

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание настоящего учебника для обучения бакалавров «Теории автоматического управления» (ТАУ) продиктовано отсутствием в настоящее время учебников и учебных пособий, в которых в доходчивой, ясной форме излагался бы достаточно сложный материал по ТАУ с пояснениями, разбором задач, заданиями, вопросами и т.д. для широкого круга студентов, для которых ТАУ не является профильным.

Излагаемый в учебнике материал – результат почти тридцатилетней педагогической деятельности автора в Московском энергетическом институте на кафедре Управления и информатики, который связан с многолетней педагогической деятельностью всего коллектива кафедры по повышению эффективности процесса обучения студентов.

Предлагаемый в первой части материал посвящен теории линейных непрерывных динамических систем.

В 1-ой главе приводятся основные понятия автоматике: дается классификация систем, приводятся принципы и законы регулирования, дается пример системы и подходы для линеаризации объектов и систем.

Во 2-ой главе рассматриваются методы описания линейных непрерывных динамических систем: дифференциальными уравнениями, передаточными функциями, частотными и временными характеристиками. Приводятся понятия типовых динамических звеньев, для которых подробно рассмотрено их математическое описание; приводится пример описания системы автоматического управления.

В 3-ей главе рассмотрено представление систем в виде структурных схем, методы преобразования схем, примеры преобразования.

В 4-ой главе излагается понятие устойчивости положения равновесия и динамического процесса в системе, приводятся критерии устойчивости: алгебраические (Гурвица), частотные (принцип аргумента, Михайлова, Найквиста, логарифмический критерий).

В 5-ой главе рассмотрены подходы к оценке качества систем: ошибки, прямые и косвенные показатели качества.

В 6-ой главе рассмотрены метод синтеза систем по логарифмическим характеристикам и метод модального управления.

Достоинством настоящего издания является наличие вопросов по излагаемому материалу, заданий и подробный разбор заданий каждого типа.

Автор благодарит всех коллег кафедры Управления и информатики МЭИ, так или иначе участвующих в выпуске данного материала.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Основные понятия Теории автоматического управления..... | 4 |
| 1.1 | Из истории автоматики..... | 4 |
| 1.2 | Основные понятия автоматики. Функциональная схема САУ..... | 5 |
| 1.2.1 | Упрощенная функциональная схема САУ..... | 5 |
| 1.3 | Классификация САУ..... | 6 |
| 1.4 | Принципы автоматического регулирования, законы регулирования..... | 9 |
| 1.4.1 | Принципы регулирования..... | 9 |
| 1.4.2 | Законы регулирования..... | 10 |
| 1.5 | Система автоматического регулирования (на примере САР скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением)..... | 13 |
| 1.5.1 | Статическая и астатическая САР..... | 13 |
| 1.5.2 | Комбинированная САР..... | 19 |
| 1.6 | Линеаризация..... | 22 |
| 1.6.1 | Пример получения линеаризованных уравнений генератора постоянного тока на холостом ходу..... | 23 |
| 1.7 | Выводы..... | 26 |
| 1.8 | Вопросы..... | 26 |
| 1.9 | Задания..... | 27 |
| 1.10 | Практикум по главе 1..... | 30 |
| 1.11 | Список литературы..... | 32 |
| 2 | Математическое описание систем автоматического управления..... | 32 |
| 2.1 | Дифференциальные уравнения..... | 32 |
| 2.2 | Преобразование Лапласа и его свойства..... | 34 |
| 2.3 | Передаточные функции..... | 35 |
| 2.4 | Частотные характеристики САУ..... | 37 |
| 2.5 | Типовые динамические звенья..... | 40 |
| 2.5.1 | Безынерционное (пропорциональное) звено..... | 41 |
| 2.5.2 | Интегрирующее звено..... | 42 |
| 2.5.3 | Инерционное звено..... | 45 |
| 2.5.4 | Колебательное звено..... | 48 |
| 2.5.5 | Звено запаздывания..... | 51 |
| 2.5.6 | Идеальное и реальное дифференцирующие звенья..... | 53 |
| 2.5.7 | Упругие звенья..... | 56 |
| 2.5. | Неминимально-фазовые звенья и их характеристики..... | 60 |
| 2.6 | Построение логарифмических частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы..... | 61 |
| 2.6.1 | Построение ЛАЧХ..... | 63 |
| 2.6.2 | Построение ЛФЧХ..... | 65 |
| 2.6.3 | Построение АФХ..... | 65 |
| 2.7 | Временные характеристики САУ..... | 66 |
| 2.7.1 | Типовые входные сигналы и их изображения по Лапласу..... | 66 |
| 2.7.2 | Способы построения временных характеристик систем..... | 68 |
| 2.7.3 | Временные характеристики типовых звеньев..... | 71 |
| 2.7.4 | Временные характеристики динамических звеньев..... | 78 |
| 2.8 | Выводы..... | 80 |
| 2.9 | Вопросы..... | 81 |
| 2.10 | Задания..... | 82 |
| 2.11 | Практикум по главе 2..... | 89 |
| 2.12 | Список литературы..... | 97 |
| 3. | Структурные схемы систем автоматического управления..... | 99 |
| 3.1 | Элементы структурных схем..... | 99 |
| 3.2 | Соединение динамических звеньев..... | 100 |
| 3.3 | Правила преобразования структурных схем..... | 102 |
| 3.4 | Пример преобразования структурной схемы..... | 104 |
| 3.5 | Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САУ..... | 107 |
| 3.6 | Выводы..... | 109 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.7 | Вопросы..... | 109 |
| 3.8 | Задания..... | 110 |
| 3.9 | Практикум по главе 3..... | 116 |
| 3.10. | Список литературы | 120 |
| 4. | <i>Устойчивость систем автоматического управления.....</i> | 120 |
| 4.1. | Понятие устойчивости систем..... | 121 |
| 4.1.1. | Устойчивость положения равновесия | 121 |
| 4.1.2. | Устойчивость процесса..... | 122 |
| 4.2. | Необходимые и достаточные условия устойчивости систем | 122 |
| 4.3. | Критерии устойчивости | 125 |
| 4.3.1. | Критерий устойчивости Гурвица..... | 125 |
| 4.3.2. | Принцип аргумента..... | 128 |
| 4.3.3. | Критерий устойчивости Михайлова | 129 |
| 4.3.4. | Критерий устойчивости Найквиста..... | 130 |
| 4.3.5. | Примеры применения критерия Найквиста..... | 134 |
| 4.3.6. | Общая формулировка критерия Найквиста..... | 140 |
| 4.3.7. | Логарифмический критерий устойчивости..... | 141 |
| 4.4. | Выводы..... | 143 |
| 4.5. | Вопросы..... | 143 |
| 4.6. | Задания..... | 144 |
| 4.7. | Практикум по главе 4..... | 146 |
| 4.8. | Список литературы | 152 |
| 5. | <i>Качество систем автоматического управления</i> | 153 |
| 5.1. | Точность систем в установившемся режиме | 153 |
| 5.1.1. | Ошибки по управляющему воздействию | 154 |
| 5.1.2. | Ошибки по возмущающему воздействию | 157 |
| 5.1.3. | Пример расчета ошибок системы автоматического управления..... | 159 |
| 5.2. | Точность систем в динамическом режиме | 160 |
| 5.2.1. | Временные показатели качества | 160 |
| 5.2.2. | Запасы устойчивости по амплитуде и фазе..... | 161 |
| 5.2.3. | Характер переходного процесса и быстродействие САУ | 163 |
| 5.2.4. | Корневые и интегральные показатели качества системы | 165 |
| 5.3. | Выводы..... | 166 |
| 5.4. | Вопросы..... | 167 |
| 5.5. | Задания..... | 168 |
| 5.6. | Практикум по главе 5..... | 174 |
| 5.7. | Список литературы | 178 |
| 6. | <i>Синтез систем автоматического управления.....</i> | 179 |
| 6.1. | Методы синтеза САУ | 179 |
| 6.1.1. | Типы корректирующих устройств | 179 |
| 6.2. | Синтез САУ по логарифмическим частотным характеристикам | 183 |
| 6.2.1. | Методы включения корректирующих устройств | 183 |
| 6.2.2. | Построение ЛАЧХ скорректированной системы (желаемой ЛАЧХ)..... | 186 |
| 6.2.3. | Примеры построения корректирующих устройств | 187 |
| 6.3. | Модальное управление САУ | 199 |
| 6.4. | Примеры построения модальных регуляторов..... | 203 |
| | Синтез систем модального управления с полным вектором состояния..... | 206 |
| 6.5. | Выводы..... | 210 |
| 6.6. | Вопросы..... | 211 |
| 6.7. | Задания..... | 212 |
| 6.8. | Практикум по главе 6..... | 217 |
| 6.9. | Список литературы | 220 |

Основные понятия Теории автоматического управления

(*знать: основные понятия автоматики, типы систем, принципы и законы регулирования, математические основы и подходы к линеаризации объектов автоматического регулирования; уметь: строить функциональные схемы и классифицировать системы управления, определять уравнения статики систем и строить их статические характеристики; владеть: приемами линеаризации, описания систем линеаризованными уравнениями, определения значений статических ошибок, возникающих в системах при воздействии управляющих и возмущающих входных сигналов.*)

1.1 Из истории автоматики.

Автоматика в переводе с греческого языка означает самодействие. Первые самодействующие установки были известны еще до нашей эры, например, « Храм Солнца » в Египте, в котором двери открывались при появлении первых лучей солнца и закрывались при заходе солнца. Лучи солнца нагревали воздух в мешках, расположенных у дверей храма, мешки с воздухом расширялись и через систему рычагов открывали двери, при заходе солнца все происходило в обратном порядке.

В средние века широко использовались водяные и ветряные мельницы, так же являющиеся примером самодействующих установок; до сегодняшнего дня в музеях Европы сохранились андронды (механизмы, имитирующие работу людей, например художников, писцов и пр.).

Все эти механизмы работали по так называемому *разомкнутому принципу*, означающему, что результат выполненного действия не контролировался.

Основу современных систем автоматического управления положили две работы:

- а) Регулятор уровня воды в котле И. Ползунова.
- б) Регулятор скорости маховика паровой машины Джеймса Уатта.

В регуляторе Дж. Уатта скорость вращения передавалась на заслонку, регулирующую подачу пара в машину и при превышении заданной скорости заслонка прикрывалась, а при уменьшенной скорости – приоткрывалась, тем самым регулируя скорость вращения.

Основу современной теории автоматического управления (АУ) положили работы, анализирующие устойчивость систем и методы повышения их качества (Вышнеградского, который исследовал устойчивость паровых машин и предложил диаграмму для определения устойчивости работы (*диаграмма Вышнеградского*)). Проблемами устойчивости занимались: Жуковский, Вознесенский, Ляпунов.

Циолковский разработал устройство управления рулем дирижабля, положил начало разработке автопилота; первый автопилот разработал Барановский; Давыдов в 1912 году перед гражданской войной разработал устройство слежения орудия за подвижными и неподвижными целями (первую следящую систему).

1.2 Основные понятия автоматики. Функциональная схема САУ.

Под *управлением* в широком смысле этого слова понимается организация какого-либо процесса для достижения поставленной цели.

Цели управления в технических системах.

1. Поддержание заданного курса корабля, самолета или другого средства передвижения.
2. Поддержание толщины прокатываемого металла.
3. Поддержание стабильного напряжения и частоты в сети.
4. Управление различными технологическими процессами.

Определение. Технические объекты, в которых происходят процессы, подлежащие управлению, называются *объектами управления*.

На объект управления действуют возмущающие воздействия, которые выводят его из заданного режима. Для того чтобы поддерживать заданный режим на объекте управления, он снабжается рабочим или управляющим органом (РО). Воздействие на рабочий орган может быть ручным или автоматическим. Если это воздействие автоматическое, то возникает *система автоматического управления*.

1.2.1 Упрощенная функциональная схема САУ.

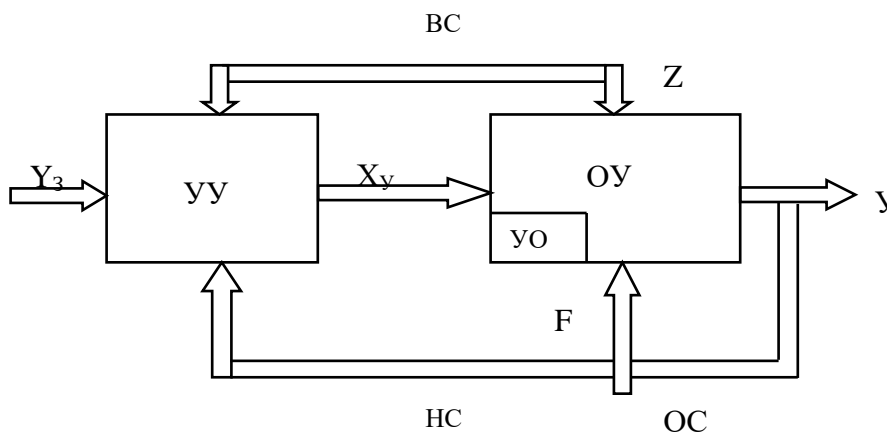


Рис.1.1. Упрощенная функциональная схема САУ

Y_3 – задающие воздействия ;

X_y – управляющие воздействия;

Y – управляемые сигналы;

Z – контролируемые возмущения;

F – неконтролируемые возмущения;

УУ – управляющее устройство;

УО – управляющий орган;

ОУ – объект управления;

ВС - Верхняя связь – компенсирует наиболее сильно влияющие воздействия.

НС - Нижняя связь (ОС – обратная связь) – информация о выходной величине Y поступает в УУ. УУ по информации, поступающей от ВС и НС, вырабатывает управляющий сигнал X_y .

1.3 Классификация САУ.

1. По наличию априорной (доопытной) информации.

а.) адаптивные.

б.) обыкновенные.

В адаптивных системах полная информация об объекте отсутствует. Её необходимо собирать в процессе функционирования объекта.

Причины: 1. малоизученный сложный объект.

2. технические характеристики объекта меняются в процессе эксплуатации.

3. изменяются условия функционирования объекта.

«Самонастраивающаяся» система – адаптивная система АУ с изменяющимися параметрами управляющего устройства (УУ).

«Самоорганизующаяся» система – адаптивная система АУ с изменяющимся алгоритмом в управляющем устройстве (УУ). В такой системе изменяется структура управляющего устройства.

Обыкновенные системы:

Вся информация об объекте управления известна заранее и система автоматического управления строится с учетом всей информации.

2. По числу входов и выходов.

а.) одномерные (1 вход, 1 выход).

б.) многомерные, также их называют многосвязные (много входов и выходов).

в) системы с несколькими входами и одним выходом

3. По выполнению принципа суперпозиции.

а.) линейные (выполняется принцип суперпозиции) (рис.1.2).

б.) нелинейные (не выполняется принцип суперпозиции).

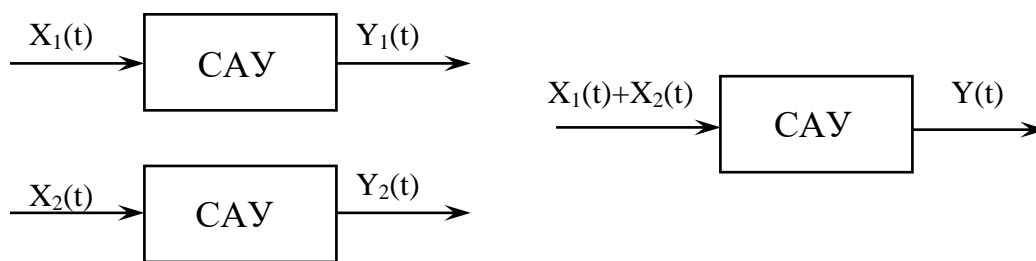


Рис.1.2. Принцип суперпозиции линейных САУ

$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$ - условие выполнения принципа суперпозиции.

Линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными дифференциальными, уравнениями с коэффициентами, не зависящими от входного сигнала).

Нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

4. По виду сигналов, действующих в системе.

а.) непрерывные.

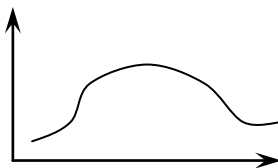


Рис.1.3. Пример непрерывного сигнала

б.) дискретные.

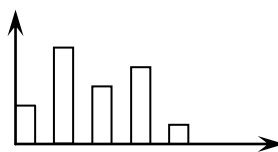


Рис. 1.4. Пример дискретного сигнала

5. По виду сигнала в САУ.

а.) детерминированный (определенный)(рис.1.5).

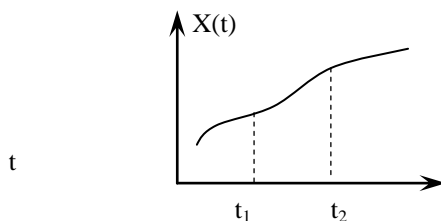


Рис. 1.5. Пример детерминированного сигнала

б.) случайный (стохастический)(рис.1.6).

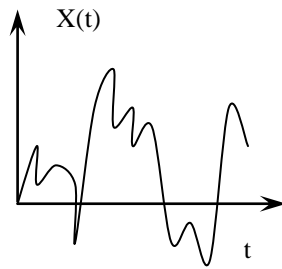


Рис. 1.6. Пример случайного сигнала

6. По целям или задачам управления.

а.) *Системы оптимального управления* – это системы, работающие наилучшим образом при определенных условиях. Используются системы, оптимальные по точности, по быстрдействию и др.

б.) *Экстремальные системы* – это системы, в которых некоторые показатели качества поддерживаются максимальными (рис.1.7).

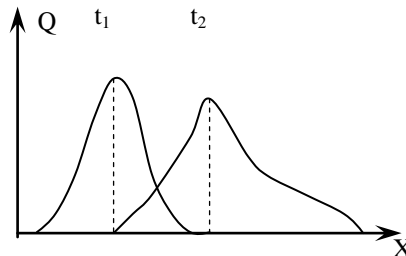


Рис.1.7. Показатель качества экстремальной системы

Q – производительность.

Цель системы - поддержание показателя качества Q максимальным, определяя значение параметра X (положение Q меняется с течением времени)..

Решение.

Система снабжается устройством автоматического поиска (УАП).

УАП периодически подает пробные воздействия на объект в одну и другую сторону от некоторой начальной точки X_0 , сравнивает полученные значения критерия качества Q, производит рабочий шаг в нужном направлении и, таким образом, определяет положение экстремума в текущий момент времени.

в.) *Системы автоматического регулирования (САР).*

В системах автоматического регулирования (САР) решается задача поддержания выходного сигнала объекта на заданном уровне или изменения его по некоторому закону. При этом закон может быть известен заранее, изменяться по заданному закону или быть заранее

неизвестным. По этому признаку системы делятся на системы стабилизации, программного управления и следящие системы.

1. $Y(t) = \text{const}$, следовательно данная система – *система стабилизации* ($Y(t)$ – выходная величина).
2. Закон изменения $Y(t)$ известен, следовательно, это система программного управления.
3. Закон изменения $Y(t)$ не известен, следовательно, это следящая система.

1.4 Принципы автоматического регулирования, законы регулирования.

1.4.1 Принципы регулирования

1. Разомкнутый принцип (*регулирование по возмущению*) (рис.1.8).

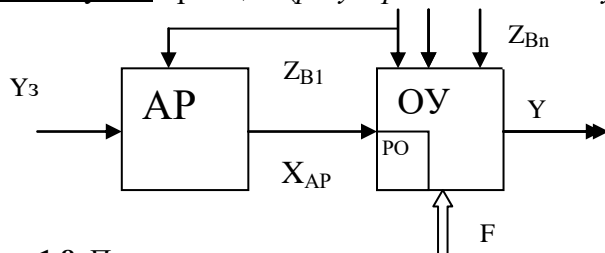


Рис. 1.8. Принципиальная схема регулирования по возмущению

АР – автоматический регулятор;

$$X_{АР} = f(Y_3, Z_{B1})$$

где $X_{АР}$ – регулирующий сигнал автоматического регулятора;

Y_3 – задающее воздействие;

$Z_{B1} \dots Z_{Bn}$ – контролируемые возмущающие воздействия;

F – неконтролируемые возмущения.

В качестве Z_{B1} выбирается наиболее сильно действующее возмущение, действие которого в системе компенсируется.

Достоинства: Система всегда устойчива при устойчивом объекте регулирования.

Недостатки: Низкая точность САР.

2. Замкнутый принцип (*регулирование по отклонению* (с отрицательной обратной связью)) (рис.1.9).

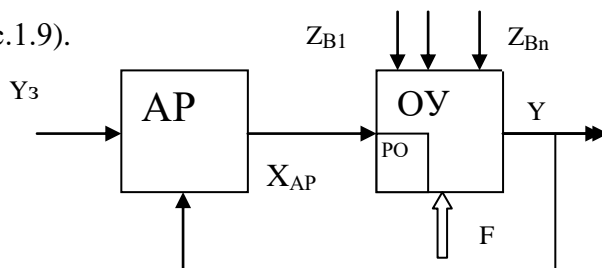


Рис.1.9. Принципиальная схема регулирования по отклонению

$$X_{AP} = f(Y_3 , Y).$$

$X_0 = Y_3(t) - Y(t)$ – сигнал отклонения, или ошибки

Y_3 – задающее воздействие.

Y – регулируемая величина.

Достоинства: Более высокая точность, чем в разомкнутой системе.

Недостаток: Система может стать неустойчивой даже при устойчивом объекте.

4. Разомкнуто-замкнутый принцип регулирования (*комбинированный*) (рис.1.10).

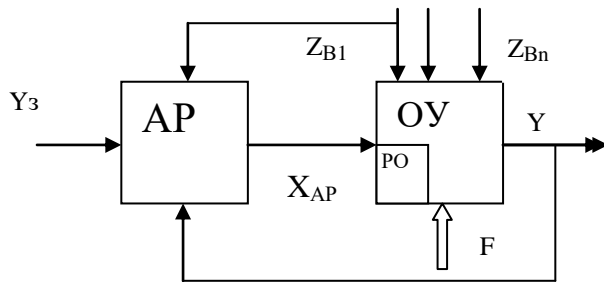


Рис.1.10. Принципиальная схема комбинированной системы

$$X_{AP} = f(Y_3 , Z_{B1} , Y).$$

X_{AP} – регулирующий сигнал.

Y_3 – задающее воздействие.

Z_{B1} – контролируемое возмущающее воздействие.

Y – регулируемая величина.

Достоинства: Точность, более высокая, чем в 2-ух вышеописанных системах.

Недостатки: Система может быть неустойчива при устойчивом объекте.

1.4.2 Законы регулирования.

Законы автоматического регулирования – законы, по которым работает автоматический регулятор (АР). Законы делятся на линейные и нелинейные.

Линейные законы.

$$X_{AP} = f(X)$$

X – может быть различным.

$$X = \begin{cases} x_3 \\ z_{\theta} \\ y \\ x_0 \end{cases}$$

1. Пропорциональный закон регулирования («П»).

$$X_{AP} = K_P \cdot X$$

K_P – коэффициент усиления регулятора.

Достоинство регулятора: простота.

Недостаток регулятора: в замкнутой системе с таким регулятором возникает ненулевая статическая ошибка.

2. Интегральный закон регулирования («И»).

$$X_{AP}(t) = K_I / T_I \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau$$

K_I – коэффициент усиления интегратора.

T_I – постоянная времени [с].

Достоинства:

- Статическая ошибка в замкнутой системе равна нулю.
- Относительная простота.

Недостаток: Затягивает переходной процесс в системе.

3. Пропорционально-интегральный закон регулирования («ПИ»).

$$X_{AP}(t) = K_P \cdot X(t) + \frac{K_I}{T_I} \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Достоинство: Нулевая статическая ошибка.

Недостаток: Затянутый переходной процесс.

4. Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования («ПИД»).

$$X_{AP}(t) = K_P \cdot x(t) + \frac{K_I}{T_I} \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau + K_D \cdot T_D \frac{dx(t)}{dt}$$

K_D – коэффициент усиления дифференциатора.

T_D – постоянная времени дифференциатора [с].

Достоинства:

1. Нулевая статическая ошибка.
2. Повышенное быстродействие.

Недостатки:

1. Относительная сложность.

2. Ухудшенная помехоустойчивость.

Нелинейные законы регулирования.

Реализуются введением в систему нелинейных статических регуляторов с релейными характеристиками, представленными ниже.

1. Идеальное (двухпозиционное) реле (рис.1.11).

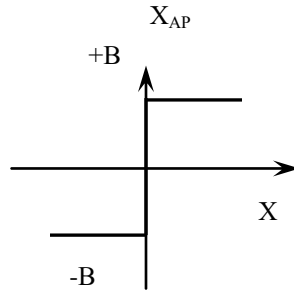


Рис.1.11. Характеристика двухпозиционного реле

2. Трехпозиционное реле (реле с зоной нечувствительности) (рис.1.12).

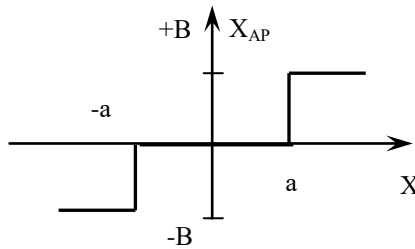


Рис.1.12. Характеристика трехпозиционного реле

3. Двухпозиционное реле с гистерезисом (рис.1.13).

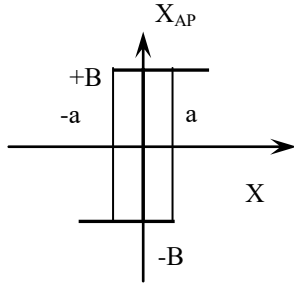


Рис.1.13. Характеристика двухпозиционного реле с гистерезисом

4. Трехпозиционное реле с гистерезисом (рис.1.14).

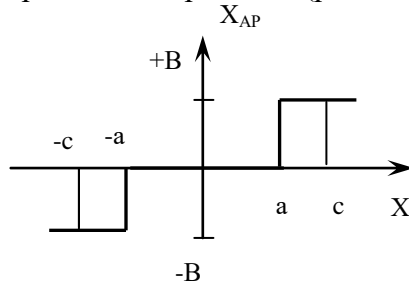
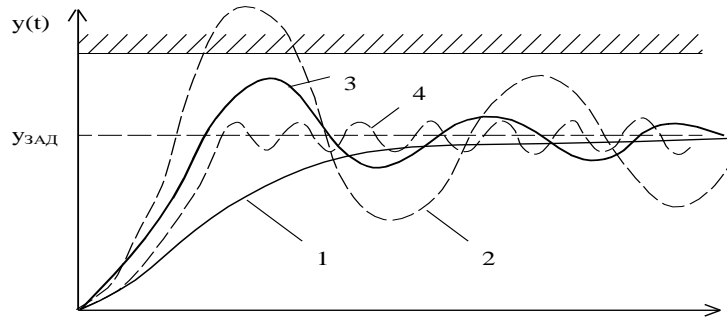


Рис.1.14. Характеристика трехпозиционного реле с гистерезисом

Нелинейные законы регулирования могут обеспечить в системе качественно новые процессы, так, например, при регулировании температуры массы некоторого вещества можно применять как линейные, так и нелинейные законы (рис.1.15); нелинейный закон регулирования



может обеспечить точность поддержания температуры на заданном уровне.

Рис.1.15. Пример переходного процесса реальной САУ

Где: 1 – линейный регулятор с апериодическим процессом на выходе объекта.

2 – без автоматического регулирования.

3. – линейный регулятор с колебательным процессом на выходе объекта.

4. – нелинейный регулятор.

y – выходная величина процесса, которую надо поддерживать на уровне $y_{зад}$ (например, температура массы вещества).

1.5 Система автоматического регулирования (на примере САР скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением).

1.5.1 Статическая и астатическая САР.

Система автоматического регулирования (САР) скорости вращения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис.1.16).

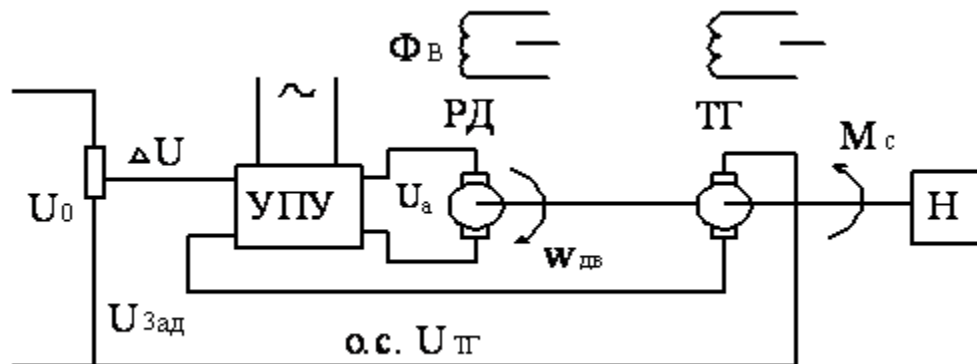


Рис.1.16. Принципиальная схема системы регулирования ДПТ

U_0 – напряжение, поступающее на вход потенциометра.

$U_{Зад}$ – напряжение, задающее скорость вращения двигателя.

РД – реверсивный двигатель, (вращающийся как по-, так и против- часовой стрелки в зависимости от полярности входного сигнала).

ТГ – тахогенератор (устройство для измерения скорости вращения двигателя).

УПУ – усилительно-преобразовательное устройство.

Н – нагрузка или производственный механизм, скорость которого надо поддерживать постоянной.

U_a – напряжение на якорной обмотке двигателя.

$\omega_{\partial в}$ - скорость вращения двигателя.

$U_{ТГ}$ – напряжение на выходе ТГ.

M_C – момент сопротивления на валу двигателя.

Φ_B – электромагнитный поток возбуждения двигателя.

РД – объект управления.

УПУ+ТГ=АР – автоматический регулятор.

$U_{Зад} \equiv \omega_{Зад}$ - задающее воздействие.

$$U_{Зад} = K_{ТГ} \cdot \omega_{Зад} \Rightarrow \omega_{Зад} = \frac{U_{Зад}}{K_{ТГ}}$$

$U_{ТГ} = K_{ТГ} \cdot \omega_{\partial в}$ - регулируемая величина.

M_C – возмущающее воздействие.

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= U_{Зад} - U_{ТГ} \\ \Delta \omega_{\partial в} &= \omega_{Зад} - \omega_{\partial в} \end{aligned} \right\} - \text{ошибка, или отклонение выходного сигнала системы от}$$

задающего воздействия.

$U_{ТГ}$ – подается через отрицательную обратную связь.

Цель системы: Стабилизация скорости вращения двигателя.

Рассмотрим момент времени t_0 .

Все сигналы постоянны.: $U_a^0, \omega_{\partial в}^0, U_{ТГ}^0, M_C^0$

Предположим, что в момент времени t_1 момент сопротивления увеличился скачком.

Сигналы изменяются следующим образом:

M_C - возрастает скачком (изменяется нагрузка); следовательно: $\omega_{\partial\partial}$ - падает, $U_{TГ}$ - падает, ΔU - возрастает, U_a - возрастает, следовательно возрастет $\omega_{\partial\partial}$, т.е. осуществляется регулирование.

В момент времени t_2 переходные процессы в системе заканчиваются, и встает вопрос, какая скорость вращения установится в системе, т.е.

При $t_2 > t_1$ $\omega_{\partial\partial}^2 <, =, > \omega_{\partial\partial}^0$? Рассмотрим два закона регулирования:

1. «И» закон регулирования.

$$U_a(t) = K_{II} \cdot \int_0^t \Delta U(\tau) d\tau$$

Для момента времени t_2 :

Допустим, что $\omega_{\partial\partial}^2 \neq \omega_{\partial\partial}^0 \Rightarrow \Delta U \neq 0 \Rightarrow U_a$ - изменяется, что противоречит предположению об окончании переходных процессов.

Единственная точка стабилизации: для «И»: $\omega_{\partial\partial}^2 = \omega_{\partial\partial}^0$

Определение: Астатической по возмущению называется система, у которой выходная величина не зависит от возмущения (статическая ошибка равна нулю) (рис.1.17).

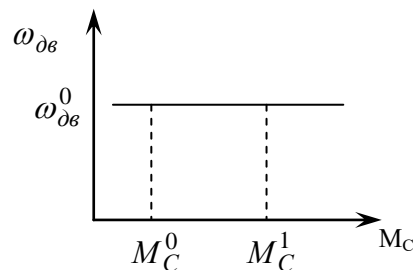


Рис.1.17. Нагрузочная характеристика астатической системы

2. Пропорциональный закон регулирования.

$$U_a = K_Y \cdot \Delta U$$

Предположим, что $\omega_{\partial\partial}^2 = \omega_{\partial\partial}^0 \Rightarrow$ ошибка: $\Delta\omega = \omega_{\partial\partial}^2 - \omega_{\partial\partial}^0 = 0$

$$\Rightarrow \Delta U = U_{TГ} - U_{зад} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow U_a = 0 \Rightarrow \omega_{\partial\epsilon} = 0$, это означает, что двигатель не вращается, следовательно, наше

предположение не верно, $\omega_{\partial\epsilon}^2 \neq \omega_{\partial\epsilon}^0$ и, с учетом возрастающей ошибки ΔU , понятно, что

$\omega_{\partial\epsilon}^2 < \omega_{\partial\epsilon}^0$ (рис.1.18).

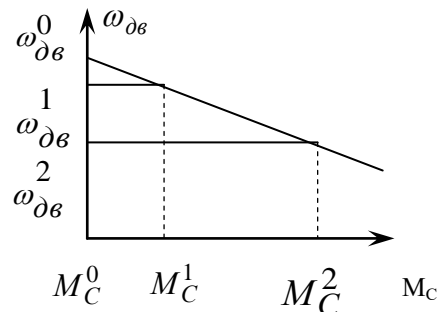


Рис.1.18. Нагрузочная характеристика статической системы

Определение: *Статической по возмущению* называется система автоматического регулирования (САР), у которой выходная величина уменьшается при увеличении возмущения. Статическая ошибка в такой системе не равна нулю.

Статические характеристики САР.

Определение: Статические характеристики - характеристики, полученные в положении равновесия.

Статические характеристики двигателя постоянного тока (ДПТ).

Прежде чем рассматривать статические характеристики системы, следует рассмотреть статические характеристики объекта управления – двигателя постоянного тока (ДПТ) (рис.1.19).

Статические характеристики двигателя постоянного тока.

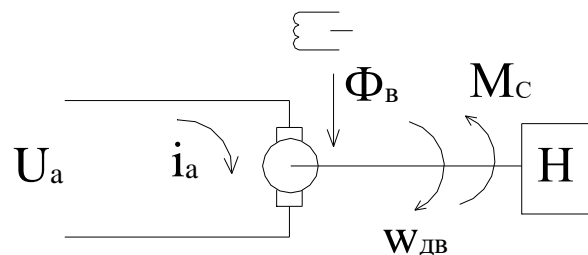


Рис.1.19. Схема двигателя постоянного тока

U_a – напряжение на якорной обмотке двигателя.

I_a – ток в якорной цепи.

Φ_B – электромагнитный поток возбуждения.

$\omega_{\partial\epsilon}$ - скорость вращения двигателя.

M_C – момент сопротивления на валу.

При взаимодействии тока i_a и потока Φ_B на валу возникает момент вращения двигателя $M_{ДВ}$, который вращает вал двигателя со скоростью $\omega_{\partial в}$.

$$\omega_{\partial в} = f(U_a, \Phi_B, M_C)$$

Если предположить, что $\Phi_B = \text{const}$, т.е. реакцией якоря можно пренебречь, то $\omega_{\partial в} = f(U_a, M_C)$

1) Если $M_C = 0$, то $\omega_{\partial в} = K_{\partial в} \cdot U_a$ (рис.1.20)

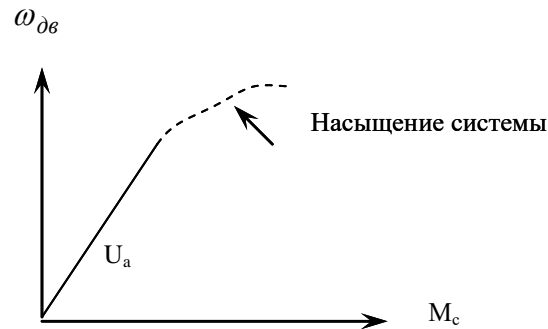


Рис. 1.20. Регулировочная характеристика двигателя постоянного тока

2) Если предположить, что $U_a = \text{const}$, получим линейные характеристики, приведенные на рисунке 1.21

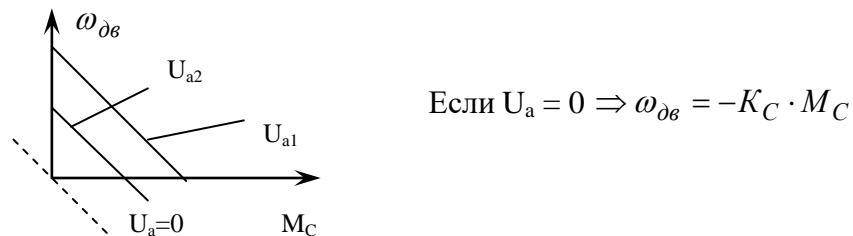


Рис.1.21. Нагрузочные характеристики двигателя постоянного тока

ДПТ описывается линейными уравнениями, следовательно, в соответствии с принципом суперпозиции можно записать уравнение статики двигателя постоянного тока:

$$\omega_{\partial в} = K_{\partial в} \cdot U_a - K_C \cdot M_C$$

Статическая характеристика статической системы регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока:

$$\begin{cases} \omega_{\partial\theta} = K_{\partial\theta} \cdot U_a^C - K_C \cdot M_C \\ U_a^C = K_Y \cdot \Delta U \\ \Delta U = U_{3a\partial} - U_{TГ} \\ U_{TГ} = K_{TГ} \cdot \omega_{\partial\theta} \end{cases}$$

В основе лежит уравнение статики ДПТ, но напряжение на якорной обмотке двигателя в статической системе формируется системой: U_a^C

$$\omega_{\partial\theta} = K_{\partial\theta} \cdot K_Y (U_{3a\partial} - K_{TГ} \cdot \omega_{\partial\theta}) - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\theta} = K_{\partial\theta} \cdot K_Y \cdot U_{3a\partial} - K_{\partial\theta} \cdot K_Y \cdot K_{TГ} \cdot \omega_{\partial\theta} - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\theta} (1 + K_{\partial\theta} K_Y K_{TГ}) = K_{\partial\theta} K_Y U_{3a\partial} - K_C M_C$$

$$\omega_{\partial\theta} = \frac{K_{\partial\theta} K_Y}{1 + K_{\partial\theta} K_Y K_{TГ}} \cdot U_3 - \frac{K_C}{1 + K_{\partial\theta} K_Y K_{TГ}} \cdot M_C$$

$K = K_{\partial\theta} K_Y K_{TГ}$ – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Окончательно получим уравнения статики статической системы:

$$\begin{aligned} \omega_{\partial\theta} &= \frac{K}{1+K} \cdot \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} - \frac{K_C}{1+K} \cdot M_C \\ \omega_{\partial\theta}^{3a\partial} &= \omega_{\partial\theta}^0 = \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} \end{aligned}$$

Найдем статическую ошибку.

$$\Delta\omega_{\partial\theta} = \omega_{\partial\theta}^{3a\partial} - \omega_{\partial\theta} = \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} - \frac{K}{1+K} \cdot \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} + \frac{K_C}{1+K} M_C$$

$$\Delta\omega_{\partial\theta} = \frac{1}{1+K} \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} + \frac{K_C}{1+K} M_C$$

Статические ошибки статической системы

$$\begin{cases} \Delta\omega_{\partial\theta}^Y = \frac{1}{1+K} \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} \\ \Delta\omega_{\partial\theta}^B = \frac{K_C}{1+K} M_C \end{cases}$$

Индексы: У - по управляющему воздействию, В – по возмущающему воздействию.

Что дает отрицательная обратная связь (замыкание системы)?

Предположим, момент сопротивления изменяется от 0 до $M_C \Rightarrow \Delta\omega_{\partial\partial} = -K_C M_C$ - для разомкнутой системы, $\Delta\omega_{\partial\partial}$ - изменение скорости двигателя.

Для замкнутых систем скорость изменится на величину:

$$\Delta\omega_{\partial\partial} = -\frac{K_C}{1+K} M_C,$$

Вывод: При замыкании системы статическая ошибка по возмущению уменьшается в $(1+K)$ раз.

Построим статические характеристики САР скорости вращения ДПТ (рис.1.22).

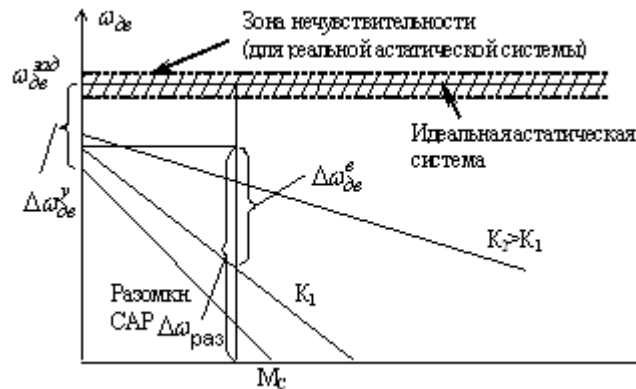


Рис.1.22. Нагрузочные характеристики САР скорости вращения ДПТ

На рисунке представлены статические характеристики разомкнутой, статической и астатической систем.

По рисунку можно найти коэффициент усиления разомкнутой статической системы K :

$$\frac{\Delta\omega_{раз.}}{\Delta\omega_{\partial\partial}^6} = 1 + K.$$

1.5.2 Комбинированная САР

На рис.1.23 представлена принципиальная схема комбинированной системы регулирования двигателем постоянного тока.

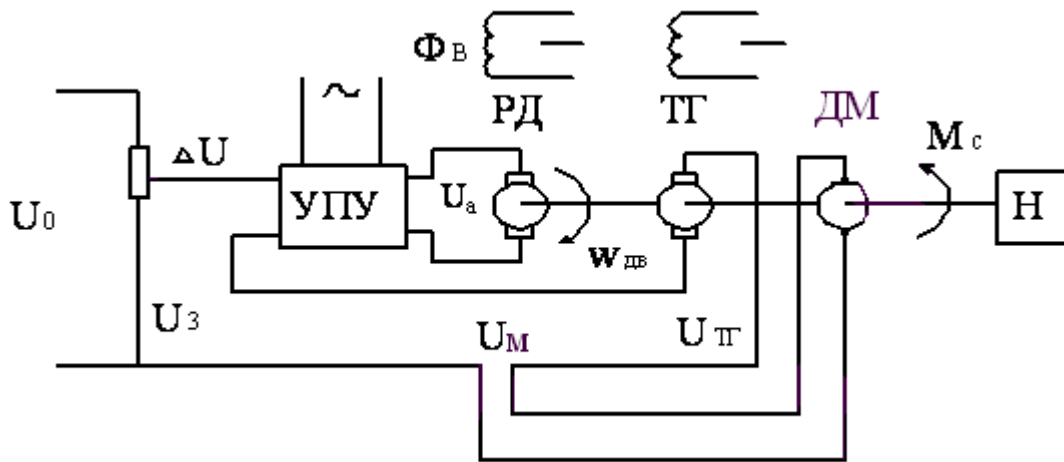


Рис.1.23. Принципиальная схема комбинированной системы регулирования ДПТ

Комбинированная САР использует управление по отклонению и по возмущению. Для этого в систему добавляется устройство преобразования момента сопротивления в напряжение U_M – датчик момента (ДМ):

$$U_M = K_M \cdot M_C.$$

Добавление сигнала U_M позволяет изменять отклонение, подаваемое на УПУ:

$$\Delta U = U_{зад} - U_{ТГ} + U_M.$$

Статические характеристики комбинированной САР

Запишем уравнения элементов в САР

$$\begin{cases} \omega_{\partial\partial} = K_{\partial\partial} \cdot U_a^K - K_C \cdot M_C \\ \begin{cases} U_a^K = K_Y \cdot \Delta U \\ \Delta U = U_{зад} - U_{ТГ} + U_M \\ U_M = K_M \cdot M_C \\ U_{ТГ} = K_{ТГ} \cdot \omega_{\partial\partial} \end{cases} \end{cases}$$

В основе лежит уравнение статики ДПТ, но напряжение на якорной обмотке двигателя в комбинированной системе формируется системой: U_a^K

$$\omega_{\partial\partial} = K_{\partial\partial} \cdot K_Y (U_{зад} - K_{ТГ} \cdot \omega_{\partial\partial} + K_M \cdot M_C) - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\partial} = K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot U_{зад} - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_{ТГ} \cdot \omega_{\partial\partial} + K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M \cdot M_C - K_C \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\partial} (1 + K_{\partial\partial} K_Y K_{ТГ}) = K_{\partial\partial} K_Y U_{зад} - K_C M_C + K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\partial} = \frac{K_{\partial\partial} K_Y}{1 + K_{\partial\partial} K_Y K_{TГ}} \cdot U_{3a\partial} - \frac{K_C - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M}{1 + K_{\partial\partial} K_Y K_{TГ}} \cdot M_C$$

$K = K_{\partial\partial} K_Y K_{TГ}$ – коэффициент усиления разомкнутой системы.

Окончательно получим уравнения статики комбинированной системы:

$$\omega_{\partial\partial} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} - \frac{K_C - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M}{1 + K} \cdot M_C$$

$$\omega_{\partial\partial}^{3a\partial} = \omega_{\partial\partial}^0 = \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}}$$

Найдем статическую ошибку.

$$\Delta\omega_{\partial\partial} = \omega_{\partial\partial}^{3a\partial} - \omega_{\partial\partial} = \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} - \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} + \frac{K_C - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M}{1 + K} M_C$$

$$\Delta\omega_{\partial\partial} = \frac{1}{1 + K} \frac{U_{3a\partial}}{K_{TГ}} + \frac{K_C - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M}{1 + K} M_C$$

Статические ошибки комбинированной системы

$$\begin{cases} \Delta\omega_{\partial\partial}^Y = \frac{1}{1 + K} \frac{U_3}{K_{TГ}} \\ \Delta\omega_{\partial\partial}^B = \frac{K_C - K_{\partial\partial} \cdot K_Y \cdot K_M}{1 + K} M_C \end{cases}$$

Индексы: Y – по управляющему воздействию, B – по возмущающему воздействию.

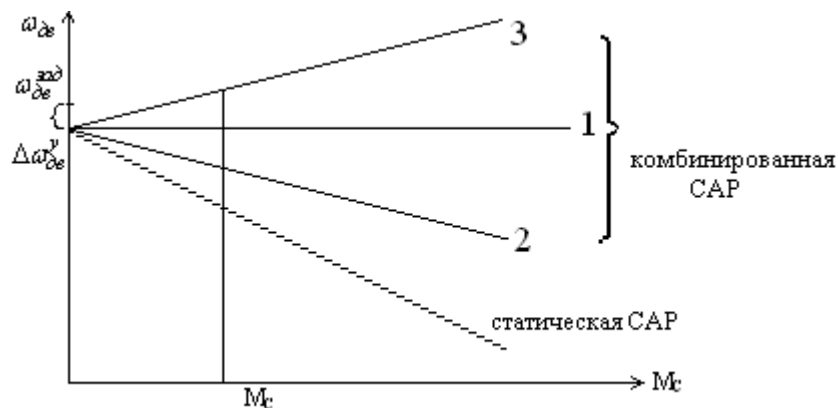


Рис.1.24. Нагрузочные характеристики комбинированной САР скорости вращения ДПТ

На рис. 1.24 представлены нагрузочные характеристики комбинированной САР. В комбинированной САР возможны три режима: полная компенсация 1, при котором напряжение U_M полностью компенсирует разность напряжений $\Delta U = U_{зад} - U_{ТГ}$, недокомпенсация 2, при которой U_M меньше разности напряжений $\Delta U = U_{зад} - U_{ТГ}$ и перекомпенсация 3, при которой U_M больше разности напряжений $\Delta U = U_{зад} - U_{ТГ}$.

1.6 Линеаризация.

Линеаризация – замена нелинейных уравнений на линейные проводится в пределах заданной точности и используется для исследования линейных систем. В основе линеаризации лежит разложение нелинейной характеристики в ряд Тейлора (рис.1.2.5).

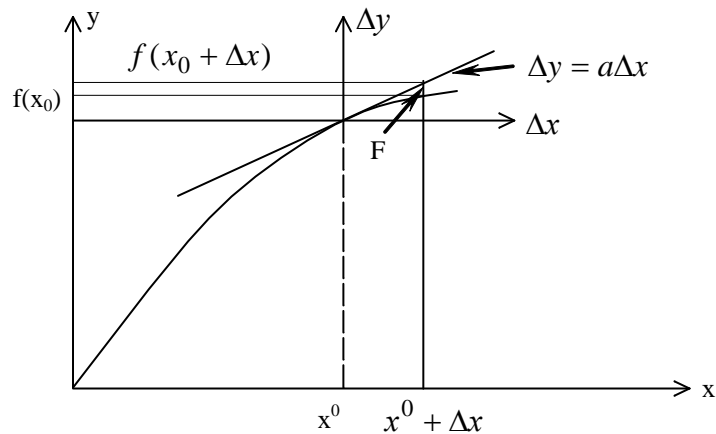


Рис.1.2.5. Пример линеаризации нелинейной функции

Рассмотрим точку x^0 , вблизи которой мы хотим получить линеаризованное уравнение.

Зададим приращение $x^0 + \Delta x$

Разложение в ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x^0 + \Delta x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x^2 + \dots}_F$$

При линеаризации используется только линейная часть разложения, т.е. нелинейная часть разложения F отбрасывается.

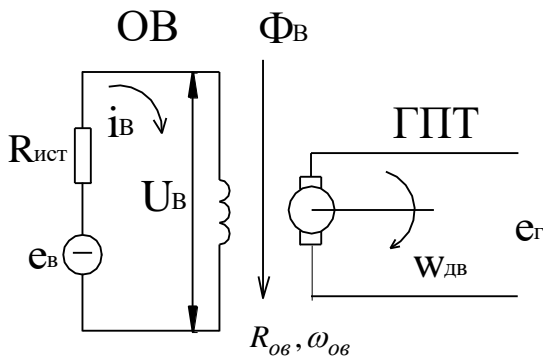
Получаем линеаризованное уравнение. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x$;

Используя обозначение $a = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$; получим линеаризованное уравнение в

приращениях: $\Delta y = a \cdot \Delta x$;

При этом начало координат переносится из точки 0 в точку 0'.

1.6.1 Пример получения линеаризованных уравнений генератора постоянного тока на ХОЛОСТОМ ХОДУ.



ОВ – обмотка возбуждения.
 ГПТ – генератор постоянного тока.
 $R_{ИСТ}$ – активное сопротивление источника питания.
 e_B – ЭДС источника питания (возбуждения).
 i_B, U_B – ток и напряжение на обмотке возбуждения.

Рис.1.26. Схема генератора постоянного тока

Φ_B – электромагнитный поток, создаваемый обмоткой возбуждения.

$\omega_{ог}$ - скорость, с которой посторонний двигатель вращает якорь генератора постоянного тока.

$e_Г$ – ЭДС генератора.

$R_{ОВ}$ – активное сопротивление обмотки возбуждения

$\omega_{ог}$ - число витков обмотки возбуждения.

Уравнение обмотки возбуждения (рис.1.26).

ОВ: 1) $e_Г(t) = (R_{ИСТ} + R_{ОВ}) \cdot i_B(t) + \underbrace{\omega_{ОВ} \cdot \frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t}}_{\text{ЭДС самоиндукции}}$

ЭДС самоиндукции

2) $\Phi_B = f(i_B)$

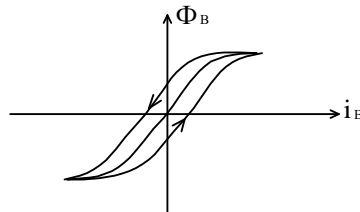


Рис.1.27. Характеристика петли гистерезиса обмотки возбуждения ГПТ

3) ГПТ – цепь генератора

$$e_G(t) = C_G \cdot \Phi_B(t)$$

C_G – коэффициент пропорциональности между напряжением и электромагнитным потоком возбуждения.

Уравнения 1-3 - это описание ГПТ в виде нелинейных дифференциальных уравнений (точнее, уравнения 1 и 3 – линейные, а уравнение 2 – нелинейное статическое уравнение).

1) Если шириной петли гистерезиса пренебречь нельзя, то линеаризация невозможна, и для описания требуется привлечение аппарата анализа нелинейных систем.

2) Если ширина петли гистерезиса мала, то двухзначная характеристика заменяется на однозначную (среднюю линию петли гистерезиса).

Рассмотрим 2 участка.

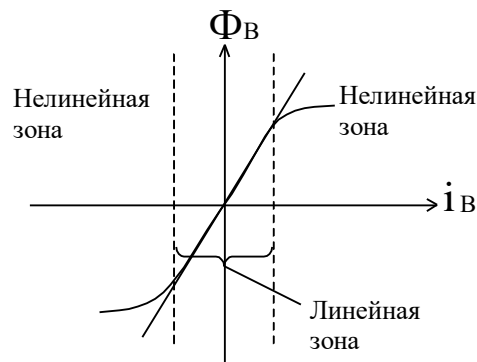


Рис.1.28. Характеристика обмотки возбуждения ГПТ

1.6.1.1 Получение линеаризованных уравнений ГПТ для рабочей точки в нелинейной зоне

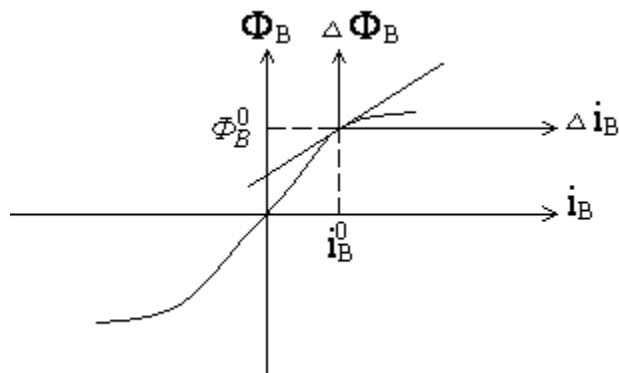


Рис.1.29. Линеаризация в нелинейной зоне характеристики обмотки возбуждения ГПТ

Получим систему линеаризованных уравнений, используя линеаризованное уравнение в приращениях.

Запишем уравнение стационарной точки (рабочей точки).

В стационарной точке все входы и выходы постоянны, все производные равны нулю.

Запишем 2-а уравнения стационарной точки:

$$\begin{cases} e_B^0 = R_B i_B^0 \\ e_\Gamma^0 = C_\Gamma \Phi_B^0 \end{cases}$$

Тогда сигналы можно представить как отклонения от стационарной точки:

$$e_B(t) = e_B^0 + \Delta e_B(t) \quad \Phi_B(t) = \Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t)$$

$$e_\Gamma(t) = e_\Gamma^0 + \Delta e_\Gamma(t) \quad i_B(t) = i_B^0 + \Delta i_B(t)$$

где e_B^0 - рабочая точка, а $\Delta e_B(t)$ - приращение от этой рабочей точки.

С использованием записанных равенств, получим:

$$e_B^0 + \Delta e_B(t) = R_B(i_B^0 + \Delta i_B(t)) + \omega_B \frac{d(\Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t))}{dt}$$

$$e_B^0 = R_B i_B^0$$

$$1') \quad \Delta e_B(t) = R_B \Delta i_B(t) + \omega_B \frac{d\Delta \Phi_B(t)}{dt}$$

$$2') \quad \Delta \Phi_B = a \Delta i_B \Rightarrow a = \left. \frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial i_B} \right|_{i_B^0, \Phi_B^0}$$

Уравнение линеаризации, проведенное по току;

$$3') \quad e_\Gamma^0 + \Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma(\Phi_B^0 + \Delta \Phi_B(t))$$

$$e_\Gamma^0 = C_\Gamma \Phi_B^0$$

$$\Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma \Delta \Phi_B(t)$$

Уравнения 1'-3' - это линеаризованные уравнения в приращениях, описывающие работу генератора постоянного тока вблизи рабочей точки, лежащей в нелинейной зоне.

1.6.1.2 Получение линейных уравнений ГПТ с рабочей точкой в линейной зоне.

$$2'') \quad \Phi_B = L_B^1 i_B$$

L_B^1 - индуктивность одного витка обмотки возбуждения.

$$1'') \quad e_B(t) = R_B i_B(t) + \underbrace{L_B^1 \omega_B}_{L_B} \frac{di_B(t)}{dt}$$

ω_B - число витков обмотки возбуждения.

L_B – индуктивность обмотки возбуждения.

$$3'') \quad e_G(t) = C_G L_B^1 i_B(t)$$

$$C = C_G L_B^1$$

Уравнения 1''-3''- это линейные уравнения, описывающие работу ГПТ в линейной зоне.

1.7 Выводы

Самодействующие системы известны с давних времен (разд. 1.1) и строятся по разомкнутому и замкнутому принципу. Замкнутый принцип лежит в основе современных систем автоматического управления, которые можно представить функциональной схемой (рис. 1.2). В настоящее время разработано множество систем управления, классифицируемых по различным признакам (разд. 1.3). В системах используются три принципа регулирования (разомкнутый, замкнутый и комбинированный) и законы регулирования, как линейные, так и нелинейные (разд.1.4).

В соответствии с законом регулирования (пропорциональным или интегральным), реализуемым в автоматическом регуляторе (АР) (разд.1.5), системы делятся на статические и астатические САР. Наиболее удобным и разработанным является аппарат исследования линейных систем автоматического управления, которые можно получить, применяя линеаризацию (разд. 1.6).

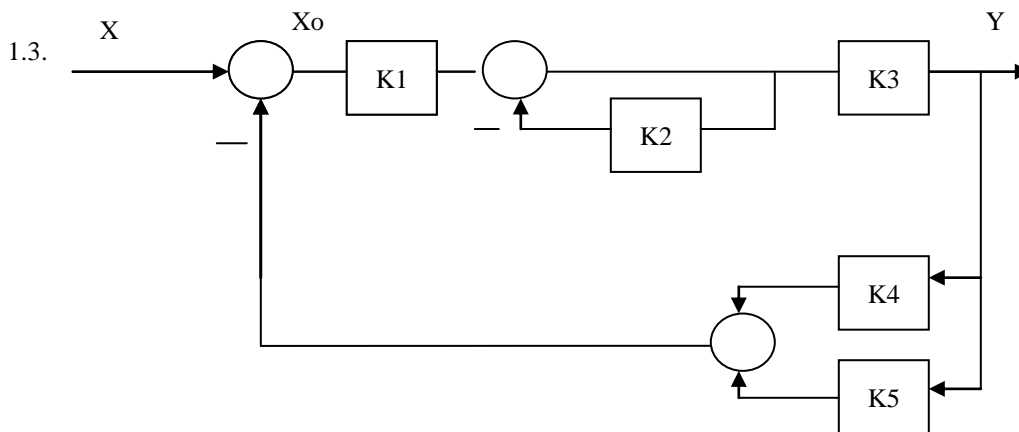
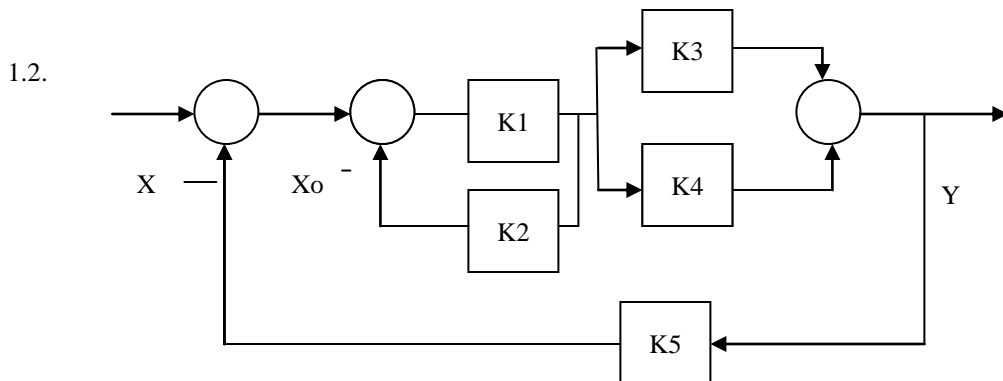
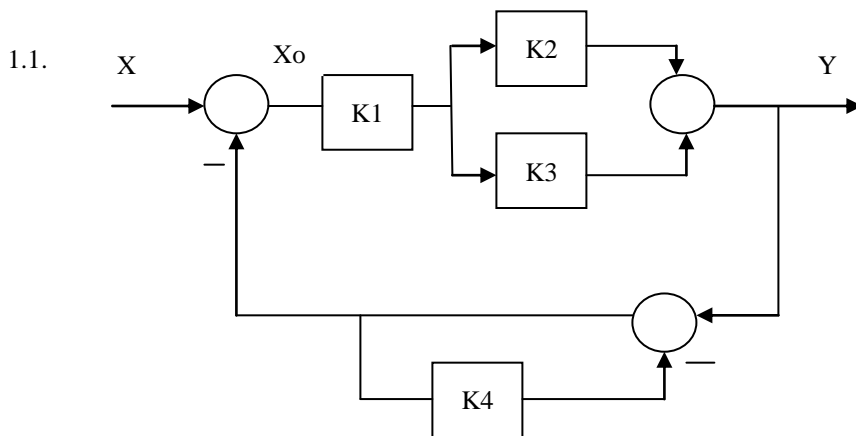
1.8 Вопросы

1. Приведите примеры самодействующих систем.
2. Какие разработки положили начало автоматическим системам, работающим по замкнутому принципу.
3. Какой возмущающий сигнал выбирается для компенсации при реализации разомкнутого принципа управления.
4. Перечислите достоинства и недостатки принципов регулирования (разомкнутого, замкнутого, комбинированного).
5. Какие свойства вносят интегральная и дифференциальная составляющие линейного ПИД закона регулирования.

