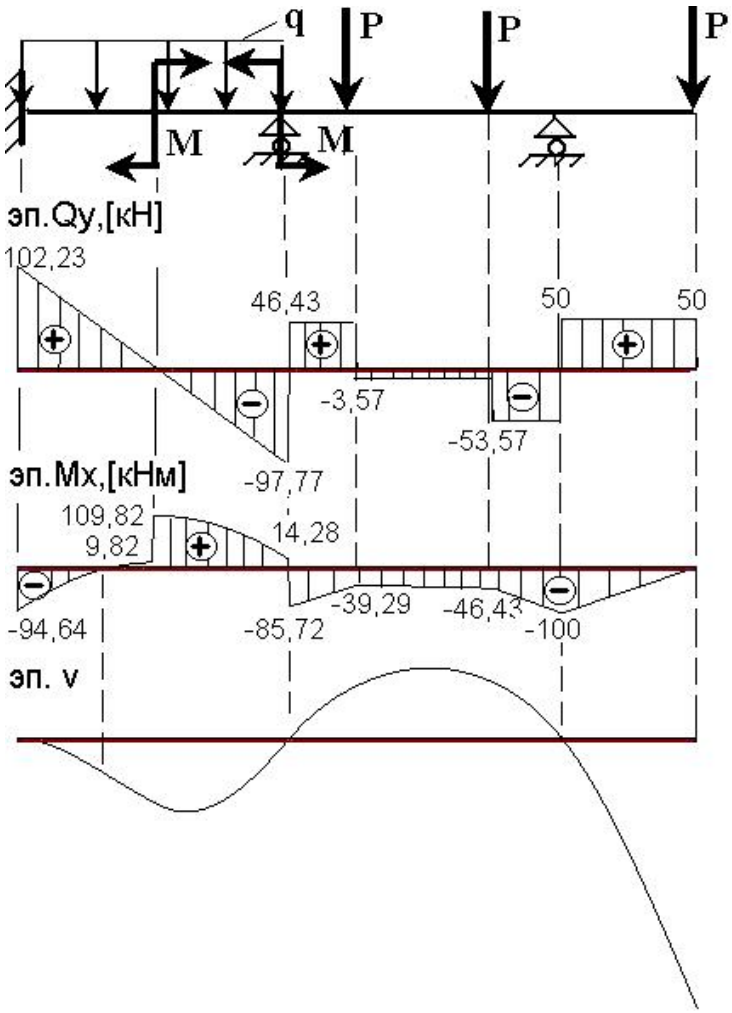

Рис. 6

7) Наибольшее значение поперечной силы и изгибающего момента в каждом пролете

$\underline{0 < \mathbf{x} < 4\mathbf{l}}$:

$|\mathbf{Q}_y^{max}| = 102{,}23\ \mathbf{кН}, |\mathbf{M}_z^{max}| = 109{,}82\ \mathbf{кН \cdot м};$

$\underline{4\mathbf{l} < \mathbf{x} < 10\mathbf{l}}$:

$|\mathbf{Q}_y^{max}| = 53{,}57\ \mathbf{кН}, |\mathbf{M}_z^{max}| = 100{,}00\ \mathbf{кН \cdot м};$

8) Подбор поперечного сечения

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$|\sigma_z^{max}| = \frac{|\mathbf{M}_z^{max}|}{\mathbf{W}_z} \le [\sigma] \Rightarrow$$

$$\mathbf{W}_z^{min} = \frac{|\mathbf{M}_z^{max}|}{[\sigma]} = \frac{109{,}82 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} =$$

$$= 0{,}686 \cdot 10^{-3}\ \mathbf{м}^3 = 686\ \mathbf{см}^3$$

Ближайшим профилем оказывается двутавр № 36, у которого $\mathbf{I}_z = 13380\ \mathbf{см}^4$, $\mathbf{W}_z = 743\ \mathbf{см}^3$, $\mathbf{s} = 7{,}5\ \mathbf{мм}$, $\mathbf{S}_z = 423\ \mathbf{см}^3$

Проверяем выполнение условия прочности по касательным напряжениям

$$|\tau| = \frac{|\mathbf{Q}_y^{max}| \cdot \mathbf{S}_z}{\mathbf{I}_z \cdot \mathbf{s}} = \frac{102{,}23 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}431 \cdot 10^8\ \mathbf{Па} = 43{,}1\ \mathbf{МПа} \le [\tau] = 100\ \mathbf{МПа} \Rightarrow$$

условие прочности по касательным напряжениям выполнено

9) Приближенное очертание изогнутой оси показано на рис.6. Изогнутая ось проходит через промежуточные опоры; при этом в двух точках, где изгибающий момент меняет знак - есть точки перегиба;

Пример 2: Для заданной эпюры изгибающих моментов восстановить нагрузку, очертание упругой линии и определить момент $\mathbf{M}_1$ по теореме о 3-х моментах (рис. 7).