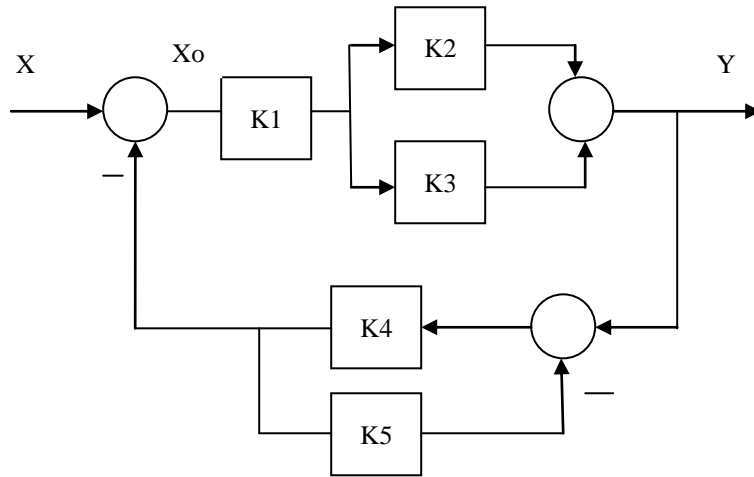
6. Поясните наличие статической ошибки при использовании пропорционального закона регулирования в САУ скорости вращения двигателя постоянного тока (ДПТ).
7. Поясните отсутствие статической ошибки при использовании интегрального закона регулирования в САУ скорости вращения ДПТ.
8. Какие системы автоматического регулирования называются статическими и астатическими по возмущению.

1.9 Задания

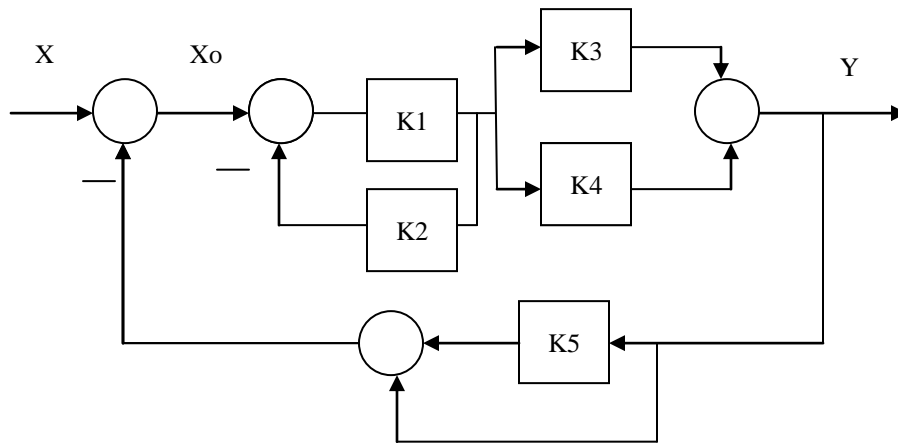
1. Найти выходной сигнал Y и сигнал ошибки X_o , вычисляя сигналы из уравнений элементов при следующих значениях коэффициентов, $K_1=2$ $K_2=3$ $K_3=5$ $K_4=1$ $K_5=4$, если на вход системы подавать сигнал $X=1$:



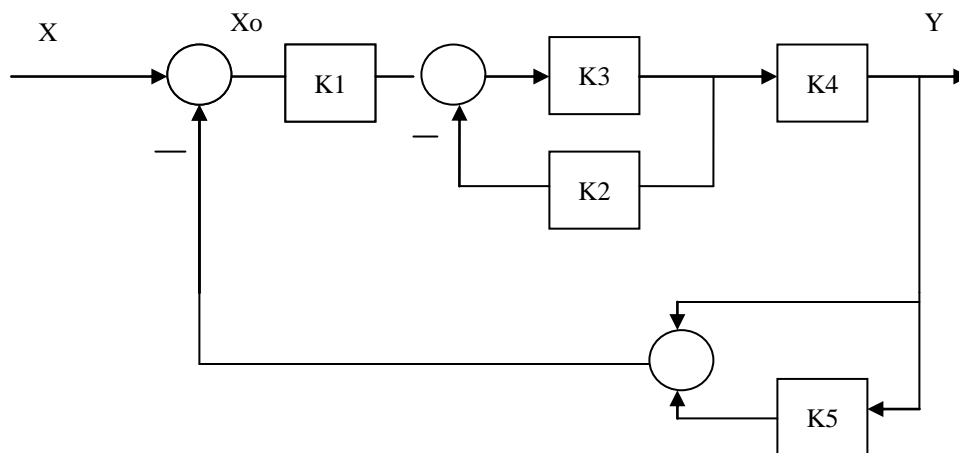
1.4.



1.5.

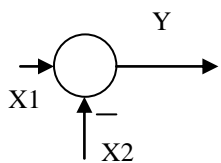


1.6.



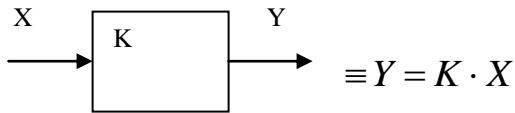
На схемах использованы обозначения следующих элементов:

А) Сумматор

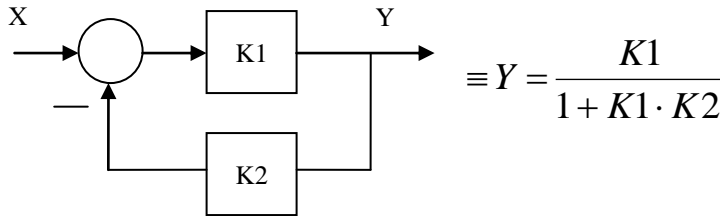


$$\equiv Y = X_1 - X_2$$

Б) Усилитель



В) Обратная связь



2. Заменить нелинейные статические элементы, описываемые заданными ниже функциями линеаризованными, найти значение Y в заданной точке :

2.1. $Y = \left| 2(e^{-x} - 1) + 0,5 \sin(x) \right|$ в точке $x=0$;

2.2. $Y = 3 \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \text{arctg}(x)$ в точке $x=1,5$;

2.3. $Y = \left| 2 \cdot \arcsin(x) + 0,5 \sin(x) \right|$ в точке $x=0$;

2.4. $Y = 3 \cdot \frac{\text{tg}(x)}{2} + \text{arctg}(x)$ в точке $x=1$;

2.5. $Y = 3 \cdot \frac{\text{tg}(x)}{2} + \text{arctg}(x)$ в точке $x=0$.

Использовать разложение функций в ряды:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

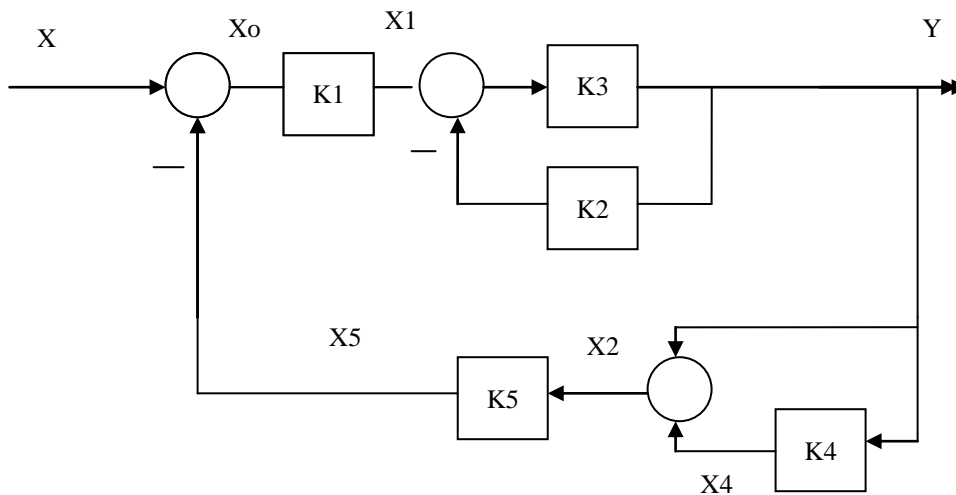
$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

1.10 Практикум по главе 1.

1. Пусть задана схема системы в виде:



1. Запишем ряд равенств, описывающих работу элементов схемы. Для этого введем обозначения сигналов на выходах элементов.

$$X_0 = X - X_5;$$

$$X_1 = X_0 \cdot K_1;$$

$$Y = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} X_1;$$

$$X_2 = Y + Y \cdot K_4;$$

$$X_5 = X_2 \cdot K_5.$$

Поскольку в соответствии с заданием следует найти сигналы X_0 и Y , то следует подставить равенства в выражения для X_0 и Y .

$$X_o = X - X_2 \cdot K_5 = X - Y \cdot (1 + K_4) \cdot K_5 = X - \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} X_1 \cdot (1 + K_4) \cdot K_5 =$$

$$= X - X_o \cdot K_1 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot (1 + K_4) \cdot K_5;$$

Рассчитаем коэффициент при сигнале X_o :

$$K_1 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot (1 + K_4) \cdot K_5 = 2 \cdot \frac{5}{1 + 3 \cdot 5} \cdot (1 + 1) \cdot 4 = 5$$

Таким образом, получили $X_o \cdot (1 + 1,25) = X$, т.е. $X_o = \frac{X}{6}$

$$Y = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} X_1 = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot X_o = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot (X - X_2) =$$

$$= \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot (X - X_2 \cdot K_2) = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot (X - (1 + K_4) \cdot K_2 \cdot Y) =$$

$$= \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot X - (1 + K_4) \cdot K_2 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot Y$$

$$Y(1 + (1 + K_4) \cdot K_2 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1) = \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1 \cdot X$$

$$Y = \frac{\frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1}{1 + (1 + K_4) \cdot K_2 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1} \cdot X$$

Рассчитаем коэффициент при сигнале X :

$$\frac{\frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1}{1 + (1 + K_4) \cdot K_2 \cdot \frac{K_3}{1 + K_2 \cdot K_3} \cdot K_1} = \frac{\frac{5}{1 + 3 \cdot 5} \cdot 2}{1 + (1 + 1) \cdot 3 \cdot \frac{5}{1 + 3 \cdot 5} \cdot 2} = \frac{\frac{10}{16}}{1 + \frac{60}{16}} = 0,131579$$

2. Найти линеаризованное соотношение между входным и выходным сигналом, поступающим на статический нелинейный элемент, описываемый функцией:

$$Y = 2 \cdot \ln(1 + x) \text{ в точке } x=2.$$

Воспользовавшись разложением в ряд, приведенным выше, найдем разложение:

$$Y = 2 \cdot \ln(1 + x) = 2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \right).$$

Выделив линейную часть разложения, получим $Y = 2 \cdot x$. При $x=2$, получаем $Y=4$.

1.11 Список литературы

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления, «Энергия», ч.1 -1965.
2. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
3. Теория автоматического управления: Учеб. Для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др. – М.: Высш.шк., 1986. – 367 с.
4. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. - М.: Изд-во МЭИ, 1992, 103 с.
5. Колосов О.С., Хризолитова С.А. Лабораторные работы по курсу "Основы теории автоматического управления". М.: Изд. МЭИ, 1994.-30с.
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.

2 Математическое описание систем автоматического управления

(знать: свойства преобразования Лапласа, определение передаточных функций, частотных и временных характеристик, описание типовых динамических звеньев; уметь: определять передаточные функции по линейным дифференциальным уравнениям звеньев и систем, частотные и временные характеристики; владеть: приемами построения частотных и временных характеристик.)

2.1 Дифференциальные уравнения.

Системы автоматического управления (САУ) в общем виде могут быть описаны системами дифференциальных уравнений. Так, n -мерная система с p входами и q выходами может быть описана системой n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$\dots = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

$$\dots = \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$y_q = g_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)$$

2.2 Преобразование Лапласа и его свойства.

Передаточные функции используют преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа его свойства.

$$\text{Формула преобразования Лапласа: } F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$f(t)$ называется оригиналом, а $F(p)$ - изображением по Лапласу, что отображается следующим образом: $f(t) \div F(p)$.

p – комплексная величина, называемая оператором Лапласа.

Преобразование Лапласа заменяет решение дифференциальных уравнений во временной области, решением алгебраических уравнений в плоскости p , что облегчает задачу анализа систем.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность

$$L\{af_1(t) \pm bf_2(t)\} = aF_1(p) \pm bF_2(p)$$

$$F(p) = L\{f(t)\},$$

L - обозначает преобразование Лапласа.

Таким образом, преобразование Лапласа от суммы равно сумме преобразований Лапласа.

2. Изображение производных.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0);$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) \dots - f^{n-1}(0).$$

$$\text{При нулевых начальных условиях: } L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n F(p)$$

3. Преобразование Лапласа от интеграла (Изображение интеграла).

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$$

4. Изображение Лапласа от функции с запаздывающим аргументом (рис.2.1).

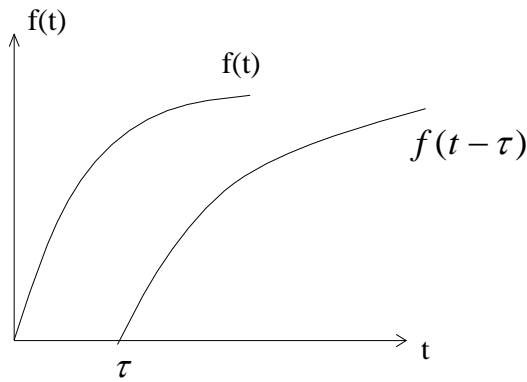


Рис.2.1. Пример функции с запаздывающим аргументом

Изображение от функции с запаздывающим аргументом имеет вид:

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} F(p),$$

Где $e^{-p\tau}$ - оператор запаздывания.

5. Теорема о конечном значении.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Если предел существует, это означает, что поведение функции в бесконечности, определяется поведением её изображения в нуле.

2.3 Передаточные функции.

Понятие передаточной функции (рис.2.2).

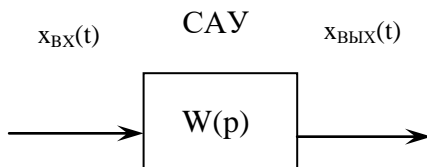


Рис.2.2. Передаточная функция системы

Передаточной функцией $W(p)$ называется отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала по Лапласу при нулевых начальных условиях (ННУ).

ННУ – означают, что входной и выходной сигнал вместе с их (n-1) производными равен нулю.

1. Пример получения передаточной функции.

Передаточная функция ГПТ.

$$\frac{Td\Delta e_{\Gamma}}{dt} + \Delta e_{\Gamma} = K\Delta e_{B}$$

Воздействуем оператором Лапласа на правую и левую часть дифференциального уравнения.

$$L\left\{\frac{Td\Delta e_{\Gamma}(t)}{dt} + \Delta e_{\Gamma}(t)\right\} = L\{K\Delta e_B\}$$

Введем обозначения
$$\left. \begin{aligned} L\{\Delta e_{\Gamma}(t)\} &= E_{\Gamma}(p) \\ L\{\Delta e_B(t)\} &= E_B(p) \end{aligned} \right\}.$$

$$T\{pE_{\Gamma}(p) - \Delta e_{\Gamma}(0)\} + E_{\Gamma}(p) = K \cdot E_B(p)$$

$$\Delta e_{\Gamma}(0) = 0$$

$$TpE_{\Gamma}(p) + E_{\Gamma}(p) = K \cdot E_B(p)$$

$$E_{\Gamma}(p)(Tp + 1) = K \cdot E_B(p)$$

Получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{E_{\Gamma}(p)}{E_B(p)} = \frac{K}{Tp + 1}$$

2. Пример получения передаточной функции (рис.2.3).

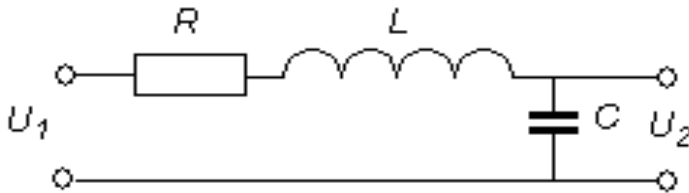


Рис.2.3. RLC - цепочка

Уравнения, описывающие процессы в RLC - цепочке :

$$U_1(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + U_2(t)$$

$$i(t) = C \frac{dU_2(t)}{dt}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим:

$$U_1(t) = CR \frac{dU_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2U_2(t)}{dt^2} + U_2(t) - \text{линейное уравнение «вход – выход»}.$$

Как упоминалось ранее, в ТАУ принята специальная форма записи дифференциальных уравнений, при которой слева записывается выходной вместе с его производными сигнал в порядке уменьшения степени производных, справа входной сигнал с его производными в том же порядке, при этом коэффициент при выходном сигнале принимается равным 1.

Таким образом, запишем:

$$LC \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + CR \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$$

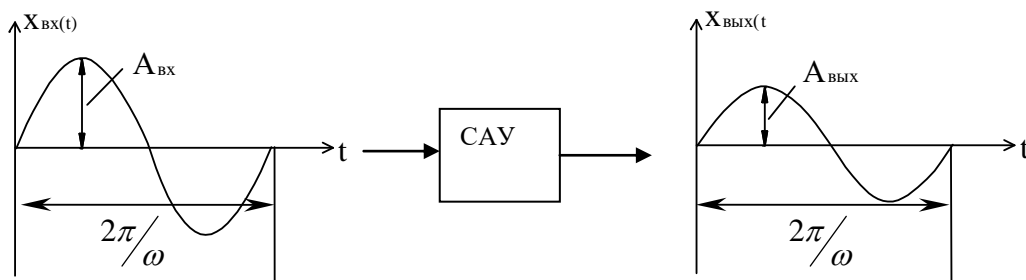
Применяя к уравнению преобразование Лапласа и предполагая нулевые начальные условия, получим:

$$(LCp^2 + CRp + 1)U_2(p) = U_1(p), \text{ или передаточную функцию:}$$

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LCp^2 + CRp + 1}$$

2.4 Частотные характеристики САУ

Комплексный коэффициент усиления (рис.2.4)



$$x_{BX}(t) = A_{BX} \cdot \sin \omega t$$

$$x_{ВЫХ}(t) = A_{ВЫХ}(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi_{ВЫХ}(\omega))$$

Рис.2.4. Схема прохождения гармонического сигнала через САУ

Воспользуемся формулой Эйлера: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ и запишем входной и выходной сигнал в комплексной форме (используя формулу Эйлера).

$$x_{BX}(t) = \text{Im}\{A_{BX} e^{j\omega t}\} = \text{Im}\left\{\overset{\bullet}{x_{ВЫХ}}\right\}$$

$$x_{ВЫХ}(t) = \text{Im}\{A_{ВЫХ}(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}\} = \text{Im}\left\{\overset{\bullet}{x_{ВЫХ}}\right\}$$

Введем понятие комплексного коэффициента усиления (ККУ)

$$W(j\omega) = \frac{\overset{\bullet}{x_{ВЫХ}}}{\overset{\bullet}{x_{ВХ}}}$$

Определение:

ККУ – это отношение выходного сигнала ко входному в установившемся режиме, записанных в комплексной форме при подаче на вход системы гармонического сигнала (рис.2.5).

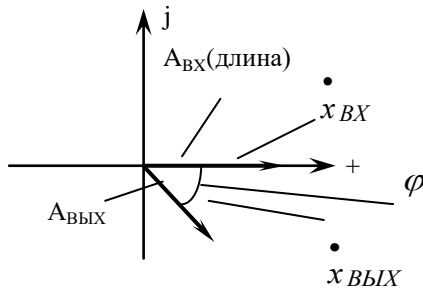


Рис.2.5. Представление гармонических сигналов на комплексной плоскости

Вектора вращаются против часовой стрелки со скоростью ω , а сигнал – это проекция векторов на мнимую часть.

$$W(j\omega) = \frac{\dot{x}_{ВЫХ}}{\dot{x}_{BX}} = \frac{A_{ВЫХ}(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{A_{BX} \cdot e^{j\omega t}} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

где $A(\omega) = \frac{A_{ВЫХ}(\omega)}{A_{BX}(\omega)}$

$A(\omega)$ – это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала на определенной частоте ω (при подаче на вход гармонического сигнала частоты ω).

$\varphi(\omega)$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ) – разность фаз между выходным и входным сигналом при подаче на вход гармонического сигнала определенной частоты.

Если разложить полученное выражение для ККУ по формуле Эйлера, получим:

$$W(j\omega) = A(\omega)(\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

где : $P(\omega) = A(\omega) \cos\varphi(\omega)$ - вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$Q(\omega) = A(\omega) \sin\varphi(\omega)$ - мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическая интерпретация ККУ (рис.2.6)

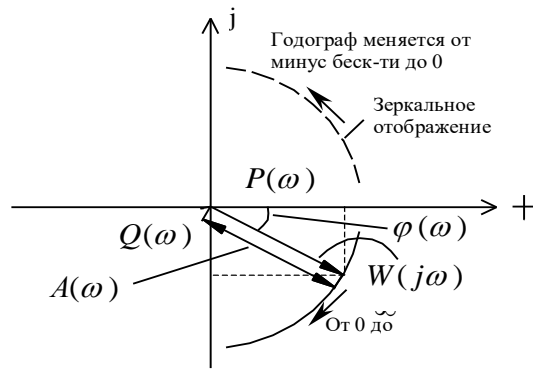


Рис.2.6. Геометрическая интерпретация комплексного коэффициента усиления

Определение: Геометрическое место точек конца вектора $W(j\omega)$ называется годографом (Найквиста), или амплитудно-фазовой характеристикой АФХ. Частота меняется в диапазонах: $-\infty < \omega < \infty$ или $0 < \omega < \infty$. Используемые в ТАУ характеристики.

1). АЧХ – амплитудная частотная характеристика. Строится в обычном масштабе от частоты, меняющейся в диапазоне от 0 до ∞ . Строится по выражению $A(\omega)$.

2). ФЧХ – фазовая частотная характеристика. Строится по выражению $\varphi(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

3). ВЧХ – Вещественная частотная характеристика. Строится по выражению $P(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

4). МЧХ – мнимая частотная характеристика. Строится по выражению $Q(\omega)$ в обычном масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ .

5). АФХ – амплитудно-фазовая характеристика. Строится по выражению $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частот либо от 0 до ∞ , либо от $-\infty$ до ∞ .

6). ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика: $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$

Строится в логарифмическом масштабе при изменении частоты от 0 до ∞ (рис.2.7).

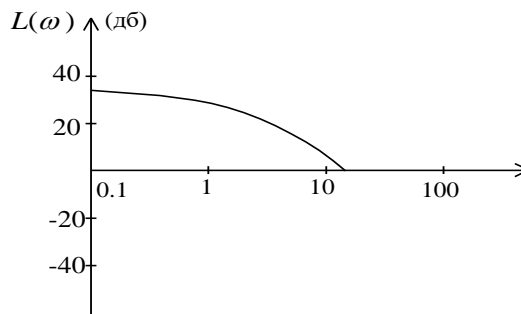


Рис.2.7. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

Децибел – логарифмическая единица измерения отношения 2-х величин.

Декада – диапазон частот, на котором частота изменяется в 10 раз.

6). Асимптотическая ЛАЧХ - $L'(\omega)$ - это характеристика, полученная из $L(\omega)$

аппроксимацией её отрезками прямых с наклонами: $0 \pm 20 \pm 40 \pm 60 \dots \frac{\text{дб}}{\text{дек}}$. Следует заметить,

что логарифмический масштаб спрямляет криволинейные характеристики, после чего такая аппроксимация становится возможной.

7). ЛФЧХ – логарифмическая фазовая частотная характеристика. Строится в полулогарифмическом масштабе в диапазоне частот от 0 до ∞ (рис.2.8).

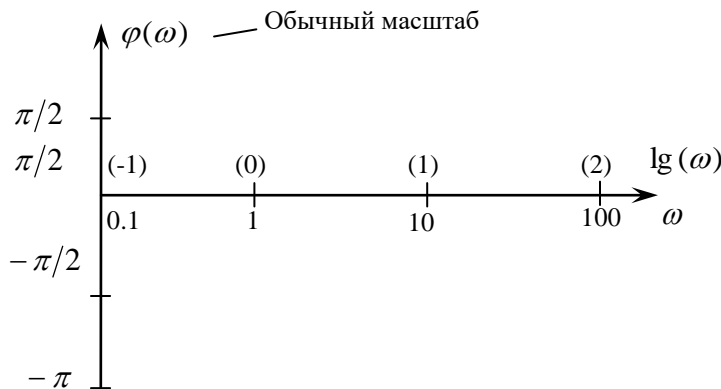


Рис. 2.8. Логарифмическая фазовая частотная характеристика

2.5 Типовые динамические звенья

Динамическим звеном называется некоторое устройство, либо система в целом, описываемая линейным дифференциальным уравнением или передаточной функцией. Динамические звеньями обладают двумя свойствами:

Однонаправленность (передача сигнала осуществляется в одном направлении от входа к выходу, т.е. выход не влияет на вход системы). Типичным примером динамического звена является термопара – устройство для измерения температуры, состоящее из двух металлических пластин, один конец которых соединен и помещается в нагретое пространство, а между несоединенными концами при этом появляется напряжение (э.д.с.). Естественно, э.д.с. не влияет на температуру.

Характеристики динамических звеньев не меняются при их различном подключении друг к другу. Продемонстрируем это на примере соединения RLC – цепочки и делителя напряжения (рис.2.9):

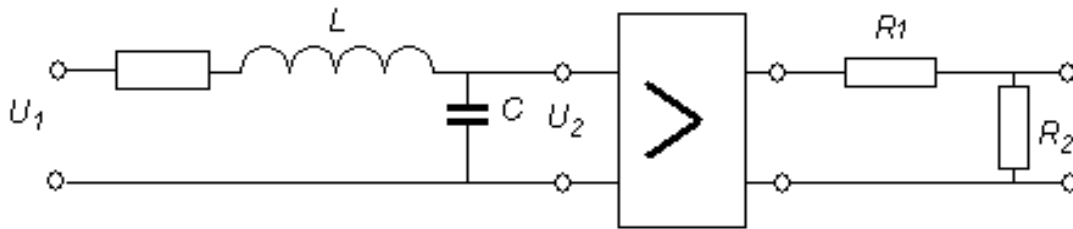


Рис. 2.9. RLC - цепочка

Если цепочки соединены через усилитель с большим входным и малым выходным сопротивлением, т.е. вторая цепочка не нагружает первую, то второе свойство выполняется, а в противном случае – нет, что легко показать, найдя передаточную функцию последовательного соединения цепочек и убедившись, что она не равна произведению двух исходных передаточных функций. Типовыми называются динамические звенья, описываемые линейными дифференциальными уравнениями или передаточными функциями не выше второго порядка.

2.5.1 Безынерционное (пропорциональное) звено

Примеры: а) редуктор, у которого отношение угловой скорости вращения выходного вала

к скорости вращения входного вала равно передаточному числу $i_p = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. т.е. $W(p) = i_p$;

б) рычаг (рис.2.10), для которого выполняется соотношение: $p_1 \cdot l_1 = p_2 \cdot l_2$,

т.е. $W(p) = \frac{p_2}{p_1} = \frac{l_1}{l_2}$.

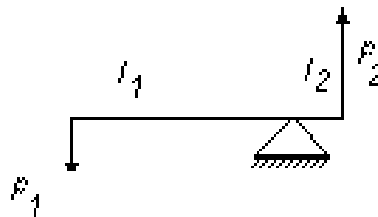


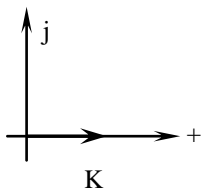
Рис.2.10. Схема рычага

Таким образом, передаточная функция безынерционного звена равна:

$$W(p) = K = Ke^{j0} = K + j \cdot 0$$

1) АФХ (годограф Найквиста):

$$K = Ke^{-j0}$$



2) АЧХ ($A(\omega)$)

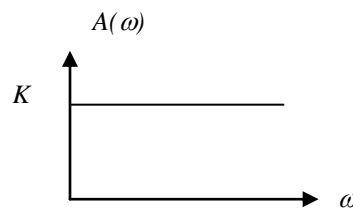


Рис.2.11. Характеристики безынерционного звена (годограф, АЧХ)

3) ВЧХ ($P(\omega)$)

$$P(\omega) = K$$

$$\Phi\text{ЧХ } (\varphi(\omega)) \quad \varphi(\omega) = 0$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) (рис.2.12)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K$$

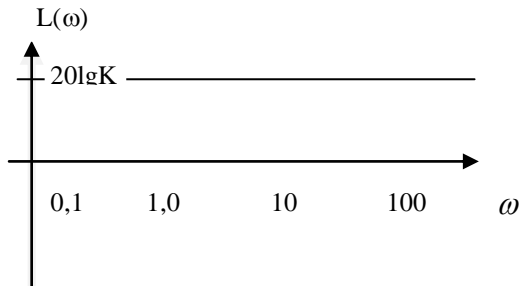


Рис.2.12. ЛАЧХ безынерционного звена

2.5.2 Интегрирующее звено

Примеры:

А) Вал, у которого угол поворота связан с угловой скоростью вращения интегральным

соотношением:
$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau ;$$

Б) Конденсатор, для которого активным сопротивлением проводов можно пренебречь ($r=0$)

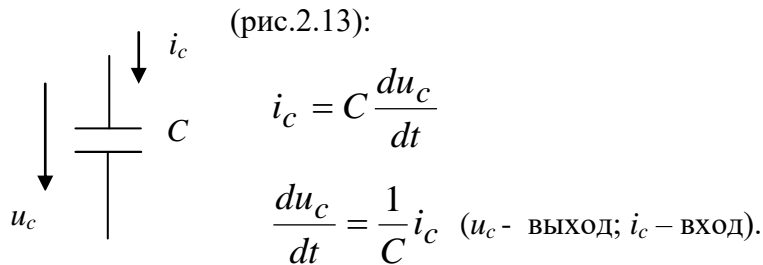


Рис.2.13 Схема конденсатора

Уравнения, описывающие интегрирующее звено:

$$y(t) = \frac{K}{T} \int_0^t x(\tau) d\tau = K_{II} \int_0^t x(\tau) d\tau ;$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = K_{II} x(t) .$$

Передаточная функция:
$$W(p) = \frac{K_{II}}{p}$$

$$W(j\omega) = \frac{K_{II}}{j\omega} = \frac{K_{II}e^{j0}}{\omega e^{j\pi/2}} = \frac{K_{II}}{\omega} e^{-j\pi/2} = 0 - j\frac{K_{II}}{\omega}$$

где: $P(\omega)=0$ $Q(\omega) = -j\frac{K_{II}}{\omega}$ $A(\omega) = \frac{K_{II}}{\omega}$ $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$$K_{II} = K_{II}e^{j0}$$

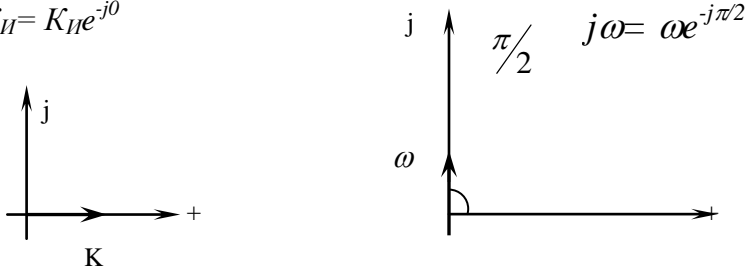


Рис.2.14. Представление на комплексной плоскости

Построим частотные характеристики:

1). Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.15)

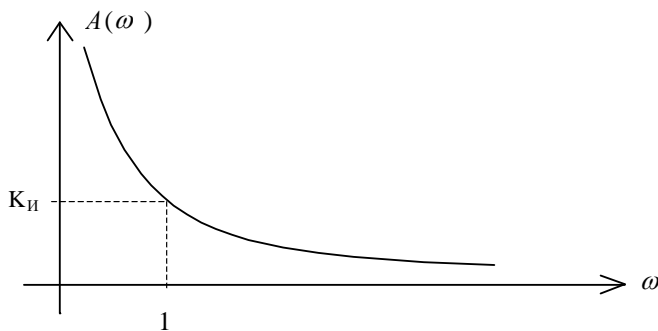


Рис.2.15. АЧХ интегрирующего звена

Характеристику можно пояснить на примере: Если на конденсатор C подать сигнал нулевой частоты \Rightarrow напряжение U_C растет до бесконечности. Если $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow U_C \rightarrow 0$

2). ФЧХ ($\varphi(\omega)$) – фазовая частотная характеристика (рис.2.16).

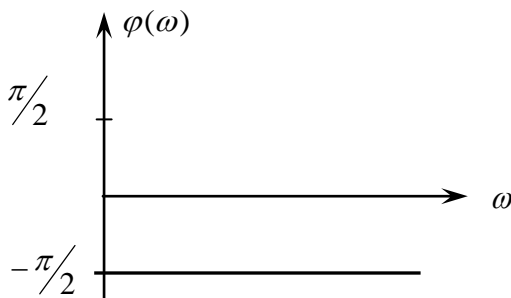


Рис.2.16. Фазовая частотная характеристика интегрирующего звена

3). Амплитудная фазовая характеристика АФХ – (годограф) (рис.2.17).

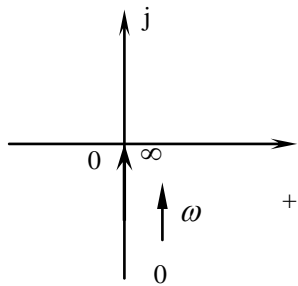


Рис.2.17. Годограф интегрирующего звена

4). Вещественная частотная характеристика ВЧХ ($P(\omega) = 0$).

5) Мнимая частотная характеристика МЧХ ($Q(\omega)$) (рис.2.18)

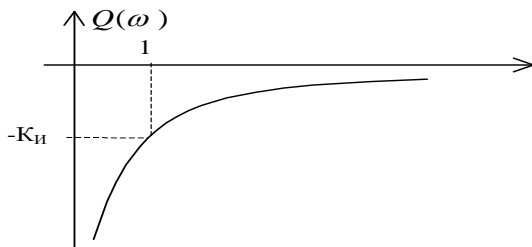


Рис.2.18. Мнимая частотная характеристика интегрирующего звена

6). Логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ) (рис.2.19)

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K_{II}}{\omega} = 20 \lg K_{II} - 20 \lg \omega$$

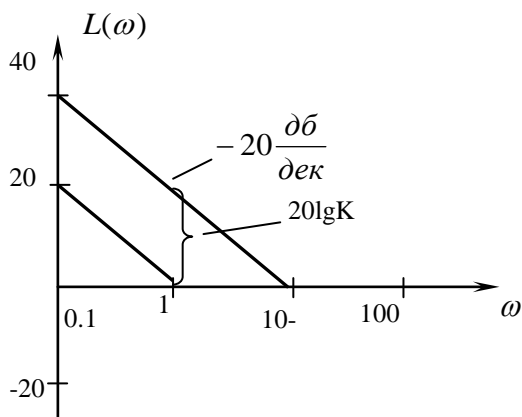


Рис.2.19. ЛАЧХ интегрирующего звена

Наклон -20 дБ/дек, коэффициент усиления $20 \lg K_{II}$ откладывается на частоте $\omega = 1$

6). Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ (рис.2.20).

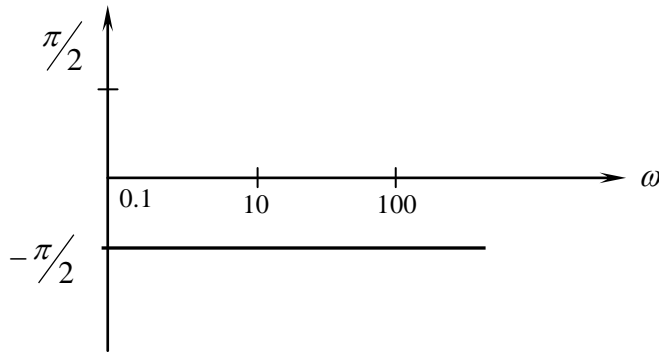
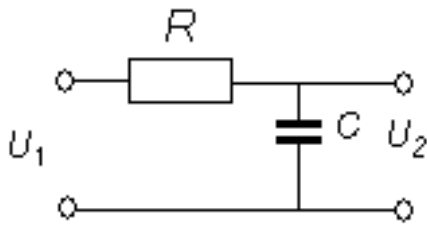


Рис.2.20. Фазовая логарифмическая частотная характеристика интегрирующего звена

2.5.3 Инерционное звено

Примеры: А) генератор постоянного тока (ГПТ);

Б) RC – цепочка вида (рис.2.21)



$$Z_1(p) = R$$

$$Z_2(p) = \frac{1}{pC}$$

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

Рис.2.21. RC-цепочка (инерционное звено)

Уравнение, описывающее инерционное звено:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t).$$

Передаточная функция: $W(p) = \frac{K}{1 + Tp}$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K e^{j0}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T)}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg(\omega T)} = \frac{K(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$= \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$$

где: $P(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$

$$Q(\omega) = -j \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\pi/2)$$

Перейдем к построению частных характеристик.

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$)(рис.2.22).

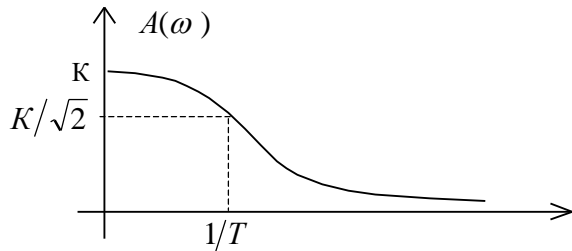


Рис.2.22. АЧХ инерционного звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.23)

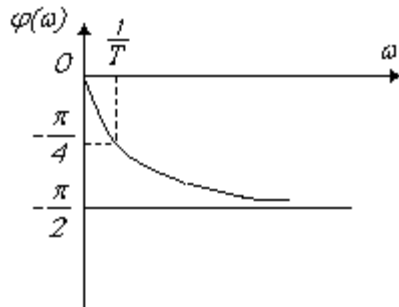


Рис.2.23. ФЧХ инерционного звена

3) Вещественная частотная характеристика ВЧХ ($P(\omega)$) (рис.2.24)

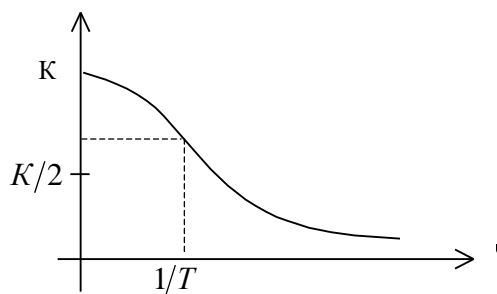


Рис.2.24. ВЧХ инерционного звена

4) Мнимая частотная характеристика МЧХ ($Q(\omega)$) (рис.2.25)

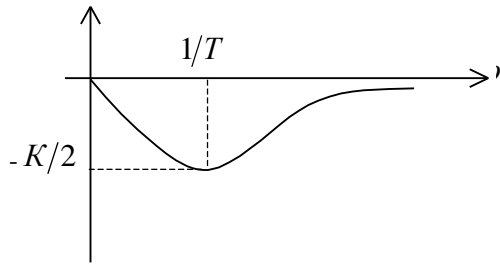


Рис.2.25. МЧХ инерционного звена

5). Амплитудная фазовая характеристика АФХ ($W(j\omega)$) (рис.2.26)

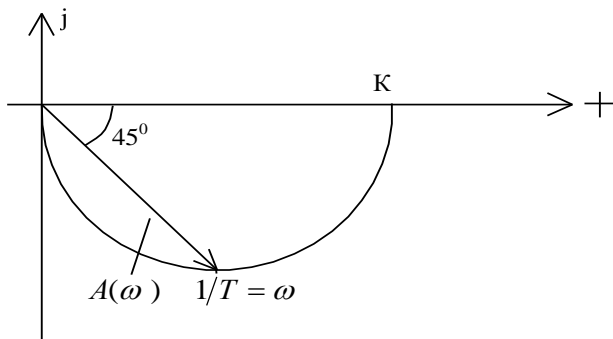


Рис.2.26. АФХ инерционного звена

Годограф входит в 0 под углом $-\pi/2$, так как при $\infty \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, $A(\omega) = 0$

б) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.27)

$$W(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega T}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

$L'(\omega)$ - асимптотическая ЛАЧХ.

$\omega = \frac{1}{T}$ - частота сопряжения.

$$1. \omega < \frac{1}{T}; \quad \omega T < 1; \quad \omega^2 T^2 \ll 1$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg 1; \quad \lg 1 \rightarrow 0$$

$$2. \omega > \frac{1}{T}; \quad \omega T > 1; \quad \omega^2 T^2 > 1;$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega T = 20 \lg K - 20 \lg T - 20 \lg \omega$$

Характеристика идет с наклоном -20 (по оси ω), при $1/T$ - скачка нет.

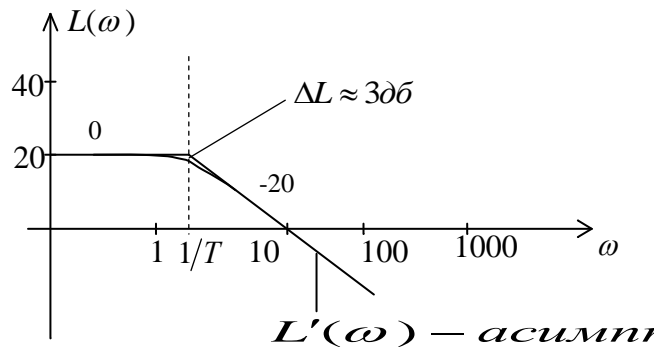


Рис.2.27. ЛАЧХ инерционного звена

7) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$) (рис.2.28)

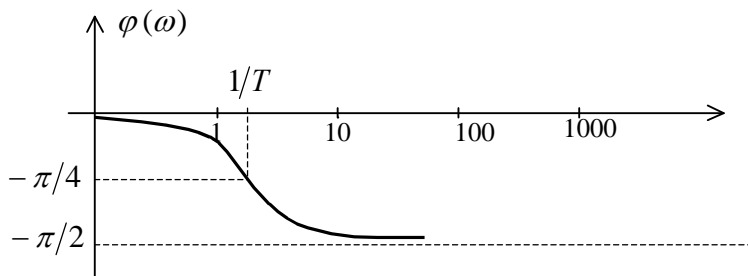


Рис.2.28. ЛФЧХ инерционного звена

2.5.4 Колебательное звено

Примеры:

а) RLC – цепочка, представленная в 2.2.

б) Груз, подвешенный на пружине (рис.2.29):

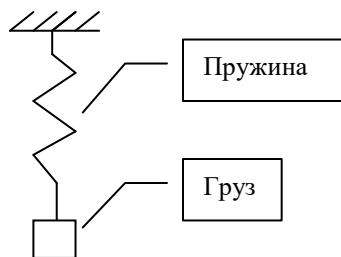


Рис.2.29. Пример колебательного звена

Уравнение, описывающее колебательное звено:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

Передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}; \quad 0 < \xi < 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{K e^{j0}}{A e^{j\varphi}}$$

$$(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega = \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{где: } A = \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$$

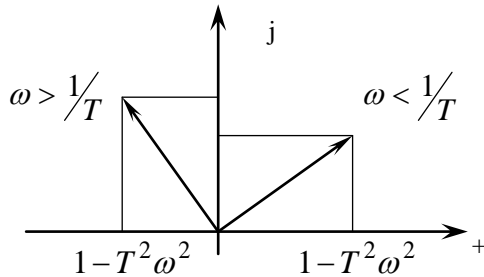


Рис.2.30. Представление на комплексной плоскости

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{|1 - T^2\omega^2|} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

1) Амплитудно-частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.31)

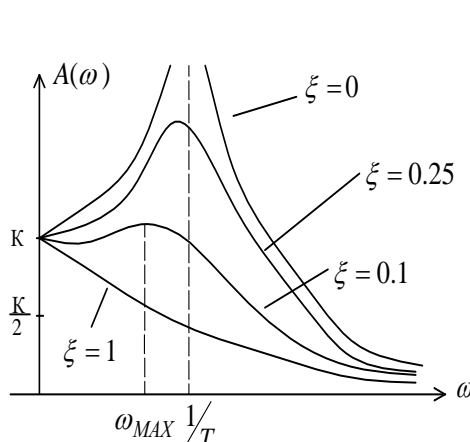


Рис.2.31. АЧХ колебательного звена

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T} \text{ - резонансная частота.}$$

$$A(1/T) = \frac{K}{2\xi}$$

Рассмотрим разные значения ξ

$$\xi = 0 \quad \xi = 0.25$$

$$\xi = 0.1 \quad \xi = 1$$

$$\omega_{MAX} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi} - A(\omega_{MAX}) \Rightarrow \max$$

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ $(\varphi(\omega))$ (рис.2.32)

$$\varphi(\omega) = -\varphi \quad \text{Построим для } \begin{matrix} \xi = 0.5 \rightarrow \xi = 1 \\ \xi = 0.2 \rightarrow \xi = 0 \end{matrix}$$

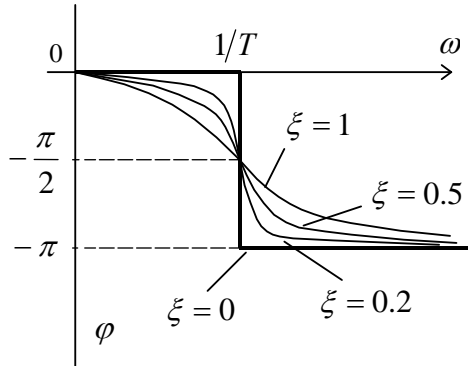


Рис.2.32. ФЧХ колебательного звена

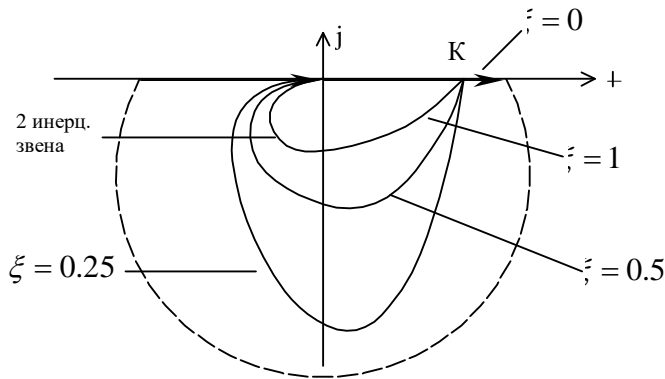


Рис.2.33. АФХ колебательного звена

2) Амплитудная фазовая характеристика АФХ $(W(j\omega))$ (рис.2.33). Годограф приходит в ноль под углом $(-\pi)$. При $\xi = 0$ годограф идет от К по оси, затем при $\omega = 1/T$ - разрыв и входит в 0 по действительной отрицательной оси.

3) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ

$(L(\omega))$ (рис.2.34)

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} \cong 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2};$$

Вторым слагаемым под корнем пренебрегаем.

Строится асимптотическая ЛАЧХ:

Частота сопряжения - $\omega = 1/T$.

1) $\omega < 1/T$; $\omega^2 T^2 \ll 1$ пренебрегаем $\omega^2 T^2$

$$L_1(\omega) = 20 \lg K$$

2) $\omega > 1/T$; $\omega^2 T^2 \gg 1$ пренебрегаем 1

$$L_2(\omega) = 20 \lg K - 40 \lg \omega T$$

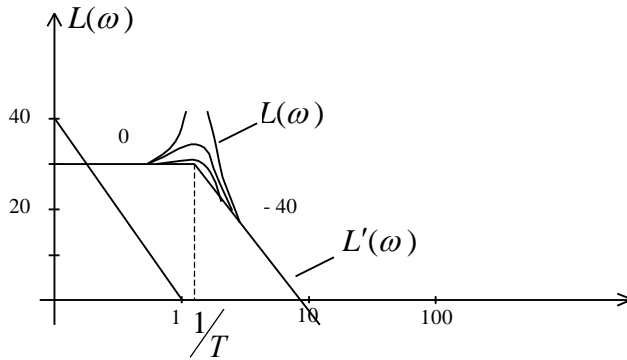


Рис.2.34. ЛАЧХ колебательного звена

4) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ (рис.2.35):

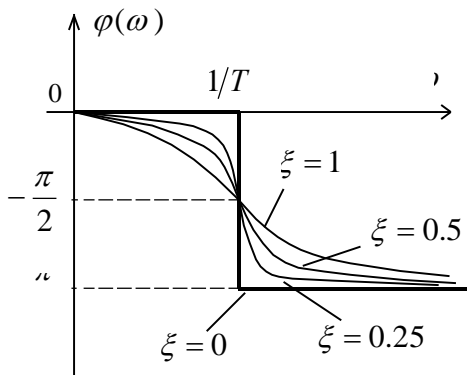


Рис.2.35. ЛФЧХ колебательного звена

2.5.5 Звено запаздывания

Примеры:

А) Длинная линия;

Б) Конвейер (рис.2.36)

Величина запаздывания:

$$\tau = \frac{l}{V}$$

Где l – расстояние между датчиками,

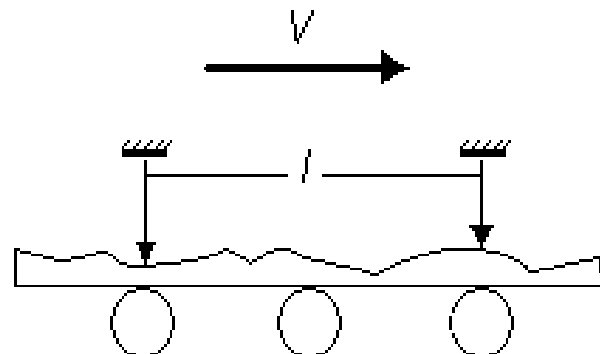


Рис.2.36. Пример звена запаздывания

V – скорость конвейерной ленты.

Уравнение, описывающее звено запаздывания:

$$y(t) = Kx(t - \tau).$$

Передаточная функция:

$$W(p) = K e^{-p\tau} \quad W(j\omega) = K e^{-j\omega\tau} = K \cos \omega\tau - jK \sin \omega\tau$$

$$P(\omega) = K \cos \omega\tau \quad Q(\omega) = -K \sin \omega\tau$$

$$A(\omega) = K \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau$$

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.37)

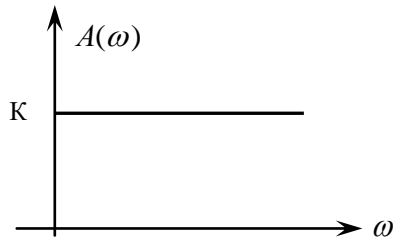


Рис.2.37. АЧХ звена запаздывания

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.38)

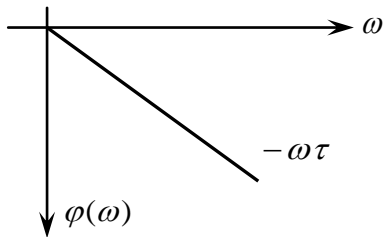


Рис.2.38. ФЧХ звена запаздывания

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ, $W(j\omega)$ - годограф (рис.2.39)

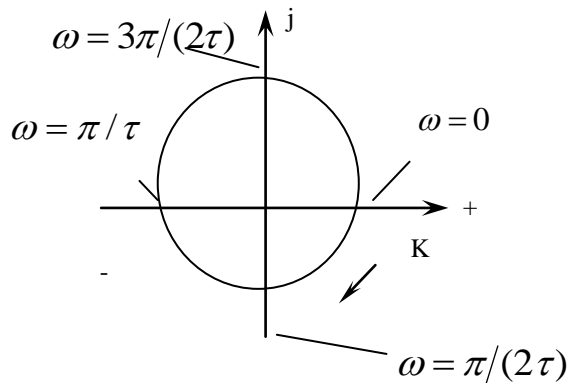


Рис.2.39. АФХ звена запаздывания

2.5.6 Идеальное и реальное дифференцирующие звенья

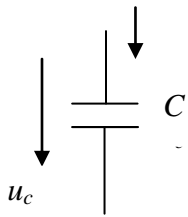
1. Идеальное дифференцирующее звено

Примеры:

А) Вал, у которого угол поворота связан с угловой скоростью вращения интегральным

соотношением: $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, а угловая скорость связана с углом поворота

дифференциальным соотношением: $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$



Б) Конденсатор, для которого активным сопротивлением проводов можно

пренебречь ($r=0$): $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ (u_c - вход; i_c - выход).

Рис.2.40. Пример идеального дифференцирующего звена

Уравнение, описывающее идеальное дифференцирующее звено:

$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передаточная функция звена: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = Kp$

Комплексный коэффициент усиления: $W(j\omega) = Kj\omega = 0 + jK\omega$.

$$P(\omega) = 0 \quad Q(\omega) = K\omega$$

$$A(\omega) = K\omega \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.41)

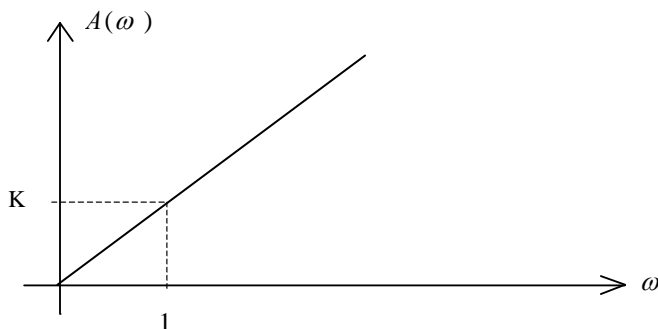


Рис.2.41. АЧХ идеального дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.42)

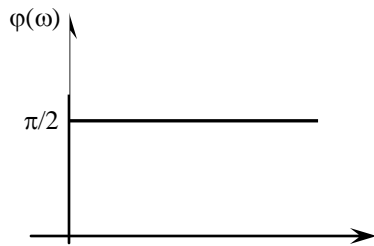


Рис.2.42. ФЧХ идеального дифференцирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$) (рис.2.43)

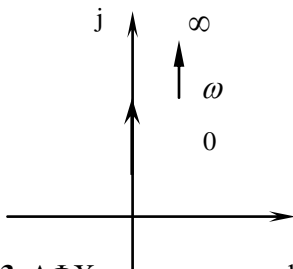


Рис.2.43. АФХ идеального дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.44)

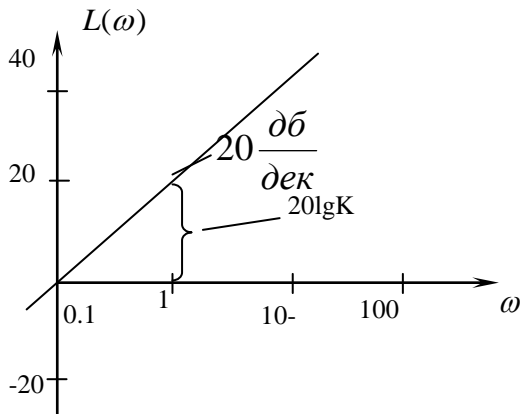


Рис.2.44. ЛАЧХ идеального дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$):

2. Реальное дифференцирующее звено

Примеры: А) Конденсатор, для которого активным сопротивлением проводов нельзя

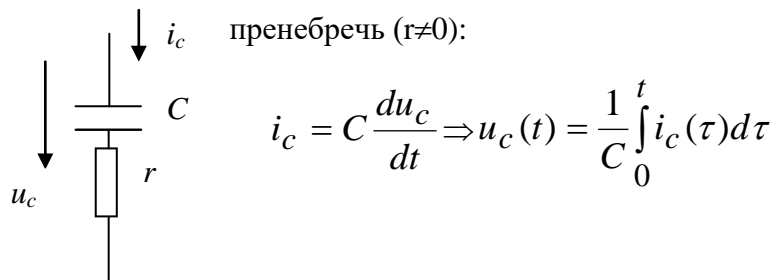


Рис.2.45. Пример реального дифференцирующего звена

$$u(t) = i_c(t)r + u_c(t) = i_c(t)r + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau$$

$$Cr \cdot \frac{di_c(t)}{dt} + i_c(t) = Cu(t) \quad (i_c - \text{выход}; u(t) - \text{вход})$$

Уравнение, описывающее идеальное дифференцирующее звено:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передаточная функция звена: $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Kp}{Tp + 1}$

Комплексный коэффициент усиления:

$$W(j\omega) = \frac{Kj\omega}{Tj\omega + 1} = \frac{K\omega \cdot e^{j\pi/2}}{\sqrt{1+T^2\omega^2} \cdot e^{j\arctg(\omega T)}} = \frac{KT \cdot \omega^2}{1+T^2\omega^2} + j \frac{K\omega}{1+T^2\omega^2}.$$

$$P(\omega) = \frac{KT \cdot \omega^2}{1+T^2\omega^2}; \quad Q(\omega) = \frac{K\omega}{1+T^2\omega^2}; \quad A(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T).$$

1. Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.46)

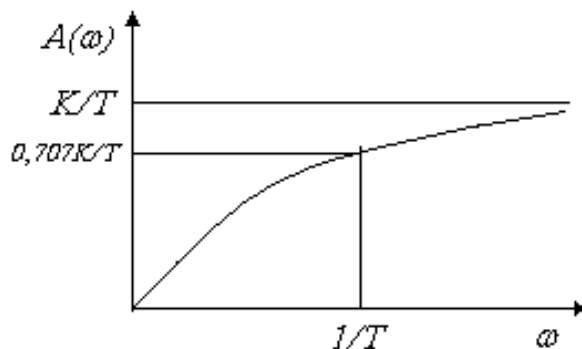


Рис.2.46. АЧХ реального дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.47)

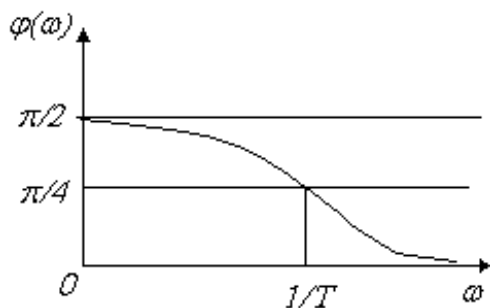


Рис.2.47. ФЧХ реального дифференцирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$) (рис.2.48)

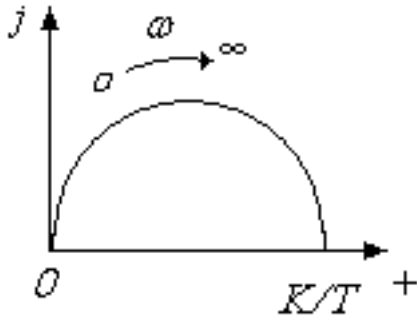


Рис.2.48. АФХ реального дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.49)

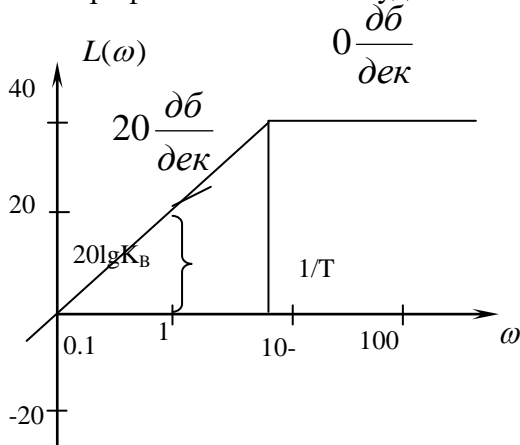


Рис.2.49. ЛАЧХ реального дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.50)

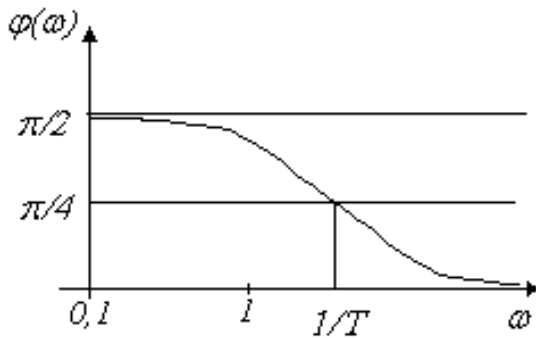


Рис.2.50. ЛФЧХ реального дифференцирующего звена

2.5.7 Упругие звенья

Примеры: Схема на операционном усилителе (Операционный усилитель – усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления , ограниченным выходным напряжением,

большим входным и малым выходным сопротивлением), таким образом справедливы ниже приведенные соотношения:

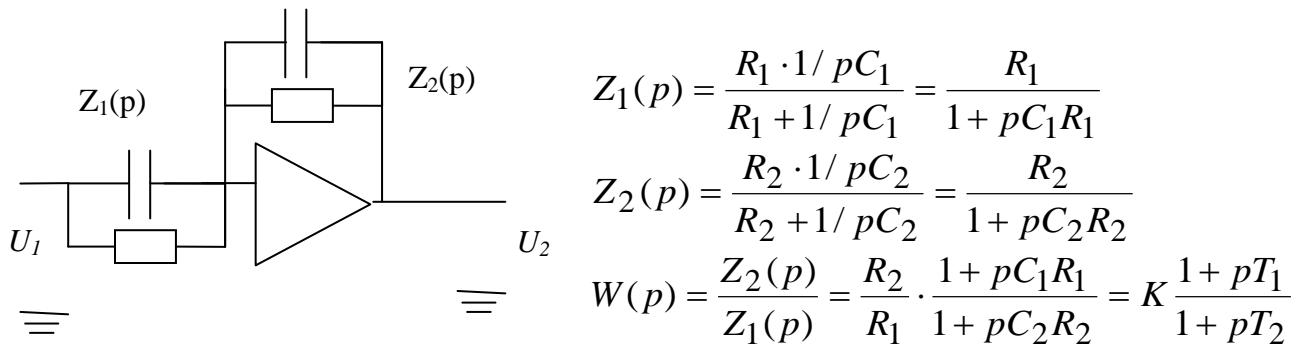


Рис.2.51. Модель упругого звена

$$W(j\omega) = K \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2} = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T_1)}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \cdot e^{j \arctg(\omega T_2)}} = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \cdot e^{j(\arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2))} =$$

$$K \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2}{1 + \omega^2 T_2^2} + jK \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_2^2}$$

$$P(\omega) = K \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2}{1 + \omega^2 T_2^2}; \quad Q(\omega) = K \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_2^2}; \quad A(\omega) = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2)$$

Упругое интегрирующее звено ($T_2 > T_1$) (на определенном диапазоне частот ведет себя как интегрирующее звено)

- 1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.52)

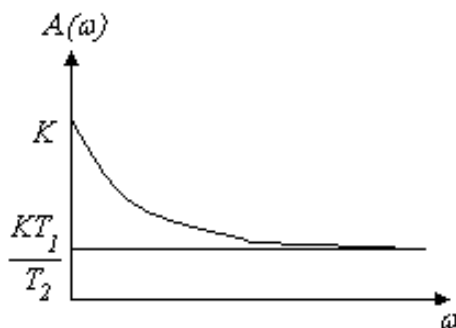


Рис.2.52. АЧХ упругого интегрирующего звена

- 2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.53)

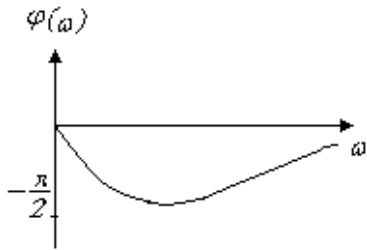


Рис.2.53. ФЧХ упругого интегрирующего звена

3) Амплитудная фазовая характеристика АФХ($W(j\omega)$) (рис.2.54)

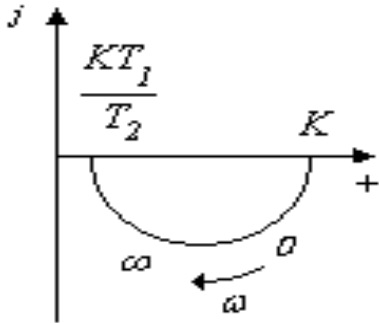


Рис.2.54. АФХ упругого интегрирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.55)

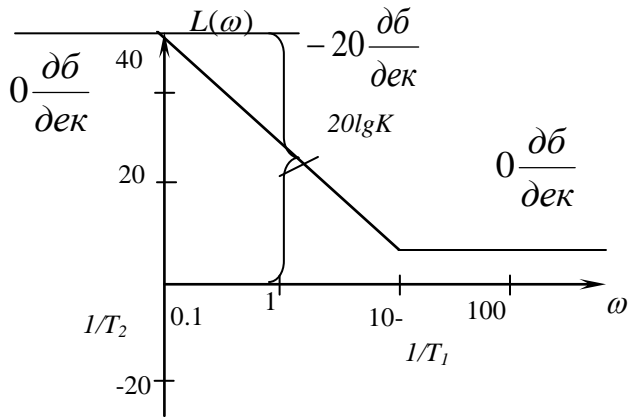


Рис.2.55. ЛАЧХ упругого интегрирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.56)

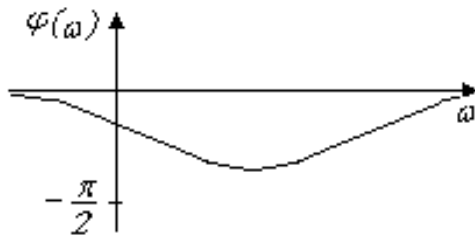


Рис.2.56. ЛФЧХ упругого интегрирующего звена

Упругое дифференцирующее звено ($T_2 < T_1$) (на определенном диапазоне частот ведет себя как дифференцирующее звено)

1) Амплитудная частотная характеристика АЧХ ($A(\omega)$) (рис.2.57)

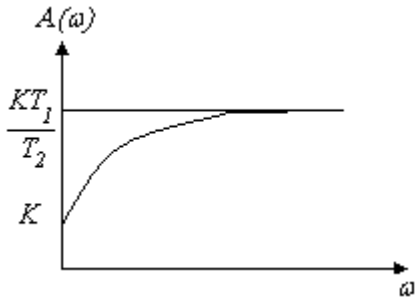


Рис.2.57. АЧХ упругого дифференцирующего звена

2) Фазовая частотная характеристика ФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.58)

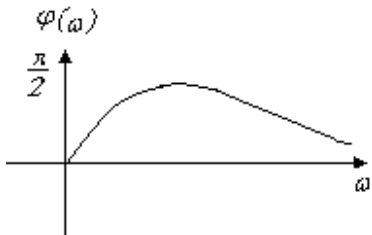


Рис.2.58. ФЧХ упругого дифференцирующего звена

3) Амплитудно-фазовая характеристика АФХ ($W(j\omega)$) (рис.2.59)

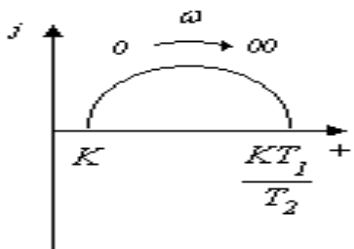


Рис.2.59. АФХ упругого дифференцирующего звена

4) Логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ ($L(\omega)$) (рис.2.60)

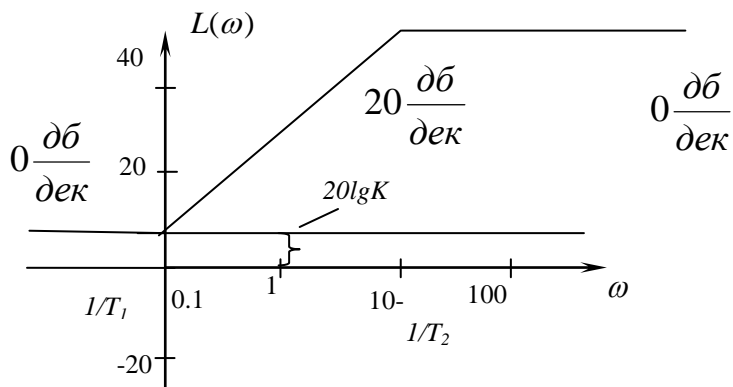


Рис.2.60. ЛАЧХ упругого дифференцирующего звена

5) Логарифмическая фазовая частотная характеристика ЛФЧХ ($\varphi(\omega)$) (рис.2.61)

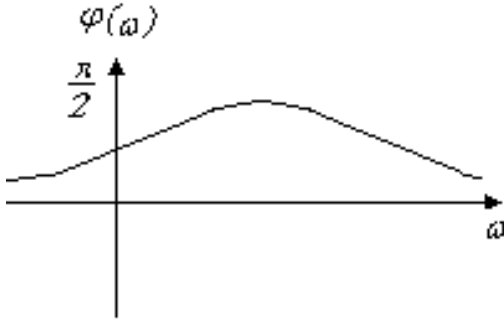


Рис.2. 61. ЛФЧХ упругого дифференцирующего звена

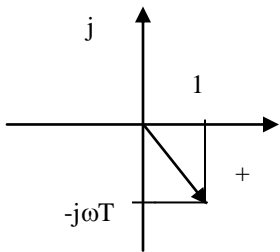
2.5. Неминимально-фазовые звенья и их характеристики

Как уже упоминалось, передаточные функции неминимально-фазовых динамических звеньев имеют положительные нули или полюса, вследствие чего нарушается однозначная связь между амплитудной и фазовой частотными характеристиками.

Рассмотрим множители числителя или знаменателя с правыми корнями для построения их фазовых характеристик.

А) $(1 - pT)$

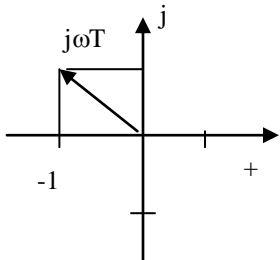
Заменим p на $j\omega$ и запишем $(1 - j\omega T)$. Для определения амплитудной и фазовой частотной характеристик представим полученное выражение на комплексной плоскости:



Из рисунка видно, что вектор $(1 - j\omega T)$ можно представить в виде его амплитуды и фазы: $\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{-j \arctg \omega T}$

Б) $(pT - 1)$

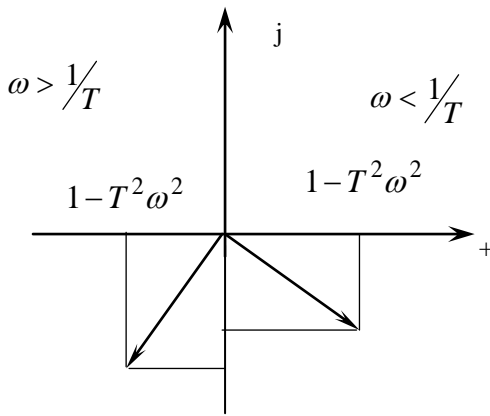
Заменим p на $j\omega$ и запишем $(j\omega T - 1)$. Для определения амплитудной и фазовой частотной характеристик представим полученное выражение на комплексной плоскости:



Из рисунка видно, что вектор $(j\omega T - 1)$ можно представить в виде его амплитуды и фазы: $\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{j(\pi - \arctg \omega T)}$

$$B) (T^2 p^2 - 2 \cdot \xi \cdot p \cdot T + 1)$$

Заменим p на $j\omega$ и запишем $(1 - T^2 \omega^2) - j2\xi\omega T$. Из рисунка видно, что вектор



$(1 - T^2 \omega^2) - j2\xi\omega T$ можно представить в виде его амплитуды и фазы в виде

$$\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot T)^2} \cdot e^{-j\varphi_k(\omega)}$$

$$\varphi_k(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T \omega}{|1 - T^2 \omega^2|} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

2.6 Построение логарифмических частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы.

Рассмотрим процесс построения логарифмических характеристик на примере заданной передаточной функции системы, а именно:

Дано:

$$W(p) = \frac{K(1 + pT_2)^2}{p(1 + pT_1) \cdot (1 + 2\xi T_3 p + T_3^2 p^2)}$$

$$K=100; \quad T_1 = 2 \text{ с.} \quad T_2 = 0.5 \text{ с.} \quad T_3 = 0.02 \text{ с.} \quad \xi = 0.5.$$

Для построения частотных характеристик перейдем к комплексному коэффициенту усиления, заменив p на $j\omega$ и представив каждый множитель в полярной системе координат как амплитуду и соответствующую ей фазу:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K(1 + j\omega T_2)^2}{j\omega \cdot (1 + j\omega T_1) \cdot (1 - T_3^2 \omega^2 + j2\xi T_3 \omega)} = \frac{A_0 e^{j\varphi_0} \cdot A_2^2 e^{2j\varphi_2}}{A_4 e^{j\varphi_4} \cdot A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_3 e^{j\varphi_3}} = \\ &= \frac{A_0 A_2^2}{A_4 A_1 A_3} e^{j(\varphi_0 + 2\varphi_2 - \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_3)} \end{aligned}$$

Перечислим звенья и их представление в следующем порядке:

0 - K ;

1 - $(1 + j\omega T_1)$;

$$2 - (1 + j\omega T_2)^2;$$

$$3 - (1 - T_3^2 \omega^2 + j2\xi T_3 \omega);$$

$$4 - j\omega.$$

$$0) K = K e^{j0}$$

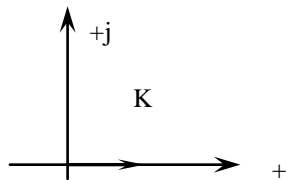


Рис.2.62(а). Представление на комплексной плоскости

$$1) 1 + j\omega T_1 = \sqrt{1^2 + \omega^2 T_1^2} \cdot e^{j \arctg \omega T_1}$$

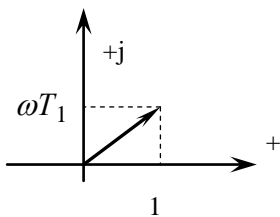


Рис.2.62(б). Представление на комплексной плоскости

$$2) 1 + j\omega T_2 = \sqrt{1^2 + \omega^2 T_2^2} \cdot e^{j \arctg \omega T_2}$$

Представляется на комплексной плоскости аналогично звену 1).

$$4) j\omega = \omega e^{j \frac{\pi}{2}}$$

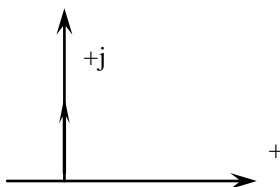


Рис.2.62(в). Представление на комплексной плоскости

$$3) (1 - \omega^2 T_3^2) + j2\xi T_3 \omega = \sqrt{(1 - \omega^2 T_3^2)^2 + 4\xi^2 T_3^2 \omega^2} \cdot e^{j\varphi}$$

$$(*) \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T^2 \omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{|1 - T^2 \omega^2|} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

Теперь запишем выражения для амплитуды и фазы комплексного коэффициента усиления всей системы:

$$A(\omega) = \frac{K(\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2})^2}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot \sqrt{(1 + T_3^2 \omega^2)^2 + \varphi \xi^2 T_3^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 2 \operatorname{arctg} \omega T_2 - \operatorname{arctg} \omega T_1 - \frac{\pi}{2} - \varphi$$

где φ - задается выражением (*).

$$K=100; \quad T_1 = 2; \quad T_2 = 0.5; \quad T_3 = 0.02; \quad \xi = 0.5.$$

Строим ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФХ.

2.6.1 Построение ЛАЧХ

Запишем выражение для ЛАЧХ, прологарифмировав амплитудную частотную характеристику системы $A(\omega)$:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + 40 \lg \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} - \\ - 20 \lg \sqrt{(1 + T_3^2 \omega^2)^2 + 4 \xi^2 T_3^2 \omega^2};$$

Запишем частоты сопряжения в порядке их возрастания:

$$\omega_1 = 1/T_1 = 0.5$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = 2$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = 50$$

И рассмотрим участки асимптотической ЛАЧХ:

$$\mathbf{0 \text{ участок:}} \quad \omega < 1/T_1 \quad \omega T_1 < 1 \quad \omega T_2 < 1 \quad \omega T_3 < 1$$

$$L_0(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega$$

1 -й участок:

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\Rightarrow \omega > \frac{1}{T_1}; \quad \omega < \frac{1}{T_2}; \quad \omega < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 > 1; \quad \omega T_2 < 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L'_1(\omega) = L'_0 - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega - 20 \lg T_1 =$$

$$= -40 \lg \omega + 20 \lg \frac{K}{T_1}$$

2-ой участок

$$\omega_2 < \omega < \omega_3$$

$$\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 > 1; \quad \omega T_2 > 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L'_2(\omega) = L'_1(\omega) + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \omega T_1 + 40 \lg \omega T_2 = 20 \lg \frac{KT_2^2}{T_1} + 0 \lg \omega$$

3-й участок.

$$L'_3(\omega) = L'_2(\omega) - 40 \lg T_3 \omega = 20 \lg \frac{KT_2^2}{T_1 T_3^2} - 40 \lg \omega$$

Таким образом, видно, что асимптотическая ЛАЧХ состоит из 4-х прямолинейных участков с наклонами, определенными для каждого участка в отдельности.

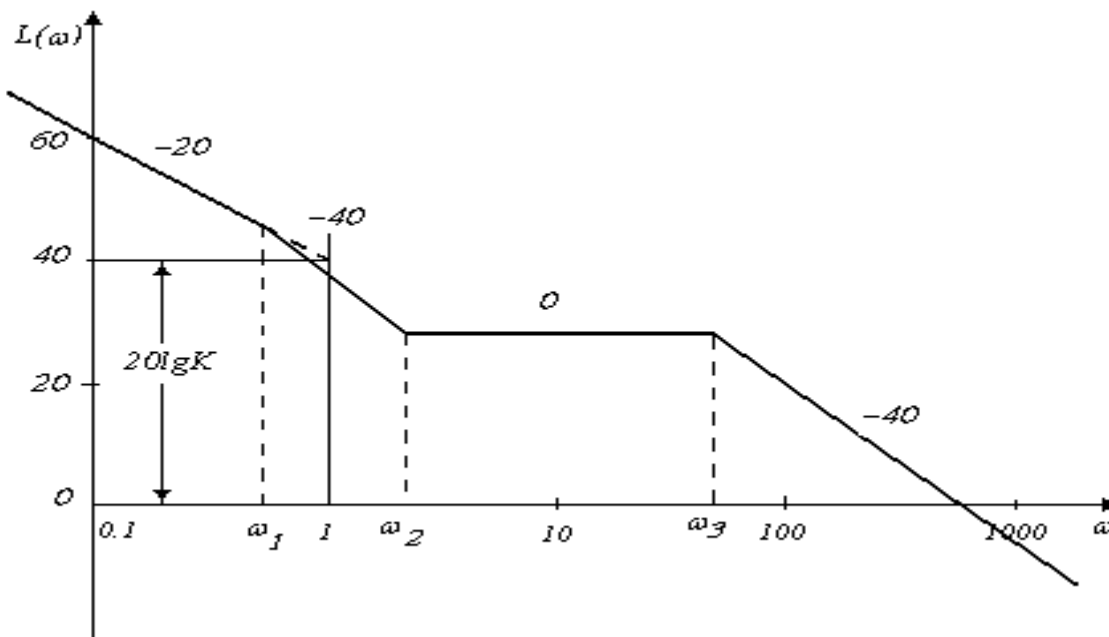


Рис.2.62 Асимптотическая ЛАЧХ

2.6.2 Построение ЛФЧХ

Запишем выражение для фазовой частотной характеристики:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{1 - T_3^2 \omega^2} & \omega \leq \frac{1}{T_3} \\ \pi - \arctg \frac{2\xi T_3 \omega}{|1 - T_3^2 \omega^2|} & \omega > \frac{1}{T_3} \end{cases} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 + 2 \arctg \omega T_2 - \varphi$$

Звенья записаны по порядку следования, т.е. $-\frac{\pi}{2}$ – нулевое, $-\arctg \omega T_1$ – первое и т.д.

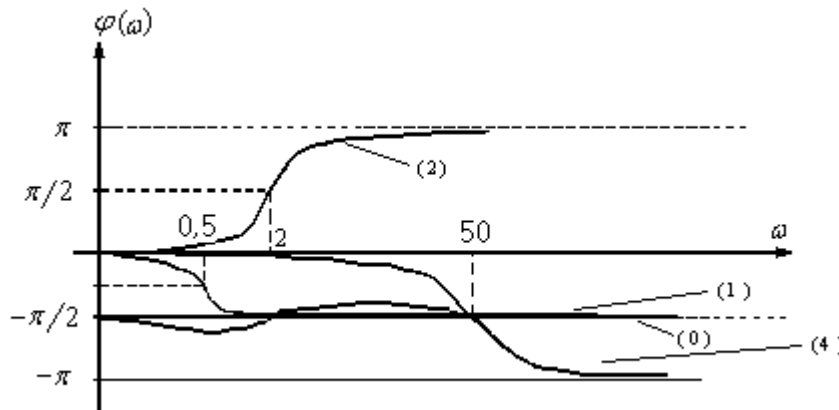


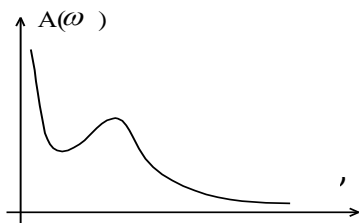
Рис.2.63. Логарифмическая фазовая частотная характеристика

Таким образом, построив фазовые частотные характеристики отдельных звеньев и просуммировав их. Получаем фазовую частотную характеристику заданной системы.

2.6.3 Построение АФХ.

Построение проводится по амплитудной частотной характеристике и по фазовой частотной

характеристике. Вид амплитудной частотной характеристики представлен на рисунке 2.64:



Определим значения амплитудной и фазовой частотных характеристик в нуле и на бесконечности:

$$A(0) = \infty \quad A(\infty) = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi(\infty) = -\pi$$

Рис.2.64. АЧХ системы

По построенным АЧХ и ФЧХ можно представить вид амплитудной фазовой характеристики (рис.2.65):

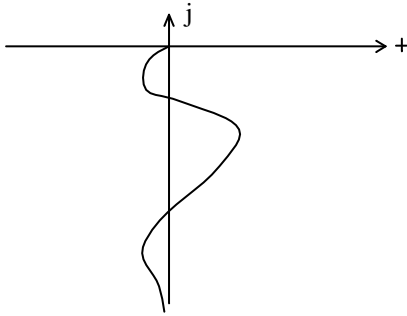


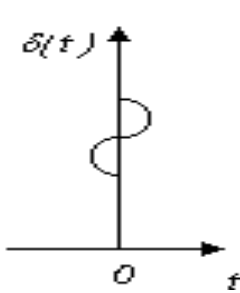
Рис.2.65 АФХ системы

2.7 Временные характеристики САУ

Временные характеристики – это реакции систем на типовые входные воздействия.

2.7.1 Типовые входные сигналы и их изображения по Лапласу

1. Единичный импульс (δ - функция Дирака) определяется выражением:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

Единичный импульс графически представляется в виде рис.2.66:

Рис.2.66. δ -функция Дирака

Найдем изображение единичного импульса по Лапласу:

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-p \cdot 0} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Реакцией системы на единичный импульс является *весовая, или импульсная переходная функция* $w(t)$.

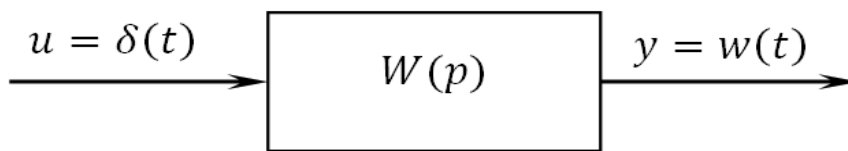


Рис.2.67. Передаточная функция системы

Найдем изображение единичного импульса по Лапласу:

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

В соответствии с определением передаточной функции можно записать:

$$W(p) = \frac{L\{w(t)\}}{L\{\delta(t)\}} = \frac{L\{w(t)\}}{1} \Rightarrow L\{w(t)\} = W(p) \Rightarrow w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

Т.е. $\boxed{W(p) = L\{w(t)\} \quad w(t) = L^{-1}\{W(p)\}}$

2. Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) $1(t)$ определяется выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Единичная ступенчатая функция графически представляется в виде (рис.2.68):

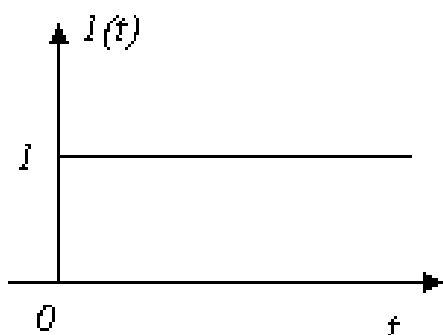


Рис.2.68. Функция Хевисайда

Реакцией системы на единичную ступенчатую функцию является *переходная функция* $h(t)$

(2.69).

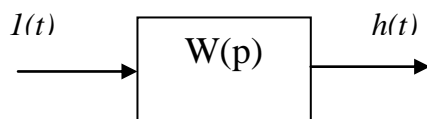


Рис.2.69. Получение переходной функции системы

В соответствии с определением передаточной функции можно записать:

$$W(p) = \frac{L\{h(t)\}}{L\{1(t)\}} = \frac{L\{h(t)\}}{1/p} \Rightarrow L\{h(t)\} = \frac{W(p)}{p} \Rightarrow h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$$

Найдем соотношение между весовой и переходной функциями, исходя из соотношений:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} \qquad h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$$

Очевидно, что
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

3. Степенные функции $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot 1(t)$.

Изображения по Лапласу можно найти аналогично предыдущим расчетам. Легко показать,

что
$$L(f_n(t)) = \frac{1}{p^{n+1}}$$

Представим изображения по Лапласу функций времени в виде таблицы

| Оригинал | Изображение |
|--|--|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $1(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| $t \cdot 1(t)$ | $\frac{1}{p^2}$ |
| $\frac{t^n}{n!} \cdot 1(t)$ | $\frac{1}{p^{n+1}}$ |
| $e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ | $\frac{1}{p + \alpha}$ |
| $e^{\alpha t} \cdot 1(t)$ | $\frac{1}{p - \alpha}$ |
| $e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot 1(t)$ | $\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$ |
| $\sin(\beta t) \cdot 1(t)$ | $\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$ |

2.7.2 Способы построения временных характеристик систем

- 1) Экспериментальный способ реализуется подачей на систему типовых входных сигналов.
- 2) Теоретический способ (зависит от имеющегося математического описания)

а) по дифференциальным уравнениям;

1. решение аналитическими методами,

2. численное решение дифференциальных уравнений (Метод Эйлера, Метод Рунге-Кутты и др.)

в) по частотным характеристикам, используя $P(\omega)$ и $Q(\omega)$

Получение временных характеристик по частотным (вещественной и мнимой) характеристикам:

$$w(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

$P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика,

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$h(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \left(\int_0^t \cos \omega \tau d\tau \right) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

г) по структурным схемам.

Получение временных характеристик по структурным схемам производится в основном в пакетах прикладных программ для моделирования динамических систем (например, Matlab Simulink и пр.)

3. Формула разложения.

Используем формулу разложения для определения оригиналов по изображениям, имеющим вид:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \quad Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \text{ где}$$

$A(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n = a_0(p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_n)$ - полином n -го порядка, $B(p)$ - полином m - го порядка.

При этом сделаем предположения:

А) степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. дробь правильная;

Б) корни $A(p)$ – простые, т.е. не кратные;

В) $a_0 \neq 0$

Тогда, как известно, дробно-рациональное выражение $X(p)$ может быть разложено на простые дроби:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot a_0(p-p_1)\dots(p-p_n)} = \frac{C_0}{p} + \frac{C_1}{p-p_1} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n}$$

$$\frac{C_0}{p} = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_1}{p-p_1} - \frac{C_2}{p-p_2} \dots - \frac{C_n}{p-p_n}$$

$$C_0 = \frac{B(p) \cdot p}{p \cdot A(p)} - \frac{C_1 \cdot p}{p-p_1} - \frac{C_2 \cdot p}{p-p_2} \dots - \frac{C_n \cdot p}{p-p_n}$$

Получили тождество, т.е. равенство, справедливое при всех значениях p , поэтому для простоты

положим $p = 0$. Тогда $C_0 = \frac{B(0)}{A(0)}$.

Выделим j -ое слагаемое:

$$\frac{C_j}{p-p_j} = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_0}{p} - \frac{C_1}{p-p_1} \dots - \frac{C_{j-1}}{p-p_{j-1}} - \frac{C_{j+1}}{p-p_{j+1}}$$

$$C_j = \frac{B(p) \cdot (p-p_j)}{p \cdot A(p)} - \frac{C_0(p-p_j)}{p} - \frac{C_n(p-p_j)}{p-p_n}$$

$$p_j = p \quad i \neq j$$

$$C_j = \frac{B(p)}{p \cdot A'(p)} \Big|_{p=p_j}; \quad i = 1..n; \quad C_i = \frac{B(p_i)}{p_i \cdot A'(p_i)}$$

Покажем, что сокращение множителя $(p-p_i)$ равносильно взятию производной $\frac{dA(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}$:

$$A'(p) = \frac{dA(p)}{dp} \Big|_{p=p_i}$$

$$A'(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n);$$

$$A'(p) = a_0(p-p_2)\dots(p-p_n) + a_0(p-p_1)(p-p_3)\dots(p-p_n) + \dots + a_0(p-p_1)\dots(p-p_{n-1})$$

$$A'(p_i) = a_0(p-p_1)\dots(p-p_{i-1})(p-p_{i+1})\dots(p-p_n)$$

Таким образом, изображение $X(p)$ можно представить в виде:

$$X(p) = \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} = \frac{B(0)}{A(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \cdot \frac{1}{p-p_i}, \text{ откуда}$$

$$x(t) = \frac{B(0)}{A(0)} \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t) = \left(\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{p \cdot A(p)} \Big|_{p_i} \right) \cdot 1(t)$$

Отметим, что оригиналы $y(t)$ и $x(t)$ связаны соотношением:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \text{ поэтому продифференцируем полученный сигнал } x(t) \text{ по времени, учитывая, что}$$

он представляет собой произведение двух функций времени. Тогда

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{A(p)} \Big|_{p_i} \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot x(0)$$

Второй член $y(t)$ возникает только когда $x(0) \neq 0$.

2.7.3 Временные характеристики типовых звеньев

2.7.3.1 *Безынерционное (пропорциональное) звено*

$$W(p) = k$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\{k\} = k \cdot \delta(t)$$

$$\text{Переходная функция звена: } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} = k \cdot 1(t)$$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.70):

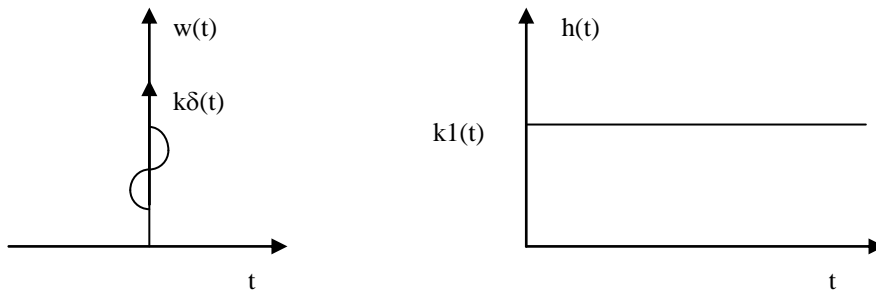


Рис. 2.70. Весовая и переходная функции безынерционного звена

2.7.3.2 *Интегрирующее звено*

$$W(p) = \frac{k}{p}$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} = k \cdot 1(t)$$

$$\text{Переходная функция звена: } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p^2}\right\} = k \cdot t \cdot 1(t)$$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.71):

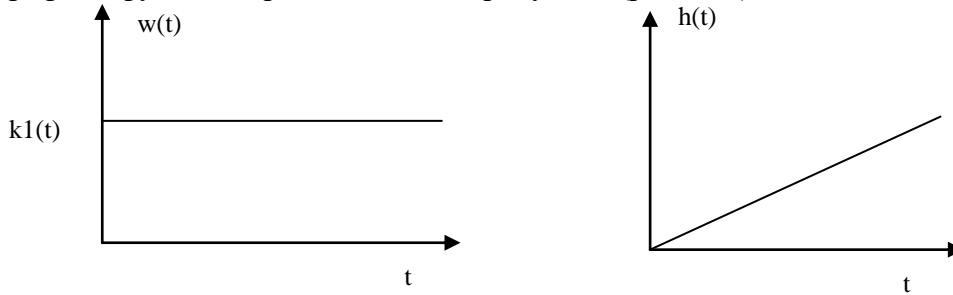


Рис. 2.71. Весовая и переходная функции интегрирующего звена

2.7.3.3 Инерционное звено

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{1 + pT}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k/T}{1/T + p}\right\} = \frac{k}{T} L^{-1}\left\{\frac{1}{1/T + p}\right\} = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T} 1(t)$$

$$\text{Переходная функция звена: } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(1 + pT)}\right\}$$

Для вычисления переходной функции можно воспользоваться формулой разложения или методом неопределенных коэффициентов, в соответствии с которым получим:

$$\frac{k}{p(1 + pT)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + pT};$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая коэффициенты числителей, получим:

$$A = k, \quad B + AT = 0, \quad B = -kT, \quad \frac{k}{p(1 + pT)} = \frac{k}{p} - \frac{kT}{1 + pT}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(1 + pT)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p} - \frac{kT}{1 + pT}\right\} = (k - ke^{-t/T}) \cdot 1(t)$$

Графики функций представлены на рисунках (рис.2.72):

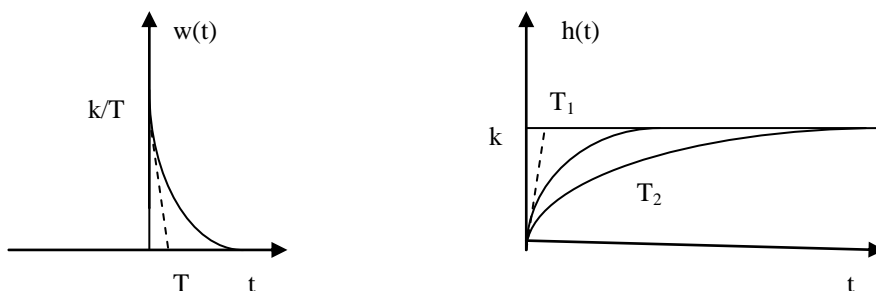


Рис. 2.72. Весовая и переходная функции инерционного звена

k – Коэффициент усиления, характеризующий усилительные свойства звена и равный отношению выходного сигнала ко входному в установившемся режиме (при подаче на вход постоянного входного сигнала);

T – постоянная времени звена, характеризующая инерционные свойства (на рисунке $T_1 < T_2$).

2.7.3.4 Колебательное звено

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2} \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2\xi \omega_0 p + \xi^2 \omega_0^2 - \xi^2 \omega_0^2 + \omega_0^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}}{(p + \xi \omega_0)^2 + \left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \right)^2} \right\} =$$

$$= K \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t \right) \cdot 1(t)$$

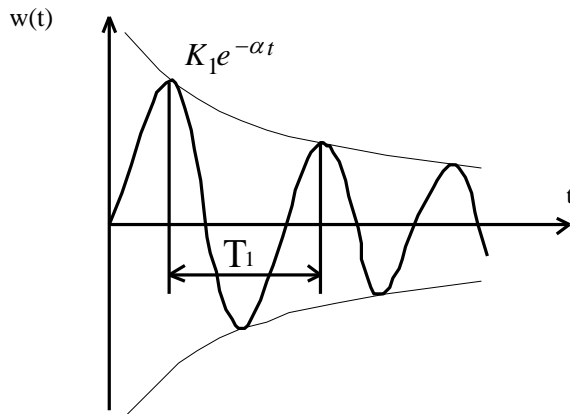


Рис. 2.73. Весовая функции колебательного звена

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{K \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_0 \tau} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot \tau \right) d\tau = \frac{K \omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \int_0^t e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau d\tau$$

$$h(t) = \left(k - \frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \arctg \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi}} \right) \right) \cdot 1(t)$$

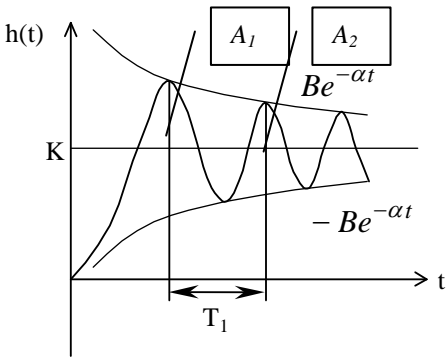


Рис. 2.74. Переходная функция колебательного звена

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \quad A_1 = Be^{-\alpha t_1} \quad A_2 = Be^{-\alpha(t_1+T_1)}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Be^{-\alpha t_1}}{Be^{-\alpha(t_1+T_1)}} = e^{\alpha T_1} \quad \alpha = \frac{1}{T_1} \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \quad \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \alpha^2} \quad T = \frac{1}{\omega_0}$$

2.7.3.5 Звено запаздывания

$$W(p) = K \cdot e^{-p\tau} \quad w(t) = L^{-1}\{Ke^{-p\tau}\} = K\delta(t-\tau)$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{Ke^{-p\tau} \cdot \frac{1}{p}\right\} = K \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p} \cdot e^{-p\tau}\right\} = K \cdot 1(t-\tau)$$

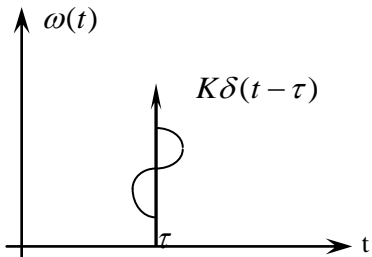


Рис. 2.75. Весовая функции звена запаздывания

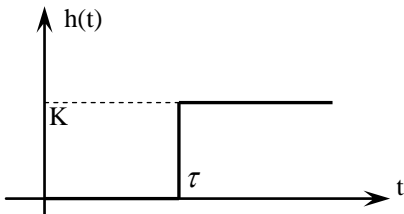


Рис. 2.76. Переходная функции звена запаздывания

2.7.3.6 Идеальное и реальное дифференцирующие звенья

А) Идеальное дифференцирующее звено

$$W(p) = k \cdot p$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\{k \cdot p\} = k \cdot \frac{d\delta(t)}{dt}, \text{ т.е. весовая функция равна производной от } \delta -$$

функции Дирака.

$$\text{Переходная функция звена: } h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\{k\} = k \cdot \delta(t)$$

Графики функций представлены на рисунках:

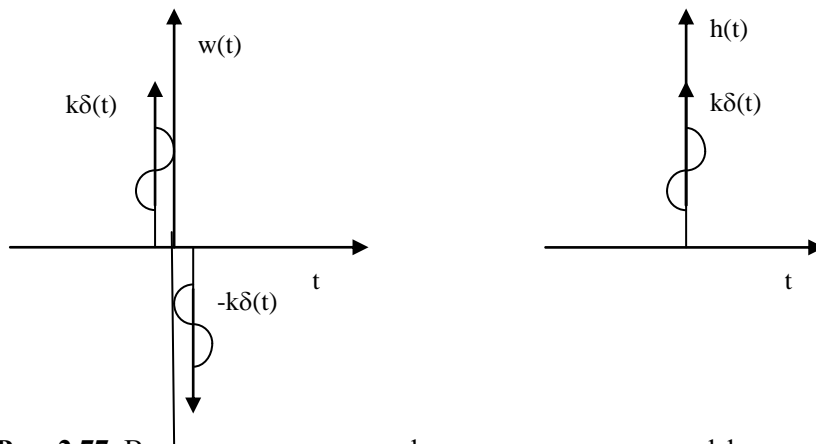


Рис. 2.77. Весовая и переходная функции идеального дифференцирующего звена

б) Реальное дифференцирующее звено

$$W(p) = \frac{k \cdot p}{1 + pT}$$

Заметим, что степень числителя передаточной функции равна степени знаменателя, откуда следует, что для использования формулы разложения нужно выделить целую часть дробно-рационального выражения для $W(p)$, поделив полином числителя на полином знаменателя передаточной функции. Но можно найти первоначально переходную функцию и воспользоваться соотношением между переходной и весовой функциями звеньев, взяв производную от переходной функции звена. Таким образом, переходная функция звена:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k \cdot p}{p(1 + pT)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{(1 + pT)}\right\} = \frac{k}{T} e^{-t/T} \cdot 1(t)$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot h(0) = -\frac{k}{T^2} e^{-t/T} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot \frac{k}{T}.$$

Графики функций представлены на рисунках:

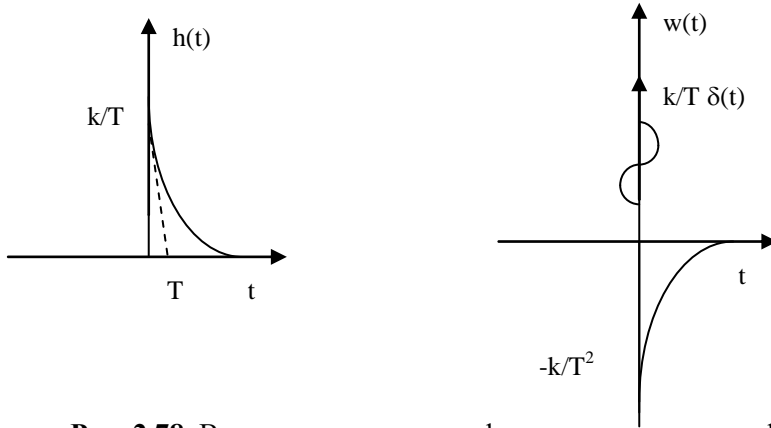


Рис. 2.78. Весовая и переходная функции реального дифференцирующего звена

2.7.3.7 Упругие звенья

$$W(p) = \frac{k \cdot (1 + pT_2)}{1 + pT_1}$$

Отметим, что степень числителя передаточной функции равна степени знаменателя, откуда следует, что для использования формулы разложения нужно выделить целую часть дробно-рационального выражения для $W(p)$, поделив полином числителя на полином знаменателя передаточной функции. Поэтому целесообразнее, воспользовавшись формулой разложения, найти переходную функцию звена,

Переходная функция звена:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k \cdot (1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{B(p)}{pA(p)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{B(0)}{A(0)} + \frac{B(p)}{p \cdot A'(p)} \bigg|_{p_1} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}}\right\}$$

$$B(p) = k \cdot (1 + pT_2); \quad A(p) = 1 + pT_1; \quad A'(p) = \frac{dA(p)}{dp} = T_1; \quad p_1 = -\frac{1}{T_1}$$

Таким образом,

$$h(t) = \left(\frac{k}{1} + \frac{k(1 - T_2/T_1)}{-\frac{1}{T_1} \cdot T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot 1(t) = (k - k(1 - T_2/T_1) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}) \cdot 1(t) = k\left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot 1(t)$$

Весовая, или импульсная переходная функция звена:

$$w(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -k \cdot \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot h(0) = k \frac{(T_1 - T_2)}{T_1^2} e^{-t/T_1} \cdot 1(t) + \delta(t) \cdot \frac{kT_2}{T_1}$$

а) Упругое дифференцирующее звено ($T_2 > T_1$):

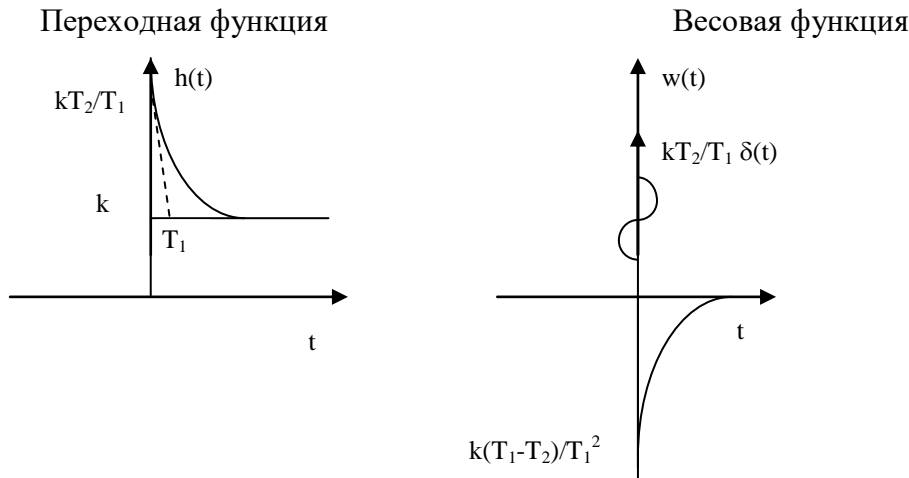


Рис. 2.79. Переходная и весовая функции упругого дифференцирующего звена

б) Упругое интегрирующее звено ($T_1 > T_2$):

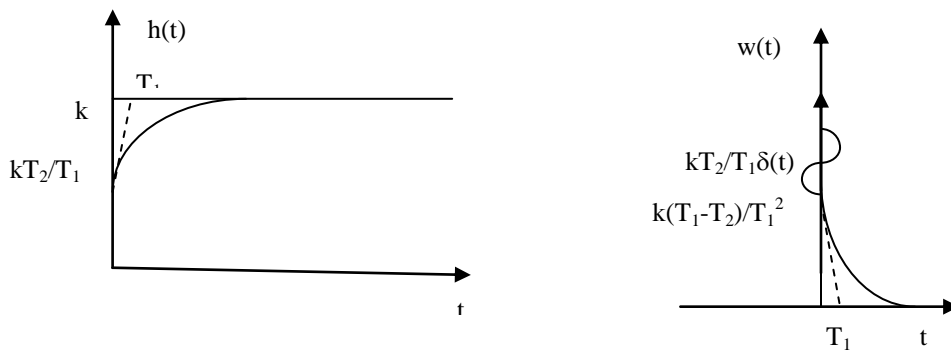


Рис. 2.80. Переходная и весовая функции упругого интегрирующего звена

2.7.3.8 Временные характеристики неустойчивого звена

Запишем передаточную функцию неустойчивого звена:

$$W(p) = \frac{k}{p - \alpha}$$

Воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{p - \alpha} \div e^{+\alpha t} 1(t),$$

откуда получаем выражение для весовой функции:

$$w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k/T}{p - 1/T} \right\} = \frac{k}{T} e^{+\alpha t} 1(t)$$

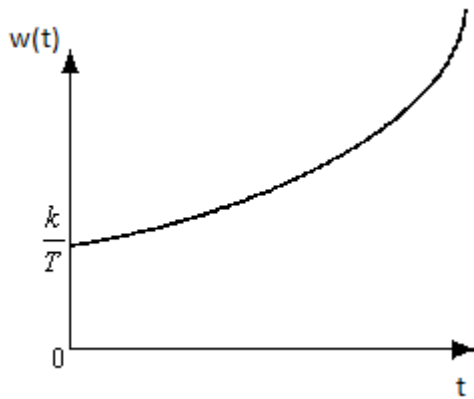


Рис. 2.81. Весовая функция неустойчивого звена

Для определения переходной функции проинтегрируем весовую функцию: $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$

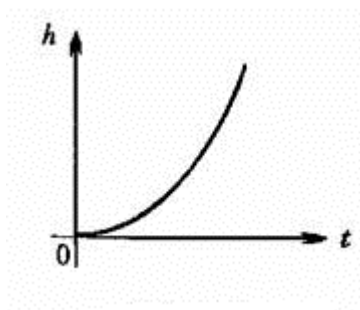


Рис. 2.82. Переходная функции неустойчивого звена

2.7.4 Временные характеристики динамических звеньев

Построим временные характеристики линейного динамического звена с запаздыванием с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{2 \cdot (1 + p)}{(1 + 5p)(1 + 2p)} e^{-0.5p} = W'(p) e^{-0.5p}.$$

Воспользуемся формулой разложения для звена $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, для которого можно

записать в общем виде: $h(t) = \left(\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t} \right) 1(t),$

$$w(t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t} \right) 1(t) + \delta(t) \cdot h(0), \text{ где } n \text{ порядок звена, } p_i \text{ - полюса передаточной}$$

функции ($i=1..n$).

Для нашего звена: $A(p) = 10p^2 + 7p + 1$; $A'(p) = 20p + 7$; $p_1 = -\frac{1}{5}$; $p_2 = -\frac{1}{2}$.

$$B(p) = 2p + 2;$$

$$p_1 = -\frac{1}{5}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}$$

$$B(p_1) = \frac{8}{5}$$

$$B(p_1) = 1$$

$$A'(p) = 3$$

$$A'(p) = -3$$

$$h(t) = \left(2 + \frac{\frac{8}{5}}{(-1/5) \cdot 3} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{(-\frac{1}{2}) \cdot (-3)} e^{-\frac{t}{2}}\right) 1(t) = \left(2 - \frac{8}{3} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}}\right) 1(t).$$

Построим переходную функцию без учета запаздывания:

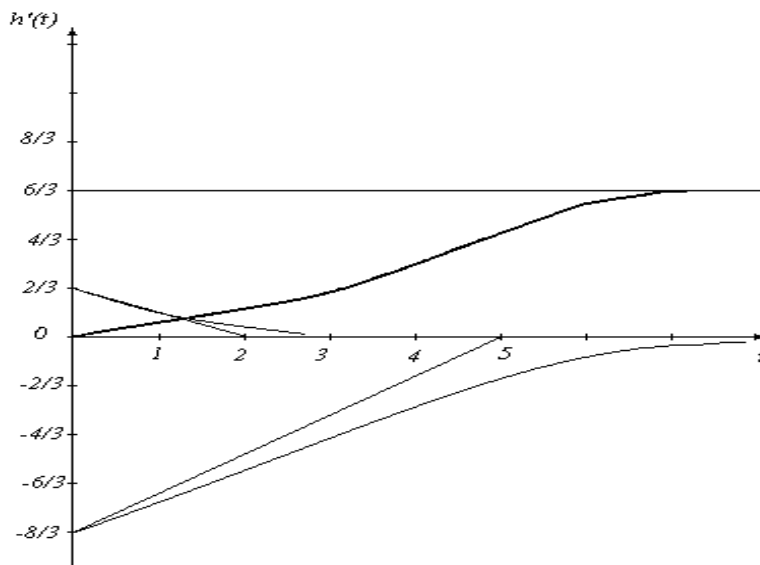


Рис. 2.83. Переходная функции динамического звена

Переходную функцию с учетом запаздывания легко получить, сдвинув построенную характеристику вправо на величину запаздывания – 0,5.

Построим весовую функцию без учета запаздывания:

$$w'(t) = \left(\frac{8}{3} e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{-3} e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot 1(t) + 0 \cdot \delta(t) = \left(\frac{8}{15} e^{-\frac{t}{5}} - \frac{5}{15} e^{-\frac{t}{2}}\right) \cdot 1(t)$$

Весовую функцию с учетом запаздывания легко получить, сдвинув построенную характеристику вправо на величину запаздывания – 0,5.

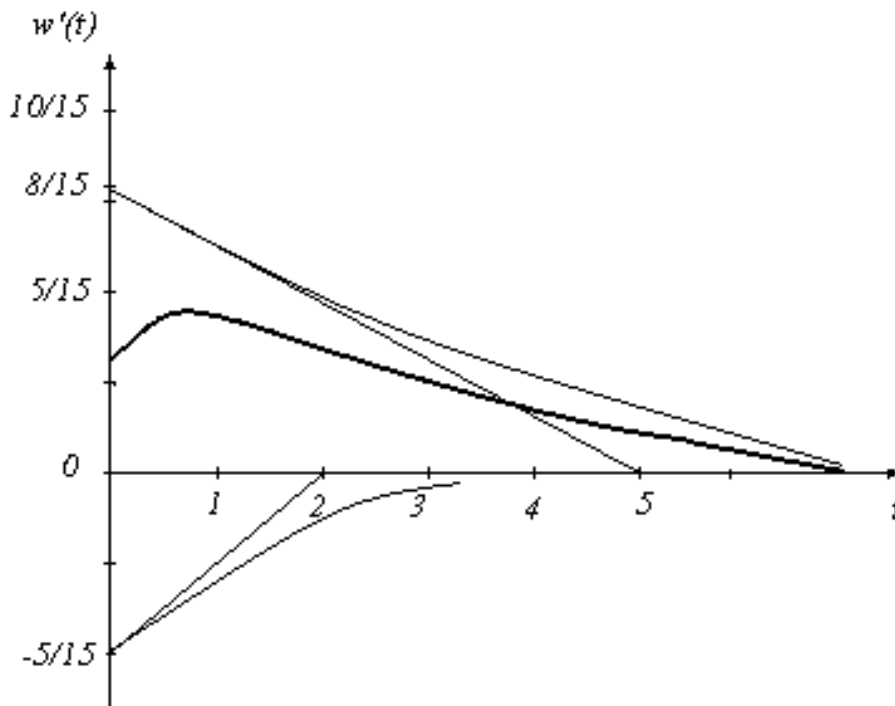


Рис. 2.84. Весовая функция динамического звена

2.8 Выводы

Линейные непрерывные системы автоматического управления описываются линейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными, не зависящими от входного/выходного сигналов коэффициентами). Решение дифференциальных уравнений позволяет получить семейство функций (выходных сигналов системы), определяемых начальными значениями системы. По полученным решениям (частным случаям) трудно провести анализ зависимости свойств системы от ее параметров. Поэтому в теории автоматического управления решение линейных дифференциальных уравнений заменяется решением алгебраических уравнений, полученных из дифференциальных применением непрерывного преобразования Лапласа. В разделе 2.1 приведена формула преобразования Лапласа и его основные свойства.

На базе непрерывного преобразования Лапласа в разделе 2.2 формулируется понятие передаточных функций $W(p)$, дается определение передаточных функций и приводятся примеры их получения для генератора постоянного тока и RLC – цепочки (колебательного

контура). Для анализа свойств системы используются частотные характеристики (раздел 2.3). В основе частотных характеристик лежит комплексный коэффициент усиления $W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$

поведение которого исследуется на комплексной плоскости (амплитудно-фазовая характеристика АФХ), построением амплитудной частотной характеристики (АЧХ) и фазовой частотной характеристики (ФЧХ). Для анализа частотных характеристик на полном частотном диапазоне их строят в логарифмическом (ЛАЧХ) и полулогарифмическом (ЛФЧХ) масштабе. Построение логарифмических частотных характеристик упрощается при представлении числителя и знаменателя передаточных функций в виде множителей (первого или второго порядков в зависимости от корней полиномов: действительных или комплексно сопряженных). В теории автоматического управления вводится понятие *типовых динамических звеньев*, описываемых дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. В разделе 2.4 рассмотрены примеры и частотные характеристики типовых динамических звеньев. В разделе 2.5 представлен пример построения частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы автоматического управления. Передаточные функции определяют поведение системы, т.е. ее временные характеристики (реакции на единичный импульс и единичную ступенчатую функцию). Временные характеристики типовых звеньев и систем исследуются в разделе 2.6.

2.9 Вопросы

1. Перечислите свойства непрерывного преобразования Лапласа. Какая формула задает преобразование Лапласа.
2. Назовите свойства линейных динамических звеньев и систем.
3. Какие динамические звенья называются минимально – и неминимально - фазовыми.
4. Что такое амплитудная частотная характеристика.
5. Что такое фазовая частотная характеристика.
6. Приведите примеры идеального и реального дифференцирующих звеньев.
7. Каким образом можно представить упругие звенья на физических моделях.
8. Какие входные сигналы надо подавать на объекты управления для получения их переходных и весовых (импульсных переходных) характеристик.
9. Как связаны весовые (импульсные переходные) и переходные характеристики.

10. Дайте определение передаточных функций и комплексного коэффициента усиления звеньев или систем.

2.10 Задания

1. Найти изображения по Лапласу временных функций:

1.1. $f(t) = 3e^{-2t} 1(t) + 1(t-2) + e^{-t} \sin(3t)1(t) + \delta(t)$

1.2. $f(t) = 3e^{-2(t-1)} 1(t-1) + 3 * 1(t-2) + e^{-0.1t} \sin(t)1(t) + \delta(t-2)1(t-2)$

1.3. $f(t) = 5e^{-(t-2)} 1(t-2) + 2 * 1(t-1) + e^{-2t} \sin(t)1(t) + 2 * \delta(t-3)$

1.4. $f(t) = 2 * 1(t-3) + e^{-2(t-0.5)} 1(t-0.5) + e^{-2(t-0.5)} \sin(3(t-0.5))1(t-0.5) + 10e^{-(t-2)} 1(t-2) + 2 * \delta(t-3)$

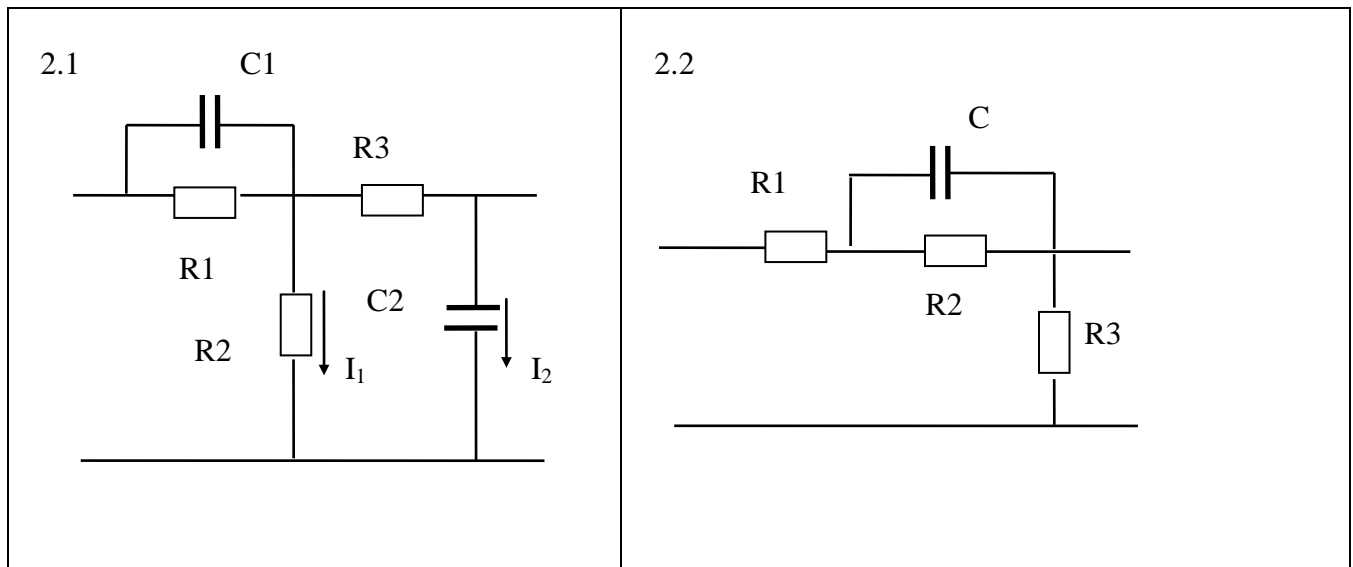
1.5. $f(t) = 1(t-0.3) + 5 e^{-2t} \sin(3t) + 1.0e^{-(t-2)} 1(t-2) + 5 * \delta(t-1)$

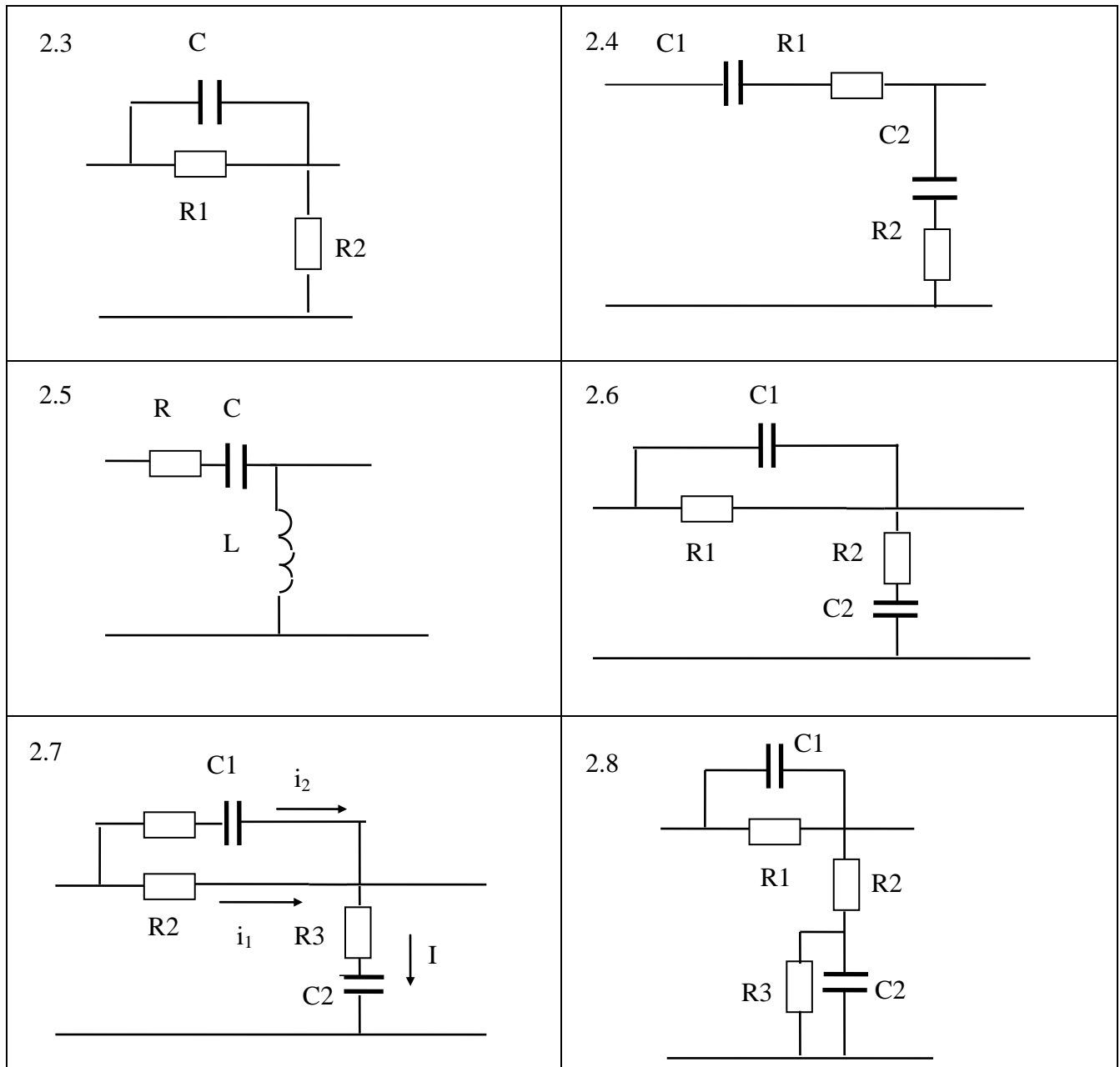
1.6. $f(t) = e^{-2(t-1)} 1(t-1) + 3 * 1(t) + 5e^{-(t-3)} \sin(3(t-3))1(t-3) + 2 * \delta(t-3)$

1.7. $f(t) = 10e^{-(t-10)} 1(t-10) + 2 * \delta(t-2) - 2 * 1(t-0.3) + 5 e^{-2(t-0.5)} \sin(3(t-0.5))1(t-0.5)$

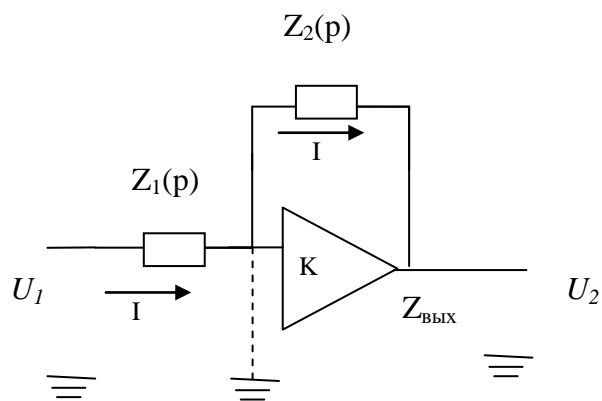
1.8. $f(t) = 1(t-3) + 2e^{-3(t-0.8)} \sin(3(t-0.8))1(t-0.8) + e^{-(t-0.2)} 1(t-0.2) + 2.5 * \delta(t-1)$

2. Найти передаточные функции и построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ) звеньев, заданных моделями:





3. Найти передаточные функции, определить тип звена, построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ) и временные характеристики ($h(t)$, $w(t)$)



звеньев, заданных моделями с использованием операционных усилителей:

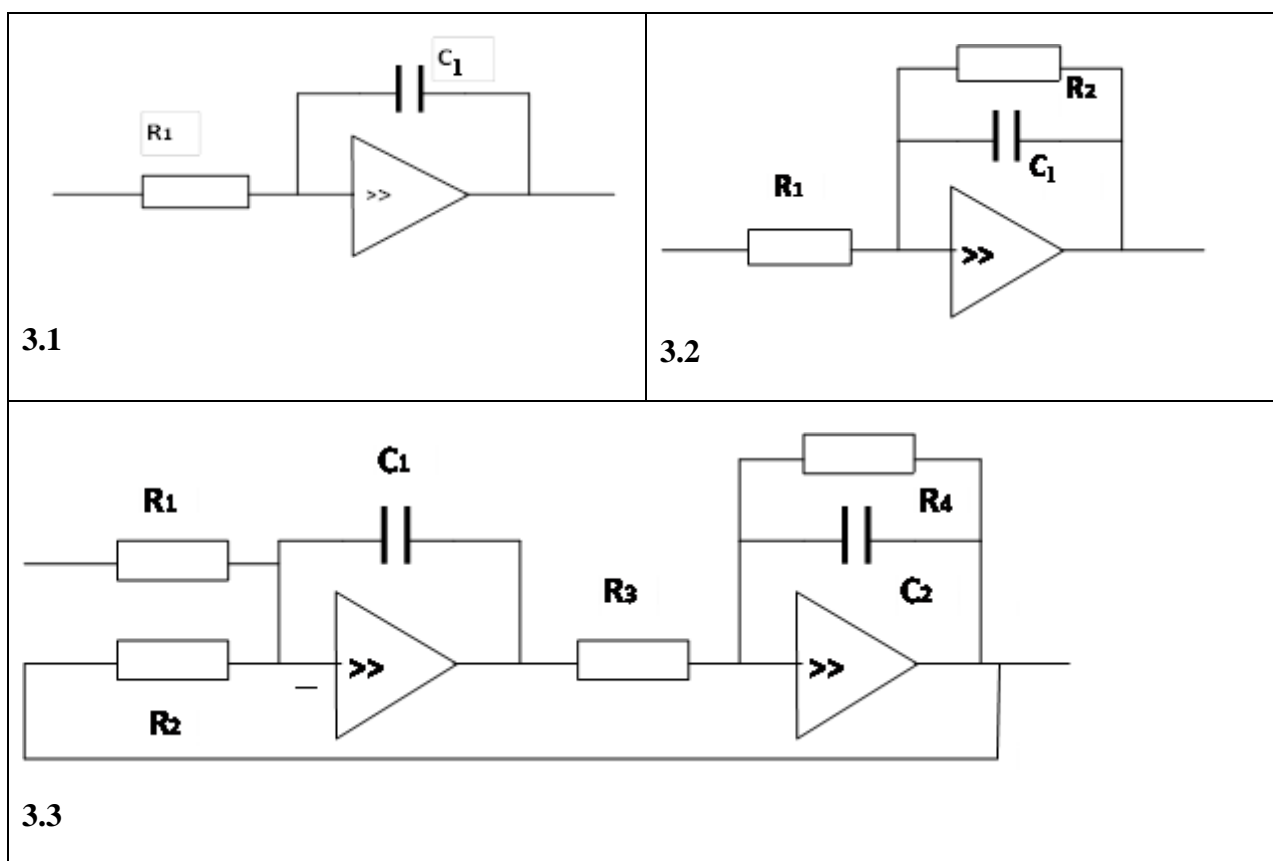
Схема операционного усилителя представлена на рисунке. Как уже упоминалось, операционный усилитель представляет собой усилитель постоянного тока с большим коэффициентом

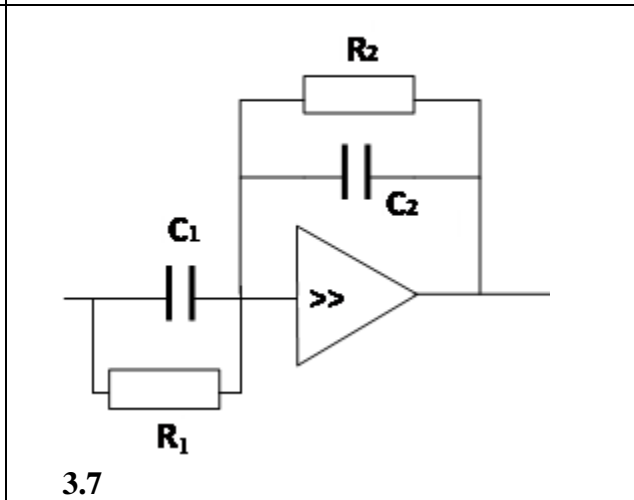
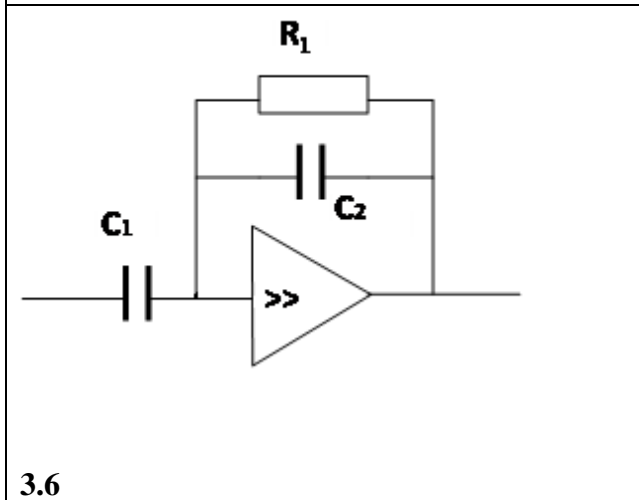
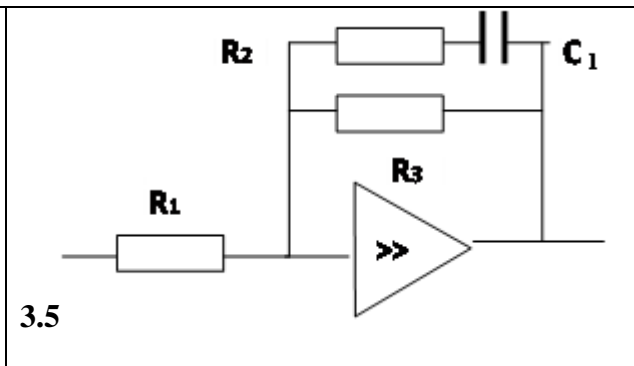
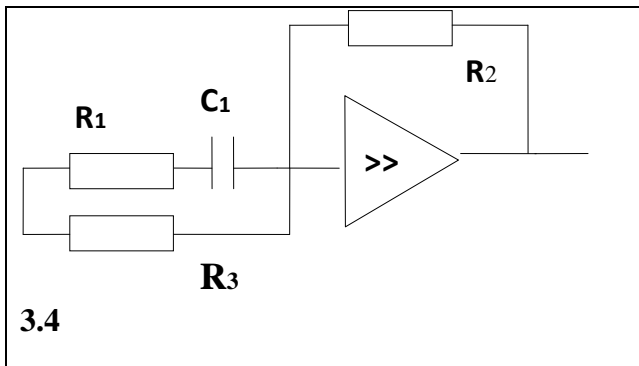
усиления K и входным сопротивлением $Z_{вх}$, и маленьким выходным сопротивлением $Z_{вых}$. Вследствие этого, проходящий через сопротивление $Z_1(p)$ ток I протекает и через сопротивление $Z_2(p)$. Напряжение на выходе операционного усилителя U_2 ограничено и, таким образом, напряжение на его входе U_2 / K можно считать практически равным нулю, т.е. все входное напряжение U_1 падает на сопротивление $Z_1(p)$, а из потенциально заземленной точки на входе усилителя течет ток I , формирующий напряжение U_2 . Передаточная функция

представленной на рисунке схемы равна $W(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}$. Отрицательный знак учитывается в

схеме и его можно не принимать во внимание.