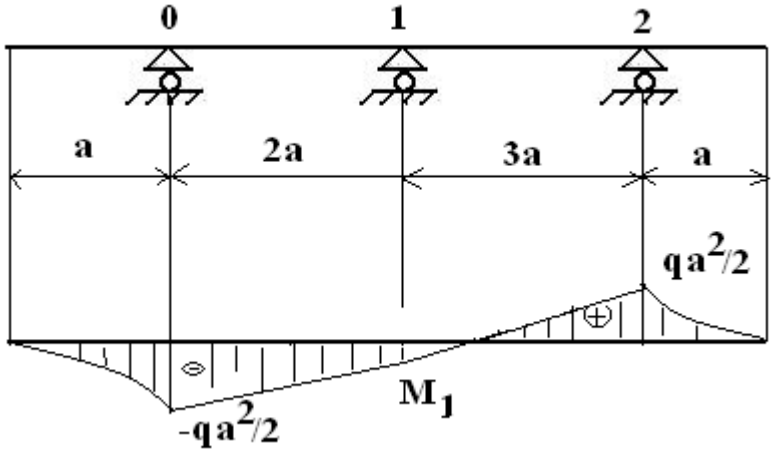

Рис. 7

Решение

Зависимость моментов на свободных концах – квадратичная, поэтому на них действует равномерно-распределённая нагрузка интенсивностью $\mathbf{q}$.

Внутри пролётов $2\mathbf{a}$ и $3\mathbf{a}$ - зависимость моментов – линейная (без скачков и изломов), поэтому там нагрузки отсутствуют.

Записываем выражение теоремы о 3-х моментах для единственной промежуточной опоры (при этом $\mathbf{M}_0 = -\frac{\mathbf{qa}^2}{2}; \mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{qa}^2}{2}; \mathbf{l}_1 = 2\mathbf{a}; \mathbf{l}_2 = 3\mathbf{a}$):

$$\mathbf{n} = 1: \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{l}_1 + 2\mathbf{M}_1(\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2) + \mathbf{M}_2\mathbf{l}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{n} = 1: -\frac{\mathbf{qa}^2}{2} \cdot 2\mathbf{a} + 2\mathbf{M}_1(2\mathbf{a} + 3\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{qa}^2}{2} \cdot 3\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_1 = -0{,}05\mathbf{qa}^2.$$

Изображаем изогнутую ось (рис. 8 - есть одна точка перегиба на втором участке).

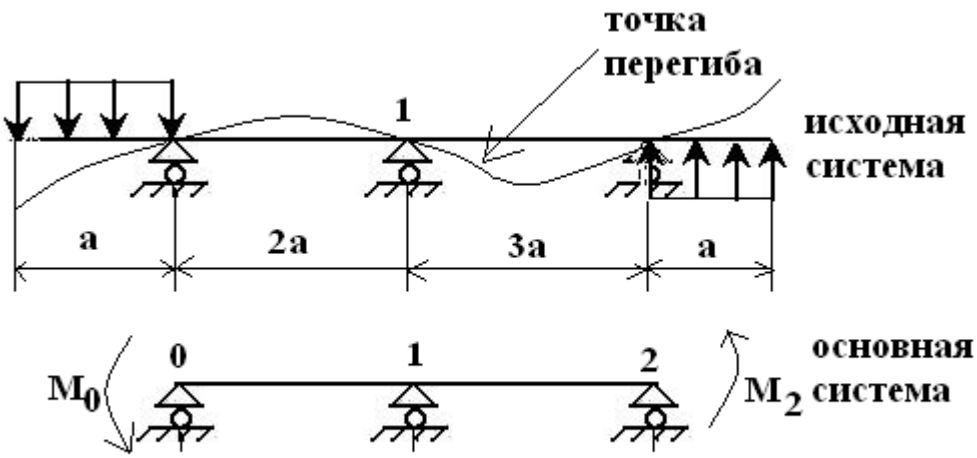

Рис. 8

Тест по теме „Теорема о трёх моментах“

1. Каков физический смысл уравнения теоремы о трёх моментах? Указать номер верного ответа.