Для заданных в таблице схем выполнить задание, сформулированное в п. 3





При вычислениях использовать следующие параметры:

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | C_1 | C_2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 500k | 100k | 50k | 100k | 2μF | 1μF |

4. Построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ) звеньев, заданных передаточными функциями:

| | |
|--|---|
| 4.1. $W(p) = 10 \frac{1 - 0.1p}{1 + 0.01p}$ | 4.2. $W(p) = \frac{1 + 0.1p}{1 - 0.01p}$ |
| 4.3. $W(p) = 10 \frac{0.1p - 1}{1 + 0.5p}$ | 4.4. $W(p) = \frac{10(1 + 5p)}{1 + 2p} e^{-0.1p}$ |
| 4.5. $W(p) = \frac{10(5p - 1)}{p} e^{-0.2p}$ | 4.6. $W(p) = \frac{40}{1 + 0.12p + 0.002p^2}$ |
| 4.7. $W(p) = 10 \frac{p}{1 + 0.1p}$ | 4.8. $W(p) = 100 \frac{1 + 0.2p}{(1 - 0.05p)p}$ |

| | |
|---------------------------------------|---|
| 4.9. $W(p) = 100 \frac{1}{0.05p - 1}$ | 4.10 $W(p) = \frac{40}{1 - 0.12p + 0.002p^2}$ |
|---------------------------------------|---|

7. Построить временные характеристики звеньев, представленных в таблице передаточными функциями:

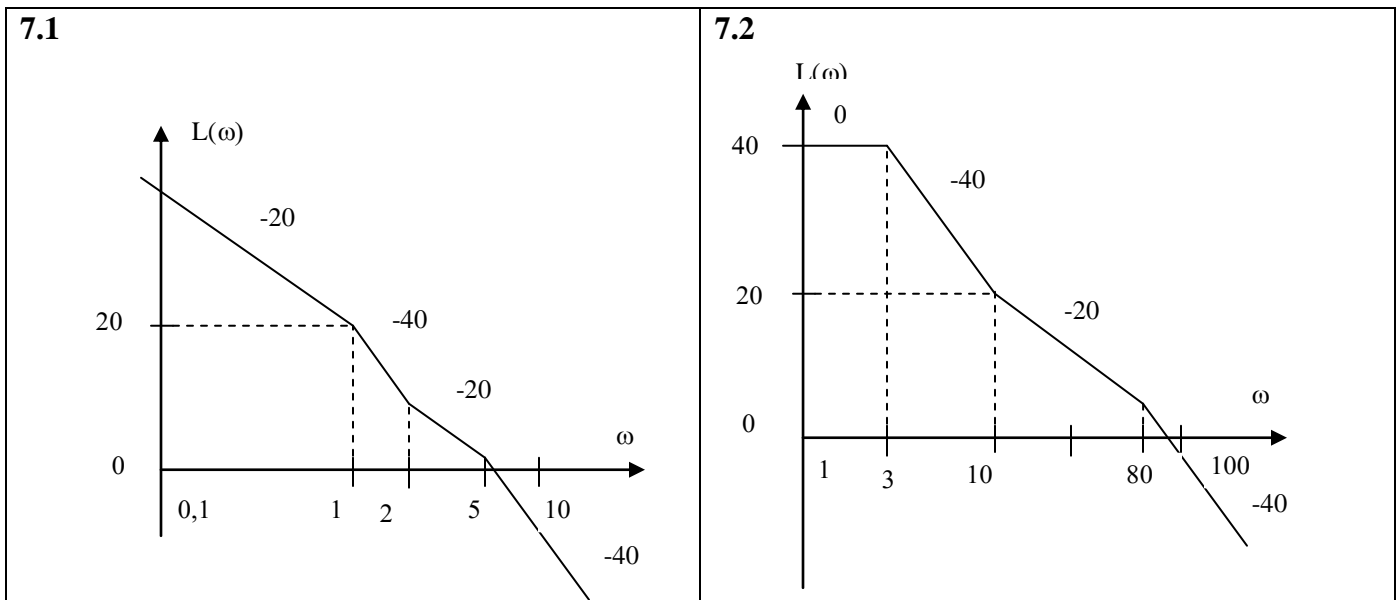
| | |
|--|--|
| 5.1. $W(p) = \frac{1 + 2p}{p(1 + 5p)} e^{-0.2p}$ | 5.2. $W(p) = \frac{1 + 2p}{(p + 1)(1 + 5p)} e^{-0.1p}$ |
| 5.3. $W(p) = \frac{10p}{(1 + 2p)(1 + 5p)} e^{-0.3p}$ | 5.4. $W(p) = \frac{10(1 + 2p)}{p(1 + 5p)} e^{-0.5p}$ |
| 5.5. $W(p) = \frac{1 + 2p}{p(1 + 5p)(1 + 10p)}$ | 5.6. $W(p) = \frac{20}{p(1 + 10p)} e^{-p}$ |
| 5.7. $W(p) = \frac{5p}{(1 + 2p)(1 + 10p)} e^{-p}$ | 5.8. $W(p) = \frac{3(1 + 3p)}{p(1 + 10p)} e^{-2p}$ |

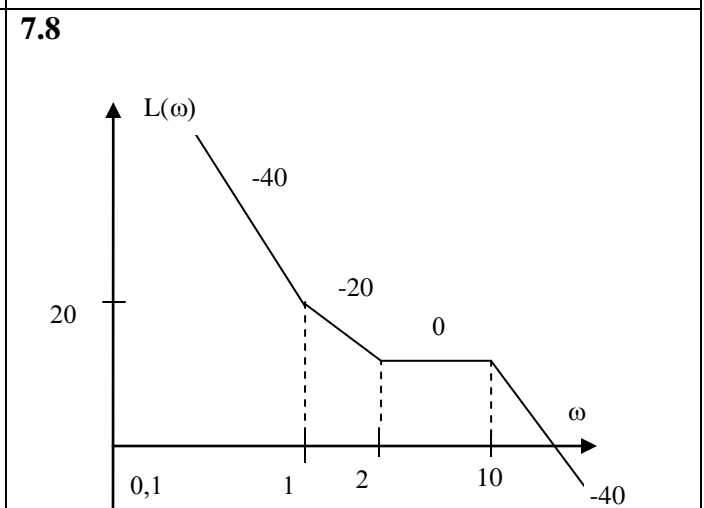
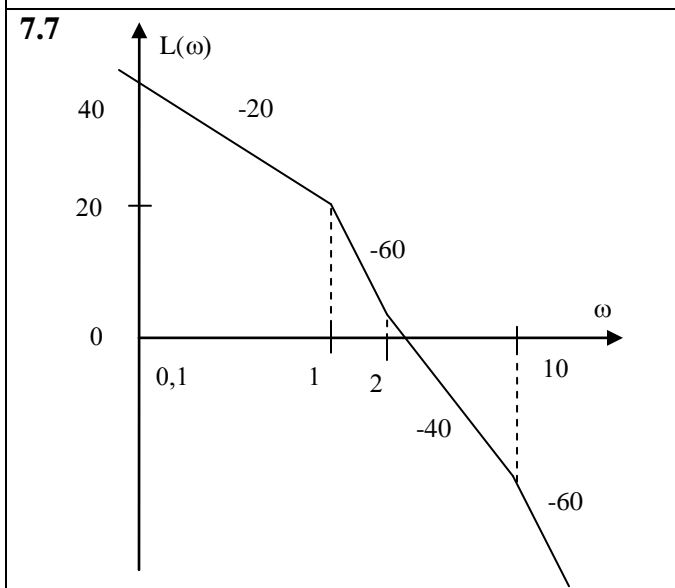
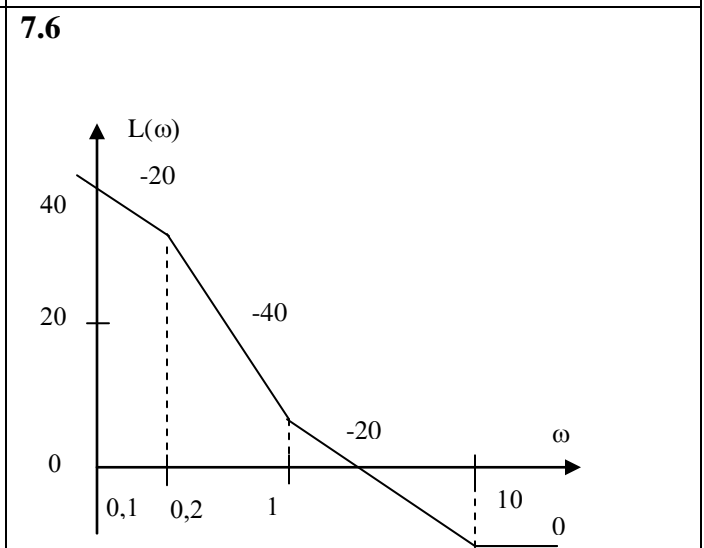
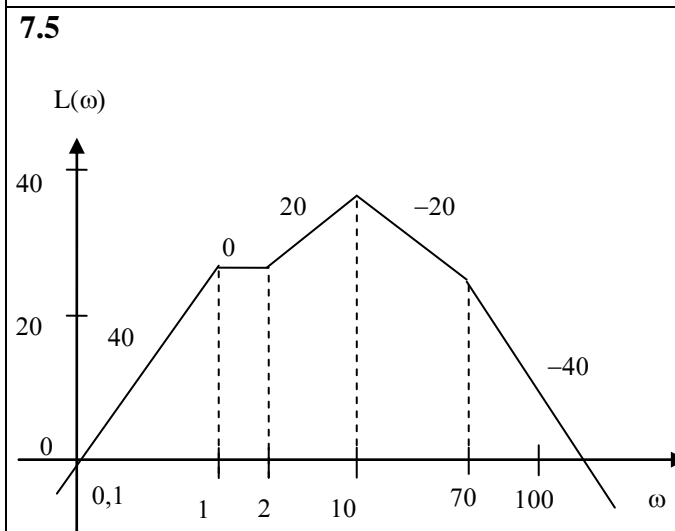
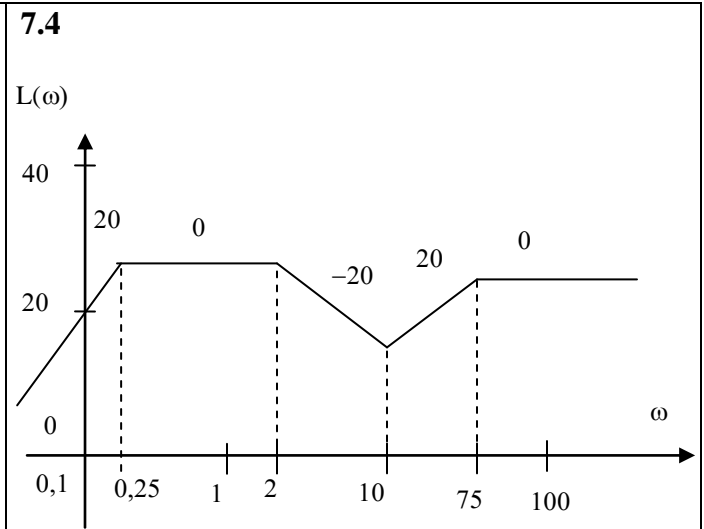
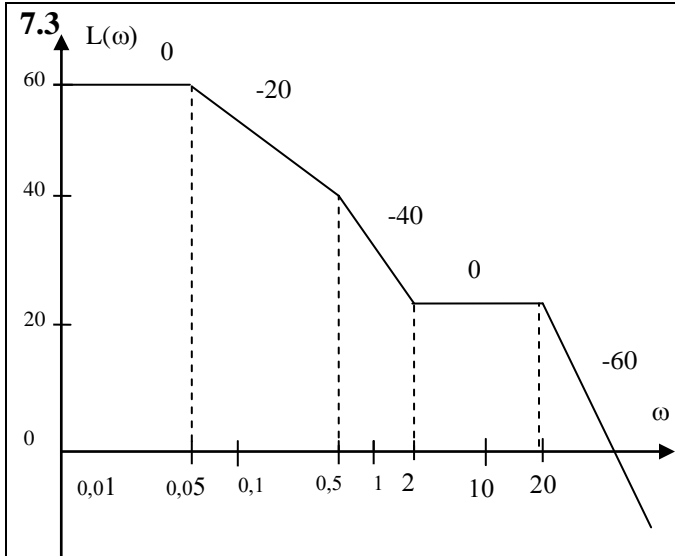
8. Построить частотные характеристики систем, заданных передаточными функциями:

| | |
|---|---|
| 6.1. $W(p) = \frac{50(1 + 0.5p)}{p^2(1 + 2p)^2(1 + p + p^2)}$ | 6.2. $W(p) = \frac{10p(1 + 0.5p)^2}{(1 + 2p)(1 + 5p)^2}$ |
| 6.3. $W(p) = \frac{50(1 + 0.5p)^2(1 + 10p)}{p^2(1 + 2p)}$ | 6.4. $W(p) = \frac{20(1 + 0.5p + p^2)}{p(1 + 2p)(1 + 10p)^2}$ |
| 6.5. $W(p) = \frac{200(1 + 0.5p)^2}{p^2(1 + 2p)^2(1 + 10p)}$ | 6.6. $W(p) = \frac{10p^2(1 + p)}{(1 + 3p)(1 + 10p)^2}$ |
| 6.7. $W(p) = \frac{50(1 + 0.5p)}{p^2(1 + 2p)(1 + 10p)}$ | 6.8. $W(p) = \frac{50(1 + 0.5p + p^2)}{p^2(1 + 2p)(1 + 10p)}$ |
| 6.9. $W(p) = \frac{20(1 + 0.5p)}{p(1 + 2p)(1 + 10p)^2}$ | 6.10. $W(p) = \frac{100p(1 + 5p)^2}{(1 + 0.2p)(1 + p + p^2)}$ |

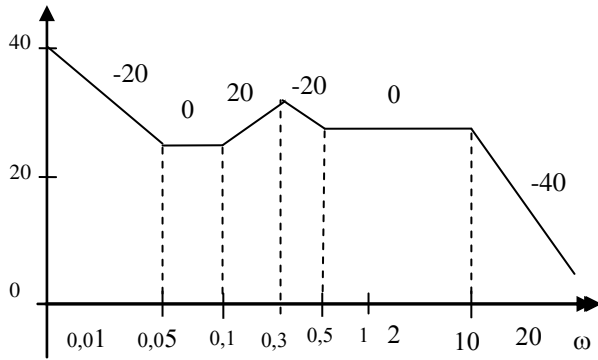
| | |
|--|---|
| 6.11. $W(p) = \frac{100(1+5p)^2}{p(1+0.2p)(1+p+p^2)}$ | 6.12. $W(p) = \frac{100p(1+5p)}{(1+0.2p)^2(1+p+p^2)}$ |
| 6.13. $W(p) = \frac{100(1+5p)}{p(1+0.2p)^2(1+p+p^2)}$ | 6.14. $W(p) = \frac{50(1+0.5p)^2}{p^2(1+2p)(1+p+p^2)}$ |
| 6.15. $W(p) = \frac{10p(1+0.5p)}{(1+2p)^2(1+p+p^2)}$ | 6.16. $W(p) = \frac{50(1+0.5p)}{p^2(1+2p)(1+10p)}$ |
| 6.17. $W(p) = \frac{50(1+0.5p+p^2)}{p^2(1+2p)(1+10p)}$ | 6.18. $W(p) = \frac{20(1+0.5p)}{p(1+2p)(1+10p)^2}$ |
| 6.19. $W(p) = \frac{100p(1+5p)^2}{(1+0.2p)(1+p+p^2)}$ | 6.20. $W(p) = \frac{100(1+5p)^2}{p(1+0.2p)^2(1+p+p^2)}$ |

9. Записать передаточные функции и построить логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ) и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для минимально-фазовых систем, заданных логарифмическим частотными характеристиками (ЛАЧХ):

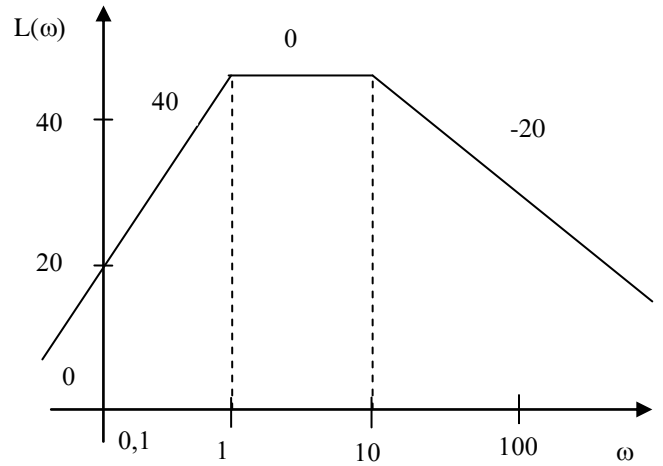




7.9



7.10



2.11 Практикум по главе 2.

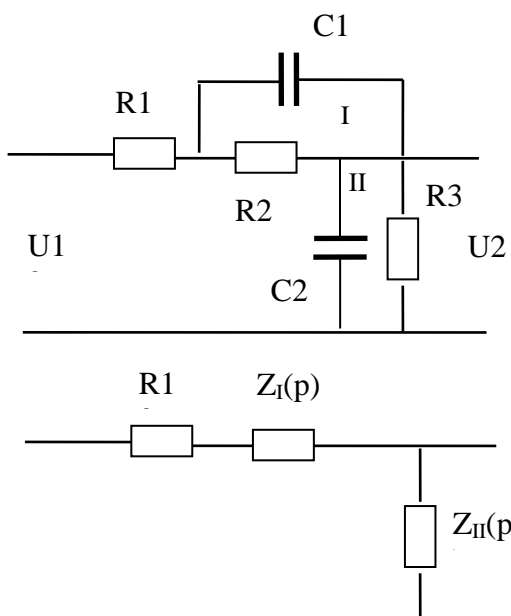
1. Найти изображения по Лапласу временной функции:

$$f(t) = 3e^{-2(t-1)} 1(t-1) + 1(t) + e^{-t} \sin(3t) 1(t) + \delta(t)$$

В соответствии со свойствами преобразования Лапласа (раздел 2.1) и таблицей изображений временных функций (раздел 2.6.1) в силу свойства линейности и изображения от функции с запаздывающим аргументом запишем:

$$F(p) = \frac{3e^{-p}}{p+2} + \frac{1}{p} + \frac{3}{(p+1)^2 + 9} + 1$$

2. Найти передаточные функции и построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ) звеньев, заданных моделями:



Преобразуем параллельное соединение сопротивления R2 и конденсатора C1 (I) в эквивалентное по известному правилу: «дробь в числителе которой произведение сопротивлений, а в знаменателе их сумма»,

$$\text{т.е. } Z_I(p) = \frac{R2 \cdot 1/pC1}{R2 + 1/pC1} = \frac{R2}{p \cdot R2 \cdot C1 + 1}$$

$$\text{Аналогично, } Z_{II}(p) = \frac{R3 \cdot 1/pC2}{R3 + 1/pC2} = \frac{R3}{p \cdot R3 \cdot C2 + 1}$$

Заменив сопротивления $Z_I(p)$ и $Z_{II}(p)$ и перерисовав схему, запишем передаточную функцию схемы

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{II}(p)}{R_1 + Z_I(p) + Z_{II}(p)} = \frac{\frac{R_3}{p \cdot R_3 \cdot C_2 + 1}}{R_1 + \frac{R_2}{p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1} + \frac{R_3}{p \cdot R_3 \cdot C_2 + 1}} = \\
 &= \frac{R_3 \cdot (p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1)}{R_1 \cdot (p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1) \cdot (p \cdot R_3 \cdot C_2 + 1) + R_2 \cdot (p \cdot R_3 \cdot C_2 + 1) + R_3 \cdot (p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1)} = \\
 &= \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{p \cdot R_2 \cdot C_1 + 1}{\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot p^2 + \frac{(R_1 \cdot (R_2 \cdot C_1 + R_3 \cdot C_2) + R_2 \cdot R_3 \cdot (C_2 + C_1))}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot p + 1}
 \end{aligned}$$

Используя данные, приведенные в таблице, рассчитаем коэффициенты передаточной

функции и запишем полученное выражение: $W(p) = \frac{0,077 \cdot (0,2p + 1)}{0,0077 \cdot p^2 + 0,215 \cdot p + 1}$

| R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | C_1 | C_2 |
|--------|--------|-------|--------|----------|----------|
| $500k$ | $100k$ | $50k$ | $100k$ | $2\mu F$ | $1\mu F$ |

Найдем полюса передаточной функции, разложим характеристический полином (знаменатель передаточной функции) на множители и построим частотные характеристики полученного

динамического звена $W(p) = \frac{0,077 \cdot (0,2p + 1)}{(0,17p + 1) \cdot (0,045p + 1)}$, для чего запишем комплексный

коэффициент усиления в виде

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{0,077 \cdot (0,2j\omega + 1)}{(0,17j\omega + 1) \cdot (0,045j\omega + 1)} = \\
 &= \frac{0,077 \cdot \sqrt{(0,2\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(0,17\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{(0,045\omega)^2 + 1}} \cdot e^{j \cdot (\arctg 0,2\omega - \arctg 0,17\omega - \arctg 0,045\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}
 \end{aligned}$$

Рассчитаем выражение для логарифмической амплитудной частотной характеристики (

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega)):$$

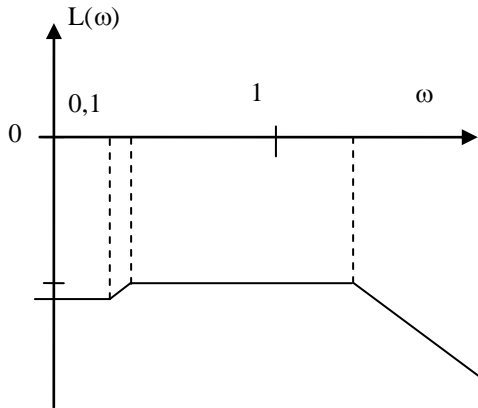
$$L(\omega) = 20 \lg 0,077 + 20 \lg \sqrt{(0,2\omega)^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(0,17\omega)^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(0,045\omega)^2 + 1}$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ разобьем частотный диапазон на частотные диапазоны и запишем выражения для линейных асимптот на каждом участке ЛАЧХ:

0) $\omega \leq 1/0,2$; $L_0(\omega) = 20 \cdot \lg 0,077 = -22,27$

1) ($\omega > 1/0,2$) и ($\omega \leq 1/0,17$); $L_1(\omega) = L_0 - 20 \cdot \lg 0,17\omega$

2) $\omega > 1/0,17$ $L_2(\omega) = L_1 - 20 \cdot \lg 0,045\omega$



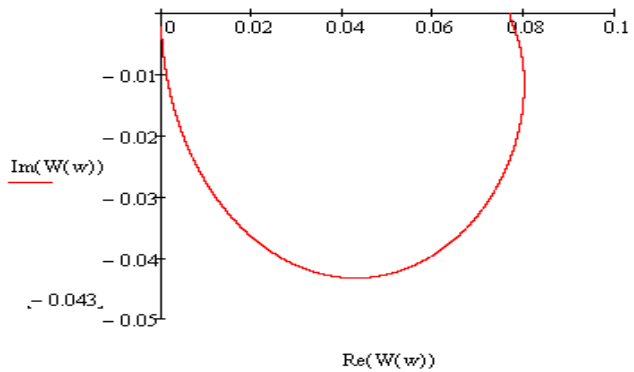
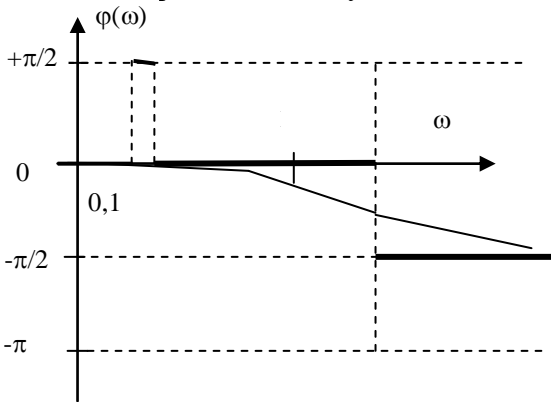
Отложив $L_0(\omega)$ и изменив наклоны после частот сопряжения, построим асимптотическую ЛАЧХ:

Перейдем к построению логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ):

$$\varphi(\omega) = \arctg(0,2\omega) - \arctg(0,17\omega) - \arctg(0,045\omega).$$

Амплитудно-фазовая характеристика строится по АЧХ и ФЧХ. Запишем значения $A(\omega)$ в начале ($\omega=0$) и в конце ($\omega=\infty$) частотной оси: $A(0)=0.77$; $A(\infty)=0$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(\infty)=-$

$\pi/2$ и изобразим АФХ с учетом изменения амплитудной фазовой частотных характеристик¹:



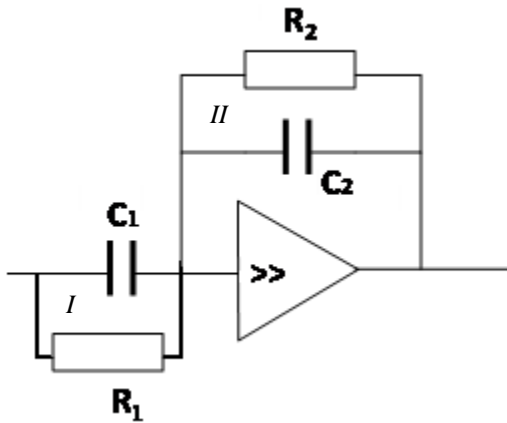
3. Найти передаточные функции, определить тип звена, построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ) и временные характеристики ($h(t)$, $w(t)$) звена, заданного моделью с использованием операционного усилителя ($R_1=5 \text{ Ком}$; $R_2=10 \text{ Ком}$; $C_1=100 \text{ мкф.}$; $C_2=200 \text{ мкф.}$). Найдем сопротивления, эквивалентные параллельно

соединенным резисторам и конденсаторам, аналогично примеру в п.2:

$$Z_I(p) = \frac{R_1 \cdot 1/pC_1}{R_1 + 1/pC_1} = \frac{R_1}{p \cdot R_1 \cdot C_1 + 1}$$

$$Z_{II}(p) = \frac{R_2 \cdot 1/pC_2}{R_2 + 1/pC_2} = \frac{R_2}{p \cdot R_2 \cdot C_2 + 1}$$

Запишем передаточную функцию:



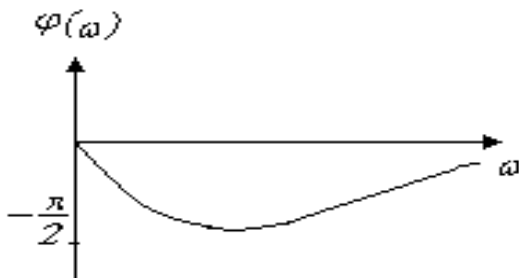
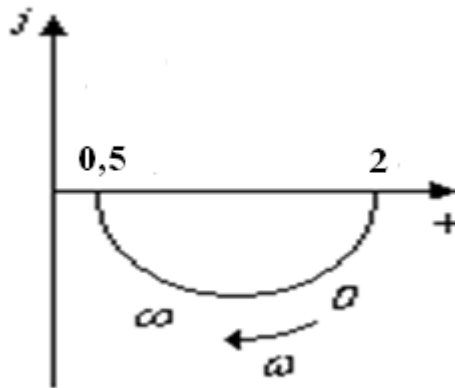
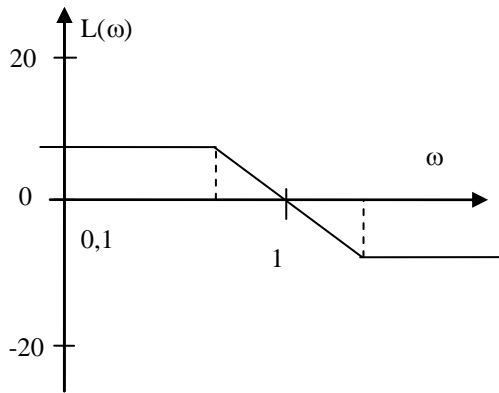
¹АФХ построена с использованием Mathcad

$$W(p) = \frac{Z_{II}(p)}{Z_I(p)} = \frac{\frac{R2}{p \cdot R2 \cdot C2 + 1}}{\frac{R1}{p \cdot R1 \cdot C1 + 1}} = \frac{R2}{R1} \cdot \frac{1 + p \cdot R1 \cdot C1}{1 + p \cdot R2 \cdot C2}$$

С учетом заданных параметров

получаем:
$$W(p) = \frac{10}{5} \cdot \frac{1 + 0,5p}{1 + 2p} = \frac{2 \cdot (1 + 0,5p)}{1 + 2p}$$

Данное звено – упругое интегрирующее, для которого строим частотные характеристики:



При построении временных характеристик следует отметить, что степень числителя передаточной функции равна степени знаменателя, т.е. для построения весовой функции формулу разложения использовать нельзя, а поэтому следует либо выделить целую часть, поделив полином числителя на полином знаменателя, либо

первоначально строить переходную функцию звена, записав изображение по Лапласу:

$$L(h(t)) = H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{2 \cdot (1 + 0,5p)}{1 + 2p} \cdot \frac{1}{p}$$

Разложив полученное выражение на простые дроби и определив коэффициенты разложения,

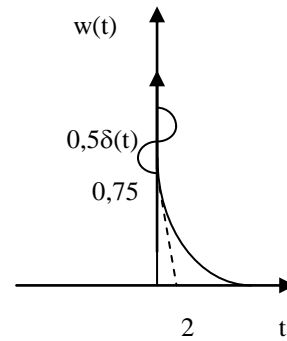
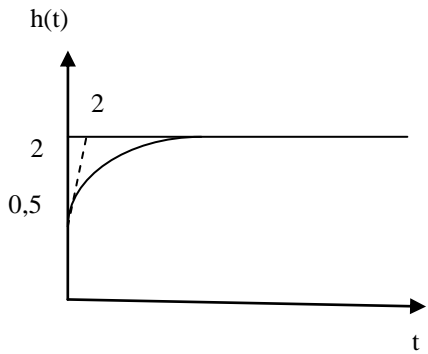
получим:
$$H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{2 \cdot (1 + 0,5p)}{1 + 2p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + 2p} = \frac{2}{p} - \frac{3}{1 + 2p}$$
 . Перейдя к

временным функциям, получим:
$$h(t) = (2 - 1,5e^{-\frac{t}{2}}) \cdot 1(t)$$
 . Найдем весовую функцию,

продифференцировав $h(t)$. Учитывая то, что $h(t)$ представляет собой произведение двух

функций времени, получим: $w(t) = 0,75 \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot 1(t) + 0,5 \cdot \delta(t)$

Полученный результат легко проверить сравнением с формулами, представленными в разделе 2.4.7 с учетом обозначений: $T_1=R_1C_1$, $T_2=R_2C_2$, $k=2$.



4. Построить частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, АФХ, асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ)

звена, заданного передаточной функцией: $W(p) = \frac{10 \cdot (2p - 1)}{(1 - 5p) \cdot p}$. Следует отметить, что

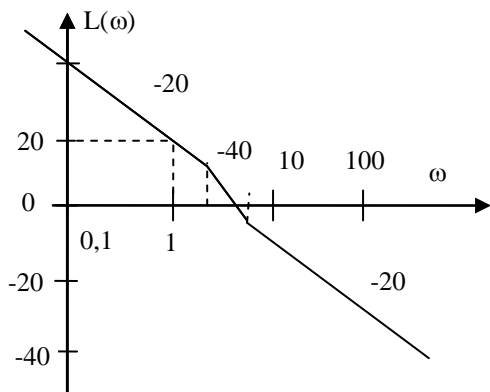
динамическое звено относится к неминимально - фазовым звеньям. Запишем комплексный коэффициент усиления звена с учетом материала, изложенного в разд. 2.5:

$$W(j\omega) = \frac{10 \cdot (2j\omega - 1)}{(1 - 5j\omega) \cdot j\omega} = \frac{10 \cdot \sqrt{1 + (2\omega)^2} \cdot e^{j \cdot (\pi - \arctg 2\omega)}}{\omega \cdot e^{j \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (5\omega)^2} \cdot e^{-j \arctg 5\omega}} =$$

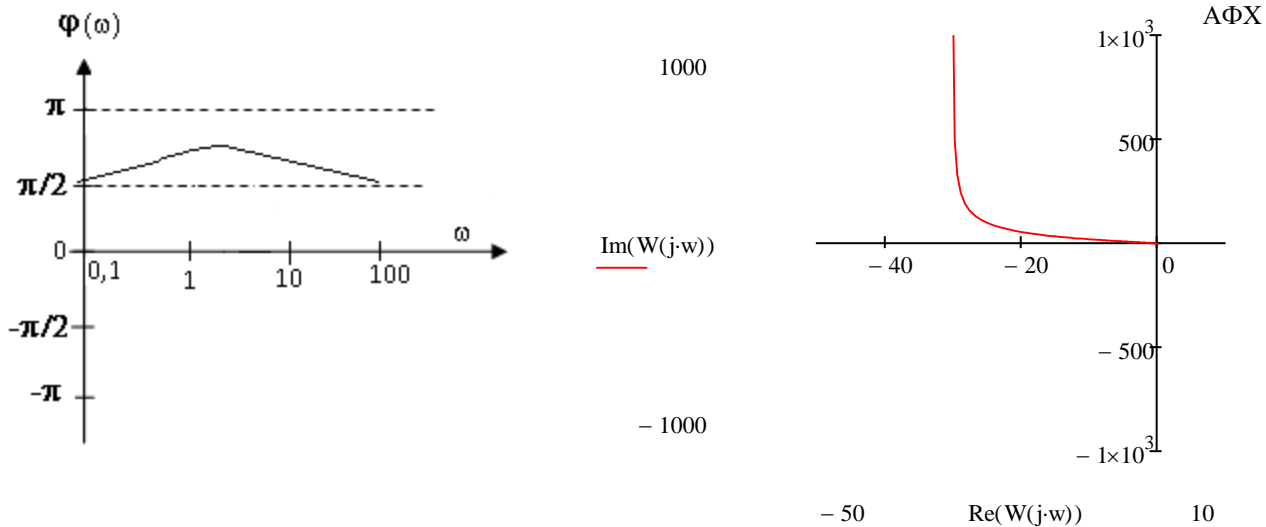
$$= \frac{10 \cdot \sqrt{1 + (2\omega)^2}}{\omega \cdot \sqrt{1 + (5\omega)^2}} \cdot e^{j \cdot (\pi - \arctg 2\omega - \frac{\pi}{2} + \arctg 5\omega)}$$

ЛАЧХ

Таким образом, запишем $A(\omega) = \frac{10 \cdot \sqrt{1 + (2\omega)^2}}{\omega \cdot \sqrt{1 + (5\omega)^2}}$;



$$\varphi(\omega) = \pi - \arctg 2\omega - \frac{\pi}{2} + \arctg 5\omega = \frac{\pi}{2} + \arctg 5\omega - \arctg 2\omega$$



Графики частотных характеристик представлены на рисунках.

5. Построить временные характеристики звена с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{5 \cdot (1 + 5p)}{p \cdot (1 + p)} \cdot e^{-p}.$$

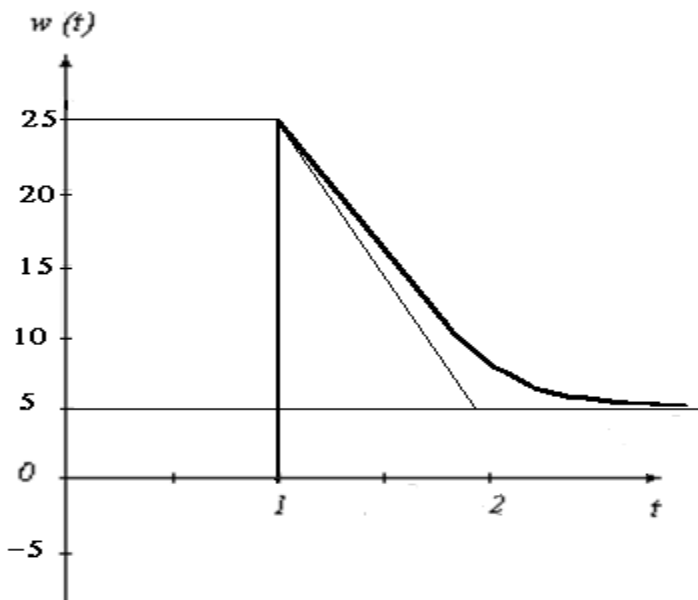
Заметим, что множитель e^{-p} означает запаздывание временной

характеристики на 1. Поэтому построим весовую и переходную функцию звена с передаточной

$$\text{функцией } W'(p) = \frac{5 \cdot (1 + 5p)}{p \cdot (1 + p)}, \text{ а затем сдвинем эти характеристики на 1 по времени. Для}$$

$$\text{построения весовой функции разложим передаточную функцию на две: } \frac{5 \cdot (1 + 5p)}{p \cdot (1 + p)} = \frac{5}{p} + \frac{20}{1 + p} \text{ и}$$

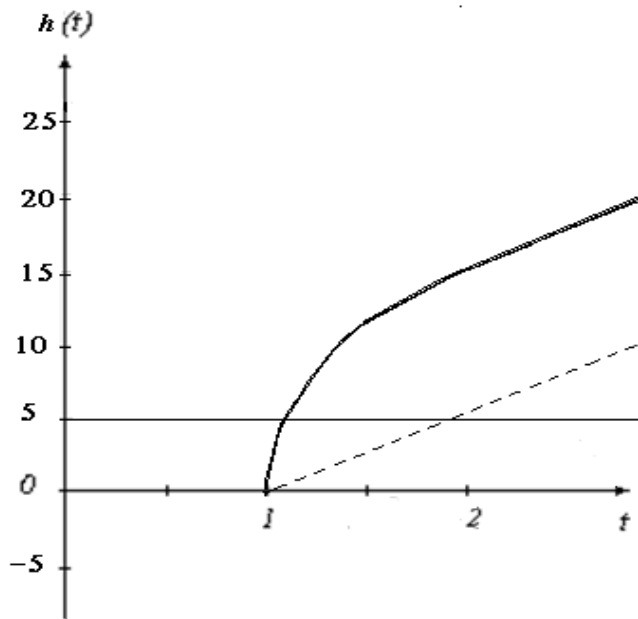
$$\text{запишем соответствующие функции времени: } w'(t) = (5 + 20e^{-t}) \cdot 1(t).$$



Построим весовую функцию $w(t)$ с учетом запаздывания. Для построения переходной функции проинтегрируем весовую функцию

$$h'(t) = \int_0^t w'(\tau) d\tau = 5 \cdot t - 20e^{-t} + 20.$$

Изобразим эту функцию графически с учетом запаздывания.



6. Построим частотные характеристики по заданной передаточной функции:

$$W(p) = \frac{50 \cdot p \cdot (1 + 2p)}{(1 + p)^2 (1 + 0,2p)}. \text{ Запишем комплексный коэффициент усиления}$$

$$W(j\omega) = \frac{50 \cdot j\omega \cdot (1 + j \cdot 2 \cdot \omega)}{(1 + j \cdot \omega)^2 (1 + j \cdot 0,2 \cdot \omega)} \text{ и представим его в виде амплитудной и фазовой}$$

$$\text{частотных характеристик: } A(\omega) = \frac{50\omega\sqrt{1+(2\omega)^2}}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^2 \sqrt{1+(0,2\omega)^2}},$$

$$L(\omega) = 20\lg 50 + 20\lg \omega + 20\lg \sqrt{1+(2\omega)^2} - 40\lg \sqrt{1+\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+(0,2\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2\omega - 2\operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} 0,2\omega.$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ найдем частоты сопряжения и разобьем ось частот на отрезки:

$$1) \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}$$

$$L_1 = L_0 + 20\lg 2\omega$$

$$3) \quad 1 < \omega \leq 5$$

$$L_0 = 20\lg 50 + 20\lg \omega$$

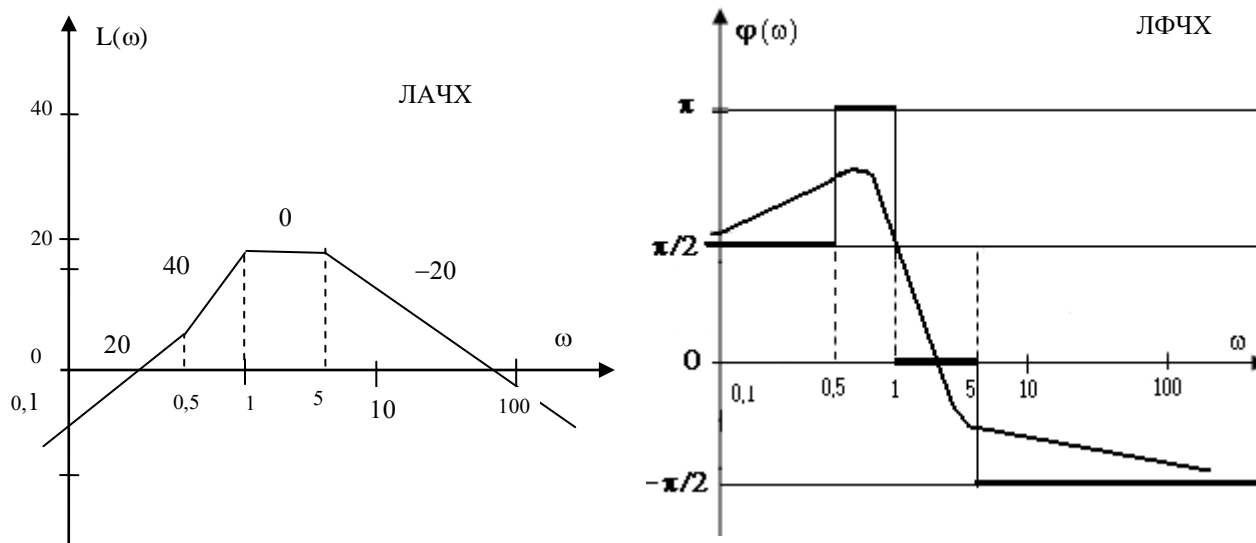
$$L_2 = L_1 - 40\lg \omega$$

$$2) \quad \frac{1}{2} < \omega \leq 1$$

$$4) \quad \omega \geq 5$$

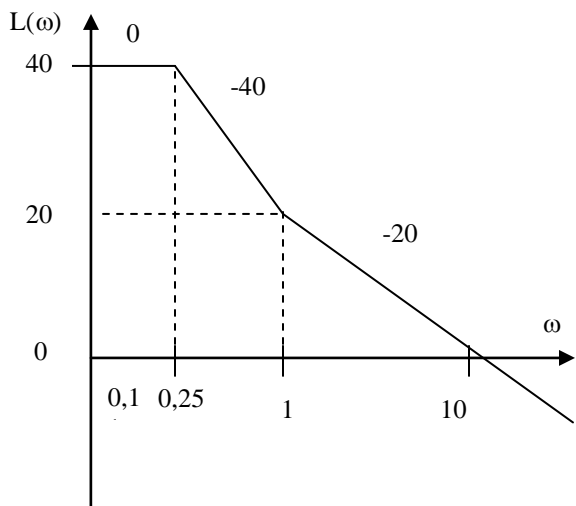
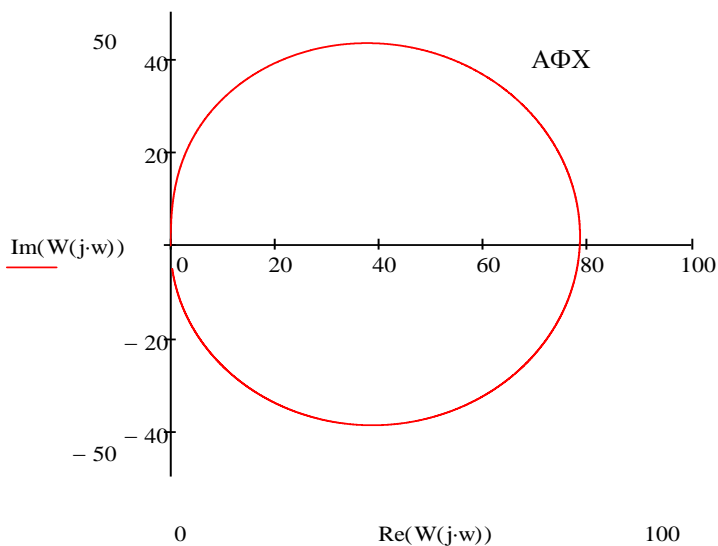
$$L_3 = L_2 - 20 \lg 0,2\omega$$

ЛФЧХ строим по приведенному выше выражению.



Полученные характеристики приведены на приведенных выше графиках.

АФХ приведена на графике ниже:

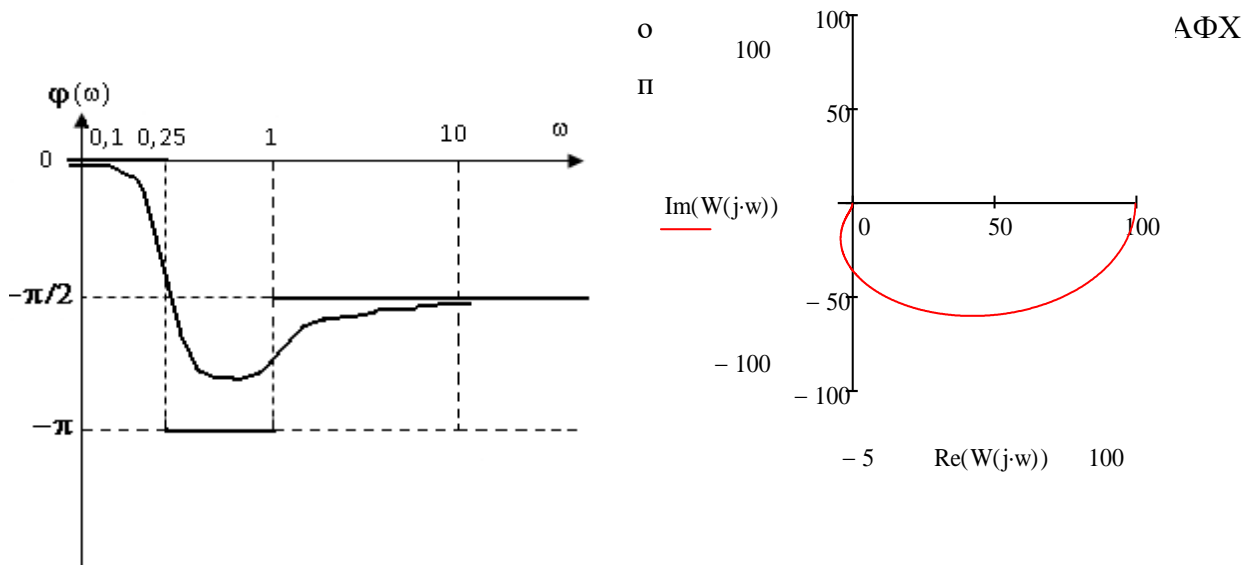


7. По заданной ЛАЧХ восстановить передаточную функцию и построить ЛФЧХ и АФХ.

Из ЛАЧХ находим коэффициент усиления, равный 100, и устанавливаем отсутствие дифференцирующих и интегрирующих звеньев (множителей p в числителе и знаменателе передаточной функции). Определяем частоты сопряжения, равные 0,25 и 1. По изменениям наклонов на частотах сопряжения восстанавливаем

передаточную функцию: $W(p) = \frac{100(1+p)}{(1+4p)^2}$. Построим ЛФЧХ, воспользовавшись асимптотами

$(0, -\pi, -\pi/2)$, соответствующими наклонам ЛАЧХ $(0, -40, -20)$. ЛФЧХ строим, соединяя середины



2.12 Список литературы

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления, «Энергия», ч.1 -1965.
2. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
3. Теория автоматического управления: Учеб. Для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др. – М.: Высш.шк., 1986. – 367 с.
4. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Автоматическое управление», Характеристики звеньев и систем, Чхартишвили Л.П., Беседин В.М., Хризолитова С.А. – М.: Моск.энерг.ин-т, 1987. – 44с.
5. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. - М.: Изд-во МЭИ, 1992, 103 с.
6. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Бондин О.А. Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления. Учеб. Пос. по курсу "Основы теории управления".- М.: Изд-во МЭИ, 2004, - 64 с.
7. Исследование САУ с использованием прикладного пакета MATLAB. Лабораторный практикум: учебное пособие / Т.В. Ягодкина, С.А. Хризолитова, В.М. Беседин и др.- М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 80 с.

8. Основы теории управления. Лабораторный практикум: учебное пособие / С.А. Хризолитова, Т.В. Ягодкина, О.С. Колосов, О.А. Бондин. – М.: Издательский дом МЭИ. 2008. 72 с.
9. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.

3. Структурные схемы систем автоматического управления

(*знать*: элементы структурных схем, эквивалентные передаточные функции соединений динамических звеньев, правила преобразования структурных схем; *уметь*: строить структурные схемы по линейным дифференциальным уравнениям, описывающим системы; *владеть*: приемами преобразования структурных схем.)

Структурная схема – это графическое представление систем в виде соединения динамических звеньев.

3.1 Элементы структурных схем

Динамическое звено (рис.3.1)

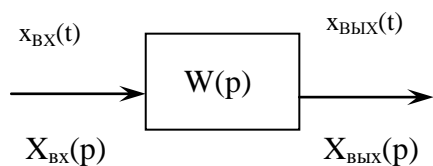


Рис.3.1. Динамическое звено

$$W(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}(p)} \quad X_{вых}(p) = W(p)X_{вх}(p)$$

Линия связи

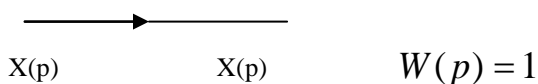


Рис.3.2. Линия связи

Сумматор

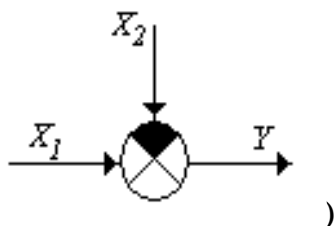


Рис.3.3. Сумматор

Узел ветвления – это точка, из которой сигнал передается на другие участки схемы

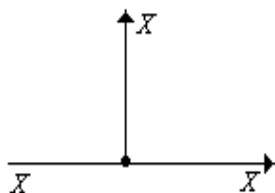


Рис.3.4. Узел ветвления

3.2 Соединение динамических звеньев

Последовательное соединение – такое, при котором выходы предыдущих звеньев подаются на входы последующих. Соединение может быть представлено структурной схемой (для простоты изобразим соединение из 3-х звеньев):

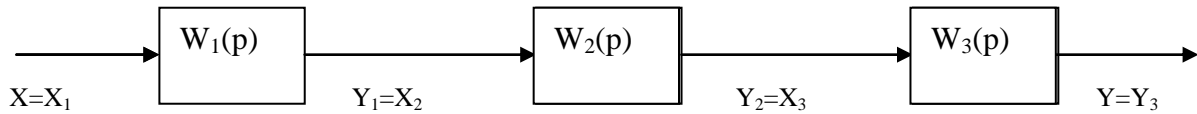


Рис.3.5. Последовательное соединение звеньев

Для получения эквивалентной передаточной функции запишем выражение для выходного сигнала соединения:

$$Y(p) = W_3(p)X_3 = W_3(p)W_2(p)X_2 = W_3(p)W_2(p)W_1(p)X_1 = W_3(p)W_2(p)W_1(p)X$$

$$W_{\text{экв}}(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

где n число последовательно соединенных динамических звеньев.

Правило: При последовательном соединении передаточные функции перемножаются.

Параллельное соединение – такое, при котором на входы динамических звеньев поступает один и тот же входной сигнал, а выходы звеньев суммируются. Соединение может быть представлено структурной схемой (для простоты изобразим соединение из 3-х звеньев):

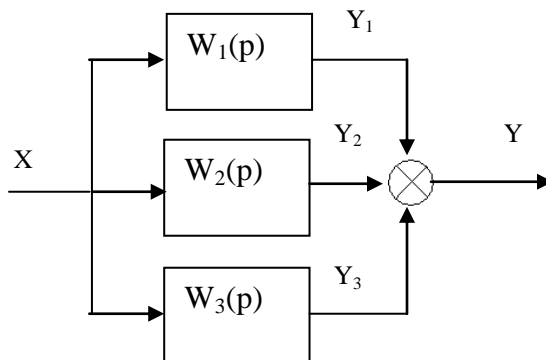


Рис.3.6. Параллельное соединение звеньев

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)X(p) = X(p) \sum_{i=1}^n W_i(p) \quad W_{\text{экв}}(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

Правило: При параллельном соединении передаточные функции складываются.

Соединение с обратной связью

ПС – прямая связь от входа к выходу по направлению передачи сигнала;

ОС – обратная связь от выхода ко входу по линии передачи (по стрелке).

Для определения эквивалентной передаточной функции запишем соотношения, связывающие сигналы в схеме.

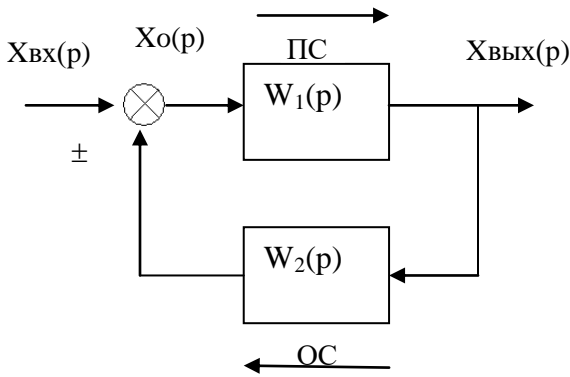


Рис.3.7. Соединение с обратной связью (+ положительная обратная связь, - - отрицательная)

Сумматор: $X_o = X_{\text{вх}} \pm Z$

Динамическое звено $W_1(p)$: $X_{\text{вых}} = W_1(p)X_o$

Динамическое звено $W_2(p)$: $Z = W_2(p)X_{\text{вых}}$

Подставляя первое и последнее выражение во второе, получим:

$$X_{\text{вых}} = W_1(p)(X_{\text{вх}} \pm Z) = W_1(p)(X_{\text{вх}} \pm W_2(p)X_{\text{вых}})$$

Из соотношения следует $X_{\text{вых}}(1 \mp W_1(p)W_2(p)) = W_1(p)X_{\text{вх}}$, откуда

$$W_{\text{экв}}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$$

Таким образом, эквивалентная передаточная функция соединения с обратной связью равна дроби, в числителе которой записывается передаточная функция прямой связи, а в знаменателе $1 \mp$ произведение передаточных функций в контуре обратной связи. (- соответствует положительной обратной связи, а + - отрицательной).

Для приведенной схемы, воспользовавшись правилом, запишем передаточную функцию от сигнала ошибки (или отклонения) системы ко входному сигналу, учитывая, что в прямой цепи

лежит линия связи с передаточной функцией 1, в контуре обратной связи оказываются два последовательно соединенных звена. Таким образом, $W_o(p) = \frac{X_o(p)}{X_{ex}(p)} = \frac{1}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$.

При этом знак «плюс» в знаменателе соответствует отрицательной обратной связи, а «минус» - положительной обратной связи.

Пример построения структурной схемы

Построим структурную схему генератора постоянного тока, описываемого системой дифференциальных уравнений:

$$1') \Delta e_B(t) = R_B \Delta i_B(t) + \omega_B \frac{d\Delta \Phi_B(t)}{dt}$$

$$2') \Delta \Phi_B = a \Delta i_B ;$$

$$3') \Delta e_\Gamma(t) = C_\Gamma \Delta \Phi_B(t)$$

Преобразуя уравнения по Лапласу, получим:

$$E_\delta(p) = R_\delta I_\delta(p) + w_\delta p \Phi_\delta(p)$$

$$\Phi_\delta(p) = a I_\delta(p)$$

$$E_\gamma(p) = c \Phi_\delta(p)$$

Проходя от входного сигнала ко входному, построим структурную схему:

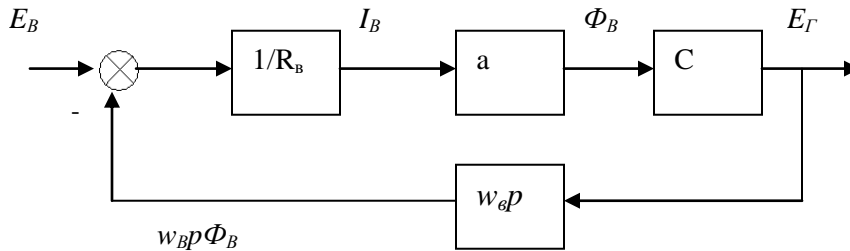


Рис.3.8. Структурная схема ГПТ

Записывая эквивалентные передаточные функции, получаем:

$$W_{ГПТ}(p) = \frac{a/R_\delta}{1 + a/R_\delta \cdot w_\delta \cdot p} = \frac{k}{1 + pT}, \text{ где } k = a/R_\delta, \quad T = a/R_\delta \cdot w_\delta.$$

3.3 Правила преобразования структурных схем

Предназначены для преобразования сложных многосвязных структурных схем в простые одноконтурные, для которых легко записать передаточные функции, связывающие выходные и входные сигналы системы. Критерием правильности переноса является неизменность входных и выходных сигналов схемы.

1. Перенос динамического звена через узел может производиться *По* и *Против*

направления передачи сигнала:

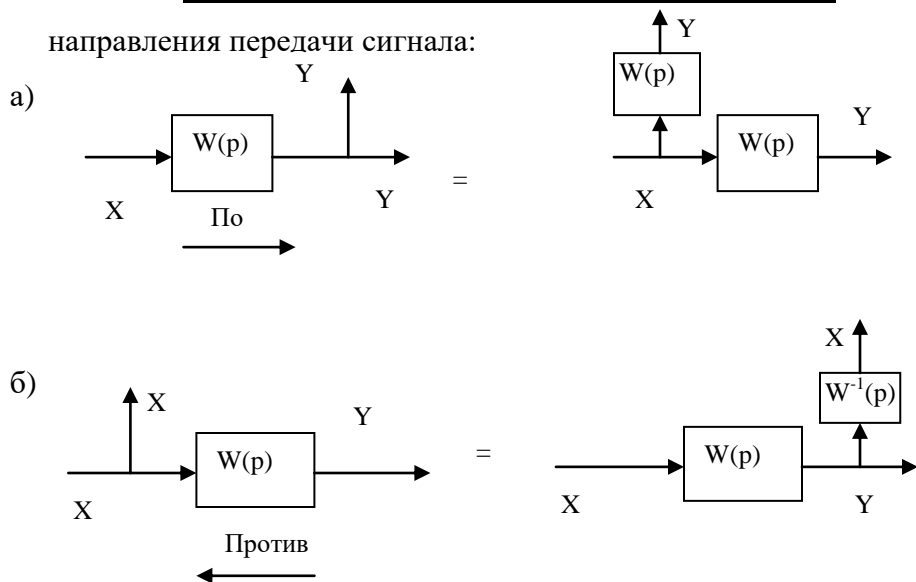


Рис.3.9. Пример переноса динамического звена через узел

Правило: при переносе динамического звена через узел *По/Против* направления передачи сигнала в отходящую от узла ветвь следует добавить динамическое звено с *Прямой/Обратной* передаточной функцией переносимого динамического звена.

2. Перенос динамического звена через сумматор *По/Против* направления передачи

сигнала:

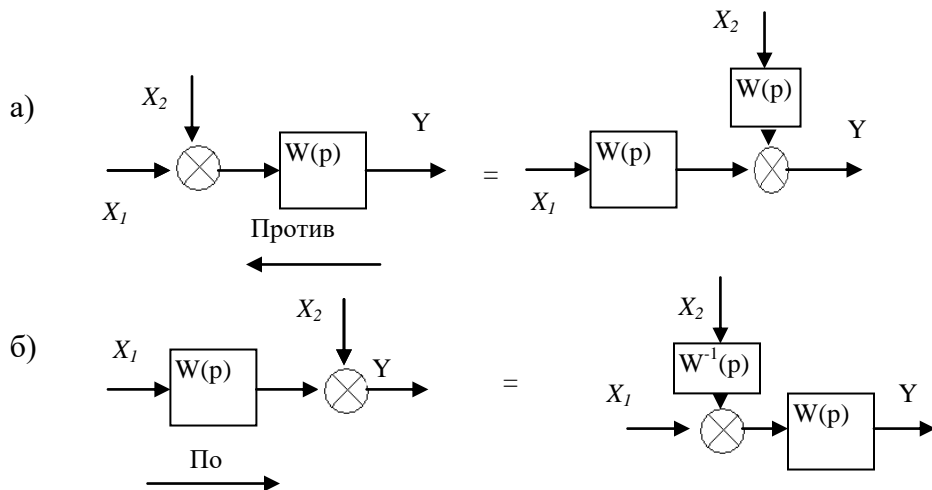


Рис.3.10. Пример переноса динамического звена через сумматор

Правило: при переносе динамического звена через сумматор *Против/По* направлению передачи сигнала в подходящую к сумматору ветвь следует добавить звено с передаточной функцией *Прямой/Обратной* передаточной функции переносимого динамического звена

3. Перенос сумматора через узел:

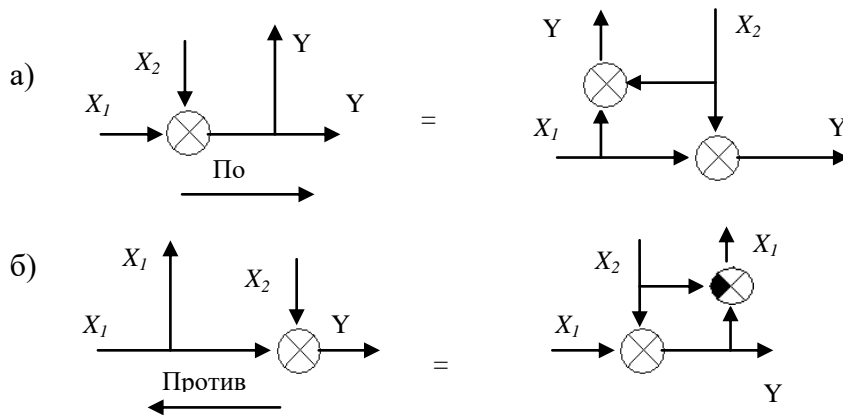


Рис.3.11. Пример переноса сумматора через узел

Правило: При переносе сумматора через узел *По/Против* направления передачи сигнала в подходящую к сумматору ветвь следует добавить сумматор со знаком, *Совпадающим/Несовпадающим* со знаком переносимого сумматора.

3.4 Пример преобразования структурной схемы

Заданы дифференциальные уравнения, описывающие систему:

1. $X_0 = X_{вх} - X_{вых}$
2. $T_1 \frac{dX_1}{dt} + X_1 = k_1 \frac{dX_0}{dt}$
3. $T_2^2 \frac{d^2 X_2}{dt^2} + 2\xi T_2 \frac{dX_2}{dt} + X_2 = k_2 X_0$
4. $X_4 = k_4 (X_1 + X_2 - X_5 - X_B)$
5. $T_3 \frac{dX_3}{dt} + X_3 = k_3 \left(\frac{dX_1}{dt} + X_1 \right)$
6. $\frac{dX_{вых}}{dt} = k_6 (X_3 + X_4)$
7. $X_5 = k_5 X_{вых}$

Имея в виду, что дифференциальные уравнения описаны таким образом, что в левой их части записываются выходные сигналы элементов схем, а в правой части – входные сигналы, преобразуем дифференциальные уравнения по Лапласу и найдем передаточные функции.

- 1) –ое уравнение соответствует сумматору;

$$2) (T_1 p + 1)X_1 = k_1 X_0 \Rightarrow W_1(p) = \frac{X_1}{X_0} = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$$

$$3) (T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 + 1)X_2 = k_2 X_0 \Rightarrow W_2(p) = \frac{X_2}{X_0} = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 + 1}$$

$$4) W_4(p) = \frac{X_4}{X_1 + X_2 - X_5}$$

$$5) (T_3 p + 1)X_3 = k_3(p + 1)X_1 \Rightarrow W_3(p) = \frac{X_3}{X_1} = \frac{k_3(p + 1)}{T_3 p + 1}$$

$$6) pX_{\text{вх}} = k_6(X_3 + X_4) \Rightarrow W_6(p) = \frac{X_{\text{вх}}}{X_3 + X_4} = \frac{k_6}{p}$$

$$7) X_5 = k_5 X_{\text{вх}} \Rightarrow W_5(p) = \frac{X_5}{X_{\text{вх}}} = k_5.$$

Построим структурную схему, соответствующую найденным передаточным функциям:

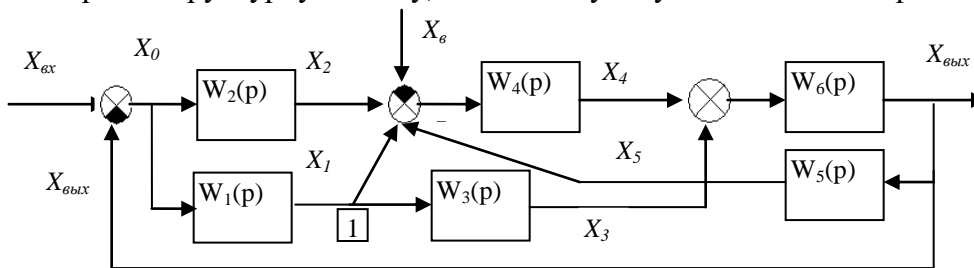


Рис.3.12. Исходная структурная схема системы

Для преобразования схемы произведем ряд действий:

А) перенесем звено $W_1(p)$ через $\boxed{1}$ по направлению передачи сигнала, при этом в отходящую от узла ветвь добавляем звено с передаточной функцией $W_1(p)$:

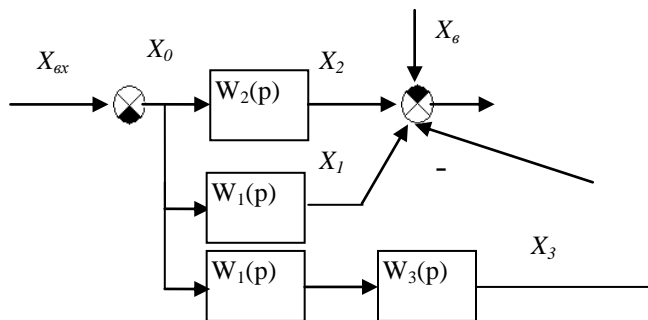


Рис.3.13а. Преобразованная часть структурной схемы

Б) Заменяем параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p) + W_2(p)$;

В) Заменяем последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_3(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p) \cdot W_3(p)$;

В результате этого получим структурную схему в виде:

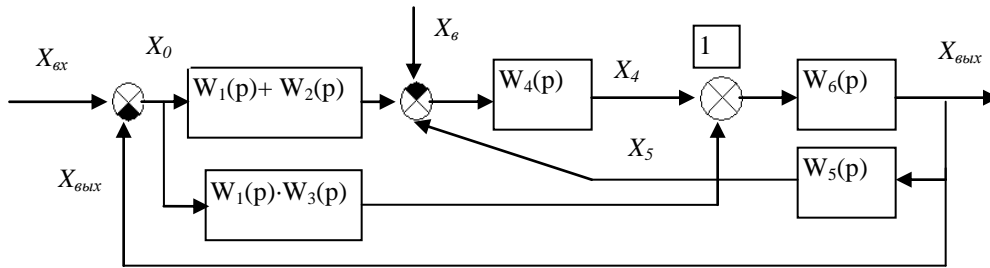


Рис.3.136. Преобразованная структурная схема

Г) Перенесем динамическое звено $W_4(p)$ через сумматор 1 по направлению передачи сигнала и, следовательно, добавим к ветви, подходящей к сумматору звено с обратной передаточной функцией переносимого звена $W_4(p)$, т.е. получим схему, представленную ниже:

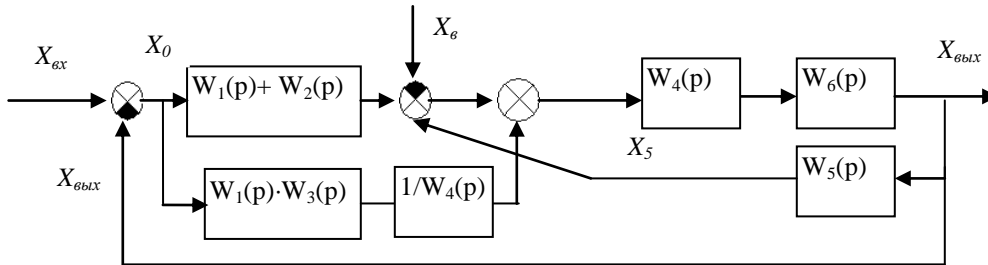


Рис.3.13в. Преобразованная структурная схема

Д) Объединяем сумматоры, заменяем последовательно соединенные звенья $W_4(p)$ и $W_6(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_4(p) \cdot W_6(p)$; заменяем последовательно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p) \cdot W_3(p)$ и $\frac{1}{W_4(p)}$ эквивалентным

звеном с передаточной функцией $\frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)}$; При этом получаем структурную схему в виде:

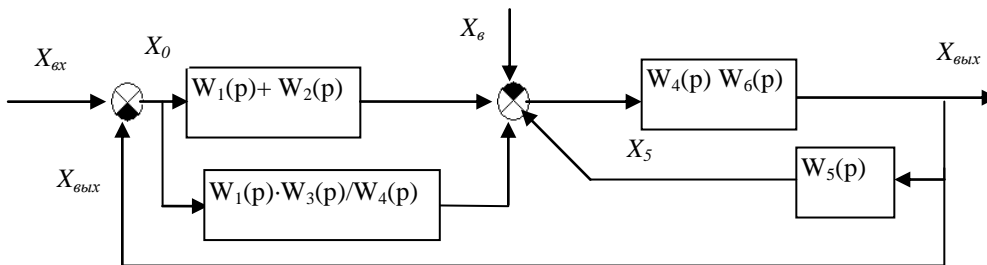


Рис.3.13г. Преобразованная структурная схема

ж) Заменяем параллельно соединенные звенья с передаточными функциями $W_1(p) + W_2(p)$ и $\frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)}$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_I(p) = W_1(p) + W_2(p) + \frac{W_1(p)W_3(p)}{W_4(p)}$;

з) Заменяем соединение с обратной связью звеньев с передаточными функциями: $W_4(p) \cdot W_6(p)$ и $W_5(p)$ эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_{II}(p) = \frac{W_4(p) \cdot W_6(p)}{1 + W_4(p) \cdot W_6(p) \cdot W_5(p)}$.

Таким образом, в результате получаем структурную схему:

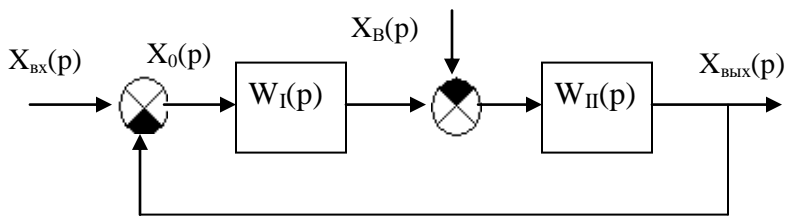


Рис.3.13д. Преобразованная структурная схема

Приведенная выше структурная схема является *типовой схемой* системы автоматического управления.

3.5 Передаточные функции разомкнутых и замкнутых САУ

Приведем еще раз *типовую* структурную схему систем автоматического управления и запишем передаточные функции, связывающие ее входные и выходные сигналы.

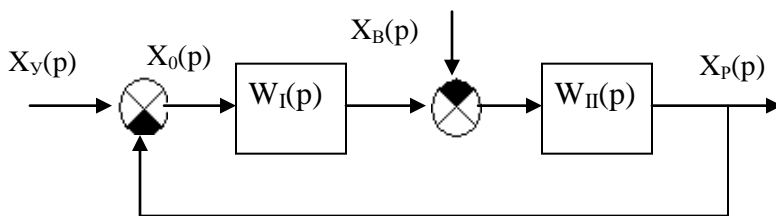


Рис.3.14. типовая структурная схема системы автоматического регулирования

На схеме: X_p - регулируемая величина;

X_y - управляющее воздействие;

X_o - сигнал ошибки, или отклонения;

$X_в$ - возмущающее воздействие.

Представленная типовая система является линейной, для которой выполняется принцип суперпозиции, означающей, что реакция на сумму входных сигналов является суммой реакций на каждое входное воздействие, т.е.

$$X_p(p) = X_p^y(p) + X_p^e(p),$$

$X_p^y(p)$ - реакция системы на управляющее воздействие;

$X_p^e(p)$ - реакция системы на возмущающее воздействие.

$$X_o(p) = X_o^y(p) + X_o^e(p), \text{ где}$$

$X_o^y(p)$ - ошибка при воздействии на входе управляющего воздействия;

$X_o^e(p)$ - ошибка при воздействии на входе возмущающего воздействия.

Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию :

$$W_p^y(p) = \frac{X_p}{X_o} = W_I(p) \cdot W_{II}(p)$$

Передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$W_p^e(p) = \frac{X_p}{X_e} = -W_{II}(p);$$

Передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию:

$$W_3^y(p) = \frac{X_p^y}{X_y} = \frac{W_I(p) \cdot W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_p^y(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$W_3^e(p) = \frac{X_p^e}{X_e} = \frac{-W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_p^e(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция ошибки по управлению (для замкнутой системы):

$$W_o^y(p) = \frac{X_o^y}{X_y} = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{1}{1 + W_p^y(p)}$$

Передаточная функция ошибки по возмущению (для замкнутой системы):

$$W_o^e(p) = \frac{X_o^e}{X_e} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)}$$

Поскольку для выходного сигнала справедливо соотношение $X_p(p) = X_p^y(p) + X_p^e(p)$

то можно записать $X_p(p) = W_3^y(p)X_y(p) + W_3^e(p)X_e(p)$, т.е.

$$X_p(p) = \frac{W_I(p) \cdot W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) - \frac{W_{II}(p)}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_e(p), \text{ откуда можно получить}$$

выходной сигнал замкнутой системы $x_p(t) = L^{-1}\{X_p(p)\}$.

Аналогично, для сигнала ошибки: $X_o(p) = X_o^y(p) + X_o^e(p) \Rightarrow$

$$X_o(p) = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) + \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} X_e(p) \text{ и для сигнала ошибки:}$$

$$x_o(t) = L^{-1}\{X_o(p)\}.$$

3.6 Выводы

Системы автоматического управления можно представить соединением динамических звеньев, т.е. структурной схемой, состоящей из элементов, представленных в разделе 3.1. Динамические звенья могут быть соединены различным образом: последовательно, параллельно, с обратной связью. В разделе 3.2 представлены виды соединений и приведены их эквивалентные передаточные функции. Сложные системы автоматического управления представляются в виде многоконтурных схем, для анализа которых необходимо определить передаточные функции, связывающие выходные и входные сигналы, что требует преобразования структурных схем, правила которых представлены в разделе 3.3. Пример преобразования схемы приведен в разделе 3.4. В результате преобразований сложную многоконтурную схему можно преобразовать в простую одноконтурную (*типовую*), для которой по формулам, представленным в разделе 3.5, легко записать передаточные функции.

3.7 Вопросы

1. Что такое структурная схема системы автоматического управления.
2. Перечислите элементы структурных схем и дайте их характеристики.

3. Какое соединение называется последовательным и какова его эквивалентная передаточная функция.
4. Какое соединение называется параллельным и какова его эквивалентная передаточная функция.
5. Какое соединение называется соединением с обратной связью.
6. Выведите эквивалентную передаточную функцию соединения с обратной связью.
7. Сформулируйте критерий проверки правильности структурных преобразований.
8. Сформулируйте правило переноса динамического звена через узел ветвления (по и против направления передачи сигнала). Приведите пример.
9. Сформулируйте правило переноса динамического звена через сумматор (по и против направления передачи сигнала). Приведите пример.
10. Сформулируйте правило переноса сумматора через узел ветвления (по и против направления передачи сигнала). Приведите пример.
11. Какая структурная схема называется типовой.
12. Запишите передаточные функции, связывающие выходной сигнал типовой структурной схемы X_p со входным X_y .
13. Запишите передаточные функции, связывающие типовой структурной схемы X_o со входным X_y .
14. Запишите передаточные функции, связывающие выходной сигнал типовой структурной схемы X_p с сигналом возмущения X_v .
15. Запишите передаточные функции, связывающие сигнал отклонения (ошибки) типовой структурной схемы X_o с сигналом возмущения X_v .

3.8 Задания

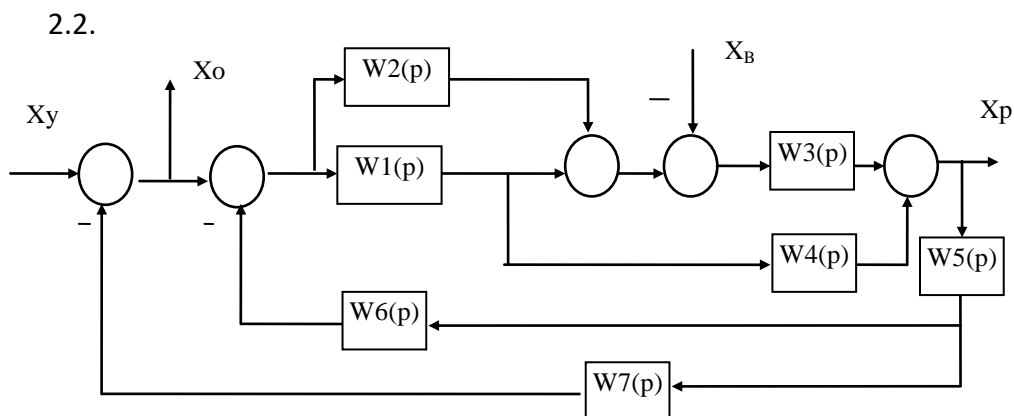
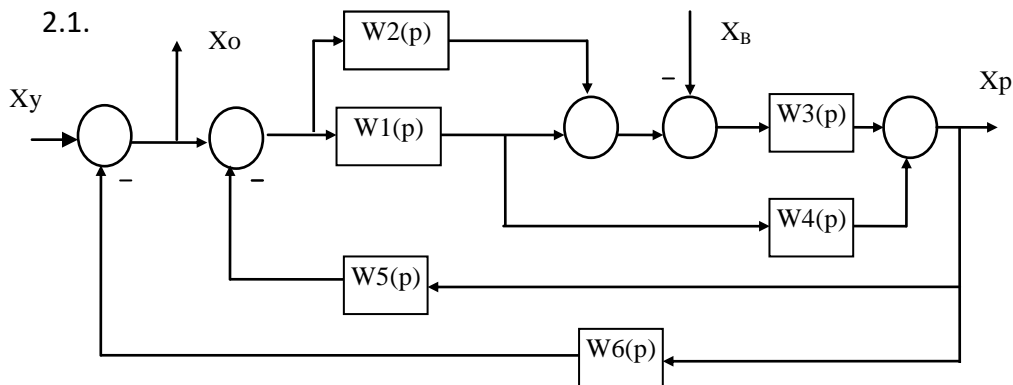
1. Построить структурную схему по заданной системе дифференциальных уравнений, описывающих элементы системы.

| | |
|---|---|
| <p>1.1</p> $\begin{cases} T_1 \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_1(x_{\delta x} - x_{\delta b l x}) \\ T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_2\delta \\ \frac{dx_3}{dt} = k_3\delta \\ \frac{dx_{\delta b l x}}{dt} = k_4(x_2 + x_3 - x_5) \\ x_5 = k_5 x_{\delta b l x} \\ T_1 = 0,01 \quad T_2 = 0,1 \\ k_1 = 5 \quad k_2 = 10 \quad k_3 = 0,5 \quad k_4 = 7 \quad k_5 = 3 \end{cases}$ | <p>1.2</p> $\begin{cases} T_1 \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_1(x_{\delta x} - x_4) \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2(\delta - x_3) \\ x_3 = k_3 x_2 \\ T_4 \frac{dx_{\delta b l x}}{dt} + x_{\delta b l x} = k_4 x_2 \\ x_4 = x_{\delta b l x} + x_2 \\ T_1 = 0,01 \quad T_4 = 0,25 \\ k_1 = 5 \quad k_2 = 10 \quad k_3 = 0,5 \quad k_4 = 7 \end{cases}$ |
| <p>1.3</p> $\begin{cases} \delta = x_{\delta x} - x_{\delta b l x} - x_5 \\ T_1^2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\xi T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 \delta \\ x_2 = k_2 x_1 \\ x_3 = k_3 x_1 \\ x_{\delta b l x} = x_2 + x_3 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 x_{\delta b l x} \\ T_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = k_5 x_4 \\ T_1 = 1 \quad T_4 = 0,1 \quad T_5 = 0,2 \quad \xi = 0,5 \\ k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 10 \quad k_4 = 1,5 \quad k_5 = 5 \end{cases}$ | <p>1.4</p> $\begin{cases} \delta = x_{\delta x} - x_{\delta b l x} \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1(\delta - x_2) \\ x_2 = k_2 x_1 \\ T_3^2 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2\xi T_3 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = k_3 x_1 \\ x_{\delta b l x} = x_4 + x_5 \\ x_5 = k_5 x_3 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 x_3 \\ T_1 = 1 \quad T_3 = 2 \quad T_4 = 0,1 \quad \xi = 0,5 \\ k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 10 \quad k_4 = 1,5 \quad k_5 = 5 \end{cases}$ |

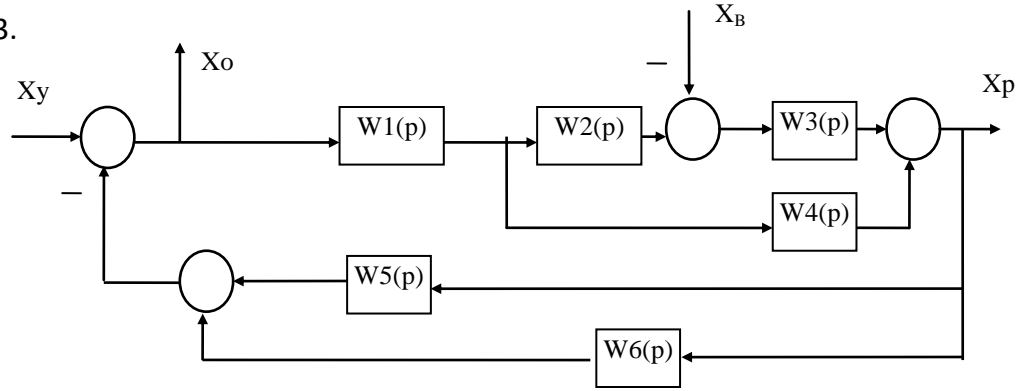
| | |
|---|---|
| <p>1.5</p> $\left\{ \begin{array}{l} \delta = X_{\text{ax}} - X_{\text{bbx}} \\ \frac{dx_2}{dt} = \delta - x_3 \\ x_3 = k_3 x_1 \\ T_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} = k_1 (\delta - x_3) \\ x_5 = k_5 x_1 \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 x_1 \\ T_6 \frac{dx_6}{dt} + x_6 = k_6 (x_4 + x_5) \\ T_7 \frac{dx_7}{dt} = x_2 + x_6 \\ x_{\text{bbx}} = x_8 + x_7 \\ x_8 = k_8 (x_2 + x_6) \end{array} \right.$ <p>$T_1 = 0,2 \quad T_4 = 2 \quad T_6 = 5 \quad T_7 = 0,5$ $k_1 = 2 \quad k_3 = 5 \quad k_4 = 0,75 \quad k_5 = 0,1 \quad k_6 = 3 \quad k_8 = 1$</p> | <p>1.6</p> $\left\{ \begin{array}{l} \delta = x_{\text{ax}} - x_6 \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 (\delta - x_2) \\ T_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_1 \\ T_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt} = k_3 x_1 \\ T_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = k_5 x_3 \\ x_6 = k_6 x_{\text{bbx}} \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 x_3 \\ x_{\text{bbx}} = x_4 + x_5 \\ T_1 = 2 \quad T_2 = 1 \quad T_3 = 0,1 \quad T_4 = 0,75 \quad T_5 = 0,3 \\ k_1 = 3 \quad k_2 = 5 \quad k_3 = 2 \quad k_4 = 4 \quad k_5 = 1,5 \quad k_6 = 0,1 \end{array} \right.$ |
| <p>1.7</p> $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = k_1 (x_{\text{bx}} - x_7) \\ T_2 \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_2 x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = k_3 \delta \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 \delta \\ T_6 \frac{dx_6}{dt} + x_6 = k_6 \delta \\ x_{\text{bbx}} = x_5 + x_6 \\ x_5 = k_5 (x_3 + x_4) \\ T_7 \frac{dx_7}{dt} + x_7 = k_7 x_{\text{bbx}} \\ T_2 = 0,1 \quad T_4 = 0,25 \quad T_6 = 1 \quad T_7 = 0,3 \quad k_7 = 2 \\ k_1 = 5 \quad k_2 = 10 \quad k_3 = 0,5 \quad k_4 = 7 \quad k_5 = 3 \quad k_6 = 1,5 \end{array} \right.$ | <p>1.8</p> $\left\{ \begin{array}{l} \delta = x_{\text{ax}} - x_6 \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 \delta \\ T_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_1 \\ T_3 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = k_3 x_1 \\ x_{\text{bbx}} = x_4 + x_5 \\ x_5 = k_5 (x_2 + x_3) \\ T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = k_4 \cdot (x_1 + x_2) \\ x_6 = k_6 x_{\text{bbx}} \\ T_1 = 1 \quad T_2 = 0,5 \quad T_3 = 2 \quad T_4 = 0,1 \\ k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 10 \quad k_4 = 1,5 \quad k_5 = 5 \quad k_6 = 0,5 \end{array} \right.$ |

| | |
|---|--|
| <p>1.9</p> $\begin{cases} T_1 \frac{dx_1}{dt} = k_1(x_{\text{вх}} - x_7) \\ T_2 \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_2 x_1 \\ T_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \frac{dx_3}{dt} = k_3 \delta \\ x_{\text{вх}} = x_5 + x_6 \\ x_4 = k_4 \delta \\ x_5 = k_5 \delta \\ T_6 \frac{dx_6}{dt} + x_6 = k_6(x_3 + x_4) \\ T_7 \frac{dx_7}{dt} + x_7 = k_7 x_{\text{вх}} \end{cases}$ <p>$T_1 = 0,1 \quad T_2 = 2 \quad T_3 = 0,25 \quad T_6 = 0,2 \quad T_7 = 1,5 \quad k_7 = 4$ $k_1 = 2 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 0,75 \quad k_4 = 0,5 \quad k_5 = 1,5 \quad k_6 = 5$</p> | <p>1.10</p> $\begin{cases} \delta = x_{\text{вх}} - x_6 \\ T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 \delta \\ x_2 = k_2 x_1 \\ x_4 = k_4 x_1 \\ T_3^2 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2\zeta T_3 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = k_3(x_2 + x_4) \\ T_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = k_5 \delta \\ x_{\text{вх}} = x_3 + x_5 \\ T_6 \frac{dx_6}{dt} + x_6 = k_6 x_{\text{вх}} \end{cases}$ <p>$T_1 = 2 \quad T_3 = 0,1 \quad T_5 = 0,3 \quad T_6 = 0,5$ $k_1 = 3 \quad k_2 = 5 \quad k_3 = 2 \quad k_4 = 4 \quad k_5 = 1,5 \quad k_6 = 0,1$</p> |
|---|--|

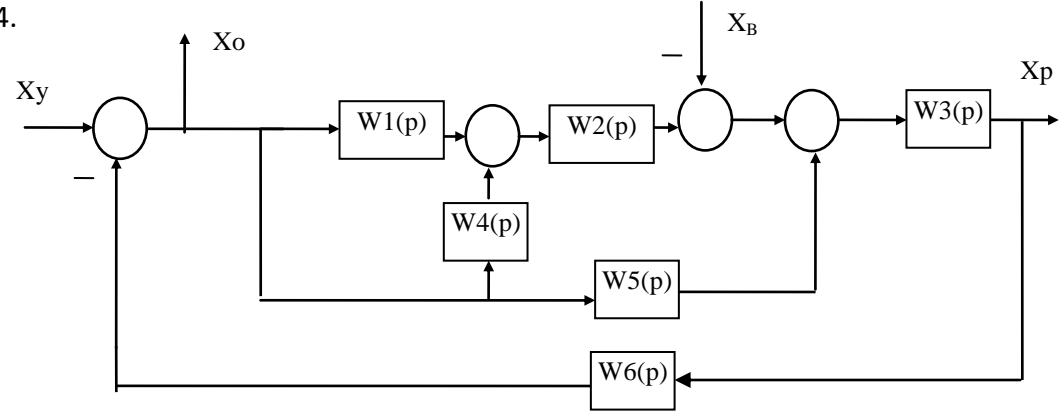
2. Преобразовать структурные схемы и найти передаточные функции: $\frac{X_p}{X_y}, \frac{X_p}{X_B}, \frac{X_o}{X_y}, \frac{X_o}{X_B}$.



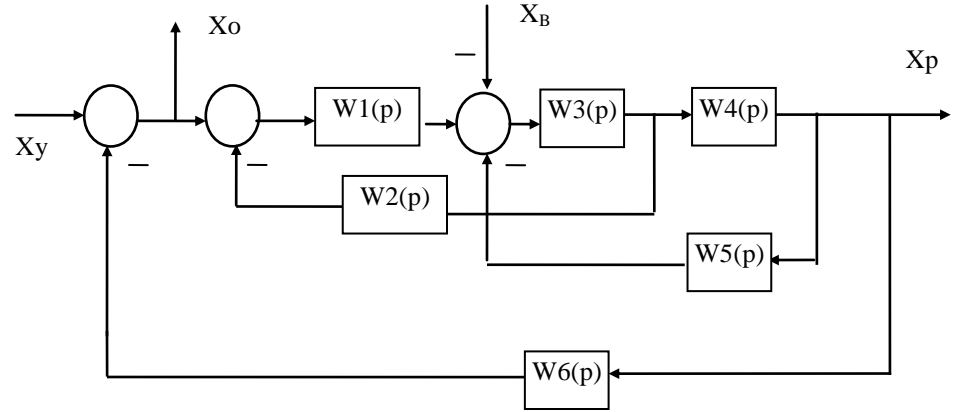
2.3.



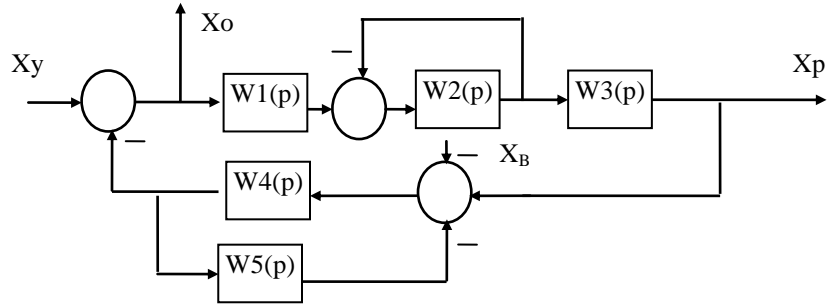
2.4.



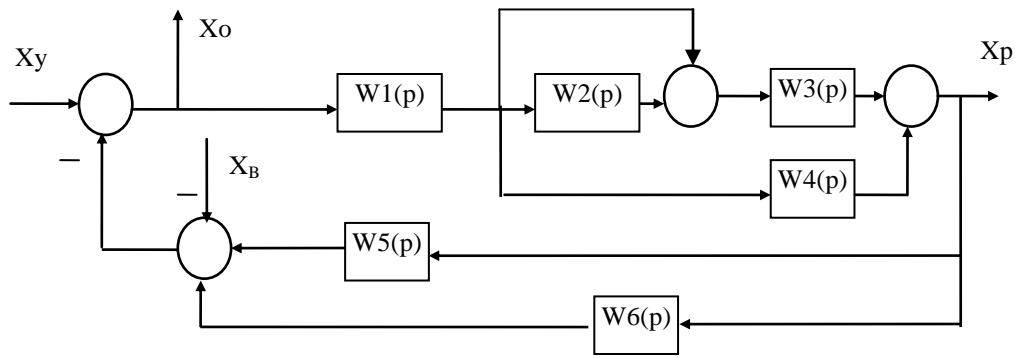
2.5.



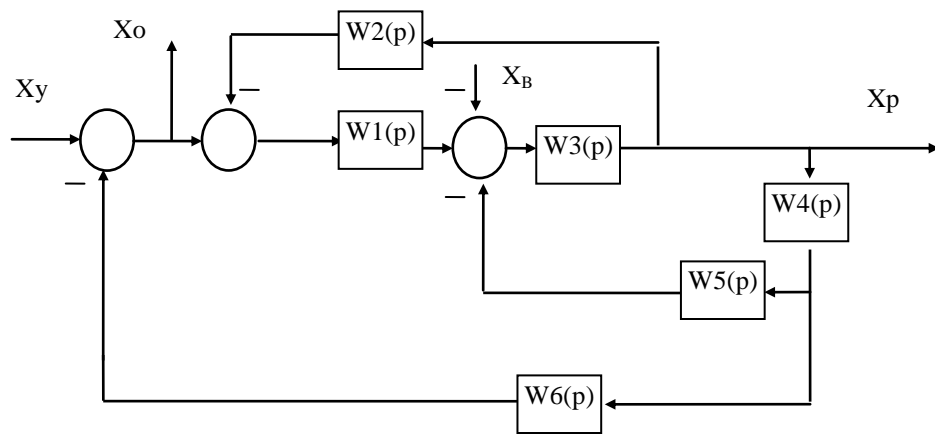
2.6.



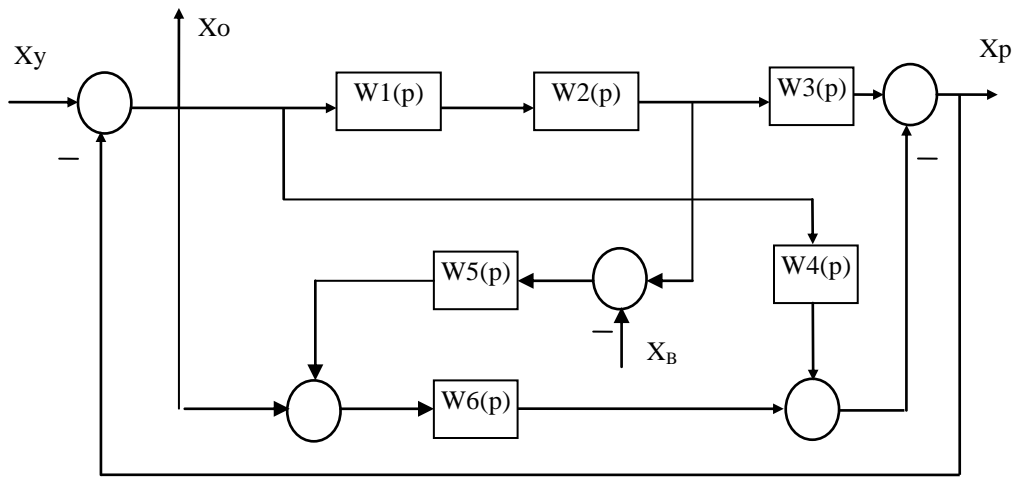
2.7.



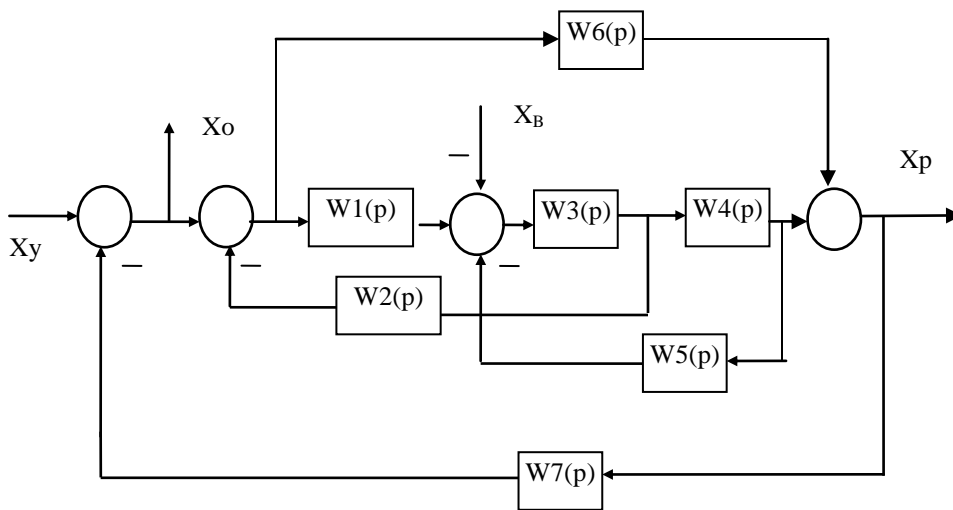
2.8.



2.9.



2.10.



3.9 Практикум по главе 3

1. Построить структурную схему по заданной системе дифференциальных уравнений, описывающих элементы системы:

$$T_1^2 \frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2\xi T_1 \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_1(x_{ex} - x_{ввх}) \quad (1)$$

$$x_2 = k_2 \delta \quad (2)$$

$$x_3 = k_3 \delta \quad (3)$$

$$T_4 \frac{dx_{ввх}}{dt} + x_{ввх} = k_4(x_2 + x_3 - x_5) \quad (4)$$

$$x_5 = k_5 x_{ввх} \quad (5)$$

$$T_1 = 0,1 \quad T_4 = 1 \quad \xi = 0,5$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 0,75 \quad k_4 = 0,5 \quad k_5 = 1,5$$

Преобразуя уравнения (1) – (5) по Лапласу, получим:

$$(T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1)\delta(p) = k_1(x_{ex}(p) - x_{ввх}(p)) \quad (1a)$$

$$x_2(p) = k_2 \delta(p) \quad (2a)$$

$$x_3(p) = k_3 \delta(p) \quad (3a)$$

$$(T_4 p + 1)x_{ввх}(p) = k_4(x_2(p) + x_3(p) - x_5(p)) \quad (4a)$$

$$x_5(p) = k_5 x_{\text{вых}}(p) \quad (5a).$$

Вспомоная правило записи дифференциальных уравнений, описывающих элементы систем автоматического уравнения (справа – входной сигнал с производными, слева – входной сигнал с производными), запишем передаточные функции элементов:

$$W_1(p) = \frac{\delta(p)}{x_{\text{вх}}(p) - x_{\text{вых}}(p)} = \frac{k_1}{T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1} \quad (1b)$$

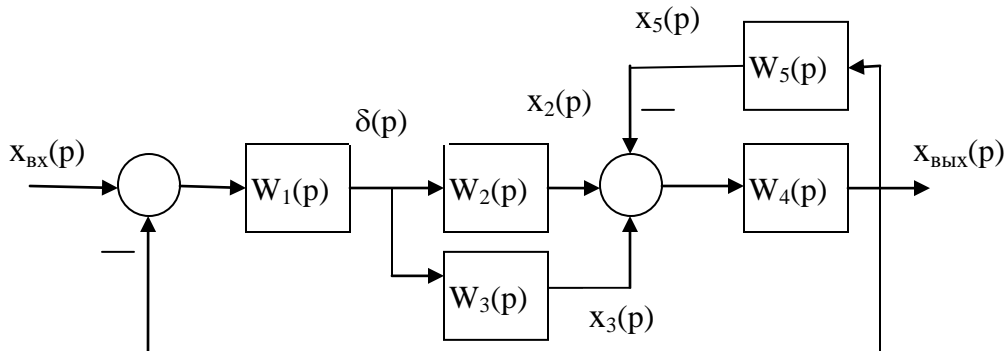
$$W_2(p) = \frac{x_2(p)}{\delta(p)} = k_2 \quad (2b)$$

$$W_3(p) = \frac{x_3(p)}{\delta(p)} = k_3 \quad (3b)$$

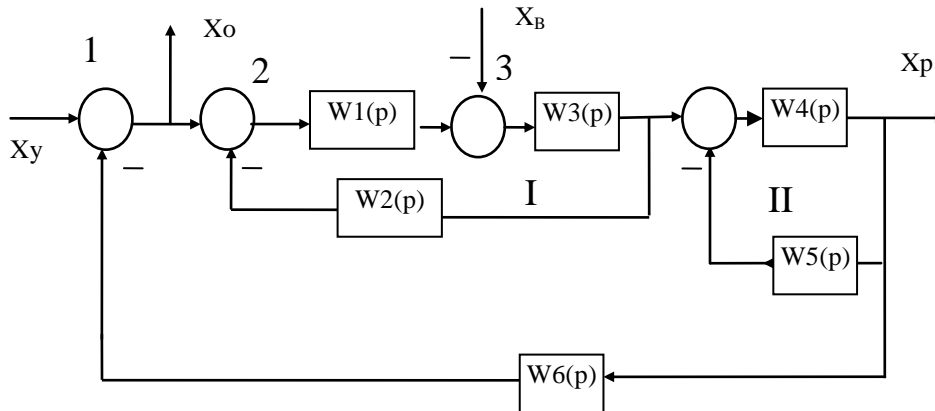
$$W_4(p) = \frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_2(p) + x_3(p) - x_5(p)} = \frac{k_4}{T_4 p + 1} \quad (4b)$$

$$W_5(p) = \frac{x_5(p)}{x_{\text{вых}}(p)} = k_5 \quad (5b)$$

Строим структурную схему, имея в виду расположение входного сигнала слева, а выходного – справа в системе. Таким образом, из уравнения (1a) следует, что на вход звена (1b) поступает разность двух сигналов ($x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}}$), получаемая на выходе первого сумматора; сигнал с выхода звена (1b) подается на звено (2b) и (3b); сумма сигналов $x_2 + x_3 - x_5$ поступает на вход второго сумматора, с выхода сумматора снимается сигнал $x_{\text{вых}}$, подаваемый на вход первого сумматора и на вход звена (5b):

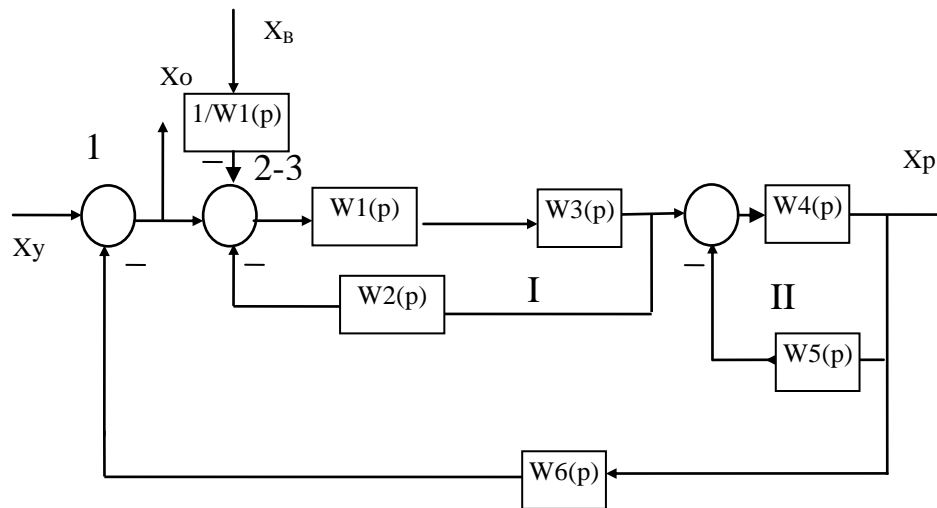


2. Преобразовать структурную схему и найти передаточные функции: $\frac{X_p}{X_y}$, $\frac{X_p}{X_B}$, $\frac{X_o}{X_y}$, $\frac{X_o}{X_B}$.



Обозначим сумматоры, узлы и контуры обратной связи, которые мы будем использовать при структурных преобразованиях и нанесем их на исходную схему.

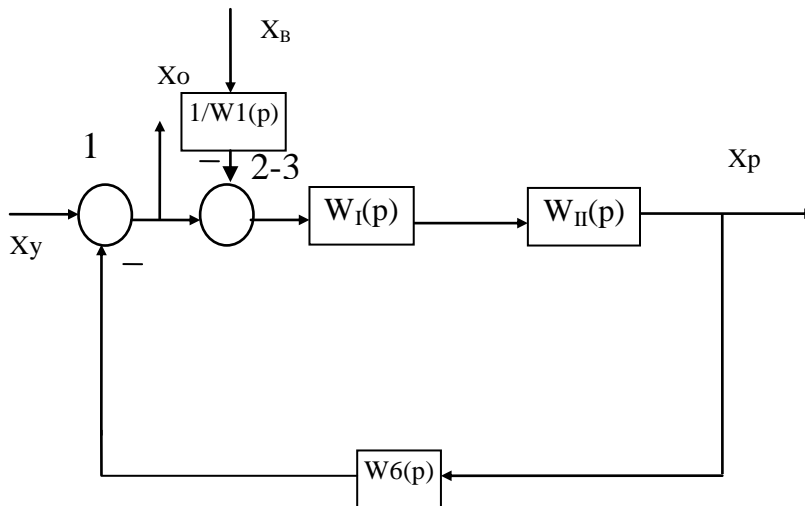
2.1. Перенесем динамическое звено $W1(p)$ через сумматор 3 по направлению передачи сигнала. При этом в прямой цепи сигнал не изменится, а сигнал возмущения X_B пройдет дополнительно через последовательно соединенные звенья $W1(p)$ и $W3(p)$. Для того чтобы сигнал не изменился, его надо пропустить через звено с передаточной функцией, обратной, т.е. через $1/W1(p)$. Объединив два последовательно стоящие сумматора 2 и 3, получим:



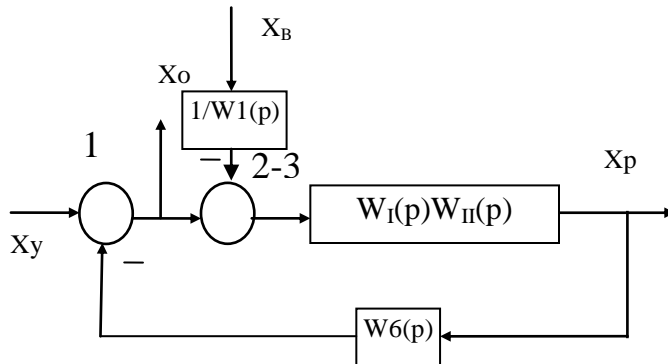
Заменим последовательно стоящие звенья $W1(p)$ и $W3(p)$ эквивалентным звеном $W1(p)W3(p)$, соединение **I** и **II** эквивалентными звеньями с передаточными функциями:

$$W_I(p) = \frac{W1(p)W3(p)}{1 + W1(p)W2(p)W3(p)} \text{ и } W_{II}(p) = \frac{W4(p)}{1 + W4(p)W5(p)}$$

Изобразим полученную структурную схему:



Объединив последовательно соединенные звенья $W_I(p)$ и $W_{II}(p)$, получим эквивалентное звено с передаточной функцией $W_I(p)W_{II}(p)$ и изобразим структурную схему в виде:



Для полученной схемы можно записать требуемые передаточные функции:

$$\frac{X_p}{X_y} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)}{1 + W_I(p)W_{II}(p)W_6(p)} = \frac{\frac{W_1(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} \cdot \frac{W_4(p)}{1 + W_4(p)W_5(p)}}{1 + \frac{W_1(p)W_3(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)} \cdot \frac{W_4(p)}{1 + W_4(p)W_5(p)} \cdot W_6(p)} = \frac{W_1(p)W_3(p)W_4(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_6(p)}$$

$$\frac{X_p}{X_B} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)}{1 + W_I(p)W_{II}(p)W_6(p)} \cdot \left(-\frac{1}{W_1(p)}\right) = \frac{-W_3(p)W_4(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_6(p)}$$

$$\frac{X_o}{X_y} = \frac{1}{1 + W_I(p)W_{II}(p)W_6(p)} =$$

$$= \frac{(1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p))(1 + W_4(p)W_5(p))}{(1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)) \cdot (1 + W_4(p)W_5(p)) + (W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_6(p))}$$

$$\frac{X_o}{X_B} = \frac{W_I(p)W_{II}(p)W_6(p)}{1 + W_I(p)W_{II}(p)W_6(p)} \cdot \frac{1}{W_1(p)} = \frac{W_3(p)W_4(p)W_6(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_6(p)}$$

3.10. Список литературы

1. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
2. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Автоматическое управление», Звенья. Структурные преобразования, Чхартишвили Л.П., Беседин В.М., – М.: Моск.энерг.ин-т, 1987. – 42с.
3. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. - М.: Изд-во МЭИ, 1992, 103 с.
4. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Бондин О.А. Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления. Учеб. Пос. по курсу "Основы теории управления".- М.: Изд-во МЭИ, 2004, - 64 с.
5. Исследование САУ с использованием прикладного пакета МАТЛАВ. Лабораторный практикум: учебное пособие / Т.В. Ягодкина, С.А. Хризолитова, В.М. Беседин и др.- М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 80 с.
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.

4. Устойчивость систем автоматического управления

(знать: основные понятия и критерии устойчивости линейных систем; уметь: применять тот или иной критерий устойчивости в зависимости от поставленной задачи и имеющихся в наличии средств решения задачи; владеть: особенностями применения критериев устойчивости для минимально – и не минимально фазовых систем и систем, нейтральных в разомкнутом состоянии.)

4.1. Понятие устойчивости систем.

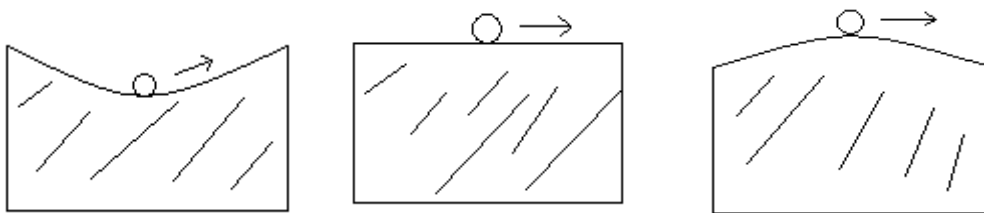
4.1.1. Устойчивость положения равновесия

Устойчивой называется система, которая возвращается в исходное положение после снятия кратковременного воздействия.

Система называется нейтрально устойчивой, если после снятия кратковременного воздействия она занимает новое положение равновесия.

Система неустойчивая, если после снятия кратковременного воздействия она уходит от положения равновесия.

Это можно продемонстрировать на примере механической системы: шарика на поверхностях разного профиля.



Устойчивая система

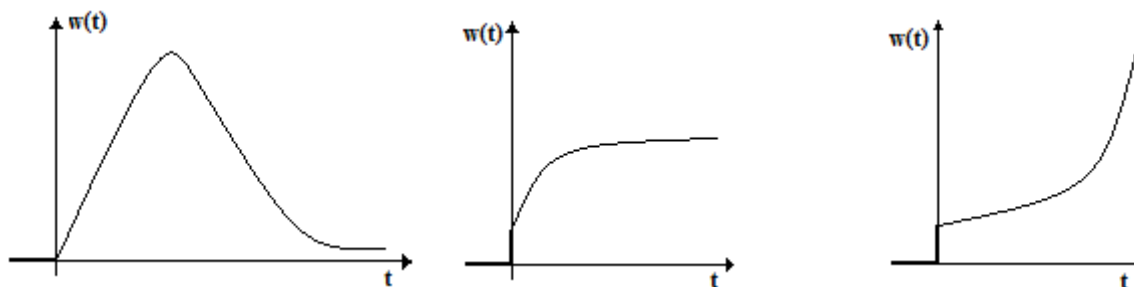
Нейтральная система

Неустойчивая система

Рис.4.1. Понятие устойчивости механической системы

Устойчивость системы – необходимое условие для качественной работы автоматической системы.

Кратковременным воздействием можно считать $\delta(t)$ -функцию Дирака, реакцией на которую является весовая функция системы $w(t)$. Таким образом, по поведению весовой функции можно судить об устойчивости системы. Продемонстрируем это на примерах поведения весовых функций систем



Устойчивая система

Нейтрально устойчивая

Неустойчивая система

Рис.4.2. Понятие устойчивости на примере поведения весовых функций САУ

4.1.2. Устойчивость процесса

Если входной сигнал, действующий на САУ, изменяется во времени, то нет смысла говорить о положении равновесия, а нужно говорить об устойчивости процессов, протекающих в системе. Если входной сигнал при описании линейной одномерной системы (разд. 2.1) $u(t) = x_{\text{вх}}(t)$, имеет изображение по Лапласу $X_{\text{вх}}(p) = L\{x_{\text{вх}}(t)\} = \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{p-q_i}$ то $Y(p) = W(p) \cdot X_{\text{вх}}(p)$, где $W(p)$ – передаточная функция системы, которую можно представить дробно-рациональной функцией $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p-p_i} = L\{\sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}\}$. ($p_i, i = 1, \dots, n$ – полюса передаточной функции системы; $q_i, i = 1, \dots, N$ – полюса изображения входного сигнала).

Реакцию системы на входной сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ можно найти как обратное преобразование Лапласа $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\{W(p) \cdot X_{\text{вх}}(p)\} =$

$$= \{L^{-1}\{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p-p_i} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{d_j}{p-q_j}\}\} = L\{\frac{\sum_{j=1}^{n+N} a_j p^j}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)(p-q_1)(p-q_2)\dots(p-q_N)}\} = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t).$$

$y_{\text{св}}(t)$ – свободная составляющая, определяемая полюсами передаточной функцией системы;

$y_{\text{вын}}(t)$ – вынужденная составляющая, определяемая полюсами изображения входного сигнала.

С точки зрения протекающего в системе процесса, устойчивость означает затухание со временем свободной составляющей, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(t) = 0$.

4.2. Необходимые и достаточные условия устойчивости систем

Рассмотрим необходимые и достаточные условия устойчивости системы, описываемой передаточной функцией: $W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$, весовая функция которой имеет вид:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p)}{A'(p)} \Big|_{p_i} e^{p_i t} + h(0)\delta(t)$$

Из формулы разложения для весовой функции видно, что устойчивость зависит от положения корней характеристического полинома $A(p)$, которое, в общем виде, можно представить в виде диаграммы:

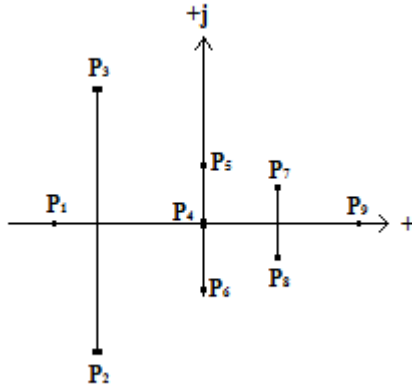


Рис.4.3. Возможное расположение полюсов передаточной функции САУ

Представив весовую функцию в виде суммы весовых функций, определяемых корнями различного вида:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

Рассмотрим вклад 7-го и 8-го корня в весовую функцию системы, поскольку это расположение является наиболее общим и из него можно получить все остальные составляющие приравниванием нулю тех или других параметров корней:

$p_{7,8} = \alpha \pm j\beta$. Следует отметить, что коэффициенты $C_{7,8}$ являются комплексно

сопряженными, которые в общем виде можно представить в виде: $\gamma \pm j\delta$. Тогда

$$w_{7,8} = C_7 e^{p_7 t} + C_8 e^{p_8 t} = (\gamma + j\delta) e^{(\alpha + j\beta)t} + (\gamma - j\delta) e^{(\alpha - j\beta)t} = |C_{7,8} = \gamma \pm j\delta|$$

$$= (\gamma + j\delta) e^{\alpha t} (\cos\beta t + j\sin\beta t) + (\gamma - j\delta) e^{\alpha t} (\cos\beta t - j\sin\beta t)$$

$$w_{7,8} = e^{\alpha t} 2(\gamma \cos\beta t - \delta \sin\beta t) = e^{\alpha t} 2\sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \cos\beta t - \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \sin\beta t \right)$$

$$= 2e^{\alpha t} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$1. \quad p_1 = -\alpha; \quad \beta = 0;$$

$$w_1(t) = C_1 e^{-\alpha t}$$

$$2,3. \quad p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$$

$$w_{2,3}(t) = C_{2,3} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$4. \quad p_4 = 0; \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0$$

$$w_4(t) = C_4$$

$$5,6. \quad p_{5,6} = \pm j\beta; \quad \alpha = 0$$

$$w_{5,6}(t) = C_{5,6} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$7,8. w_{7,8}(t) = C_{7,8} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$9. p_9 = +\alpha$$

$$w_9(t) = C_9 e^{\alpha t}$$

Представим вклад каждой составляющей весовой функции в весовую функцию системы в целом (рис.4.4):

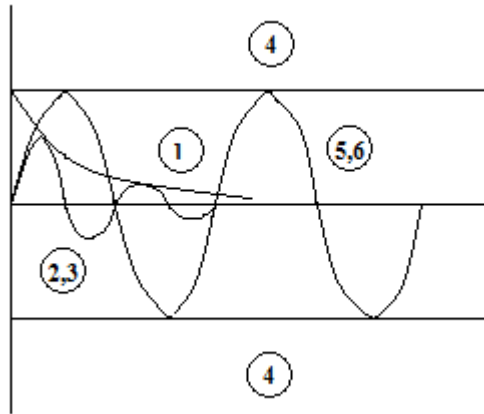


Рис. 4.4а. Устойчивые и нейтральные составляющие весовой функции

Таким образом, 1,2,3 составляющие являются устойчивыми;

4,5,6 – нейтральными.