1	2	3
Нет вертикального перемещения на опоре	Нет горизонтального перемещения на опоре	Нет углового перемещения на опоре

2. Угол поворота на опоре зависит от момента на этой опоре, моментов на опорах слева и справа. От чего ещё зависит угол поворота? Указать номер верного ответа.

1	2	3
Нагрузки на этой опоре	Нагрузки слева от опоры	Нагрузки слева и справа от опоры

3. Какая основная система соответствует исходной задаче (рис.9) ? Указать номер верного ответа.

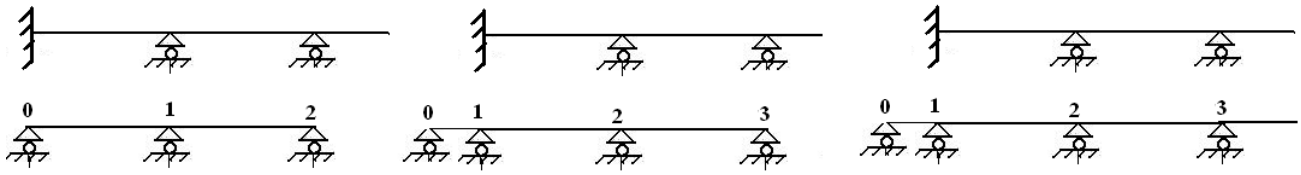

Рис. 9

1	2	3
А)	Б)	В)

4. Какова степень статической неопределимости балки, имеющей одну жёсткую заделку и одну промежуточную шарнирную опору? Указать номер верного ответа.

1	2	3
1	2	3

5. Что делают с консольным концом балки на этапе составления основной системы? Указать номер верного ответа.

1	2	3	4
Проверка отсутствия реакций	Проверка отсутствия перемещений	Удаляют и приводят к моменту на ближней опоре	Проверка отсутствия напряжений

6. Что делают с жёсткой заделкой при решении задачи по теореме о трёх моментах? Указать номер верного ответа.

1	2	3
Заменяют на свободный конец	Заменяют на шарнирную опору	Заменяют на шарнирную опору и добавляют фиктивный конец

7. Какими свойствами обладает система теоремы о трёх моментах? Указать номер верного ответа.

1	2	3
симметрична	Симметрична и положительно-определена	Положительно-определена

8. Какая из эпюр изгибающих моментов соответствует нагрузке на статически-неопределимую балку (рис.10)? Указать номер правильного ответа

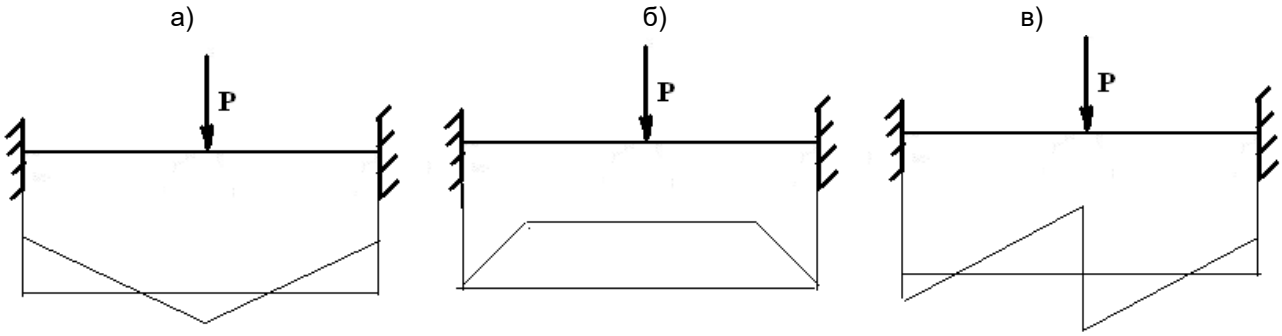

Рис. 10

1	2	3
а	б	В

ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

Вопрос 1	3
Вопрос 2	3
Вопрос 3	2
Вопрос 4	2
Вопрос 5	3
Вопрос 6	3
Вопрос 7	2
Вопрос 8	1