Из рисунка видно, что

- для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни её характеристического полинома лежали в левой части комплексной плоскости.
- Система является чисто нейтральной, если корни её характеристического полинома лежат на мнимой оси.
- Система является нейтрально устойчивой, если корни её характеристического полинома лежат в левой части комплексной плоскости и на мнимой оси.

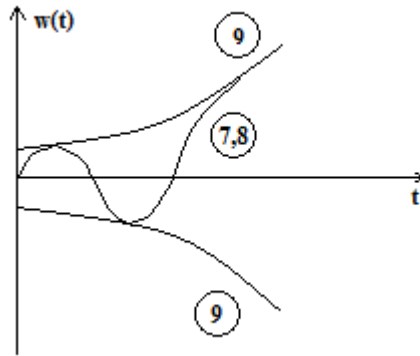


Рис. 4.46. Неустойчивые составляющие весовой функции

Из рисунка видно, что система неустойчива, если хотя бы один корень характеристического полинома лежит в правой части комплексной плоскости.

4.3. Критерии устойчивости

Критерии позволяют исследовать устойчивость системы по её некоторым характеристикам. Известны алгебраические и частотные критерии устойчивости.

- 1) Алгебраические (Гурвица, Рауса, D-разбиения).
- 2) Частотные (Михайлова, Найквиста, логарифмический).

4.3.1. Критерий устойчивости Гурвица.

Позволяет следить за устойчивостью системы по коэффициентам её характеристического полинома.

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & a_1 & a_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

По главной диагонали записываются коэффициенты характеристического полинома, начиная с a_1 . Выше главной диагонали индексы коэффициентов увеличиваются, ниже – уменьшаются. Коэффициенты с несуществующими индексами записываются как – “0”. Из главного определителя формируются определители меньшего порядка выделением строк и столбцов в левом верхнем углу главного определителя Гурвица, а именно:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель можно найти разложением главного определителя Гурвица по последнему столбцу:

$$\Delta_n = a_1 * \Delta_{n-1}.$$

Сформулируем критерий устойчивости Гурвица:

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы a_0 и Δ_i были одного и того же знака ($i=1 \div n$) (для определённости >0).

Система неустойчива, если хотя бы один определитель Гурвица <0 .

Система нейтральна, если последний определитель $= 0$, что может произойти при двух условиях: $\Delta_n = 0$ при $a_n = 0, \Delta_{n-1} = 0$. В первом случае говорят, что система находится на границе апериодической устойчивости, а во втором – колебательной.

Частные случаи (1-й, 2-й и 3-й порядки).

1. $n=1$

$$A_1(p) = a_0 p + a_1$$

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$a_0 > 0 \quad a_1 > 0$$

2. $n=2$

$$A_2(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2$$

$$\Delta_1 = |a_1|$$

$$a_0, a_1, a_2 > 0.$$

Таким образом, система 1-го и 2-го порядка устойчива, если коэффициенты характеристического полинома положительны.

3. $n=3$

$$A_3(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = |a_1| > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Условие устойчивости системы 3-го порядка $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ и $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, т.е. все коэффициенты характеристического уравнения положительные и второй определитель Гурвица больше нуля.

Задача. Для САУ, структурная схема которой представлена на рис.4.5. найти предельный коэффициент усиления

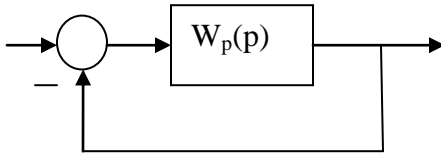


Рис.4.5. Структурная схема замкнутой САУ

Предельным называется такой коэффициент усиления разомкнутой системы, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости – $K_{пред}$. Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)}.$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы и запишем ее характеристический полином:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{\frac{k}{\text{O}(\text{O})\text{O}}}{1+\frac{k}{\text{O}(\text{O})\text{O}}} = \frac{k}{(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)+k}$$

$$A_3(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k$$

$$A_3(p) = T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + k + 1$$

$$\text{где } a_0 = T_1 T_2 T_3, a_1 = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3), a_3 = k.$$

Запишем определитель Гурвица, выделим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков и запишем для них условия устойчивости:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = |a_1| > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \quad a_0 > 0$$

$$a_i > 0, \quad i=1 \div 3$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$(k + 1) T_1 T_2 T_3 < (T_1 + T_2 + T_3)(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)$$

$$k < T_1 T_2 T_3 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1 = K_{пред}.$$

Проанализируем полученное выражение:

- 1) $K_{пред}$ не изменится, если постоянные времени умножить или разделить на одно и то же число.
- 2) Устойчивость не зависит от размерности постоянных времени.
- 3) Наихудшая ситуация для устойчивости, когда $T_1 = T_2 = T_3$:
- $$3T \left(\frac{3}{T} \right) - 1 = 8 = K_{пред \min}$$
- 4) Наиболее устойчивой является система, у которой постоянные времени сильно различаются.

4.3.2. Принцип аргумента.

Принцип аргумента лежит в основе частотных критериев устойчивости.

Пусть известен характеристический полином исследуемой системы:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

Где p_1, p_2, \dots, p_n - корни характеристического полинома.

Рассмотрим поведение характеристического полинома на комплексной плоскости, заменив p на $j\omega$: $A(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)$ и рассмотрим поведение его аргумента:

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) \text{ (в предположении, что } a_0 > 0 \text{)}.$$

Из полученного выражения можно записать изменение аргумента:

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i)$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

В принципе аргумента исследуется, каково будет приращение аргумента вектора $A(j\omega)$ при различном расположении корней p_1, p_2, \dots, p_n .

Рассмотрим возможное расположение корней на комплексной плоскости (рис.4.6) в предположении, что l корней лежит справа от мнимой оси, а $n-l$ - слева:

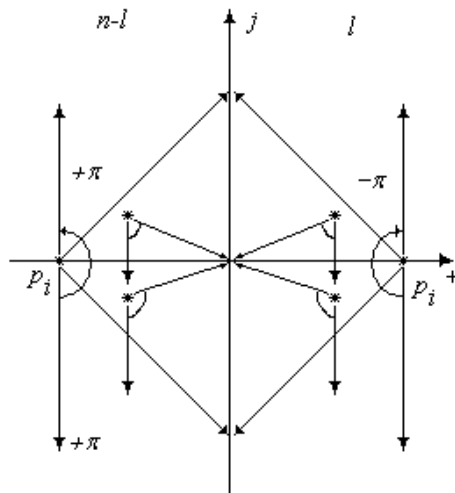


Рис.4.6. Изменение положение векторов $j\omega - p_i$ на комплексной плоскости

Таким образом, $n-l$ векторов повернулись на угол $+\pi$ при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ и l векторов – на угол $-\pi$, т.е.

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) = (n-l)\pi + l(-\pi) = (n-2l)\pi ;$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg A(j\omega) = a_0 \sum_{i=1}^n \Delta \arg(j\omega - p_i) = (n-l)\frac{\pi}{2} + l(-\frac{\pi}{2}) = (n-2l)\frac{\pi}{2} .$$

$$0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

4.3.3. Критерий устойчивости Михайлова

Является геометрической интерпретацией принципа аргумента и определяет условие устойчивости системы, т.е. отсутствие корней характеристического полинома в правой части комплексной плоскости ($l=0$). Таким образом, для устойчивой системы справедливо равенство:

$$\Delta \arg A(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

Продemonстрируем, как должен вести себя годограф Михайлова (геометрическое место точек конца вектора $A(j\omega)$ при изменении частоты в диапазоне $0 \leq \omega < \infty$) для устойчивой системы (рис.4.7).

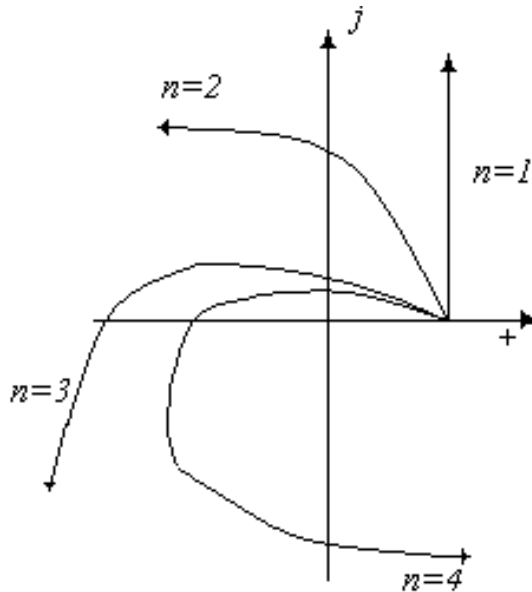


Рис.4.7. Примеры годографов Михайлова устойчивых систем

Таким образом, в соответствии с критерием Михайлова система устойчива, если годограф $A(j\omega)$ при изменении частот в диапазоне $0 \leq \omega < \infty$, начинаясь на действительной положительной оси, обходит последовательно n квадрантов, где n - порядок характеристического полинома исследуемой системы.

4.3.4. Критерий устойчивости Найквиста

Позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно – фазовой характеристике разомкнутой системы (годографу Найквиста), которая к тому же может быть построена экспериментально.

Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой системы в виде: $W_p(p) = \frac{B(p)}{C(p)}$, где

$B(p)$ - полином степени m , а $C(p)$ - степени n . При этом из условия физической реализуемости $m \leq n$. Передаточную функцию можно записать в виде

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{B(p)}{B(p) + C(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}, \text{ где } A(p) \text{ - характеристический полином}$$

замкнутой системы степени n .

$$\text{Введем в рассмотрение функцию } F(p) = 1 + W_p(p) = 1 + \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{A(p)}{C(p)}.$$

Таким образом, функция $F(p)$ связывает характеристические полиномы замкнутой и разомкнутой систем порядков, равных n . Применим к функции $F(p)$ принцип аргумента:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg A(j\omega) - \Delta \arg C(j\omega)$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

Критерий Найквиста определяет условия устойчивости замкнутой системы, т.е. такие, при которых в характеристическом полиноме замкнутой системы $A(p)$ нет корней, лежащих в правой части комплексной плоскости. Тогда

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l))\pi = l \cdot 2\pi$$

$$-\infty < \omega < \infty$$

Или

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l))\frac{\pi}{2} = \frac{l}{2} \cdot 2\pi$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

На этих равенствах основан критерий Найквиста. Рассмотрим его частные случаи:

1. Критерий устойчивости Найквиста для устойчивой в разомкнутом состоянии системы

($C(p)$ не имеет правых корней, $l=0$).

В этом случае для устойчивой замкнутой системы справедливо равенства:

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - n)\pi = 0 \quad \Delta \arg F(j\omega) = (n - n)\frac{\pi}{2} = 0$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad 0 \leq \omega < \infty$$

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае (рис.4.8):

1. Изменения аргумента вектора I равны нулю, следовательно, замкнутая система, соответствующая построенному вектору, устойчива.
2. Изменения аргумента вектора II равны -2π , следовательно, замкнутая система, соответствующая построенному вектору, неустойчива.

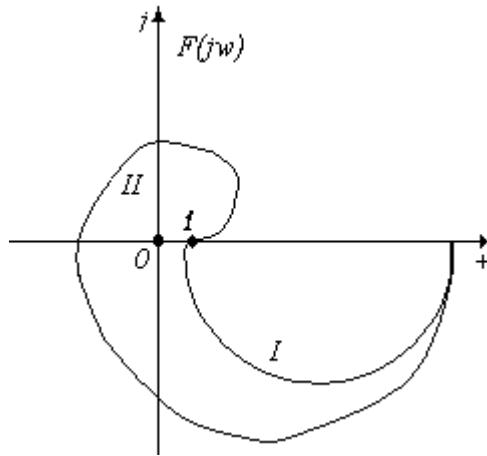


Рис. 4.8. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞

Следует отметить, что более естественно определять устойчивость замкнутой системы не по $F(j\omega)$, а по годографу Найквиста разомкнутой системы $W_p(j\omega)$. В этом случае изменения аргумента следует рассматривать относительно точки с координатами $(-1;j0)$ (рис.4.9). В этом случае, годограф I не охватывает точку $(-1;j0)$ - замкнутая система устойчивая, а годограф II – охватывает – замкнутая система неустойчивая.

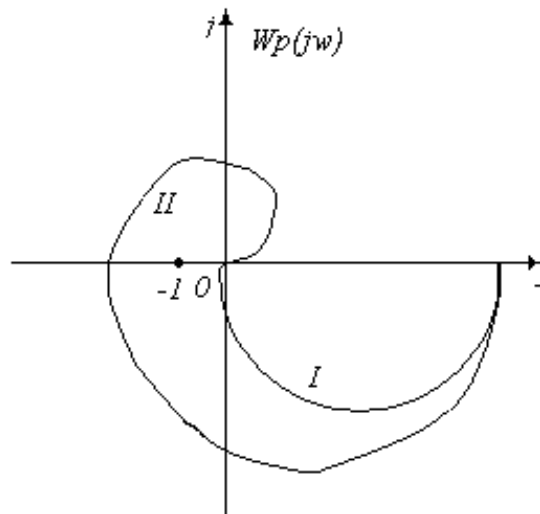


Рис. 4.9. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ .

Формулировка критерия Найквиста: Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы не охватывал точку с координатами $(-1;j0)$.

2. Критерий устойчивости Найквиста для неустойчивой в разомкнутом состоянии системы

В этом случае для устойчивой замкнутой системы справедливо равенства:

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l))\pi = l \cdot 2\pi$$

$$-\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - (n - 2l))\frac{\pi}{2} = \frac{l}{2} \cdot 2\pi$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае (рис.4.10):

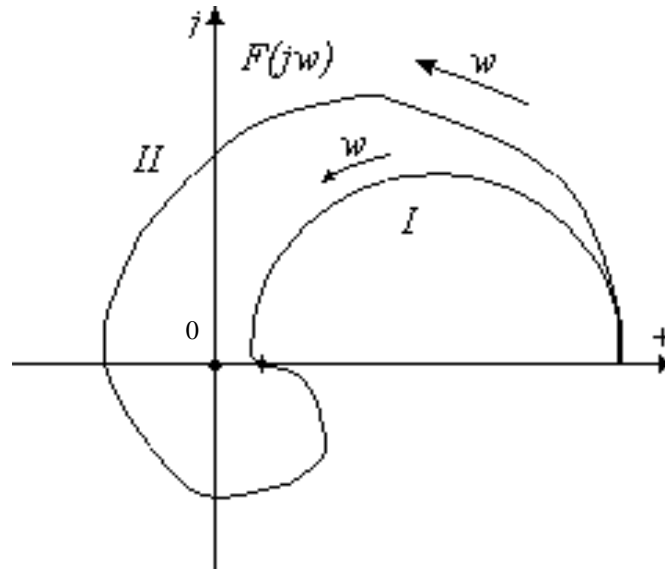


Рис.4.10. Поведение вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞

Рассмотрим, как должен вести себя вектор $F(j\omega)$ в этом случае:

1. Вектор I не охватывает точку 0, следовательно, при $l \neq 0$ замкнутая система неустойчива.
2. Вектор II охватывает точку 0 (аргумент изменяется на значение 2π при изменении частоты от 0 до ∞), следовательно, замкнутая система устойчива, если число корней характеристического полинома разомкнутой системы равно 2.

Более естественно определять устойчивость замкнутой системы не по $F(j\omega)$, а по годографу Найквиста разомкнутой системы $W_p(j\omega)$. В этом случае изменение аргумента следует рассматривать относительно точки с координатами $(-1; j0)$ (рис.4.11). В этом случае, годограф I не охватывает точку $(-1; j0)$ - замкнутая система неустойчивая, а годограф II – охватывает – замкнутая система устойчивая при количестве правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы, равном двум.

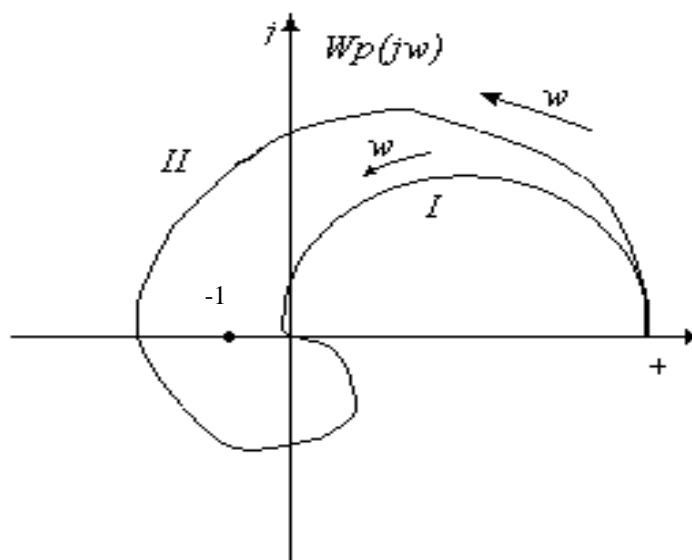


Рис.4.11. Поведение годографа Найквиста при изменении частоты от 0 до ∞

Формулировка критерия Найквиста: Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы охватывал точку с координатами $(-1, j0)$ l раз при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ или $l/2$ раз при изменении частоты от 0 до ∞ в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, где l – число корней характеристического полинома разомкнутой системы в правой части комплексной плоскости.

4.3.5. Примеры применения критерия Найквиста.

Для всех рассматриваемых систем предполагается следующая структурная схема:

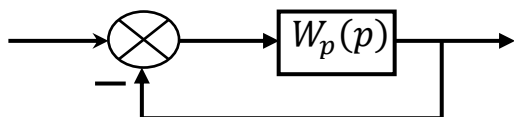


Рис.4.12. Структурная схема замкнутой системы

Пример 1. Разомкнутая система устойчива

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рисунке. $W_p(p) = \frac{K}{(pT_1+1)(pT_2+1)(pT_3+1)}$, $T_1 > T_2 > T_3$

Найдем полюса передаточной функции разомкнутой системы и построим амплитудную и фазовую частотные характеристики:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2} \sqrt{1+(\omega T_2)^2} \sqrt{1+(\omega T_3)^2}}$$

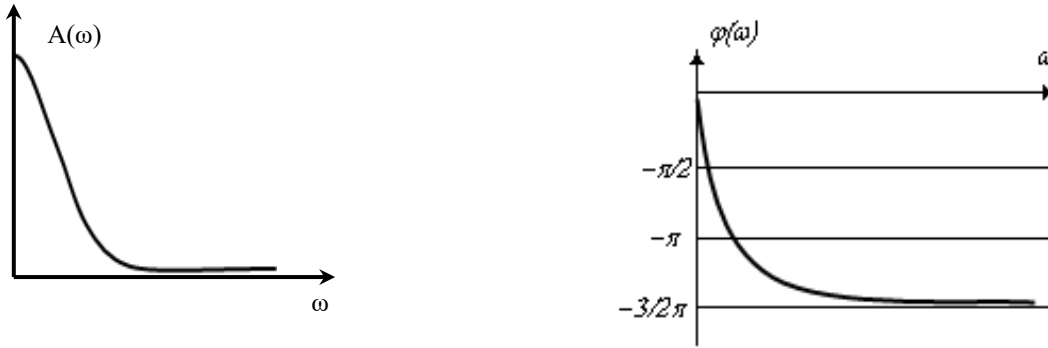


Рис.4.13. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Для построения годографа определим начальную и конечную точки годографа:

$$\omega = 0 \quad A(\omega) = K, \quad \varphi(\omega) = 0 \quad \omega = \infty \quad A(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

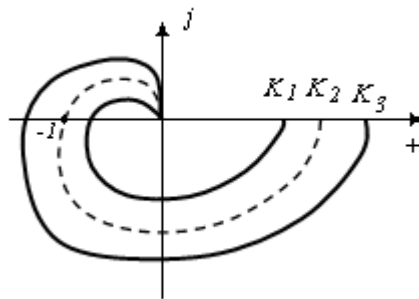


Рис.4.14. Годографы разомкнутых систем

K_1 - замкнутая система устойчива.

K_2 - замкнутая система неустойчива.

K_3 - замкнутая система на границе устойчивости.

Пример 2. Разомкнутая система неустойчивая.

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, имеющей один правый полюс:

$$W_p(p) = \frac{K}{(pT_1-1)(pT_2+1)(pT_3+1)}, T_1 > T_2 > T_3$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}, \quad l = 1$$

$$W_p(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1 - 1)(j\omega T_2 + 1)(j\omega T_3 + 1)} =$$

$$= \frac{K e^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j(\pi - \arctg(\omega T_1))} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} e^{j \arctg(\omega T_2)} \sqrt{1 + (\omega T_3)^2} e^{j \arctg(\omega T_3)}}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} \sqrt{1 + (\omega T_3)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3$$

Амплитудная частотная характеристика, как видно из выражения для $A(\omega)$, не изменилась, а фазовая частотная характеристика определяется множителем $j\omega T_1 - 1$, для которого можно записать амплитуду и фазу: $A = \sqrt{(\omega T_1)^2 + 1}$; $\varphi = \pi - \arctg \omega T_1$

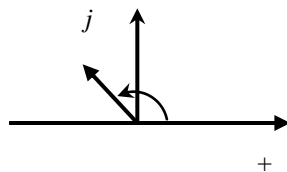
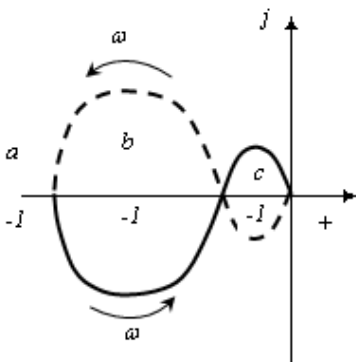


Рис.4.15. Положение вектора на комплексной плоскости

Построим годограф Найквиста и определим условия устойчивости замкнутой системы для трех случаев (a,b,c), т.е. для разных положений точки $(-1, j0)$:



- a) Замкнутая система неустойчива (критерий Найквиста).
- b) Замкнутая система устойчива.
- c) замкнутая система неустойчива (охватывает «-1» в положительном направлении).

Рис.4.16. Годограф Найквиста исследуемой системы

Пример 3. Разомкнутая система нейтрально устойчивая.

a) Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, имеющей **один полюс на оси ординат**:

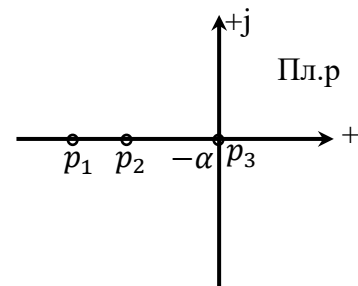


Рис.4.17. Положение полюсов $W_p(p)$

$$W_p(p) = \frac{K}{p(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad p_3 = 0$$

p_3 заменяем на маленький отрицательный полюс $-\alpha$:

$$W_p'(p) = \frac{K}{(p + \alpha)(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)} = \frac{K/a}{(\frac{p}{\alpha} + 1)(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$

$$W_p(p) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} W_p'(p)$$

$$W_p(j\omega) = \frac{K/a \cdot e^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j \arctg(\omega T_1)} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega T_3)^2} e^{j \frac{\pi}{2}}}$$

$$A_p(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}$$

$$\varphi_p(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

Построим амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой системы:

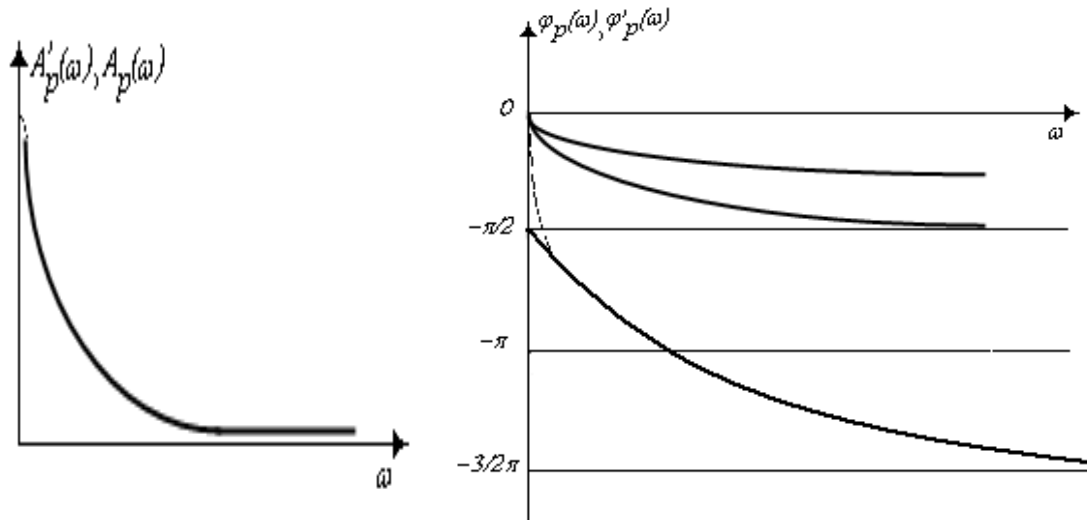


Рис.4.18. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

На рисунках пунктиром представлены части характеристик, относящиеся к $W_p'(j\omega)$.

Построим амплитудно – фазовую характеристику (годограф Найквиста) и определим устойчивость замкнутой системы

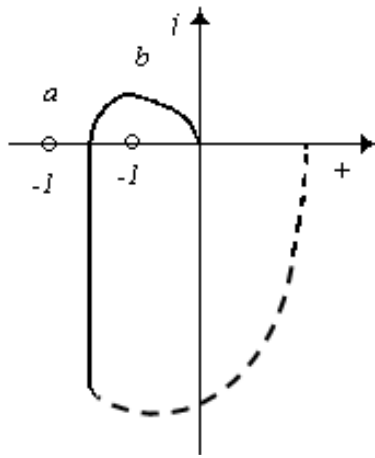
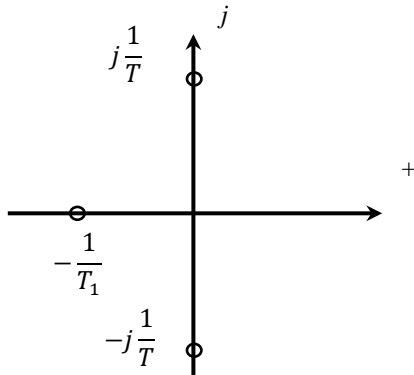


Рис.4.19. Годограф исследуемой системы

- а) – замкнутая система устойчива,
- в) – замкнутая система неустойчива.

б) Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $W_p(p)$, имеющей два полюса на оси ординат:



$$W_p(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + p^2T^2)}$$

Рис.4.20. Положение полюсов $W_p(p)$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} \quad p^2T^2 = -1 \quad p_{2,3} = \pm j \cdot \frac{1}{T}$$

Для определения устойчивости замкнутой системы заменим передаточную функцию разомкнутой системы близкой к ней передаточной функцией

$$W'_p(p) = \frac{K}{(1 + pT_1)(1 + 2T\xi p + p^2T^2)}$$

Очевидно, что $W_p(p) = \lim_{\xi \rightarrow 0} W'_p(p)$.

Найдем полюса передаточной функции разомкнутой системы $W'_p(p)$:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1};$$

Дуга бесконечно большого радиуса длиной $\frac{\pi}{2} \cdot \nu$ ($0 < \omega < \infty$) называется дополнением в бесконечности. ν – кол-во полюсов разомкнутой системы на мнимой оси.

В соответствии с критерием Найквиста для нейтрально устойчивых разомкнутых систем (если разомкнутая система нейтрально устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы с дополнением в бесконечности не охватывал т. $(-1, j0)$) делаем выводы:

$$p_{2,3} = \frac{-T\xi \pm \sqrt{T^2\xi^2 - T^2}}{T^2} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{1}{T}\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$W_p(j\omega) = \frac{Ke^{j0}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} e^{j\arctg(\omega T_1)} (1 - \omega^2 T^2) e^{j\varphi_k}}, \quad \varphi_k = \begin{cases} 0, & \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$1 + p^2 T^2|_{j\omega} = 1 - \omega^2 T^2$ можно представить на комплексной плоскости:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1 - \varphi_k$$

$$\omega > \frac{1}{T}$$

$$\omega \leq \frac{1}{T}$$

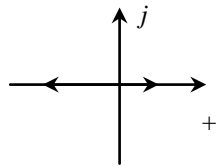


Рис.4.21. Положение вектора на комплексной плоскости

Построим амплитудную частотную, фазовую частотную характеристики разомкнутой системы и ее годограф, отмечая пунктиром участки характеристик, относящиеся к $W_p'(j\omega)$.

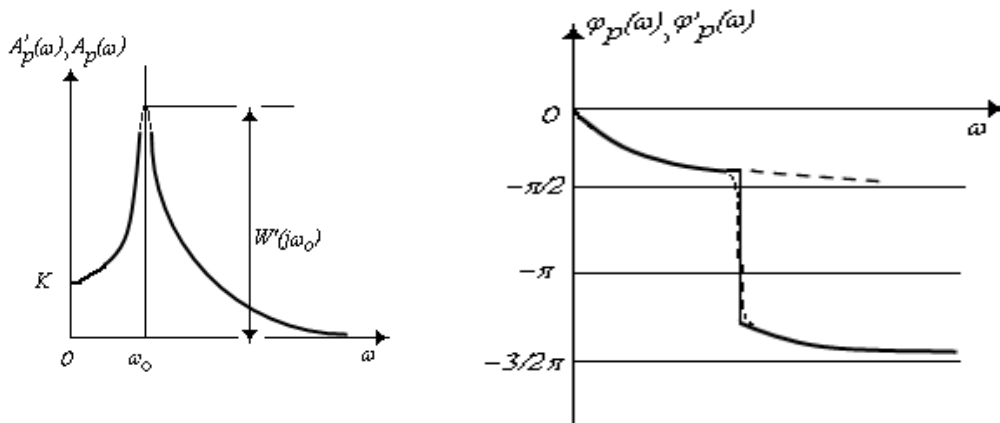


Рис.4.22. Амплитудная и фазовая частотные характеристики

Построим амплитудно – фазовую характеристику разомкнутой системы и определим устойчивость замкнутой системы по критерию Найквиста.

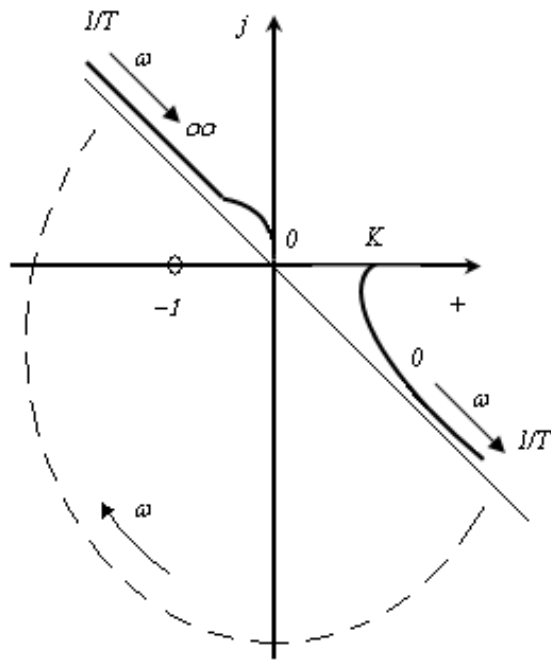


Рис.4.23. Годограф исследуемой системы

Как видно из рисунка, годограф Найквиста вместе с дополнением в бесконечности (дугой бесконечно большого радиуса длиной π) охватывает точку с координатами $(-1; j0)$, следовательно, замкнутая система является неустойчивой при любом коэффициенте усиления разомкнутой системы, т.е. является структурно неустойчивой.

Замкнутая система неустойчива, так как годограф разомкнутой системы, вместе с дополнением в бесконечности, охватывает точку $(-1, j_0)$.

Системы неустойчивые ни при каком коэффициенте усиления называются *структурно неустойчивыми системами*.

4.3.6. Общая формулировка критерия Найквиста.

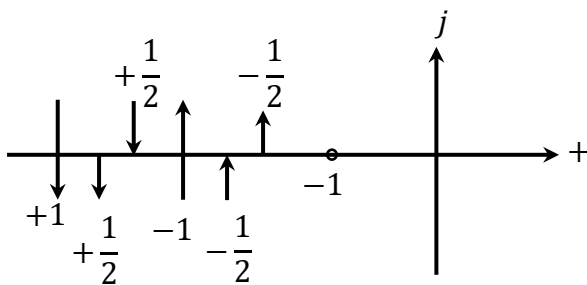


Рис.4.24. Переходы через действительную ось годографом разомкнутой системы

Общая формулировка:

Замкнутая система устойчивая, если алгебраическая сумма числа переходов годографом разомкнутой системы (с дополнением в бесконечности) отрезка действительной оси от -1 до $-\infty$ равна $\frac{l}{2}$ ($0 < \omega < +\infty$), l ($-\infty < \omega < +\infty$), где l – число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы. (рис.4.24)

Пример применения: рассмотренный ранее пример с неустойчивой в разомкнутом состоянии системой (рис.4.25):

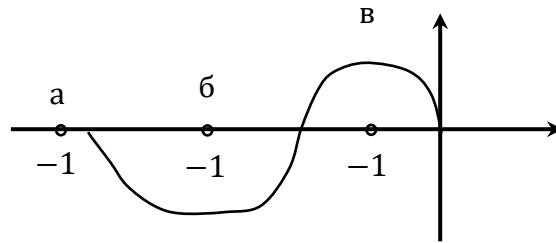


Рис.4.25. Пример применения общей формулировки критерия Найквиста

Рассчитаем алгебраическую сумму числа переходов отрезка действительной оси годографом разомкнутой системы и проверим выполнение равенства ее числу правых полюсов $l=1$:

а) $\sum = 0 \rightarrow$ замкнутая система неустойчива, так как число переходов равно 0, а $l = 1$

а) $\sum = +\frac{1}{2} \rightarrow$ замкнутая система устойчива, так как число переходов равно числу правых

полюсов: $\frac{l}{2} = \frac{1}{2}$

в) $\sum = -\frac{1}{2} \rightarrow$ замкнутая система неустойчива, так как алгебраическая сумма числа

переходов равна -1: $l = 1 \quad \frac{l}{2} = -\frac{1}{2}$.

4.3.7. Логарифмический критерий устойчивости.

Логарифмический критерий устойчивости позволяет определить устойчивость замкнутой системы по логарифмическим характеристикам разомкнутой системы и является, в общем, перенесением общей формулировки критерия Найквиста на логарифмические частотные характеристики.

Таким образом, критерий Найквиста рассматривает число переходов годографом разомкнутой системы отрезка действительной оси от $-\infty$ до -1 , что означает $A_p(\omega) > 1$ $\varphi_p(\omega) = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$. Для логарифмических характеристик это означает, что $L(\omega) > 0$ и $\varphi_p(\omega) = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$

Переход сверху вниз отрезка действительной оси означает, что фазовая характеристика переходит в направлении от более отрицательного значения фазы к менее отрицательному, т.е. для фазовой частотной характеристики разомкнутой системы это равносильно пересечению прямых $\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \dots$ в направлении снизу вверх, и наоборот, отрицательному переходу будет соответствовать переход фазовой частотной характеристики разомкнутой системы прямых сверху вниз.

Формулировка критерия: *Замкнутая систем устойчива, если алгебраическая сумма числа переходов фазовой частотной характеристикой разомкнутой системы (вместе с дополнением в бесконечности) на участках частот, для которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна, равна $l/2$, где l – число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы.*

Дополнение в бесконечности для логарифмических характеристик соответствует дополнению в бесконечности для годографов при использовании критерия Найквиста.

Продemonстрируем это на примере приведенных ниже логарифмических характеристик (рис.4.26).

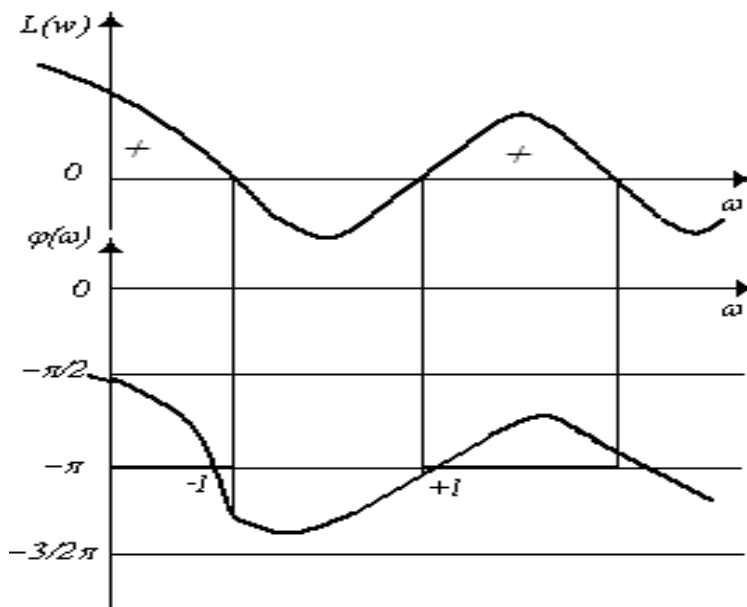


Рис.4.26. Пример применения логарифмического критерия устойчивости

Для приведенного выше примера алгебраическая сумма переходов фазовой частотной характеристикой разомкнутой системы прямой $-\pi$ равна 0 на участках частот, для которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна, следовательно, замкнутая

системы устойчива в том случае, когда в передаточной функции разомкнутой системы нет правых полюсов.

4.4. Выводы

Устойчивость – основное требование к системам автоматического управления (САУ). При этом следует различать устойчивость положения равновесия и устойчивость вынужденного процесса (разд. 4.1), связанные с полюсами передаточной функции, описывающей САУ. В разделе 4.2 исследовано влияние расположения полюсов на характер переходного процесса и показано необходимое и достаточное условие устойчивости системы (расположение полюсов в левой части комплексной плоскости). Для применения этого критерия нужно знать знаменатель передаточной функции (характеристическое уравнение) системы и определять ее полюса, что зачастую бывает сложно, поэтому используются критерии устойчивости (разд. 4.3): алгебраические (Гурвица, Рауса) и частотные, в основу которых положен принцип аргумента (Михайлова, Найквиста, логарифмический критерий устойчивости). Критерий устойчивости Гурвица, в основе которого лежат определители, составленные из коэффициентов характеристического уравнения исследуемой системы, и примеры его использования представлены в разд.4.3.1. Принцип аргумента сформулирован в разд. 4.3.2.; основанный на принципе аргумента критерий Михайлова изложен в разд.4.3.3.; критерий устойчивости Найквиста, позволяющий судить об устойчивости замкнутой системы по АФХ разомкнутой системы, изложен в разд. 4.3.4., а примеры его применения – в разд.4.3.5.. Общая формулировка критерия Найквиста и основанный на нем логарифмический критерий устойчивости излагаются в разд.4.3.6. и 4.3.7.

4.5. Вопросы

1. Сформулируйте понятие устойчивости положения равновесия и процесса в линейной системе автоматического управления.
2. Как должна вести себя весовая функция устойчивой, нейтрально устойчивой и неустойчивой системы.
3. Какого вида процессы в весовой функции системы вносят действительные отрицательные полюса, действительные положительные полюса, лежащие в левой части и правой части комплексной плоскости.

4. Какого вида процессы в весовой функции системы вносят комплексно сопряженные полюса, лежащие в левой части и правой части комплексной плоскости.
5. Какого вида процессы в весовой функции вносят полюса, лежащие на мнимой оси.
6. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
7. Каковы условия устойчивости систем первого, второго и третьего порядка в соответствии с критерием Гурвица.
8. Сформулируйте принцип аргумента и соответствующий ему критерий Михайлова.
9. Каковы формулировки критерия Найквиста для устойчивых, нейтрально устойчивых и неустойчивых в разомкнутом состоянии систем.
10. Сформулируйте общую формулировку критерия Найквиста и связанный с ним логарифмический критерий устойчивости.

4.6. Задания

1. Используя необходимые и достаточные условия устойчивости, определить устойчивость замкнутых систем по заданным в таблице передаточным функциям разомкнутых систем и показать вид весовой функции системы.

| | |
|--|--|
| 1.1. $Wp(p) = 10 \frac{1 - 0.1p}{1 + 0.01p}$ | 1.2. $Wp(p) = \frac{1 + 0.1p}{1 - 0.01p}$ |
| 1.3. $Wp(p) = 10 \frac{0.1p - 1}{1 + 0.5p}$ | 1.4. $Wp(p) = \frac{10(1 - 5p)}{1 + 2p}$ |
| 1.5. $Wp(p) = \frac{10(5p - 1)}{p}$ | 1.6. $Wp(p) = \frac{4}{1 + 0.12p + 0.002p^2}$ |
| 1.7. $Wp(p) = 10 \frac{p}{1 - 0.1p}$ | 1.8. $Wp(p) = 100 \frac{1 + 0.2p}{(1 - 0.05p)p}$ |
| 1.9. $Wp(p) = \frac{1}{0.05p - 1}$ | 1.10. $Wp(p) = \frac{4p}{1 - 0.12p + 0.002p^2}$ |

2. Используя критерий Гурвица, определить устойчивость замкнутой системы (для $K=1$) и найти $K_{пред}$ по заданным передаточным функциям разомкнутых систем:

$$1. \quad Wp(p) = \frac{K(1+p)}{p^4 + p^3 + 3p^2 - p + 1}$$

$$6. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + 3.5p^2 + 2p + 7}$$

$$2. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^4 + 2p^2 + 7p^2 + 1}$$

$$7. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + 2p^2 + 2p}$$

$$3. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + 2p^2 + p + 1}$$

$$8. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 1}$$

$$4. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + 4p^2 + 4p + 1}$$

$$9. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^4 + p^3 + p^2 + p + 1}$$

$$5. \quad Wp(p) = \frac{K}{p^3 + p^2 + p + 1,5}$$

$$10. \quad Wp(p) = \frac{K}{0,01p^4 + 0,05p^3 + 0,1p^2 + 2p + 1}$$

3. Используя критерий Михайлова, определить устойчивость замкнутой системы для разомкнутых систем, передаточные функции которых заданы в таблице к заданию 1.
4. Определить устойчивость и $K_{пред}$ по критерию Найквиста для заданных передаточных функций разомкнутых систем:

| | |
|--|---|
| 4.1. $W(p) = \frac{50(1+0.5p)}{p^2(1+2p)^2(1-p+p^2)}$ | 4.2. $W(p) = \frac{10p(1-0.5p)^2}{(1+2p)(1+5p)^2}$ |
| 4.3. $W(p) = \frac{50(1+0.5p)^2(1-10p)}{p^2(1+2p)}$ | 4.4. $W(p) = \frac{20(1+0.5p+p^2)}{p(1-2p)(1+10p)^2}$ |
| 4.5. $W(p) = \frac{100(1+0.5p)^2}{p^2(1+2p)^2(10p-1)}$ | 4.6. $W(p) = \frac{10p^2(1+p)}{(1+3p)(1-10p)^2}$ |
| 4.7. $W(p) = \frac{50(1-0.5p)}{p^2(1+2p)(1+10p)}$ | 4.8. $W(p) = \frac{50(1+0.5p+p^2)}{p^2(1-2p)(1+10p)}$ |

| | |
|---|---|
| 4.9. $W(p) = \frac{20(1 - 0.5p)}{p(1 + 2p)(1 + 10p)^2}$ | 4.10. $W(p) = \frac{100p(1 + 5p)^2}{(1 - 0.2p)(1 + p + p^2)}$ |
|---|---|

5. Определить устойчивость и Кпред по логарифмическому критерию устойчивости для заданных передаточных функций разомкнутых систем:

| | |
|---|---|
| 5.1. $W(p) = \frac{100(1 + 5p)^2}{p(1 + 0.2p)(1 + p^2)}$ | 5.2. $W(p) = \frac{100p(5p - 1)}{(1 + 0.2p)^2(1 + p + p^2)}$ |
| 5.3. $W(p) = \frac{100(1 + 5p)}{p(1 - 0.2p)^2(1 + p + p^2)}$ | 5.4. $W(p) = \frac{50(1 - 0.5p)^2}{p^2(1 + 2p)(1 + p + p^2)}$ |
| 5.5. $W(p) = \frac{10p(1 + 0.5p)}{(1 + 2p)^2(1 - p + p^2)}$ | 5.6. $W(p) = \frac{50(1 + 0.5p)}{p^2(1 + 2p)(1 - 10p)}$ |
| 5.7. $W(p) = \frac{50(1 - 0.5p + p^2)}{p^2(1 + 2p)(1 + 10p)}$ | 5.8. $W(p) = \frac{20(1 + 0.5p)}{p(1 - 2p)(1 + 10p)^2}$ |
| 5.9. $W(p) = \frac{100p(1 - 5p)^2}{(1 + 0.2p)(1 + p + p^2)}$ | 5.10. $W(p) = \frac{100(1 + 5p)^2}{p(0.2p - 1)^2(1 + p + p^2)}$ |

4.7. Практикум по главе 4

1. Используя необходимые и достаточные условия устойчивости, определить устойчивость замкнутой системы по заданной передаточной функции разомкнутой системы:

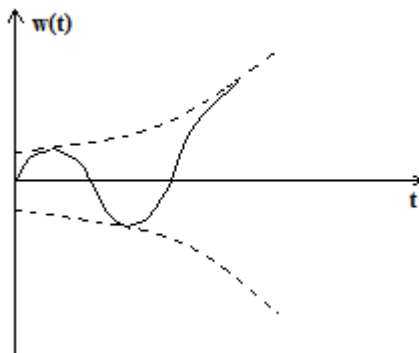
$$Wp(p) = \frac{2(1 - 2p)}{p^2 + 3p + 2}. \quad \text{Найдем передаточную функцию замкнутой системы}$$

$$Wz(p) = \frac{Wp(p)}{1 + Wp(p)} = \frac{2 - 4p}{p^2 + 3p + 2 + 2 - 4p} = \frac{2 - 4p}{p^2 - p + 4}. \quad \text{Для определения устойчивости}$$

замкнутой системы найдем полюса передаточной функции, т.е. корни знаменателя

$$\text{передаточной функции замкнутой системы: } p^2 - p + 4 = 0$$

$p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm j\sqrt{3}$. Полюса комплексно сопряженные с действительной частью в правой части комплексной плоскости, определяющие расходящийся колебательный процесс в весовой функции, представленный на рисунке:



2. Используя критерий Гурвица, определить устойчивость замкнутой системы и найти $K_{пред}$ по заданным передаточным функциям разомкнутых систем:

$$Wp(p) = \frac{K(p-1)}{p^3 + p^2 + 2p + 3}. \text{ Запишем передаточную функцию замкнутой системы (для } K=1) \text{ и}$$

определим ее устойчивость по критерию Гурвица:

$$Wz(p) = \frac{Wp(p)}{1+Wp(p)} = \frac{1 \cdot (p-1)}{p^3 + p^2 + 2p + 3 + p - 1} = \frac{p-1}{p^3 + p^2 + 3p + 2}. \text{ Составим определитель}$$

$$\text{Гурвица: } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ и рассчитаем значения определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков:}$$

$$\Delta_1 = |1| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 > 0, \quad \Delta_3 = 2 \cdot \Delta_2 = 2 \cdot 1 > 0. \text{ Таким образом, все определители}$$

Гурвица и коэффициент при старшей степени, равный 1, положительны, следовательно, замкнутая система с $K=1$ устойчива. Найдем $K_{пред}$, для чего используем K при записи передаточной функции замкнутой системы

$$Wz(p) = \frac{Wp(p)}{1 + Wp(p)} = \frac{K \cdot (p - 1)}{p^3 + p^2 + 2p + 3 + K(p - 1)} = \frac{p - 1}{p^3 + p^2 + p \cdot (K + 2) + 3 - K} \text{ и}$$

построении определителей: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 - K & 0 \\ 1 & K + 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 - K \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = |1| > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 - K \\ 1 & K + 2 \end{vmatrix} = K + 2 - (3 - K) = 2K - 1 > 0, \text{ откуда следует, что } K \text{ должно быть больше } 0,5.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 - K & 0 \\ 1 & K + 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 - K \end{vmatrix} = (3 - K) \cdot \Delta_2 > 0, \text{ откуда следует, что } K \text{ должно быть меньше } 3.$$

Таким образом, получили, что для устойчивости замкнутой системы K должно лежать в диапазоне от 0,5 до 3.

3. Используя критерий Михайлова, определить устойчивость замкнутой системы для разомкнутой системы, передаточная функция которой задана в таблице к заданию 1.

$$Wp(p) = \frac{K(p - 1)}{p^3 + p^2 + 2p + 3}$$

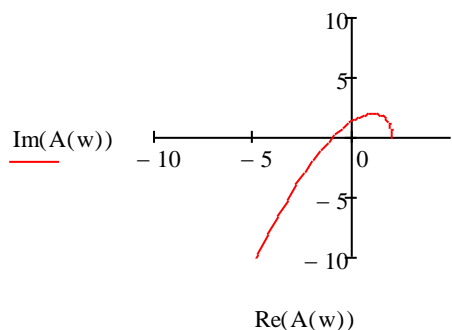
Запишем передаточную функцию замкнутой системы и ее характеристический полином:

$$Wz(p) = \frac{p - 1}{p^3 + p^2 + p \cdot (K + 2) + 3 - K} \quad A(p) = p^3 + p^2 + p \cdot (K + 2) + 3 - K.$$

$$\underline{A}(w) := (j \cdot w)^3 - w^2 + (K + 2) \cdot j \cdot w + 3 - K$$

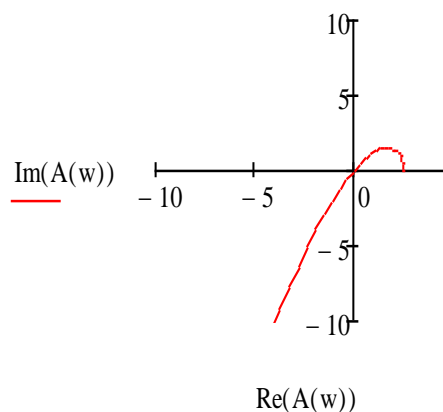
$$K := 1$$

$$A(w) := (j \cdot w)^3 - w^2 + (K + 2) \cdot j \cdot w + 3 - K$$

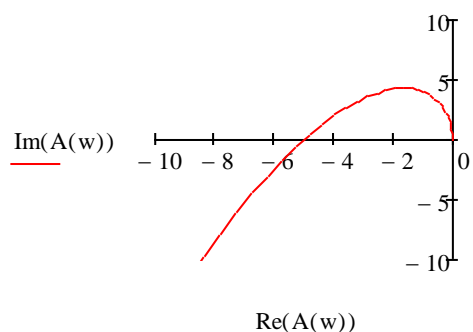


$$K := 0.5$$

$$A(w) := (j \cdot w)^3 - w^2 + (K + 2) \cdot j \cdot w + 3 - K$$



$$K := 3$$



Из построенных графиков видно, что при $K=1$ замкнутая система устойчива, при $K=0.5$ и $K=3$ замкнутая система находится на границе устойчивости.

4. Определить устойчивость и $K_{пред}$ по критерию Найквиста для заданной передаточной функции разомкнутой системы:

$$Wp(p) = \frac{3(1 - 0.5p + p^2)}{p(1 - 2p)(1 + 10p)^2}$$

Запишем выражение для комплексного коэффициента усиления

$$\varphi_k(w) = \begin{cases} \arctg \frac{0.5w}{|1 - w^2|}, & w \leq 1 \\ \pi - \arctg \frac{0.5w}{|1 - w^2|}, & w > 1 \end{cases}$$

$$Wp(jw) = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-w^2)^2 + (0.5 \cdot w)^2}}{w \cdot \sqrt{1+(2 \cdot w)^2} \cdot (\sqrt{1+(10 \cdot w)^2})^2} e^{j \cdot (-\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg 10w + \arctg 2w - \varphi_k(w))} = A(w) \cdot e^{j\varphi(w)}$$

$$L(w) = 20 \log 3 - 20 \log w - 40 \log \sqrt{1+(10w)^2} - 20 \log \sqrt{1+(2w)^2} + 20 \log \sqrt{(1-w^2)^2 + (0.5 \cdot w)^2}$$

Разобьем частотный диапазон на 4 участка:

0) $w < 1/10$

$$L_0(w) = 20 \log 3 - 20 \log w$$

1) $1/10 < w \leq 1/2$

$$L_1(w) = L_0(w) - 40 \log 10w$$

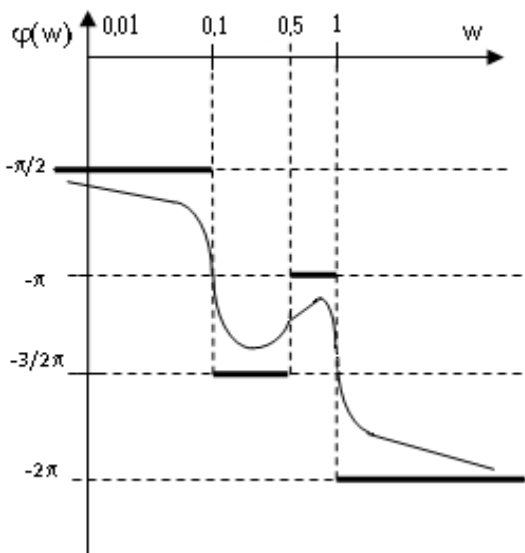
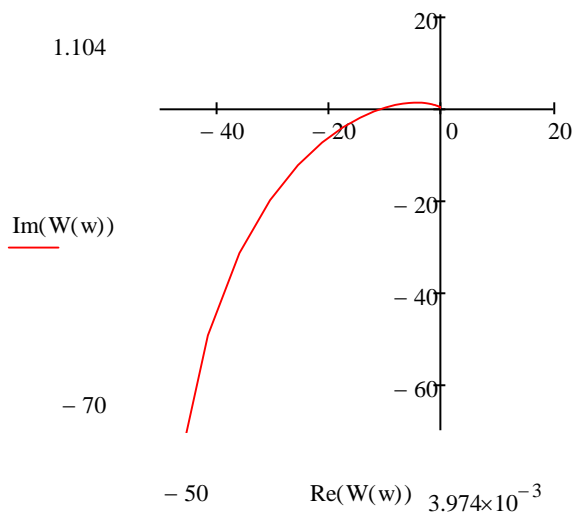
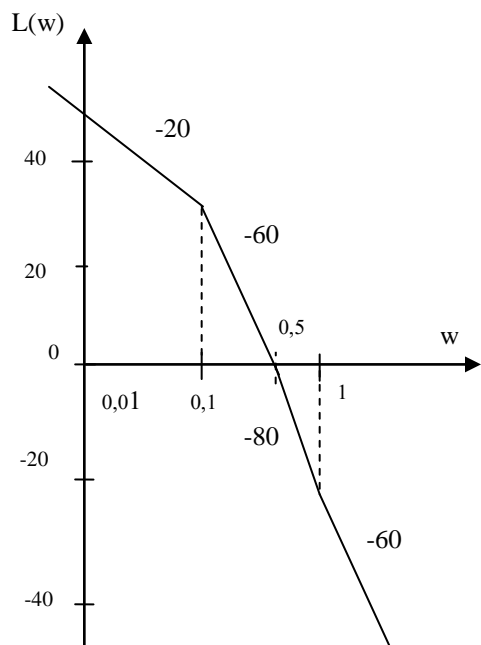
2) $1/2 < w \leq 1$

$$L_2(w) = L_1(w) - 20 \log 2w$$

3) $w > 1$

$$L_3(w) = L_2(w) + 40 \log w$$

и построим асимптотическую ЛАЧХ, затем ЛФЧХ и АФХ²:



Для определения устойчивости замкнутой системы применим формулировку критерия Найквиста для неустойчивой в разомкнутом состоянии системы, а именно «если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы охватывал точку $(-1, j0)$ $l/2$ раз против часовой стрелки, где l – число полюсов передаточной функции разомкнутой системы». В нашем случае $l=1$, т.е. точка $(-1, j0)$ должна быть охвачена $1/2$ раза против часовой стрелки. Это условие не выполняется, откуда следует, что

замкнутая система неустойчива при любом коэффициенте усиления.

5. Определить устойчивость и $K_{пред}$ по логарифмическому критерию устойчивости для заданной передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{50(1 + 0.5p)}{p^2(1 + 2p)(1 - 10p)}$$

Запишем выражение для комплексного коэффициента усиления системы:

$$W(jw) = \frac{50(1 + 0.5jw)}{(jw)^2(1 + 2jw)(1 - 10jw)} = \frac{50\sqrt{1 + (0.5w)^2}}{w^2\sqrt{1 + (2w)^2}\sqrt{1 + (10w)^2}} \cdot e^{j(-\pi + \arctg 10w - \arctg 2w + \arctg 0.5w)}$$

Таким образом, $A(w) = \frac{50\sqrt{1 + (0.5w)^2}}{w^2\sqrt{1 + (2w)^2}\sqrt{1 + (10w)^2}}$ и

$$\varphi(w) = -\pi + \arctg 10w - \arctg 2w + \arctg 0.5w$$

Для построения асимптотической ЛАЧХ разобьем частотный диапазон на 4 участка, записав выражения для каждого участка в отдельности:

0) $w < 1/10$

$$L_0(w) = 20\log 50 - 40\log w$$

1) $1/10 < w \leq 1/2$

$$L_1(w) = L_0(w) - 20\log 10w$$

2) $1/2 < w \leq 2$

$$L_2(w) = L_1(w) - 20\log 2w$$

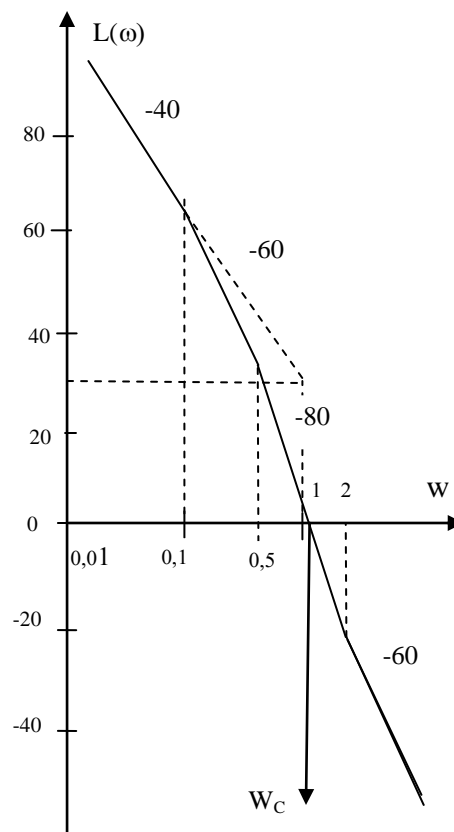
3) $w > 2$

$$L_3(w) = L_2(w) + 20\log w$$

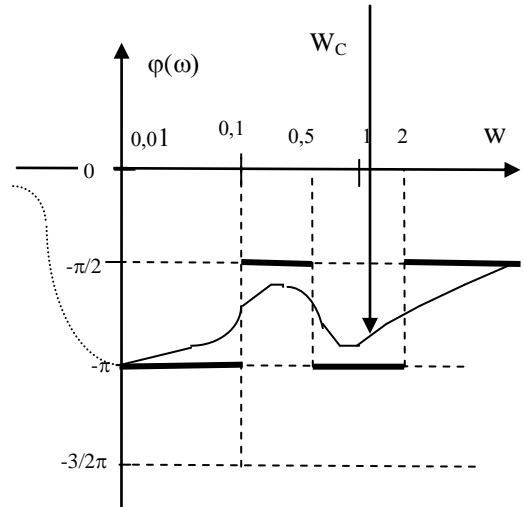
Построим асимптотическую ЛАЧХ:

Используя выражение для ФЧХ и асимптоты, построим ЛФЧХ:

Применим логарифмический критерий устойчивости, имея в виду, что разомкнутая система неустойчивая ($l=1$) и нейтральная ($\nu=2$). Для таких систем логарифмический



критерий устойчивости формулируется следующим образом «Замкнутая система устойчива, если алгебраическая сумма числа переходов логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) прямых $\pm \pi, \pm 3\pi \dots$ вместе с дополнением в бесконечности на диапазоне частот, при котором ЛАЧХ положительна, равна $l/2$, l – число правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы». При этом переход сверху вниз берется с весом (-1) , а снизу вверх – с весом $(+1)$. В нашем случае количество переходов равно нулю, для устойчивости число переходов должно быть равно $l/2=1$. Таким образом, замкнутая система неустойчива при любом коэффициенте усиления.



4.8. Список литературы

1. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
2. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Автоматическое управление», Устойчивость линейных и нелинейных систем, Державин О.М., Мжельская В.А., Чхартишвили Л.П.,– М.: Моск.энерг.ин-т, 1987. – 38с.
3. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. - М.: Изд-во МЭИ, 1992, 103 с.
4. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Бондин О.А. Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления. Учеб. Пос. по курсу "Основы теории управления".- М.: Изд-во МЭИ, 2004, - 64 с.
5. Исследование САУ с использованием прикладного пакета MATLAB. Лабораторный практикум: учебное пособие / Т.В. Ягодкина, С.А. Хризолитова, В.М. Беседин и др.- М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 80 с.
6. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.

5. Качество систем автоматического управления

(*знать*: прямые и косвенные показатели качества систем; *уметь*: определять показатели качества по имеющемуся математическому описанию системы и оценивать их влияние на свойства системы, находить передаточные функции ошибки от управляющего и возмущающего воздействия; *владеть*: методами нахождения ошибок системы по передаточным функциям и структурным схемам.)

Устойчивость – это необходимое, но недостаточное условие функционирования систем автоматического управления (САУ). Важным является качество САУ.

Качество – комплекс характеристик, обеспечивающий требуемые свойства системы. Одним из основных свойств является точность отработки типовых входных сигналов. Продемонстрируем это на примере типовой структурной схемы.

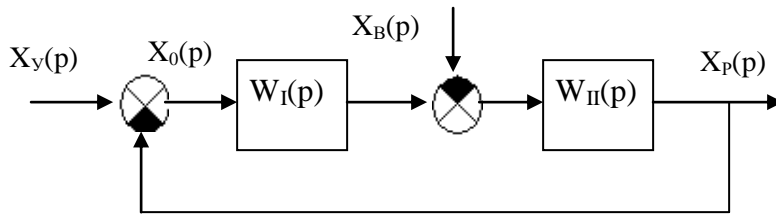


Рис.5.1. Типовая структурная схема САУ

Целью системы является отработка заданного управляющего сигнала с наибольшей точностью, т.е. добиться равенства $x_p(t) \cong x_y(t)$ или, иными словами, минимизировать сигнал ошибки

$x_0(t) = x_y(t) - x_p(t)$. Вспомним, что $x_0(t) = L^{-1}\{X_0(p)\}$, а

$$X_0(p) = \frac{1}{1 + W_I(p) \cdot W_{II}(p)} X_y(p) + \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} X_b(p)$$
. Точность САУ определяется тем,

насколько различаются управляющий сигнал и сигнал на выходе системы. Эту задачу можно решать в динамике, вводя в систему дополнительные корректирующие устройства или в статике, достигая точности системы в установившемся режиме при отработке типовых входных сигналов, т.е.

$x_{o,уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

5.1. Точность систем в установившемся режиме

Для определения ошибки системы в установившемся режиме $x_{o,уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$

воспользуемся теоремой о предельном переходе $x_{o,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} pX_0(p)$ при $p \rightarrow 0$.

Для определения установившегося значения ошибки представим передаточные функции в следующем виде: $W_I(p) = \frac{B_I(p)}{p^{\nu_I} \cdot A_I(p)}$, где $B_I(0) \neq 0$; $A_I(0) \neq 0$;

$$W_{II}(p) = \frac{B_{II}(p)}{p^{\nu_{II}} \cdot A_{II}(p)}, \text{ где } B_{II}(0) \neq 0; \quad A_{II}(0) \neq 0;$$

ν_I – разность числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев в передаточной функции $W_I(p)$;

ν_{II} – разность числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев в передаточной функции $W_{II}(p)$;

$$W_p^y(p) = W_I(p)W_{II}(p) = \frac{B_I(p)B_{II}(p)}{p^{\nu_I} \cdot p^{\nu_{II}} \cdot A_I(p) \cdot A_{II}(p)} = \frac{B(p)}{p^{\nu} \cdot A(p)}, \quad \text{где } \nu = \nu_I + \nu_{II}$$

$$B(0) \neq 0 \quad A(0) \neq 0 \quad \frac{B(0)}{A(0)} = k_p \quad \frac{B_I(0)}{A_I(0)} = k_I \quad \frac{B_{II}(0)}{A_{II}(0)} = k_{II}$$

5.1.1. Ошибки по управляющему воздействию

$$x_{0,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_y(p)$$

$$\frac{1}{1 + W_p^y(p)} = \frac{1}{1 + \frac{B(p)}{p^{\nu} A(p)}} = \frac{p^{\nu}}{p^{\nu} + \frac{B(p)}{A(p)}}$$

Рассмотрим типовые входные воздействия и их изображения; при этом ограничимся степенными входными сигналами:

Степенные входные сигналы

| $f(t)$ | $F(p)$ |
|----------------|-------------|
| $I(t)$ | $1/p$ |
| $t \cdot I(t)$ | $1/p^2$ |
| $t^n/n!$ | $1/p^{n+1}$ |

Если уровень входного сигнала равен a , то изображение по Лапласу также умножается на a ,

таким образом, $\frac{at^n}{n!} \div \frac{a}{p^{n+1}}$.

Если $n=0$, то входным сигналом является единичная ступенчатая функция $I(t)$ и при его обработке возникает статическая ошибка. Таким образом, *статической ошибкой* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого постоянного входного воздействия.

Если $n=1$, то входным сигналом является линейная возрастающая функция $t \cdot I(t)$ и при его обработке возникает кинетическая ошибка. Таким образом, *кинетической ошибкой* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого линейно возрастающего входного воздействия.

Если $n=2$, то входным сигналом является квадратичная функция $t^2 \cdot I(t)$ и при его обработке возникает ошибка, которая называется *ошибкой по ускорению*. Таким образом, *ошибкой по ускорению* по какому-либо воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого квадратичного входного воздействия.

Примем в качестве входного управляющего сигнала сигнал вида $x_y(t) = \frac{a \cdot t^\mu}{\mu!} \cdot 1(t)$, для

которого изображение по Лапласу имеет вид: $X_y(p) = \frac{a}{p^{\mu+1}}$. Тогда ошибку по управлению можно

записать в виде:

$$x_{0,уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} =$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{B(0)}{A(0)}} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu+1}}{p^\nu + k_p} \cdot \frac{a}{p^{\mu+1}}$$

Как видно из приведенной формулы, ошибка при обработке степенного управляющего воздействия зависит от уровня входного сигнала a , коэффициента усиления разомкнутой системы и соотношения между ν и μ .

Результат можно свести в таблицу:

| ν μ | 0 | 1 | 2 | Примечания |
|----------------|-------------------------------|--------------------------------|---|-------------------------------------|
| 0 | $a/(1+k_p)$ | 0 | 0 | Статическая ошибка по управлению |
| 1 | ∞ | a/k_p | 0 | Кинетическая ошибка по управлению |
| 2 | ∞ | ∞ | a/k_p | Ошибка по ускорению (по управлению) |
| Примечания | Статическая САУ по управлению | Астатическая САУ по управлению | САУ с астатизмом 2-го порядка по управлению | |

Введем некоторые определения:

Статической называется САУ, обрабатывающая постоянный сигнал с конечной ошибкой.

Кинетической называется САУ, обрабатывающая линейно возрастающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом 2-го порядка называется САУ, обрабатывающая линейно возрастающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом ν -го порядка называется САУ, обрабатывающая степенной сигнал ν -го порядка с конечной ошибкой.

Конечные значения ошибок прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления разомкнутой системы по управлению. При соотношении $\nu > \mu$ ошибка принимает нулевое значение, а при соотношении $\nu < \mu$ ошибка в установившемся режиме бесконечна, т.е. система не обрабатывает входного управляющего сигнала и отклонение со временем увеличивается.

Величина ν называется *порядком астатизма по управлению* и равна разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в цепи обратной связи между сигналом ошибки и управляющим входным воздействием, т.е. лежащих в $W_p^y(p)$.

5.1.2. Ошибки по возмущающему воздействию

$$x_{0,уст}^6 = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_v(p)$$

$$\frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} = \frac{\frac{B_{II}(p)}{p^{\nu_{II}} A_{II}(p)}}{1 + \frac{B(p)}{p^\nu A(p)}} = \frac{p^{\nu - \nu_{II}} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}} = \frac{p^{\nu_I} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^\nu + \frac{B(p)}{A(p)}}.$$

Рассмотрим типовые входные возмущающие воздействия и их изображения; при этом ограничимся степенными входными сигналами:

Если уровень входного возмущающего сигнала равен b , то изображение по Лапласу также

умножается на b , таким образом, $\frac{bt^n}{n!} \div \frac{b}{p^{n+1}}.$

Если $n=0$, то входным возмущающим сигналом является единичная ступенчатая функция $I(t)$ и при его обработке возникает статическая ошибка по возмущению. Таким образом, *статической ошибкой* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого постоянного возмущающего входного воздействия.

Если $n=1$, то входным возмущающим сигналом является линейная возрастающая функция $t \cdot I(t)$ и при его обработке возникает кинетическая ошибка по возмущению. Таким образом, *кинетической ошибкой* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого линейно возрастающего входного возмущающего воздействия.

Если $n=2$, то входным возмущающим сигналом является квадратичная функция $t^2 \cdot I(t)$ и при его обработке возникает ошибка, которая называется *ошибкой по ускорению* (по возмущению). Таким образом, *ошибкой по ускорению* по возмущающему воздействию называется ошибка, возникающая при обработке этого квадратичного возмущающего входного воздействия.

Примем в качестве входного управляющего сигнала сигнал вида $x_{\epsilon}(t) = \frac{b \cdot t^{\mu}}{\mu!} \cdot 1(t)$, для

которого изображение по Лапласу имеет вид: $X_{\epsilon}(p) = \frac{b}{p^{\mu+1}}$. Тогда ошибку по возмущению можно

$$x_{o,ycm}^{\epsilon} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)} \cdot X_{\epsilon}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p^{\nu_I} \cdot \frac{B_{II}(p)}{A_{II}(p)}}{p^{\nu} + \frac{B(p)}{A(p)}} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}} =$$

записать в виде:

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu_I+1} \cdot \frac{B_{II}(0)}{A_{II}(0)}}{p^{\nu} + \frac{B(0)}{A(0)}} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\nu_I+1} \cdot k_{II}}{p^{\nu} + k_p} \cdot \frac{b}{p^{\mu+1}}$$

Как видно из приведенной формулы, ошибка при обработке степенного управляющего воздействия зависит от уровня входного возмущающего сигнала b , коэффициента усиления разомкнутой по возмущению k_I системы и соотношения между ν_I и μ .

Результат можно свести в таблицу:

| $\mu \backslash \nu_I$ | 0 | 1 | 2 | Примечания |
|------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---|-------------------------------------|
| 0 | $b \cdot k_{II} / ([I] + k_p)$ | 0 | 0 | Статическая ошибка по возмущению |
| 1 | ∞ | $b \cdot k_{II} / ([I] + k_p)$ | 0 | Кинетическая ошибка по возмущению |
| 2 | ∞ | ∞ | $b \cdot k_{II} / ([I] + k_p)$ | Ошибка по ускорению (по возмущению) |
| Примечания | Статическая САУ по возмущению | Астатическая САУ по возмущению | САУ с астатизмом 2-го порядка по возмущению | |

Квадратные скобки учитывают ситуацию, когда $\nu = 0$, а $\nu_I \neq 0$ ($0^0 = 1$).

Введем некоторые определения:

Статической по возмущению называется САУ, обрабатывающая постоянный возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Кинетической по возмущению называется САУ, отрабатывающая линейно возрастающий возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом 2-го порядка (по возмущению) называется САУ, отрабатывающая линейно возрастающий возмущающий сигнал с конечной ошибкой.

Системой с астатизмом ν -го порядка (по возмущению) называется САУ, отрабатывающая степенной возмущающий сигнал ν - го порядка с конечной ошибкой.

Конечные значения ошибок прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления разомкнутой системы по возмущению (k_I). При соотношении $\nu_I > \mu$ ошибка принимает нулевое значение, а при соотношении $\nu_I < \mu$ ошибка в установившемся режиме бесконечна, т.е. система не отрабатывает входного управляющего сигнала и отклонение со временем увеличивается.

Величина ν_I называется *порядком астатизма по возмущению* и равна разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в цепи обратной связи между сигналом ошибки и возмущающим входным воздействием, т.е. лежащих в $W_I(p)$.

5.1.3. Пример расчета ошибок системы автоматического управления.

Рассчитаем ошибки системы, представленной структурной схемой:

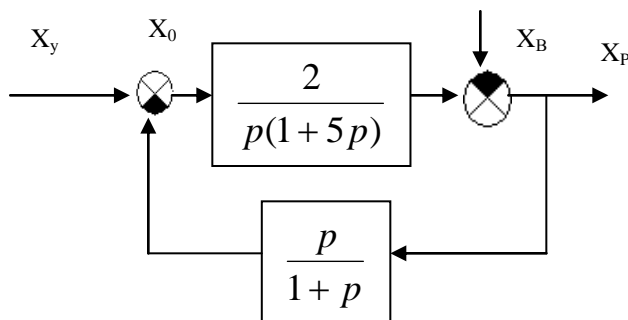


Рис.5.2. Структурная схема САУ

Для вычисления ошибки по управляющему сигналу запишем передаточную функцию ошибки по управлению:

$$W_0^y(p) = \frac{X_0^y(p)}{X_y(p)} = \frac{1}{1 + W_p^y(p)}$$

$$W_p^y(p) = \frac{2p}{p(1+p)(1+5p)} = \frac{2}{(1+p)(1+5p)}$$

$$\text{Статическая ошибка по управлению: } x_{o,ycm}^y = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} \cdot \frac{a}{p} = \frac{a}{3};$$

$$\text{Кинетическая ошибка по управлению: } x_{o,ycm}^y = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} \cdot \frac{a}{p^2} = \infty;$$

Для вычисления ошибки по возмущающему сигналу запишем передаточную функцию ошибки по возмущению:

$$W_0^g(p) = \frac{X_0^g(p)}{X_g(p)} = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_p^y(p)}; \quad W_{II}(p) = \frac{p}{1+p}$$

$$W_0^g(p) = \frac{\frac{p}{1+p}}{1 + \frac{2}{(1+p)(1+5p)}} = \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2};$$

$$\text{Статическая ошибка по возмущению: } x_{o,ycm}^g = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p} = 0;$$

$$\text{Кинетическая ошибка по управлению: } x_{o,ycm}^g = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p^2} = \frac{b}{2};$$

$$\text{Ошибка по ускорению: } x_{o,ycm}^g = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p \cdot (1+5p)}{(1+p)(1+5p) + 2} \cdot \frac{b}{p^3} = \infty.$$

Таким образом, система является статической по управляющему воздействию и астатической по возмущающему воздействию, что соответствует приведенным ранее таблицам.

5.2. Точность систем в динамическом режиме

5.2.1. Временные показатели качества

Основное условие работоспособности систем автоматического управления заключается в ее устойчивости. Однако устойчивость – не достаточное условие ее практического применения. Наряду с этим выдвигаются определенные требования к качеству процессов регулирования. Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившемся и переходном режимах отработки заданного воздействия определяется показателями качества работы САУ: прямыми показателями

качества (быстродействием и характером переходного процесса), определяемыми по переходной характеристике САУ, косвенными (запасами устойчивости по амплитуде и фазе), точностью.

Показатели качества процесса отработки входного воздействия будем рассматривать для системы, структурная схема которой изображена на рисунке, приведенном ниже.

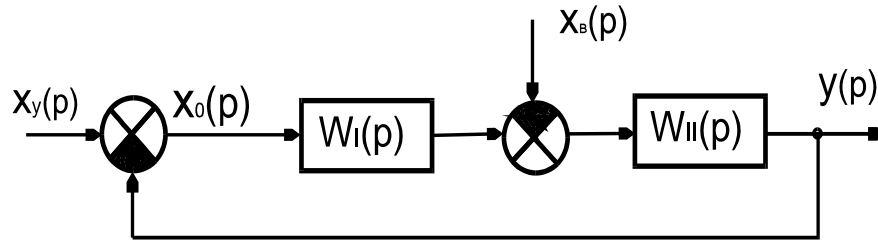


Рис.5.3. Структурная схема САУ

В динамическом режиме поведение замкнутой системы определяется ее удалением от состояния неустойчивости, которое можно определить по частотным характеристикам разомкнутой системы (по запасам устойчивости) или временным характеристикам замкнутой системы (прямым показателям качества).

5.2.2. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе.

Замкнутая система должна быть не просто устойчивой, а обладать определенными запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Запас устойчивости по амплитуде определяется удалением годографа разомкнутой системы от критической точки $(-1;j0)$, а именно величиной $\Delta A = 1 - A_{\pi}$, где A_{π} – значение амплитудной частотной характеристики на частоте ω_{π} , при которой $\varphi(\omega_{\pi}) = -\pi$.

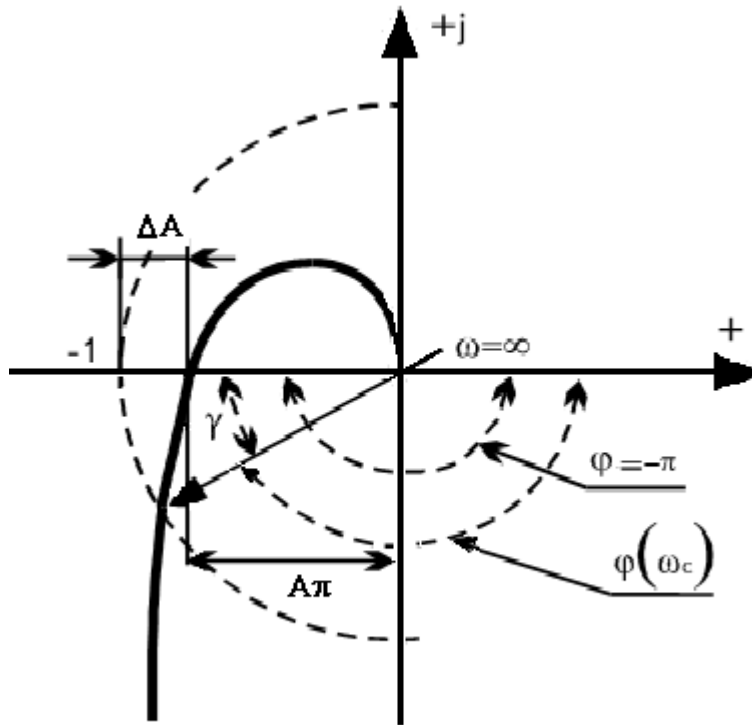


Рис.5.4. Определение запаса устойчивости по фазе γ и модулю ΔA ($1/A_\pi$)

Запас устойчивости по фазе обозначается γ и определяется на частоте среза ω_c , при которой амплитуда $A(\omega_c) = 1$, таким образом, с учетом отрицательного значения $\varphi(\omega_c)$,

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c),$$

где $\varphi(\omega_c)$ - значение аргумента вектора $W_p(j\omega)$ при $\omega = \omega_c$.

Изображенные на рис.5.4 годограф $W_p(j\omega)$ показывает, что система в замкнутом состоянии устойчива и обладает запасом устойчивости по фазе $\gamma > 0$ и по амплитуде $\Delta A > 0$.

Запасы устойчивости можно определить и по логарифмическим характеристикам, при этом логарифмический запас устойчивости по амплитуде определяется как $\Delta L = 0 - L_\pi = 0 - 20 \cdot \lg(A_\pi) = 20 \cdot \lg(1/A_\pi) > 0$ для устойчивой системы ($1/A_\pi > 1$) (в логарифмических единицах $L_\pi = 20 \cdot \lg(A_\pi)$ [дБ]), где A_π - значение модуля вектора $W_p(j\omega)$, аргумент которого равен $\varphi = -\pi$ (рис.5.4).

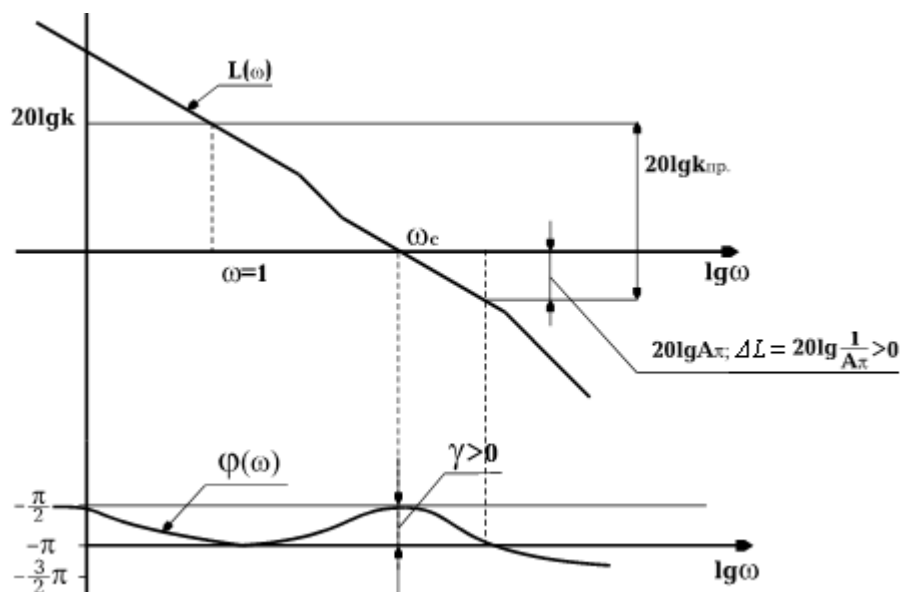


Рис.5.5. Определение запаса устойчивости по ЛАЧХ и ЛФЧХ

Коэффициент усиления, при котором замкнутая САУ находится на границе колебательной устойчивости называется предельным $K_{пред}$.

На основании критерия устойчивости Найквиста предельный коэффициент усиления может быть определен соотношением

$$K_{пред} = K \cdot (1/A_\pi).$$

Предельный коэффициент усиления САУ можно определить по логарифмическим частотным характеристикам (рис.5.5.)

$$20 \cdot \lg K_{пред} = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg A_\pi.$$

Если коэффициент усиления разомкнутой системы меньше предельного коэффициента $K_{пред}$, то система устойчива и обладает запасом устойчивости (по фазе, модулю). В противном случае - система неустойчива.

5.2.3. Характер переходного процесса и быстродействие САУ

Характеристики САУ определяются по ее реакции на единичную ступенчатую функцию, т.е. по переходной характеристике системы. При этом определяются *прямые показатели качества системы*.

Время регулирования t_p служит основной характеристикой быстродействия системы. Быстродействие вычисляется от момента подачи входного воздействия, до момента, когда отклонение функции $h(t)$ не выходит за пределы некоторой заданной зоны $\pm \Delta$ (рис.5.6): $h_{уст} - h_{уст} \leq \Delta$, где Δ – значение, определяемое заданной точностью системы. Обычно Δ задается в пределах (3-5)% от установившегося значения $h_{уст} = h(\infty)$ (рис.5.6).

$$h_{уст.} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W_3(p) \cdot \frac{1}{p},$$

где $W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$ - передаточная функция замкнутой системы.

Установившееся значение переходной функции для статической системы ($\nu = 0$):

$$h_{уст.} = \frac{W_p(0)}{1 + W_p(0)} = \frac{k}{1 + k} \approx 1, \text{ где } k \text{ - коэффициент усиления разомкнутой системы,}$$

($k \gg 1$).

Для астатической системы $\nu = 1$: $h_{уст.} = 1$, так как $\lim_{p \rightarrow 0} W_p(p) \rightarrow \infty$.

Как видно из рис.5.6, характер переходного процесса может быть колебательным и апериодическим. Колебательный процесс характеризуется:

1. Временем регулирования t_p ;
2. Максимальным перерегулированием $\varepsilon_m = h_m - h_{уст.}$.
3. Относительным перерегулированием σ :

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cong h_m - 1; h_\infty = h_{уст.} .$$

4. Временем достижения первого максимума - t_m ;
5. Числом колебаний N за время регулирования t_p ;
6. Точность замкнутой системы Δ в установившемся режиме, о котором мы уже говорили ранее.

Таким образом, прямыми показателями качества переходного процесса являются: время регулирования t_p , перерегулирование ε_m , $\sigma(h_m)$, время достижения первого максимума t_m , число колебаний N , точность системы, которые определяются непосредственно по переходной характеристике $h(t)$.

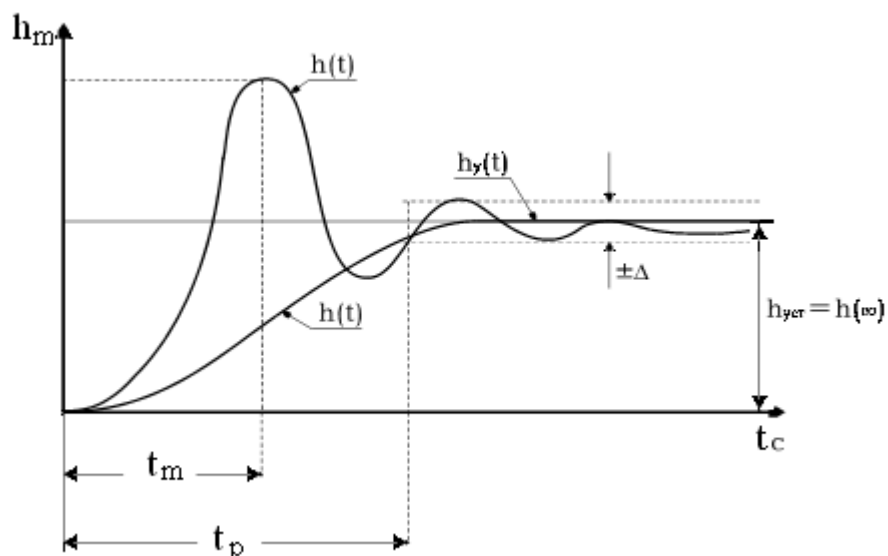


Рис.5.6. Переходная функция $h(t)$ и ее параметры

Для апериодического переходного процесса прямыми показателями качества являются время регулирования и точность системы. Переходная функция системы $h(t)$ может быть получена классическим методом по передаточной функции САУ:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W_3(p)}{p}\right].$$

где $\frac{1}{p}$ - изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции и экспериментально для реальной исследуемой системы или для ее модели. При этом на вход системы (модели) подается единичный скачок. Реакция на выходе и будет являться переходной функцией $y(t) = h(t)$.

5.2.4. Корневые и интегральные показатели качества системы

Корневые показатели качества характеризуют удаленность полюсов передаточной функции системы (замкнутой) от мнимой оси (границы устойчивости). При этом попадание действительного полюса на мнимую ось означает границу апериодической устойчивости, а пары комплексных полюсов – границу колебательной устойчивости. К корневым показателям относятся два показателя: удаленность ближайшего к мнимой оси отрицательного (отрицательных) полюсов от мнимой оси – **степень устойчивости** (λ) и максимальное отношение мнимой части полюса к его действительной части – **колебательность** (μ) (рис.5.7).

$$\mu = \max(\operatorname{tg} \varphi_{\max})$$

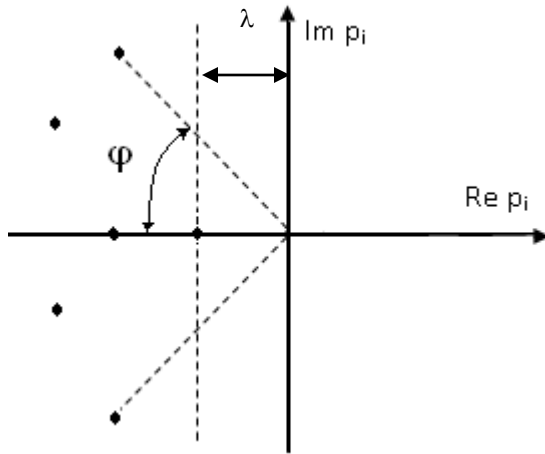


Рис. 5.7. Корневые показатели качества

Степень устойчивости λ можно найти по критерию устойчивости Гурвица для характеристического полинома исследуемой системы

$$A(\lambda) = a_0(p - \lambda)^n + a_1(p - \lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p - \lambda) + a_n$$

И определения значения λ , при котором система попадает на границу устойчивости. Степень колебательности свидетельствует о наличии колебаний в системе, при $\mu=0$ – процесс в системе апериодический.

Интегральные показатели основаны на исследовании интеграла от ошибки системы $e(t)$. При этом используется интегральная квадратическая ошибка: $\int_0^\infty e^2(t)dt$ либо взвешенную интегральную квадратическую ошибку $\int_0^\infty (e^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}^2(t) + \dots + \tau_k^2 e^{(k)2}(t))dt$, минимизация которых позволяет оценить качество системы и найти оптимальные параметры системы.

5.3. Выводы

Устойчивость – не достаточное условие нормального функционирования систем, для которых важным является качество – комплекс требований к свойствам САУ. Одним из основных требований является точность отработки управляющего сигнала при наличии в системе возмущений. В разделе 5.2 показано, что сигнал ошибки складывается из ошибки от управляющего сигнала (5.2.1) и ошибки от возмущающего сигнала (5.2.2). При этом ошибки от управляющего сигнала прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления разомкнутой системы K_p (за исключением статической ошибки, обратно пропорциональной $1+K_p$) и определяются соотношением порядка астатизма системы по управлению ν (разности количества интегрирующих и дифференцирующих звеньев в контуре обратной связи) и порядка степенного управляющего

сигнала μ (при $\mu=v$ - ошибка конечная, при $\mu>v$ - бесконечная и при $\mu<v$ - равная нулю). Ошибки от возмущающего сигнала прямо пропорциональны уровню входного сигнала, обратно пропорциональны коэффициенту усиления звеньев разомкнутой системы, лежащих до точки приложения возмущения K_1 и определяются соотношением порядка астатизма системы по возмущению ν_1 (разности количества интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих до точки приложения возмущения) и порядка степенного возмущающего сигнала μ (при $\mu=\nu_1$ - ошибка конечная, при $\mu>\nu_1$ - бесконечная и при $\mu<\nu_1$ - равная нулю). В разделе 5.2 даются определения статической, кинетической ошибки и ошибки по ускорению, определяемых порядком входных степенных сигналов (0, 1, 2) и статической, астатической системы и системы с астатизмом ν - го порядка, определяемых в соответствии с порядком астатизма (0, 1, 2... ν). В разделе 5.2.3.приводится пример расчета установившегося значения ошибки.

В разделе 5.3 рассматриваются прямые показатели качества, определяемые по виду переходной функции и косвенные показатели, определяемые по частотным характеристикам разомкнутой системы и влияющие на качество работы замкнутой системы в динамическом режиме.

5.4. Вопросы

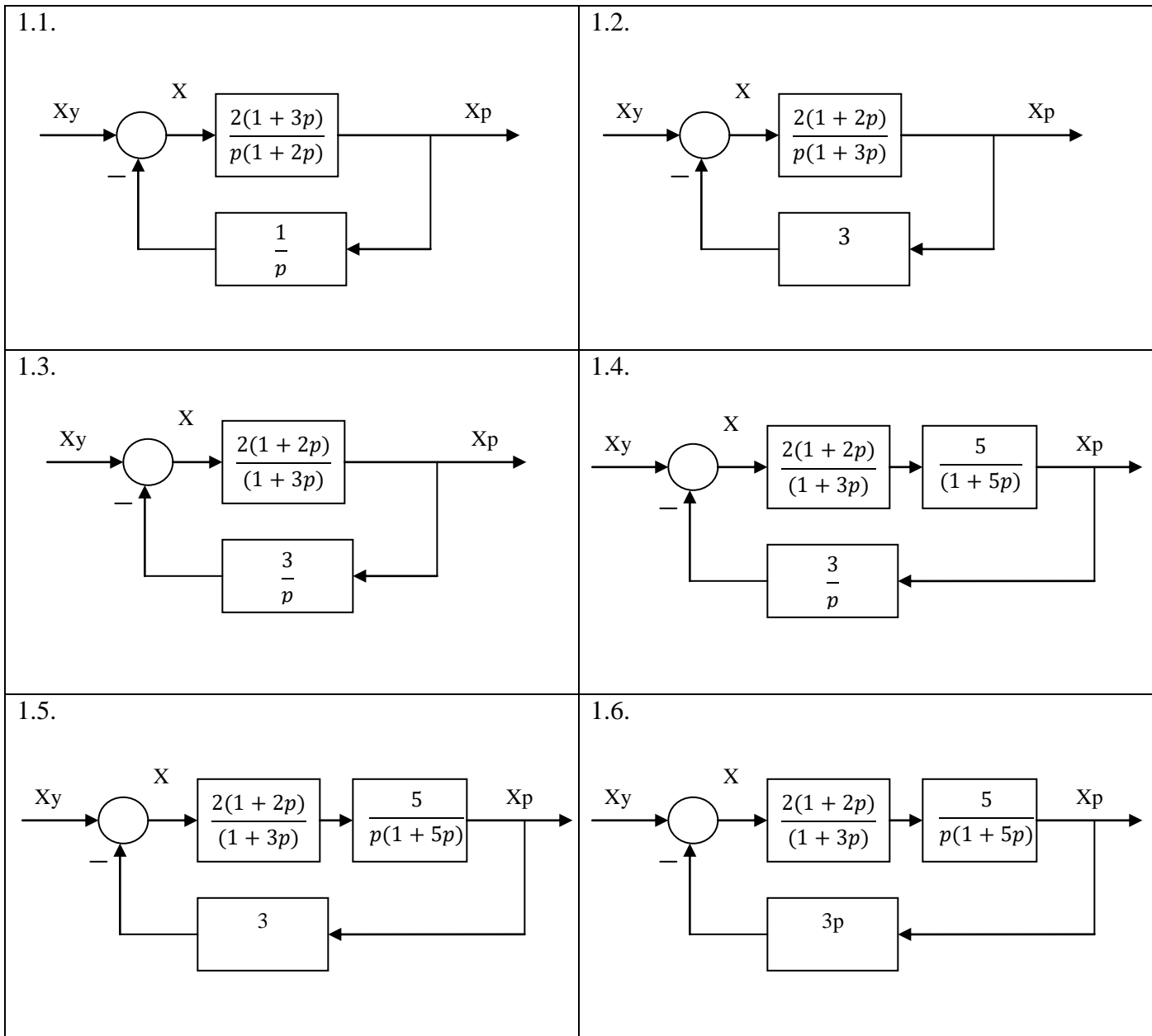
1. Чему равен порядок астатизма по управлению.
2. Чему равен порядок астатизма по возмущению.
3. От чего зависит величина ошибки от управляющего сигнала, при каком соотношении порядка астатизма и порядка степенного сигнала ошибка является конечной.
4. От чего зависит величина ошибки от возмущающего сигнала, при каком соотношении порядка астатизма и порядка степенного сигнала ошибка является конечной.
5. Какая ошибка называется статической, кинетической, ошибкой по ускорению.
6. Какая система называется статической, астатической, системой с астатизмом второго порядка по управлению.
7. Какая система называется статической, астатической, системой с астатизмом второго порядка по возмущению.
8. Назовите прямые показатели качества системы.
9. Перечислите косвенные показатели качества, определяемые по амплитудно-фазовой характеристике.

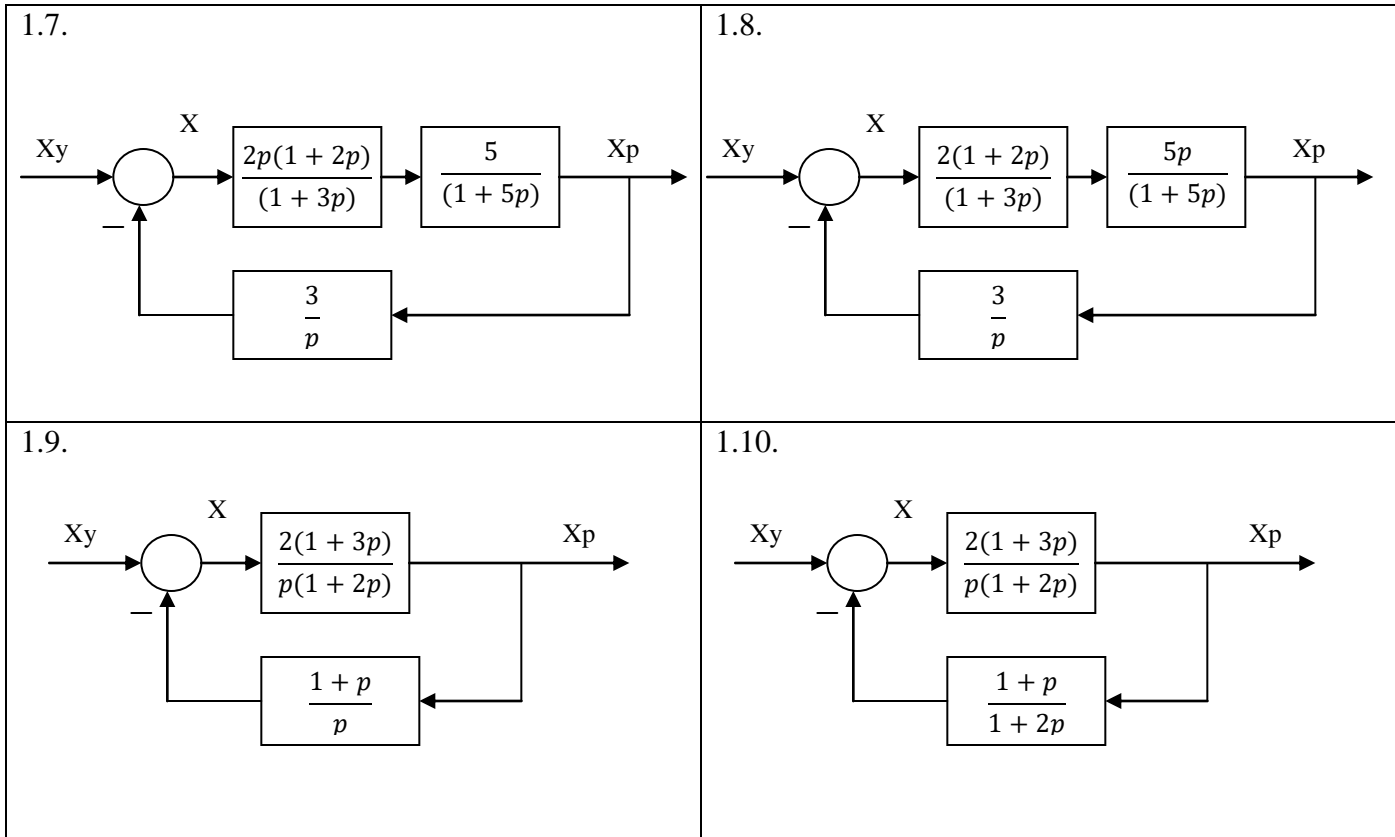
10. Перечислите косвенные показатели качества, определяемые по логарифмическим характеристикам.

11. Как определить предельный коэффициент усиления по амплитудно-фазовой характеристике, по логарифмическим частотным характеристикам.

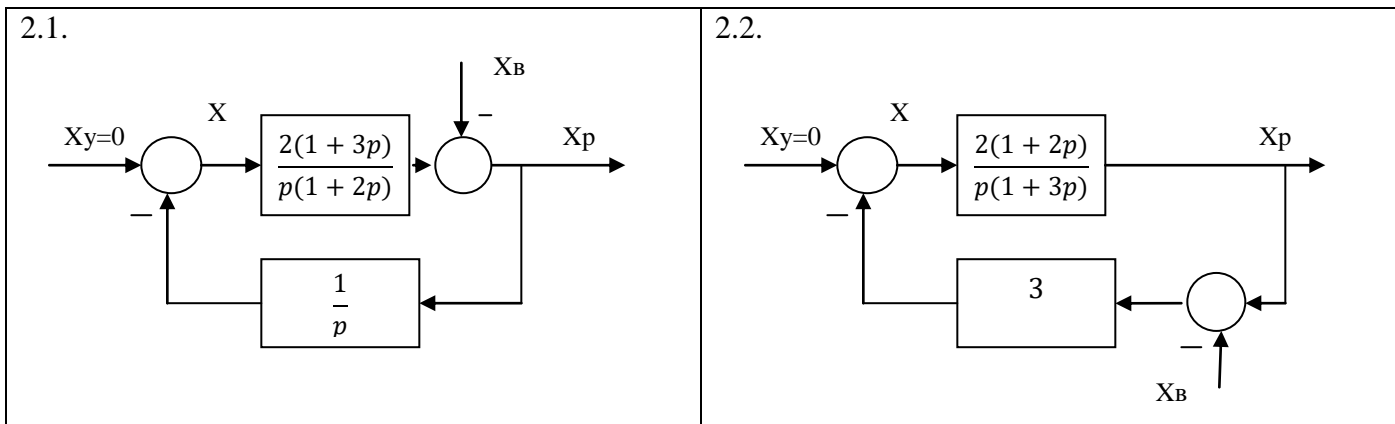
5.5. Задания

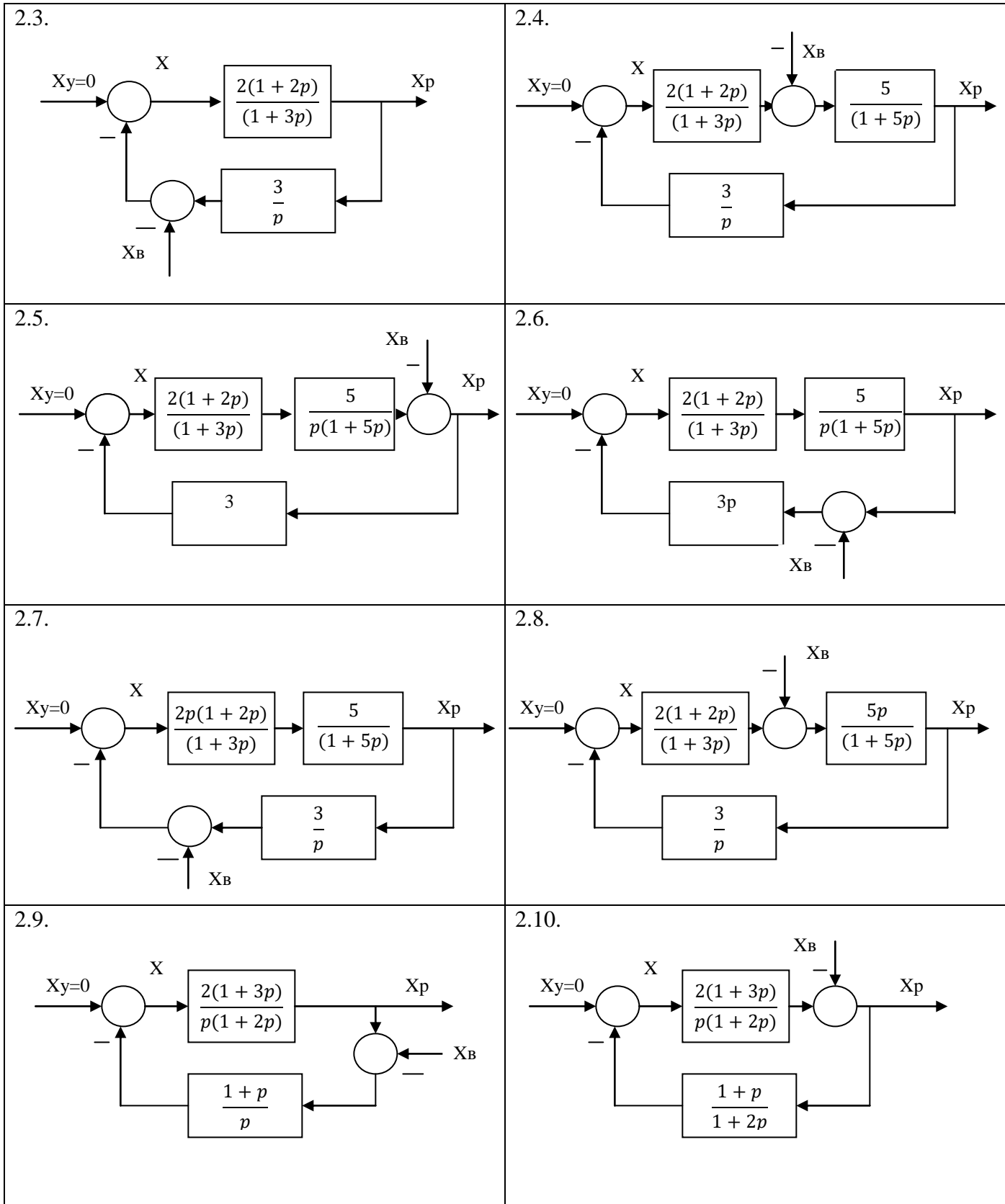
1. Для системы, представленной структурной схемой, убедиться в устойчивости, найти статическую, кинетическую ошибки, ошибку по ускорению и порядок астатизма по управлению:



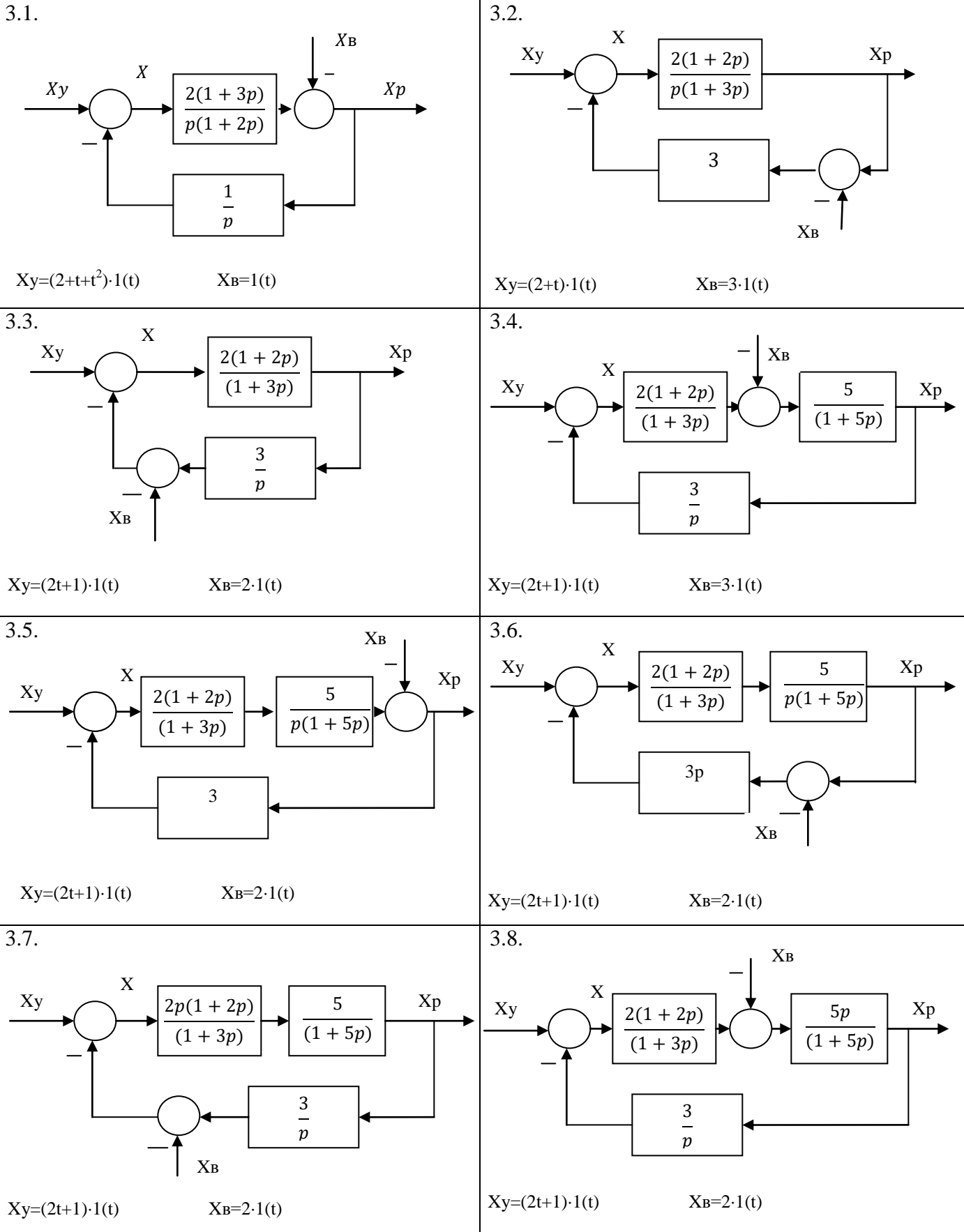


2. Для системы, представленной структурной схемой, убедиться в устойчивости, найти статическую, кинетическую ошибки, ошибку по ускорению и порядок астатизма по возмущению:

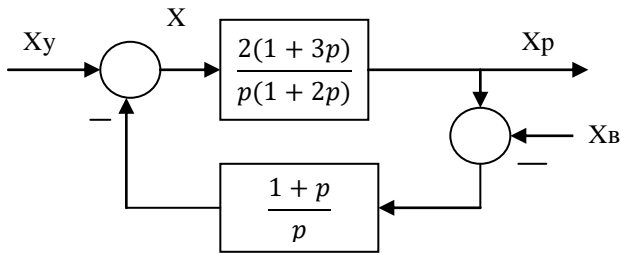




3. Найти ошибку, возникающую при воздействии заданных сигналов управления и возмущения.



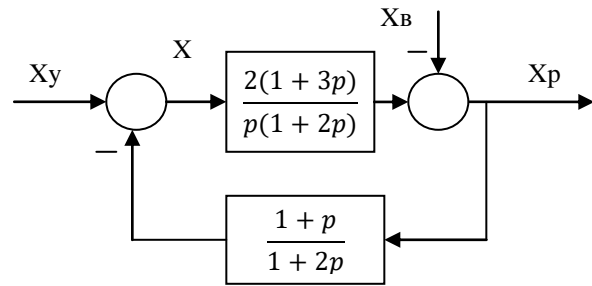
3.9.



$$X_y = (2+t+t^2) \cdot 1(t)$$

$$X_b = 1(t)$$

3.10.

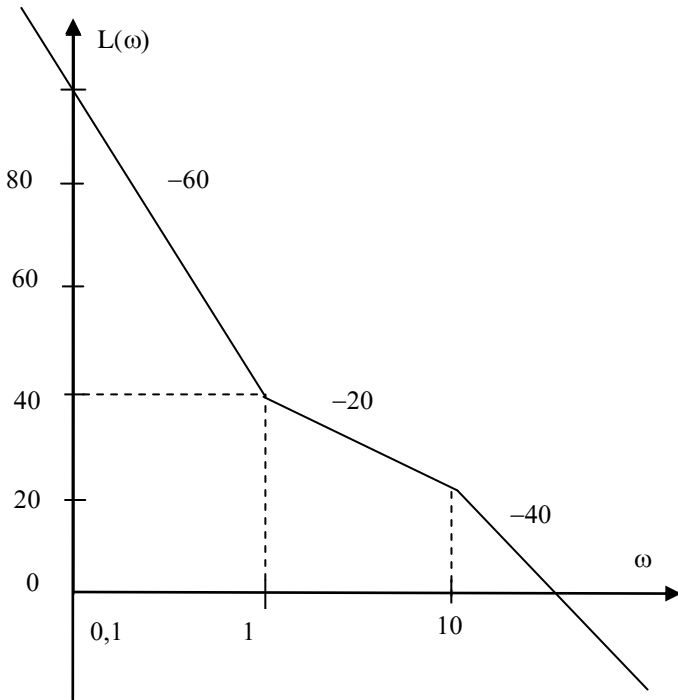


$$X_y = (2t+1) \cdot 1(t)$$

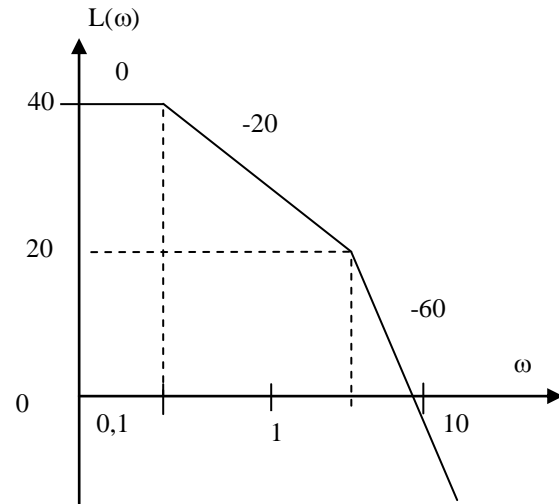
$$X_b = 1(t)$$

4. По заданной логарифмической амплитудной частотной характеристике минимально-фазовой системы построить логарифмическую фазовую частотную характеристику, амплитудно-фазовую характеристику и определить косвенные показатели качества замкнутой системы: $K_{пред}$, $\omega_{ср}$, $\omega_{пл}$, ΔA , $A_{л}$, γ , ΔL , $L_{л}$, а также конечные значения ошибок по управлению (для $K_{пред}/2$).

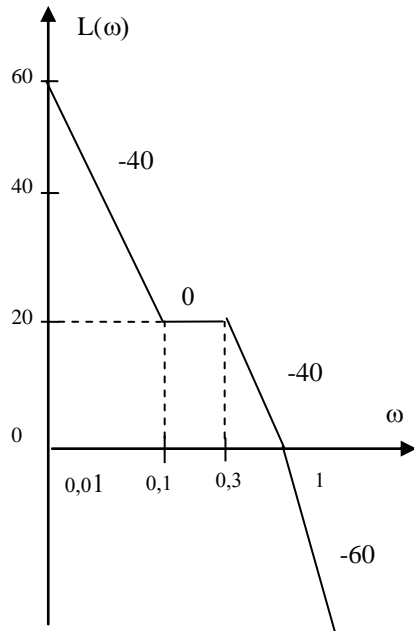
4.1.



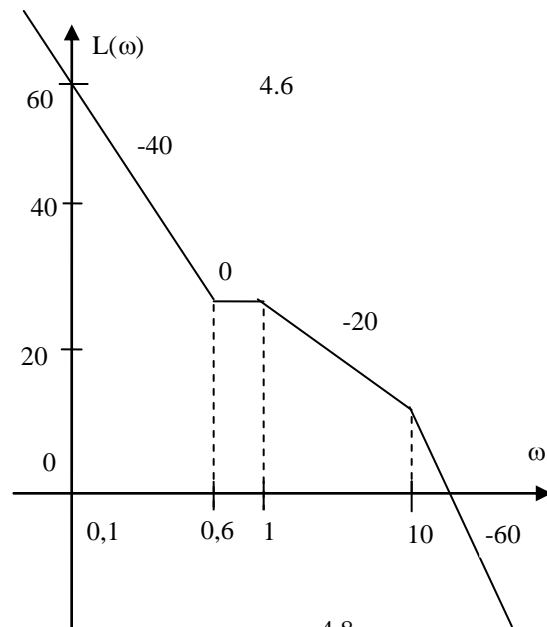
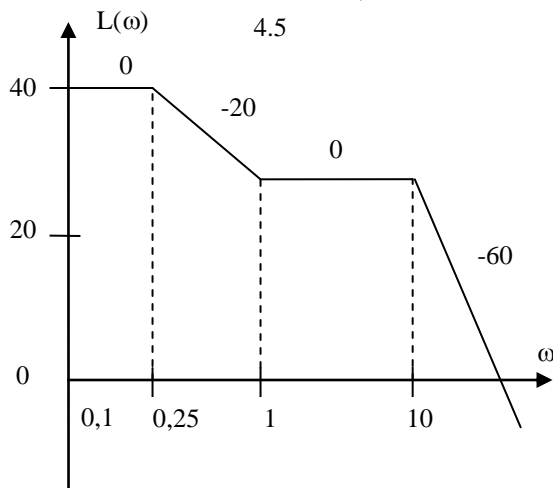
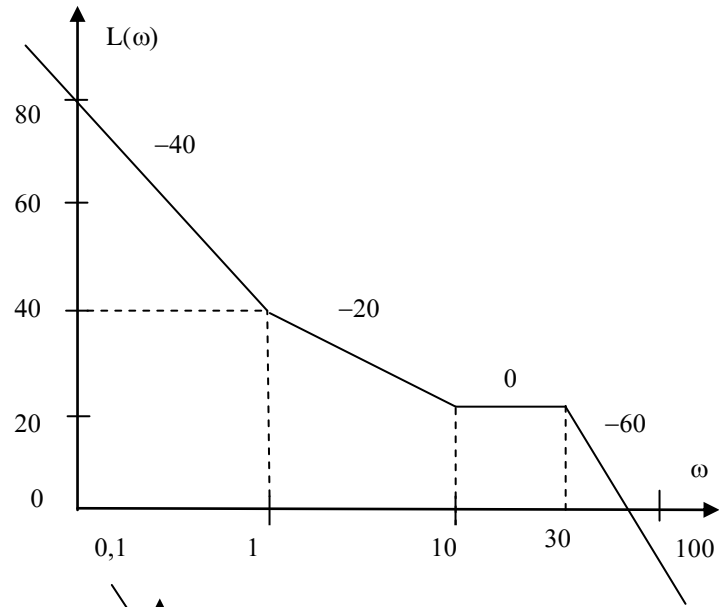
4.2



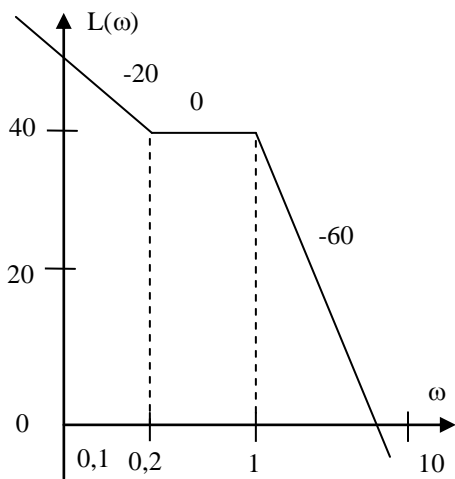
4.3



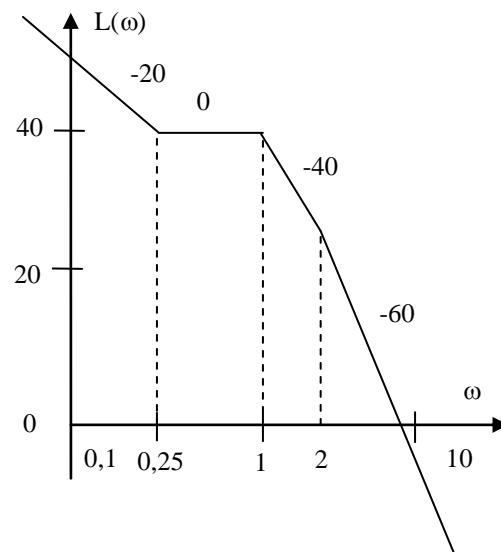
4.4

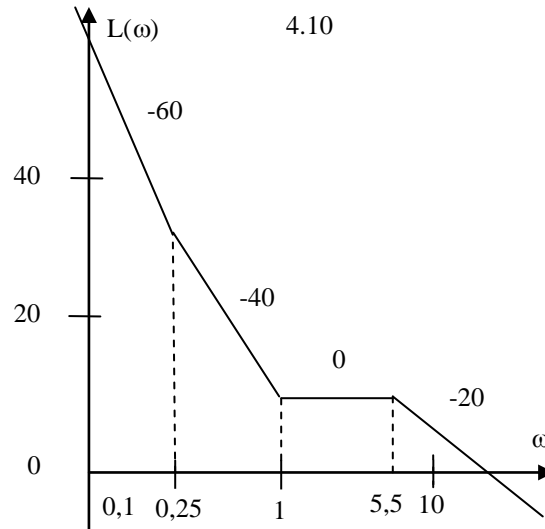
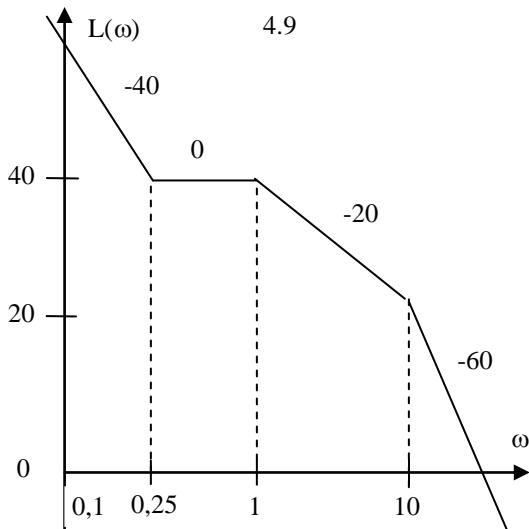


4.7



4.8



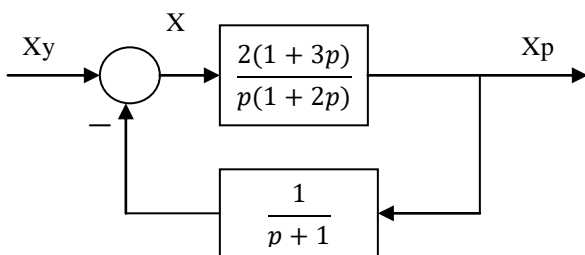


5. Найти прямые показатели качества по переходной функции замкнутых систем, для которых в таблице приведена передаточная функция разомкнутой системы:

| | |
|--|--|
| 5.1. $W(p) = \frac{1+2p}{p(1+5p)} e^{-0.2p}$ | 5.2. $W(p) = \frac{1+2p}{(p+1)(1+5p)} e^{-0.1p}$ |
| 5.3. $W(p) = \frac{10p}{(1+2p)(1+5p)} e^{-0.3p}$ | 5.4. $W(p) = \frac{10(1+2p)}{p(1+5p)} e^{-0.5p}$ |
| 5.5. $W(p) = \frac{1+2p}{p(1+5p)(1+10p)}$ | 5.6. $W(p) = \frac{20}{p(1+10p)} e^{-p}$ |
| 5.7. $W(p) = \frac{5p}{(1+2p)(1+10p)} e^{-p}$ | 5.8. $W(p) = \frac{3(1+3p)}{p(1+10p)} e^{-2p}$ |

5.6. Практикум по главе 5

5.6.1. Для системы, представленной структурной схемой, убедиться в устойчивости, найти статическую, кинетическую ошибки, ошибку по ускорению и порядок астатизма по управлению:



Запишем передаточную функцию, связывающую ошибку системы X со входным сигналом Xy:

$$W_o^y(p) = \frac{X(p)}{Xy(p)} = \frac{1}{1 + Wp(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2(1+3p)}{p(1+p)(1+2p)}}$$

$$W_0^y(p) = \frac{p(1+p)(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} = \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3 + 3p^2 + 7p + 2}$$

Проверим устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица, для чего составим определитель

$$\text{Гурвица 3-го порядка: } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 4 = 17 > 0; \quad \Delta_1 = 3 > 0.$$

Таким образом, $a_0=2>0$ и все определители Гурвица положительны, т.е. замкнутая система устойчива.

- 1) Найдем статическую ошибку, т.е. ошибку, возникающую в системе при подаче единичной ступенчатой функции на ее вход (изображение по Лапласу равно $\frac{1}{p}$), таким образом,

$$\text{изображение сигнала ошибки по Лапласу имеет вид: } X(p) = W_0^y(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3+3p^2+7p+2} \cdot \frac{1}{p}.$$

Для нахождения установившегося значения ошибки используем теорему предельного перехода:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3 + 3p^2 + 7p + 2} \cdot \frac{1}{p} = 0$$

- 2) Кинетическая ошибка возникает в замкнутой системе при подаче на вход линейно возрастающего сигнала (изображение по Лапласу равно $\frac{1}{p^2}$), таким образом, изображение

$$\text{ошибки по Лапласу имеет вид: } X(p) = W_0^y(p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3+3p^2+7p+2} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

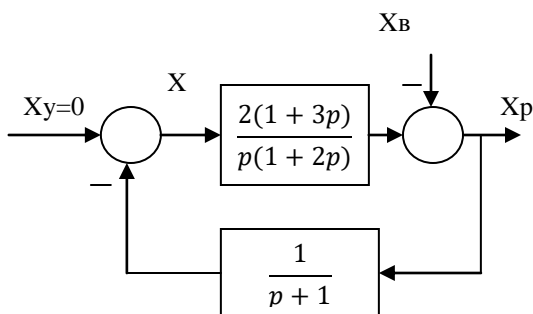
Используя теорему предельного перехода, получим: $x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3+3p^2+7p+2} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}.$

- 3) Для определения ошибки по ускорению подадим на вход системы квадратичное воздействие вида: $x_y(t) = \frac{t^2}{2}$, изображение которого равно $\frac{1}{p^3}$. Вычисление ошибки дает

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3+3p^2+7p+2} \cdot \frac{1}{p^3} = \infty.$$

- 4) Порядок астатизма по управлению ν равен разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в контуре обратной связи (от сигнала ошибки до входного управляющего сигнала), т.е. $\nu=1$. Порядок астатизма можно определить по порядку входного сигнала, при котором ошибка принимает конечное значение, т.е. $\nu=1$.

5.6.2. Для системы, представленной структурной схемой, убедиться в устойчивости, найти статическую, кинетическую ошибки, ошибку по ускорению и порядок астатизма по



возмущению.

Замкнутая система устойчива, что следует из предыдущих вычислений по критерию Гурвица. Для вычисления ошибки

по возмущению запишем передаточную функцию от ошибки к возмущению, а именно:

$$W_0^B(p) = \frac{X(p)}{X_B(p)} = \frac{\frac{1}{p+1}}{1 + Wp(p)} = \frac{\frac{1}{p+1}}{1 + \frac{2(1+3p)}{p(1+p)(1+2p)}} = \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)}$$

- 1) Рассчитаем статическую ошибку по возмущению (изображение по Лапласу от единичной ступенчатой функции равно $\frac{1}{p}$):

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} \cdot \frac{1}{p} = 0$$

- 2) Кинетическая ошибка по возмущению (изображение по Лапласу от линейно возрастающего сигнала равно $\frac{1}{p^2}$):

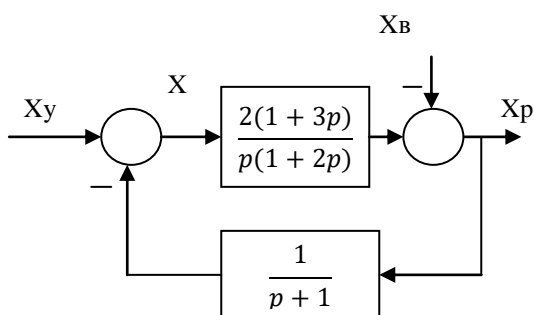
$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}$$

- 3) Ошибка по ускорению (изображение по Лапласу от квадратично возрастающего сигнала $x_y(t) = \frac{t^2}{2}$ равно $\frac{1}{p^3}$):

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} \cdot \frac{1}{p^3} = \infty$$

- 4) Порядок астатизма по возмущению ν_1 равен **1**. (Разности количества интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в контуре обратной связи от сигнала ошибки до сигнала возмущения или порядку степенного сигнала возмущения, при котором ошибка принимает конечное значение, т.е. **1**).

5.6.3. . Найти ошибку в заданной системе, возникающую при воздействии заданных сигналов управления и возмущения ($X_y=(2+2t) \cdot 1(t)$ $X_B=1(t)$).



Запишем выражение для ошибки от двух воздействий,

используя принцип суперпозиции для линейных систем:

$$X(p) = X^y(p) + X^B(p) = W_0^y(p)X_y(p) + W_0^B(p)X_B(p)$$

$$X_y(p) = L\{(2+2t) \cdot 1(t)\} = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}$$

$$X_B(p) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$$

$$X(p) = X^y(p) + X^B(p) = \frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3 + 3p^2 + 7p + 2} \cdot \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}\right) + \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} \cdot \frac{1}{p}$$

Определим установившееся значение ошибки, используя теорему о предельном значении:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{p(1+p)(1+2p)}{2p^3 + 3p^2 + 7p + 2} \cdot \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} \right) + \frac{p(1+2p)}{p(1+p)(1+2p) + 2(1+3p)} \cdot \frac{1}{p} \right) = 1$$

Таким образом, ошибка в системе равна 1.

5.6.4. По заданной логарифмической амплитудной частотной характеристике минимально-фазовой системы построить логарифмическую фазовую частотную характеристику, амплитудно-фазовую характеристику и определить косвенные показатели качества замкнутой системы: $K_{пред}$, $\omega_{ср}$, ω_{π} , ΔA , A_{π} , γ , ΔL , L_{π} , а также конечные значения ошибок по управлению (для $K_{пред}/2$).

Восстановим передаточную функцию разомкнутой минимально фазовой системы по ЛАЧХ:

$$Wp(p) = \frac{0,1(1+10p)^3}{p^2(1+20p)(1+3p)^3}$$

Запишем выражение для фазовой частотной характеристики:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg 20\omega + 3\arctg 10\omega - 3\arctg 3\omega$$

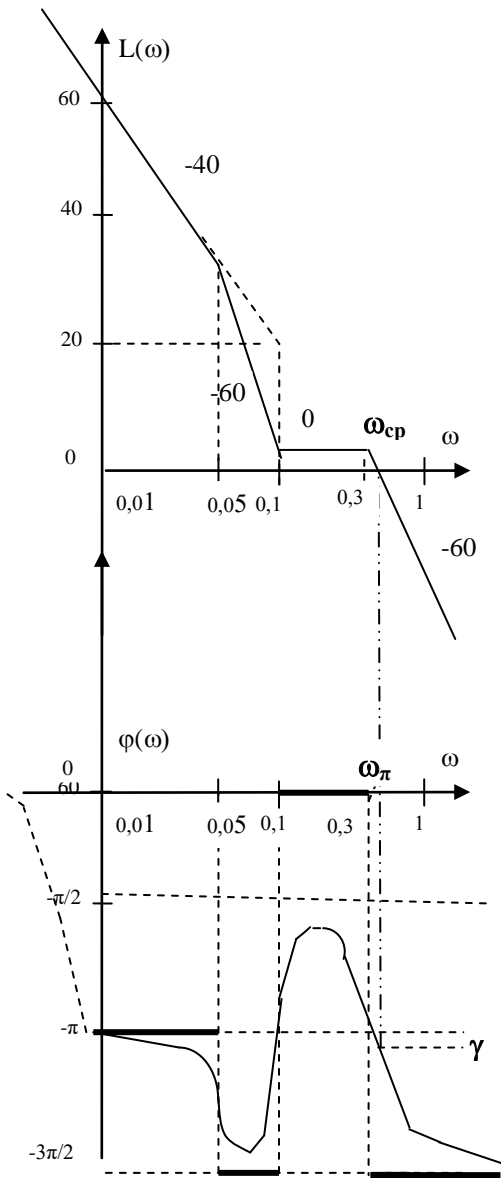
Построим ЛФЧХ, учитывая асимптоты и АФХ в Mathcad. Из построенных характеристик определяем, что система неустойчива, значение частоты среза $\omega_{ср} = 0,475$, $\omega_{\pi} = 0,35$;

$\gamma = -15^\circ$; $A_{\pi} = 1,74$; $\Delta A = -0,74$; $K_{пред} = 0,057$. По наклону на первом участке ЛАЧХ следует сказать, что система с астатизмом второго порядка по управлению, следовательно, ошибки для

$K = K_{пред}/2 = 0,0285$ составили:

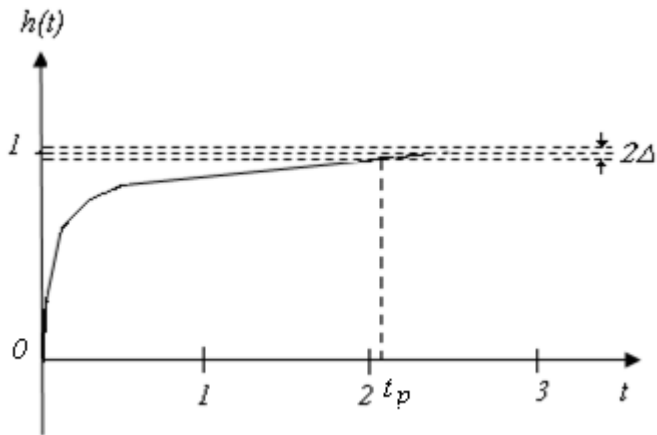
статическая – 0, кинетическая – 0, ошибка по ускорению –

$$\frac{1}{K} = 34,8 \text{ 1/с}^2$$



5.6.5. Найти прямые показатели качества по переходной функции замкнутой системы, для которой приведена передаточная функция разомкнутой системы: $Wp(p) = \frac{3(1+2p)}{p(1+p)}$.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы: $Wз(p) = \frac{3+6p}{p^2+7p+3}$. Полюса передаточной функции замкнутой системы равны $p_1=-0,46$; $p_2=-6,54$. Для построения переходной функции разложим изображение переходной функции $H(p) = \frac{3+6p}{p^2+7p+3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+0,46} + \frac{C}{p+6,54}$. Найдем коэффициенты А,В,С методом неопределенных коэффициентов: $A=1$; $B=-0,1$; $C=-0,9$. Переходная функция задается выражением: $h(t) = (1 - 0,1e^{-0,46t} - 0,9e^{-6,54t}) \cdot 1(t)$. Время регулирования $t_p = 2,1$ с. – время вхождения в зону 2Δ . Статическая ошибка равна нулю.



5.7. Список литературы

1. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
2. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. - М.: Изд-во МЭИ, 1992, 103 с.
3. Ягодкина Т.В., Хризолитова С.А., Бондин О.А. Применение Mathcad для решения задач теории автоматического управления. Учеб. Пос. по курсу "Основы теории управления".- М.: Изд-во МЭИ, 2004, - 64 с.
4. Исследование САУ с использованием прикладного пакета MATLAB. Лабораторный практикум: учебное пособие / Т.В. Ягодкина, С.А. Хризолитова, В.М. Беседин и др.- М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 80 с.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.
6. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Автоматическое управление», Устойчивость линейных и нелинейных систем, Державин О.М., Мжельская В.А., Чхартишвили Л.П.,– М.: Моск.энерг.ин-т, 1987. – 38с.

6. Синтез систем автоматического управления

(*знать*: типы коррекции и методики их применения; *уметь*: применять методики построения корректирующих устройств для решения задач синтеза систем с заданными показателями качества; *владеть*: приемами построения частотных характеристик и временных характеристик для реализации методов коррекции.)

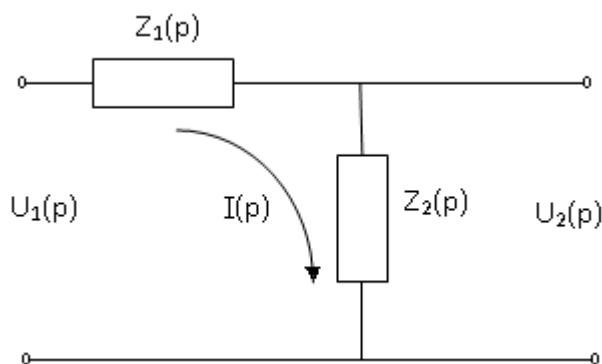
6.1. Методы синтеза САУ

Для эффективной работы системы автоматического управления она должна удовлетворять требуемым показателям качества, предъявляемым к точности, быстродействию, плавности протекания в ней переходных процессов и т.д. Такую систему надо уметь синтезировать. В настоящее время существует множество методов синтеза, основанных на введении в систему специальных устройств, получивших название корректирующих.

6.1.1. Типы корректирующих устройств

Корректирующие устройства (КУ) делятся на неэлектрические и электрические. Неэлектрические КУ могут быть реализованы на пневмоавтоматике, гидроавтоматике и пр. Электрические, в свою очередь, могут быть реализованы на переменном и постоянном токе. Электрические устройства, работающие на постоянном токе, делятся на две группы: активные (с коэффициентом усиления, большим единицы) и пассивные (с коэффициентом усиления, меньшим единицы). Пассивные корректирующие устройства реализуются на пассивных четырехполюстниках,

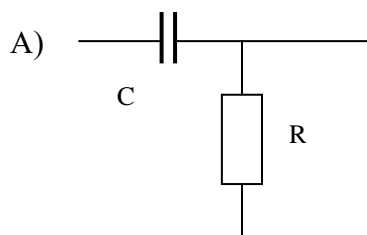
электрическая схема которых представлена на рисунке.



Передаточная функция четырехполюсника равна: $W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I(p) \cdot Z_2(p)}{I(p) \cdot (Z_1(p) + Z_2(p))} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$.

В зависимости от элементов КУ делятся на КУ дифференцирующего, интегрирующего и интегро-дифференцирующего типов.

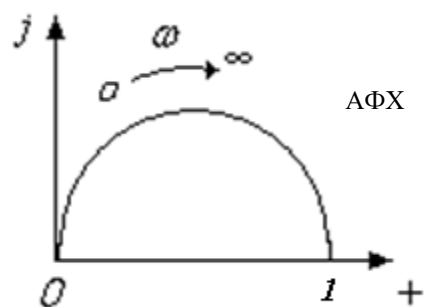
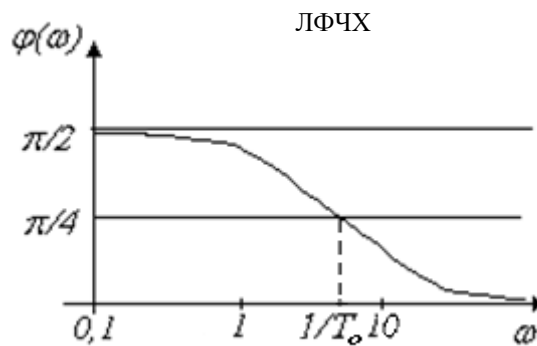
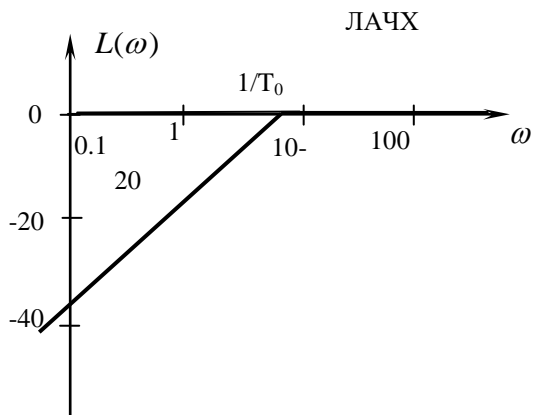
Корректирующие устройства дифференцирующего типа



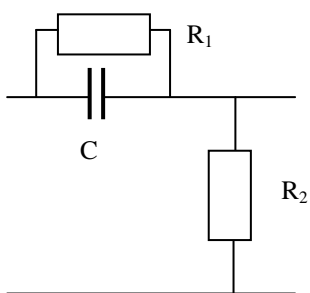
$$Z_1(p) = \frac{1}{pC}; \quad Z_2(p) = R;$$

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{R}{\frac{1}{pC} + R} = \frac{pCR}{1 + pCR} = \frac{pT_0}{1 + pT_0}$$

Звено – реально дифференцирующее, имеющее следующие характеристики (ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФХ):



Б)



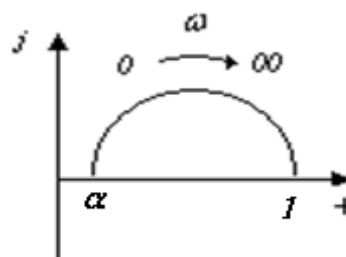
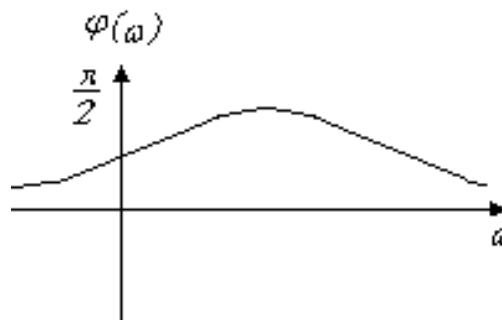
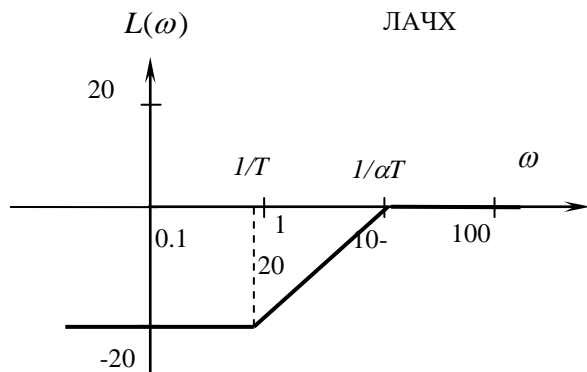
$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{pC} R_1}{\frac{1}{pC} + R_1} = \frac{R_1}{1 + pCR_1}; \quad Z_2(p) = R_2;$$

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + pCR_1} + R_2} = \frac{R_2(1 + pCR_1)}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} = \alpha \frac{1 + pT}{1 + \alpha pT};$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \leq 1.$$

Звено – упругое дифференцирующее с характеристиками (ЛАЧХ,

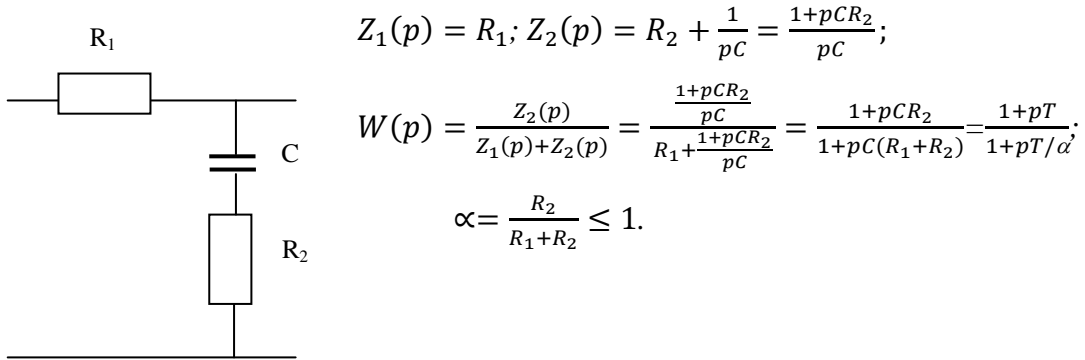
ЛФЧХ, АФХ):



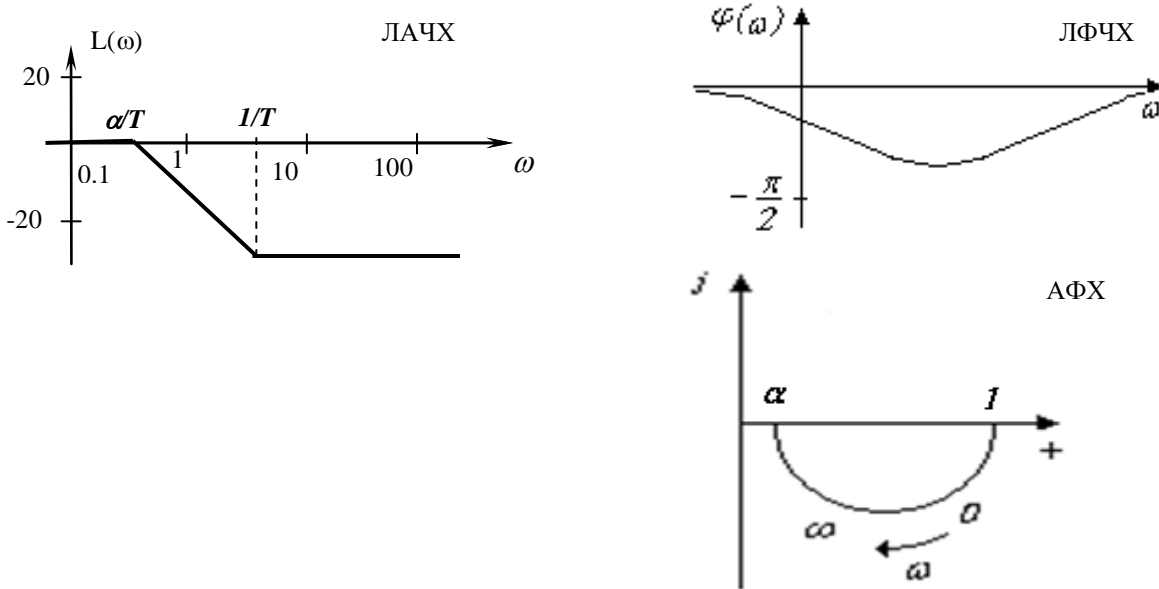
Характеристики корректирующих устройств дифференцирующего типа:

- 1) Требуют дополнительного усиления низкочастотного управляющего сигнала;
- 2) Расширяют полосу пропускания частот;
- 3) Повышают быстродействие системы;
- 4) Ухудшают помехозащищенность системы;
- 5) Вносят опережение по фазе.

Корректирующие устройства интегрирующего типа



Звено – упругое интегрирующее с характеристиками (ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФХ):

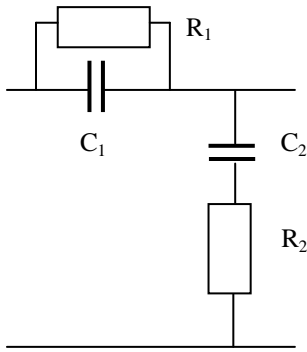


Характеристики корректирующих устройств интегрирующего типа:

- 1) Не требуют дополнительного усиления низкочастотного управляющего сигнала;
- 2) Сужают полосу пропускания частот;
- 3) Понижают быстродействие системы;
- 4) Улучшают помехозащищенность системы;

5) Вносят отставание по фазе.

Корректирующие устройства интегро-дифференцирующего типа



$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{pC_1}R_1}{\frac{1}{pC_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + pC_1R_1}; \quad Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{pC_2} = \frac{1 + pC_2R_2}{pC_2};$$

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{\frac{1 + pC_2R_2}{pC_2}}{\frac{R_1}{1 + pC_1R_1} + \frac{1 + pC_2R_2}{pC_2}} =$$

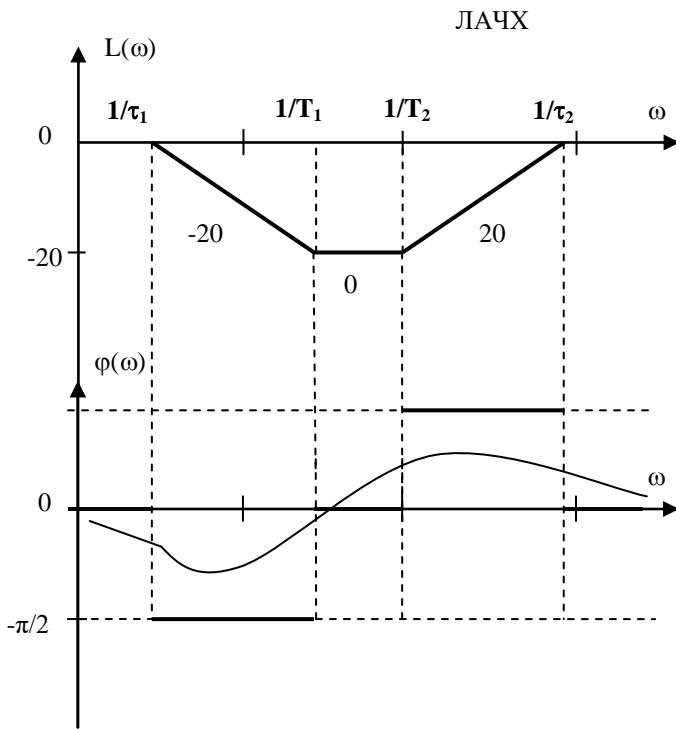
$$\frac{(1 + pC_1R_1)(1 + pC_2R_2)}{C_1R_1C_2R_2p^2 + p(C_1R_1 + C_2R_2 + C_2R_1) + 1} = \frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}{1 + p(T_1 + T_2 + \tau) + p^2T_1T_2}.$$

Заметим, что $\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p) = 1$

Найдем полюса передаточной функции

$$p_{1,2} = \frac{-(T_1 + T_2 + \tau) \pm \sqrt{(T_1 + T_2 + \tau)^2 - 4T_1T_2}}{2T_1T_2}. \text{ Введем обозначения } \tau_1 = -\frac{1}{p_1}; \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2}. \text{ С учетом обозначений}$$

можно записать $W(p) = \frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}{1 + p(T_1 + T_2 + \tau) + p^2T_1T_2} = \frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}$. Принимая, что $\tau_1 < T_1 < T_2 < \tau_2$, построим



вносят отставание или опережение по фазе.

Наиболее известным и часто применяемым является синтез на основе частотных характеристик: прямой и инверсной амплитудно-фазовой характеристики, логарифмических частотных характеристик. Рассмотрим синтез САУ на основе логарифмических частотных характеристик.

частотные характеристики интегро-дифференцирующего звена:

Характеристики корректирующих устройств интегро-дифференцирующего типа:

- 1) Не требуют дополнительного усиления низкочастотного управляющего сигнала;
- 2) Сужают полосу пропускания частот;
- 3) Понижают быстродействие системы;
- 4) Не изменяют помехозащищенность системы;
- 5) На разных частотных диапазонах

6.2. Синтез САУ по логарифмическим частотным характеристикам

Метод синтеза по логарифмическим характеристикам является графическим, итерационным, выполняемым по этапам:

1. Построение логарифмических частотных характеристик исходной, нескорректированной разомкнутой системы и проверка ее показателей качества. Если показатели качества не удовлетворяют требуемым, то переход к этапу 2.
2. Исходя из требуемых показателей качества в соответствии с рекомендациями и с учетом исходных логарифмических характеристик построение желаемой, или ЛАЧХ скорректированной разомкнутой системы.
3. Нахождение разностной ЛАЧХ.
4. По полученной разностной ЛАЧХ определение метода включения корректирующего устройства: последовательного, параллельного или в цепи обратной связи.
5. В соответствии с выбранным типом коррекции согласно приводимой далее методики построение ЛАЧХ корректирующего звена.
6. Проверка удовлетворения требуемых показателей качества скорректированной системы, выбор корректирующего звена, расчет его параметров. Если показатели качества не удовлетворяют требуемым или звено сложно реализовать, то возврат к п.2 и повторение расчетов.

6.2.1. Методы включения корректирующих устройств

Корректирующие устройства делятся на последовательные, параллельные и устройства в цепи обратной связи в зависимости от их расположения в системе.

Последовательные корректирующие устройства

Располагаются в прямой цепи системы и, как правило, в его электрической части вблизи с измерительным устройством. Схема расположения последовательного корректирующего устройства представлена на рис. 6.1.

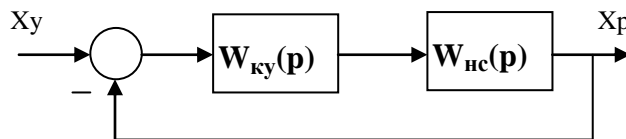


Рис. 6.1. Последовательная коррекция

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна произведению передаточных функций звеньев, расположенных в контуре, т.е. $W_{ск}(p) = W_{кy}(p) \cdot W_{нc}(p)$, откуда

$W_{ск}(j\omega) = W_{кy}(j\omega) \cdot W_{нc}(j\omega)$. Беря модули и логарифмируя, получим соотношение для ЛАЧХ:

$$20\lg|W_{\text{ск}}(j\omega)| = 20\lg|W_{\text{кy}}(j\omega)| + 20\lg|W_{\text{нc}}(j\omega)|, \quad \text{или} \quad L_{\text{ск}}(\omega) = L_{\text{кy}}(\omega) + L_{\text{нc}}(\omega).$$

Из последнего соотношения следует, что $L_0(\omega) = L_{\text{кy}}(\omega) = L_{\text{ск}}(\omega) - L_{\text{нc}}(\omega)$, т.е. ЛАЧХ корректирующего устройства равна разностной ЛАЧХ $L_0(\omega)$, представляющей собой разность скорректированной (желаемой) ЛАЧХ и исходной (нескорректированной) ЛАЧХ.

Параллельные корректирующие устройства

Располагаются параллельно какому-либо устройству в прямой цепи системы (желательно в ее электрической части). Схема расположения параллельного корректирующего устройства представлена на рис. 6.2.

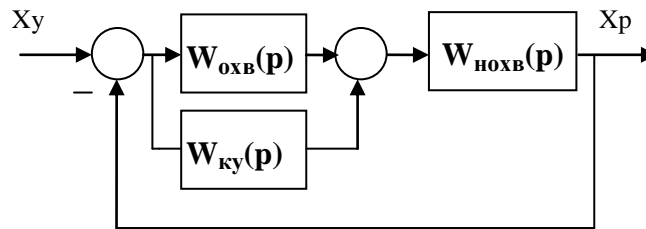


Рис. 6.2. Параллельная коррекция

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы записывается в виде:

$$W_{\text{ск}}(p) = (W_{\text{охв}}(p) + W_{\text{кy}}(p)) \cdot W_{\text{нохв}}(p) = W_{\text{охв}}(p) \cdot W_{\text{нохв}}(p) \cdot \left(1 + \frac{W_{\text{кy}}(p)}{W_{\text{охв}}(p)}\right) = W_{\text{нc}}(p) \cdot W_0(p).$$

Переходя к комплексным коэффициентам усиления, получаем $W_{\text{ск}}(j\omega) = W_{\text{нc}}(j\omega) \cdot W_0(j\omega)$

Беря модули и логарифмируя, получим: $L_{\text{ск}}(\omega) = L_{\text{нc}}(\omega) + L_0(\omega)$, т.е. разностная ЛАЧХ $L_0(\omega)$ представляет собой разность скорректированной (желаемой) ЛАЧХ и нескорректированной (исходной) ЛАЧХ и строится, как и при последовательной коррекции. Передаточная функция параллельного корректирующего устройства рассчитывается затем по формуле, получаемой из ранее приведенного соотношения: $W_{\text{кy}}(p) = W_{\text{охв}}(p) \cdot (W_0(p) - 1)$, где $W_0(p)$ - передаточная функция, восстановленная по разностной ЛАЧХ $L_0(\omega)$.

Корректирующие устройства в цепи обратной связи

Охватывают какие-либо рядом стоящие элементы системы. Схема расположения корректирующего устройства в цепи обратной связи представлена на рис. 6.3.

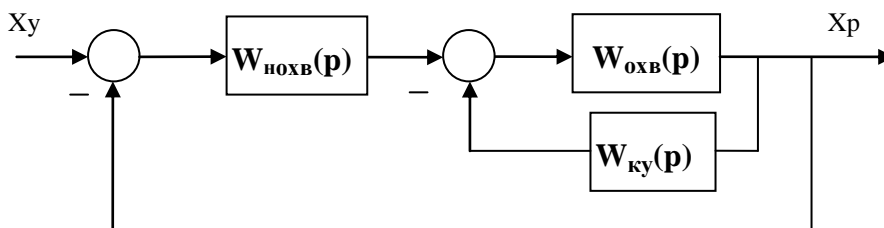


Рис. 6.3. Корректирующее устройство в цепи обратной связи

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы записывается в виде:

$$W_{\text{СК}}(p) = W_{\text{НОХВ}}(p) \cdot \frac{W_{\text{ОХВ}}(p)}{1+W_{\text{ОХВ}}(p)W_{\text{КУ}}(p)} = \frac{W_{\text{ОХВ}}(p) \cdot W_{\text{НОХВ}}(p)}{1+W_{\text{ОХВ}}(p)W_{\text{КУ}}(p)} = \frac{W_{\text{НС}}(p)}{W_0'(p)}$$

Переходя к комплексным коэффициентам усиления, получаем $W_{\text{СК}}(j\omega) = W_{\text{НС}}(j\omega)/W_0'(j\omega)$.

Беря модули и логарифмируя, получим: $L_{\text{СК}}(\omega) = L_{\text{НС}}(\omega) - L_0'(\omega)$, т.е. разностная ЛАЧХ $L_0'(\omega)$ представляет собой разность нескорректированной (исходной) ЛАЧХ и скорректированной (желаемой) ЛАЧХ, т.е. $L_0'(\omega) = -L_0(\omega)$, которая строится, как и при последовательной коррекции вычитанием ЛАЧХ скорректированной системы из ЛАЧХ нескорректированной системы. Передаточная функция корректирующего устройства в цепи обратной связи рассчитывается, исходя из формулы, получаемой из ранее приведенного соотношения: $W_0'(p) = 1 + W_{\text{ОХВ}}(p) \cdot W_{\text{КУ}}(p)$. Переходя к комплексным коэффициентам усиления, получаем $W_0'(j\omega) = 1 + W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)$. Беря модули и логарифмируя, получаем

$$|W_0'(j\omega)| = |1 + W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)|, \\ 20lg|W_0'(j\omega)| = 20lg|1 + W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)| \Rightarrow L_0'(\omega) = 20lg|1 + W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)|$$

Анализ формулы показывает, что на диапазоне частот, при котором $|W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)| > 1$, т.е. $L_0'(\omega) > 0$, единицей можно пренебречь и $L_0'(\omega) = 20lg|W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)| = L_{\text{ОХВ}}(\omega) + L_{\text{КУ}}(\omega)$, т.е. $L_{\text{КУ}}(\omega) = L_0'(\omega) - L_{\text{ОХВ}}(\omega)$. На диапазоне частот, при котором $|W_{\text{ОХВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{КУ}}(j\omega)| \leq 1$, т.е. $L_0'(\omega) \leq 0$ скорректированная система ведет себя как нескорректированная и коррекция не работает.

Из выше приведенных соотношений ясен алгоритм построения, заключающийся в следующем:

- 1) Строится исходная ЛАЧХ разомкнутой системы;
- 2) Строится желаемая ЛАЧХ;
- 3) Определяется ЛАЧХ $L_0'(\omega)$, как разность исходной и желаемой ЛАЧХ;
- 4) Выделяется диапазон частот, на котором $L_0'(\omega) \geq 0$ и для него строится ЛАЧХ элементов, охватываемых обратной связью;
- 5) Строится $L_{\text{КУ}}(\omega)$ как разность $L_0'(\omega)$ и $L_{\text{ОХВ}}(\omega)$;
- 6) Восстанавливается передаточная функция корректирующего устройства, подбирается корректирующее устройство и рассчитываются его параметры.

Анализ передаточной функции скорректированной системы для описанного выше случая позволяет получить рекомендации по выбору звеньев, охватываемых обратной связью.

$$W_{\text{СК}}(p) = \frac{W_{\text{ОХВ}}(p) \cdot W_{\text{НОХВ}}(p)}{1 + W_{\text{ОХВ}}(p)W_{\text{КУ}}(p)} = \frac{W_{\text{НОХВ}}(p)}{W_{\text{КУ}}(p)}$$

Таким образом, из приведенного соотношения ясно, что охватывать обратной связью надо звенья, влияние которых на систему желательно исключить, т.е. звенья нестационарные, с нелинейностями, с большими постоянными времени и т.д.

6.2.2. Построение ЛАЧХ скорректированной системы (желаемой ЛАЧХ)

Построение желаемой ЛАЧХ скорректированной системы осуществляется с учётом следующих соображений:

- наклоны участков ЛАЧХ в области низких и высоких частот для скорректированной системы равны наклонам соответствующих участков ЛАЧХ исходной системы;

- при построении низкочастотного участка желаемой ЛАЧХ следует учесть коэффициент усиления разомкнутой системы, который определяет ошибку системы в установившемся режиме, а его наклон определяется степенью астатизма системы ν (ν - разность числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев). Величина частоты среза выбирается с учётом соотношения

$$- t_{\text{пер}} \leq k\pi/\omega_c, \text{ где } k=f(\sigma). \text{ Зачастую } k \text{ принимается равным } 4.$$

- на частоте среза ω_c наклон желаемой ЛАЧХ необходимо задавать равным **-20дб/дек.** Протяжённость среднечастотного участка слева и справа от частоты среза должна быть равна **0.4 - 0.8** декады, что позволит обеспечить достаточный запас устойчивости по фазе и требуемое качество переходного процесса.

Желаемая ЛАЧХ скорректированной системы должна в возможно большем диапазоне частот совпадать с ЛАЧХ исходной системы, чтобы не усложнялась реализация корректирующего устройства. Если в качестве желаемой ЛАЧХ скорректированной системы может быть выбрана типовая ЛАЧХ, соответствующая системе, имеющей передаточную функцию вида:

$$W_{p,ck}(p) = \frac{k \cdot (1 + T_2 p)^2}{p \cdot (1 + T_1 p)^\alpha \cdot (1 + T_3 p)^\beta},$$

где $K > 1$; $T_1 > T_2 > T_3$; $\alpha = 1 - 2$; $\beta = 1 - 2$, то для её более точного построения можно использовать номограммы связи параметров ЛАЧХ разомкнутой системы с показателями качества процесса управления в замкнутой системе. В этом случае по заданным величинам быстродействия $t_{\text{пер}}$, перерегулирования σ находят ω_1/ω_c и ω_3/ω_c .

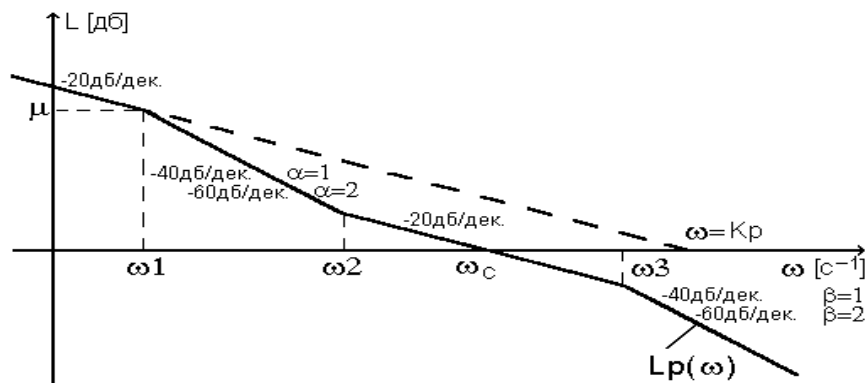


Рис.6.4. Типовая ЛАЧХ скорректированной системы

При построении желаемой ЛАЧХ можно использовать и другие номограммы и графики, которые дают связь между параметрами частотных характеристик и показателями качества. По виду $L_{СК}(\omega)$ восстанавливается передаточная функция скорректированной разомкнутой системы и строится ЛФЧХ $\varphi_{СК}(\omega)$. По логарифмическим характеристикам $L_{СК}(\omega)$ и $\varphi_{СК}(\omega)$ определяют запасы устойчивости и ошибку в установившемся режиме. Прямые показатели качества системы можно определить по переходной характеристике, построенной с помощью моделирования замкнутой системы на ЭВМ.

6.2.3. Примеры построения корректирующих устройств

1) Графические построения при последовательной коррекции представлены на рис.6.5.

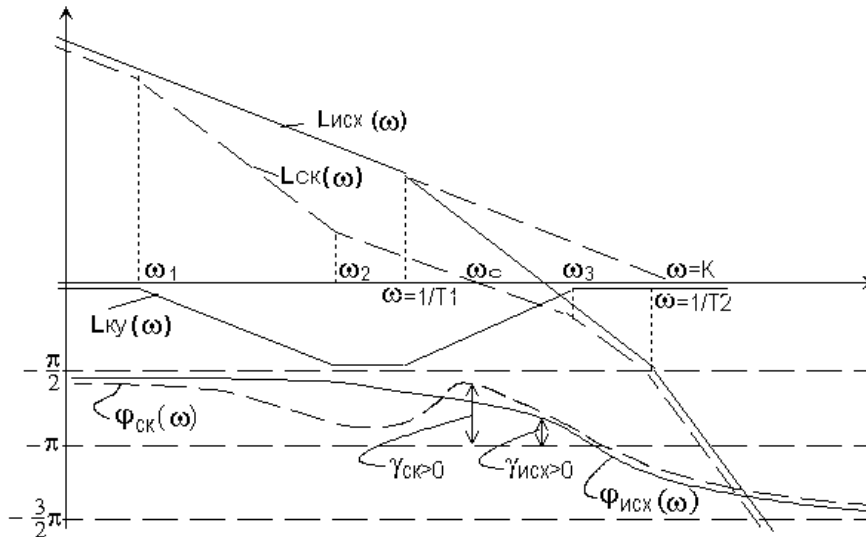


Рис. 6.5. Пример построения последовательного корректирующего устройства

Далее по виду найденной ЛАЧХ корректирующего устройства (рис.6.5) определяется структура и параметры звена, включённого в прямую цепь управления.

2) При **параллельной коррекции** корректирующее устройство включается параллельно какому-нибудь устройству исходной САУ. $W_{кy}(p) = W_1(p) \cdot [W_0(p) - 1]$.

Соотношения для логарифмических частотных характеристик скорректированной разомкнутой системы приведены выше. Из них следует порядок определения ЛАЧХ параллельного корректирующего устройства, заключающийся в построении $L_0(\omega)$ по аналогии с построением $L_{кy}(\omega)$ при последовательной коррекции, восстановлении передаточной функции $W_0(p)$ по $L_0(\omega)$ и определении $W_{кy}(\omega)$.

3) При **коррекции с помощью обратной связи (ОС)** корректирующее устройство охватывает одно или несколько устройств исходной САУ. Обычно обратной связью охватываются

устройства системы, которые обладают наибольшими постоянными времени и имеют недостаточно стабильные, нелинейные характеристики.

В этом случае также используется графический метод на основе построения ЛАЧХ. Задача синтеза звена обратной связи решается несколько сложнее, чем в случае последовательного корректирующего устройства. В соответствии с приведенными выше соотношениями проведены построения, приведенные рис.6.6, и получена ЛАЧХ корректирующего устройства в цепи обратной связи.

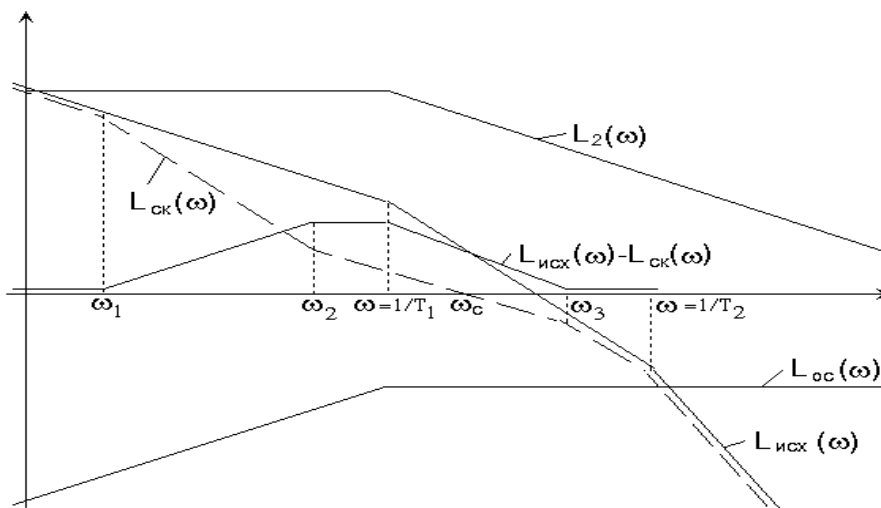


Рис.6.6. Пример построения корректирующего устройства в цепи обратной связи

4) Построение корректирующих устройств следящей системы

Описание следящей системы

Следящая система предназначена для воспроизведения с заданной точностью исполнительным устройством входного управляющего воздействия, изменяющегося по произвольному закону.

Функциональная и принципиальная схемы следящей системы представлены на рис.6.7 и 6.8 соответственно.

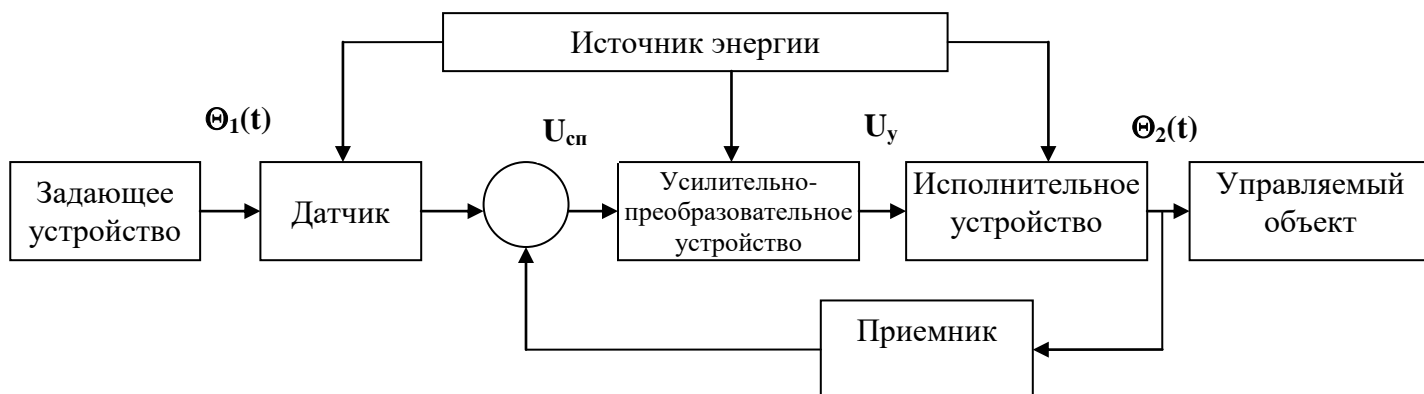


Рис. 6.7. Функциональная схема следящей системы.

Входным управляющим воздействием в системе является угол поворота задающего вала $\Theta_1(t)$ связанного с задающим устройством ДЗ. Выходной величиной - угол поворота исполнительного вала $\Theta_2(t)$, связанного с управляемым объектом.

Кроме управляющего воздействия, которое следящая система должна воспроизводить с заданной точностью, на систему действует возмущающие воздействия, например, момент сопротивления на валу исполнительного устройства $M_c(t)$ и др.

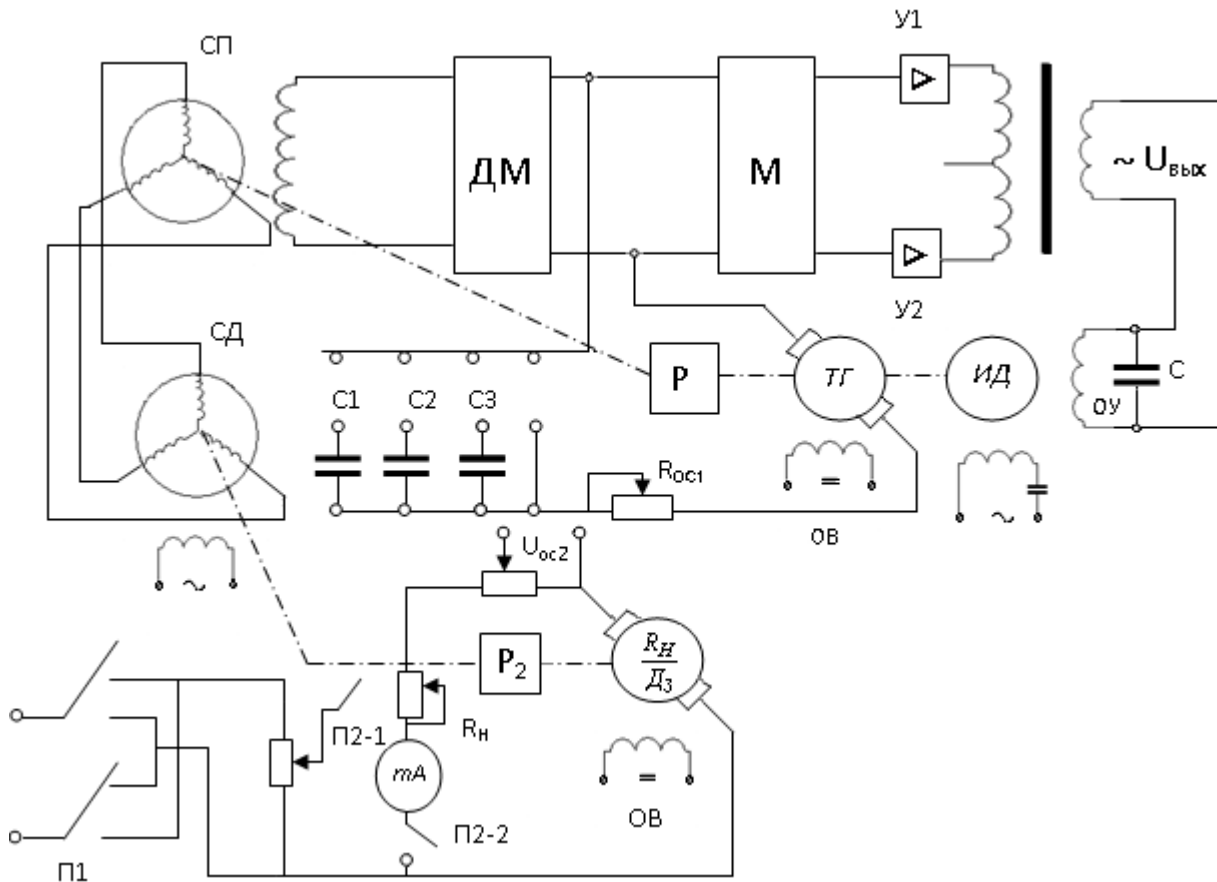


Рис. 6.8. Принципиальная схема следящей системы

Элементы следящей системы

Измерительное устройство в системе (рис.6.9) состоит из сельсина-датчика СД и сельсина-приемника СП, работающих в трансформаторном режиме. Ротор сельсина-датчика механически соединен через понижающий редуктор P_2 с валом задающего устройства $\frac{R_H}{D_3}$, который поворачивает его на угол Θ_1 . Ротор сельсина-приемника соединен через редуктор P с валом исполнительного двигателя ИД который поворачивает его на угол Θ_2 .

Однофазная обмотка сельсина-датчика подключена к источнику переменного тока (рис.6.9).

Ток, протекающий в однофазной обмотке датчика, создает пульсирующее магнитное поле, которое наводит в трехфазной обмотке электродвижущие силы e_1 , e_2 , e_3 , совпадающие по фазе и отличающиеся по величине. Величина этих э.д.с. определяется положением обмотки соответствующей фазы относительно однофазной обмотки датчика. Так как трехфазные обмотки датчика и приемника соединены между собой линией связи, то по обоим обмоткам и линии связи текут токи (i_1 , i_2 , i_3). Эти токи, проходя по обмотке синхронизации приемника, создают пульсирующее магнитное поле, которое наводит в однофазной обмотке приемника э.д. с.- выходное напряжение приемника U_{cn} . Для того, чтобы в согласованном положении задающего и исполнительного валов напряжение на выходе сельсина-приемника равнялось нулю, ротор сельсина-приемника в начальном положении сдвигают на 90° относительно ротора сельсина-датчика.

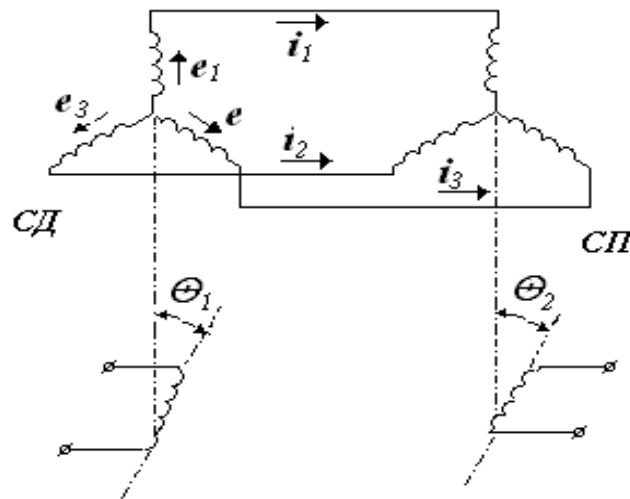


Рис. 6.9. Принципиальная схема сельсинной пары

Напряжение сельсина-приемника определяется

$$U_{cn} = U_m \sin \theta \sin \omega_n t = U_{\theta m} \sin \omega_n t, \text{ где}$$

$$U_{\theta m} = U_m \sin \theta$$

- амплитудное значение выходного напряжения, модулированное по синусоидальному закону в зависимости от угла рассогласования $\theta = \theta_1 - \theta_2$;

ω_n — несущая частота (частота источника питания сельсина-датчика).

При изменении направления вращения ротора сельсина-датчика фаза выходного напряжения сельсина-приемника изменяется на 180° .

Усилительно-преобразовательное устройство УПУ состоит из демодулятора ДМ, модулятора М и полупроводникового фазочувствительного усилителя мощности УМ (\triangleright).

Демодулятор — электронный узел устройств, отделяющий полезный (модулирующий) сигнал от несущей составляющей.

Модулятор — устройство, изменяющее параметры несущего сигнала в соответствии с изменениями передаваемого (информационного) сигнала. Этот процесс называют модуляцией, а передаваемый сигнал модулирующим.

Фазочувствительные усилители с полупроводниковыми триодами сочетают свойства фазочувствительных выпрямителей с усилением мощности.

К выходу усилительно-преобразовательного устройства подключается обмотка управления исполнительного двигателя переменного тока с независимым возбуждением ИД. Скорость, развиваемая исполнительным двигателем, $\Omega_{дв}$ зависит от величины напряжения управления $U_{вых}$ и момента сопротивления нагрузки M_c , приведенного к валу двигателя. С изменением фазы напряжения, направление вращения двигателя изменяется на противоположное.

Двигатель ИД через понижающий редуктор Р с передаточным числом i_p связан с исполнительным валом (нагрузкой) и ротором сельсина-приемника. Скорость вращения исполнительного вала определяется как $\Omega_2 = \frac{\Omega_{дв}}{i_p}$.

Работа следящей системы

При изменении углового положения задающего вала от согласованного положения ($\theta_1 \neq \theta_2$) на величину θ появится напряжение $U_{сн}$ определенной фазы, при которой на обмотку управления ОУ подается напряжение $U_{вых}$ таким образом, что исполнительный вал начнет вращаться в сторону уменьшения рассогласования θ . В установившемся режиме угол рассогласования должен быть равен нулю, если принять, что все элементы системы не обладают зоной нечувствительности.

В действительности установившееся состояние наступает при некотором остаточном угле рассогласования, являющимся *статической ошибкой* системы $\theta_{ст}$, величина которой определяется погрешностью сельсинной схемы измерения, значением напряжения трогания двигателя, а также нечувствительностью других элементов системы.

Установившееся значение угла рассогласования при равномерной скорости вращения задающего вала представляет собой *кинетическую ошибку* системы $\theta_{кин}$.

При вращении задающего вала с постоянной скоростью исполнительный вал в установившемся режиме вращается с той же скоростью. Так как вращение исполнительного вала обеспечивается при определенном напряжении $U_{вых}$, которое пропорционально углу рассогласования, следовательно, чем больше скорость вращения задающего вала, тем больше должен быть угол рассогласования, т.е. тем больше будет кинетическая ошибка $\theta_{кин}$.

Статические характеристики и передаточные функции системы и ее элементов

Статическая характеристика измерительного устройства $U_{сн} = f(\theta)$ представлена на рис. 6.10. Коэффициент усиления измерительного устройства K_θ определяется на начальном участке при малых углах рассогласования ($\theta \leq 10^\circ$), где $U_\theta = K_\theta \cdot \theta$.

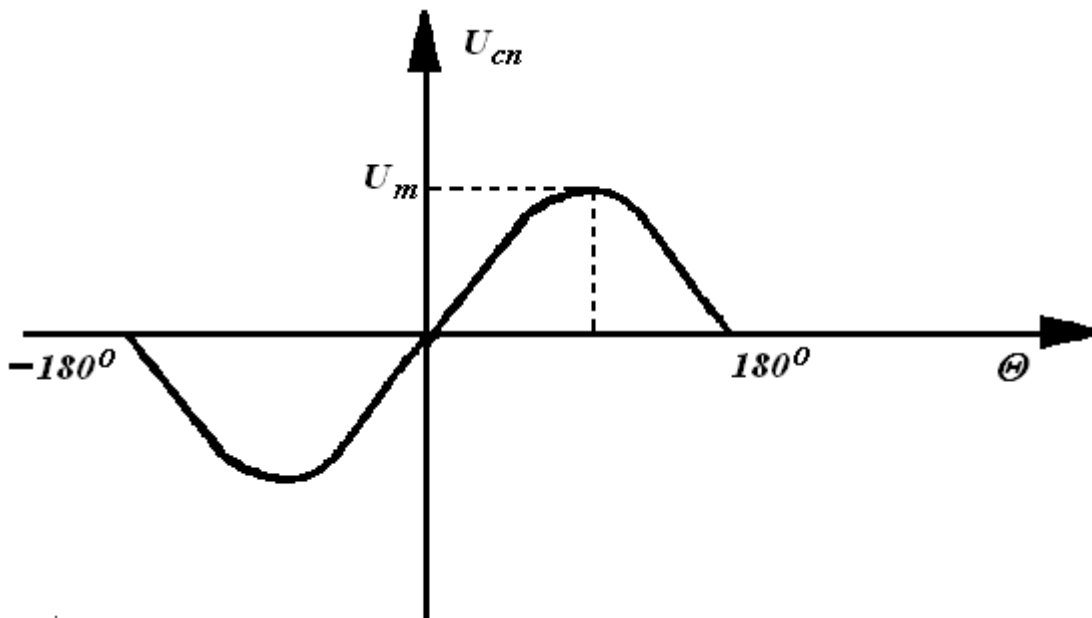


Рис. 6.10. Статическая характеристика измерительного устройства

Передаточная функция измерительного устройства

$$W_{изм}(p) = \frac{U_{сн}(p)}{\theta(p)} = K_{изм}$$

Передаточную функцию усилительно-преобразовательного устройства УПУ с достаточным приближением можно представить в виде

$$W_{упу}(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{сн}(p)} = \frac{K_{ус}}{1 + pT_{ус}},$$

где $K_{ус}$ - коэффициент усиления УПУ;

T_{yc} - постоянная времени усилительного устройства равна $T_{yc} = \frac{2\pi}{f_H}$,

где f_H - несущая частота.

Передаточная функция исполнительного двигателя по управляющему воздействию с учетом, что выходной величиной является угол $\theta_{\partial\delta}$, имеет вид

$$W_{\partial\delta y}(p) = \frac{\theta_{\partial\delta}(p)}{U_{\text{вых}}(p)} = \frac{\kappa_{\partial\delta}}{p(1 + pT_{\partial\delta})},$$

и передаточная функция двигателя по возмущающему воздействию

$$W_{\partial\delta в}(p) = \frac{\theta_{\partial\delta}(p)}{M_c(p)} = -\frac{\kappa_M}{p(1 + pT_{\partial\delta})},$$

Где $T_{\partial\delta}$ – электромеханическая постоянная времени;

$\kappa_{\partial\delta}$ – коэффициент усиления по скорости;

κ_M – коэффициент пропорциональности между моментом и скоростью вращения двигателя.

Передаточная функция редуктора

$$W_{ред}(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_{\partial\delta}(p)} = \frac{1}{i_{ред}} = \kappa_{ред}.$$

На основании полученных передаточных функций составлена структурная схема следящей системы (рис.6.11).

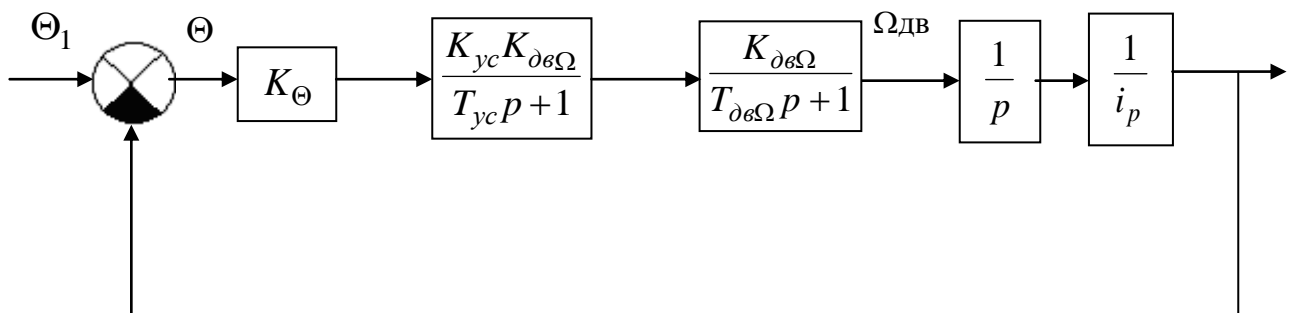


Рис.6.11. Структурная схема следящей системы

Согласно структурной схеме передаточная функция разомкнутой системы определяется как

$$W_p(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta(p)} = \frac{\kappa_{\Omega}}{p(1 + pT_{\partial\delta})(1 + pT_{yc})}$$

где K_{Ω} – добротность следящей системы по скорости, определяемая как отношение установившегося значения скорости вращения исполнительного вала к углу рассогласования θ , т.е.

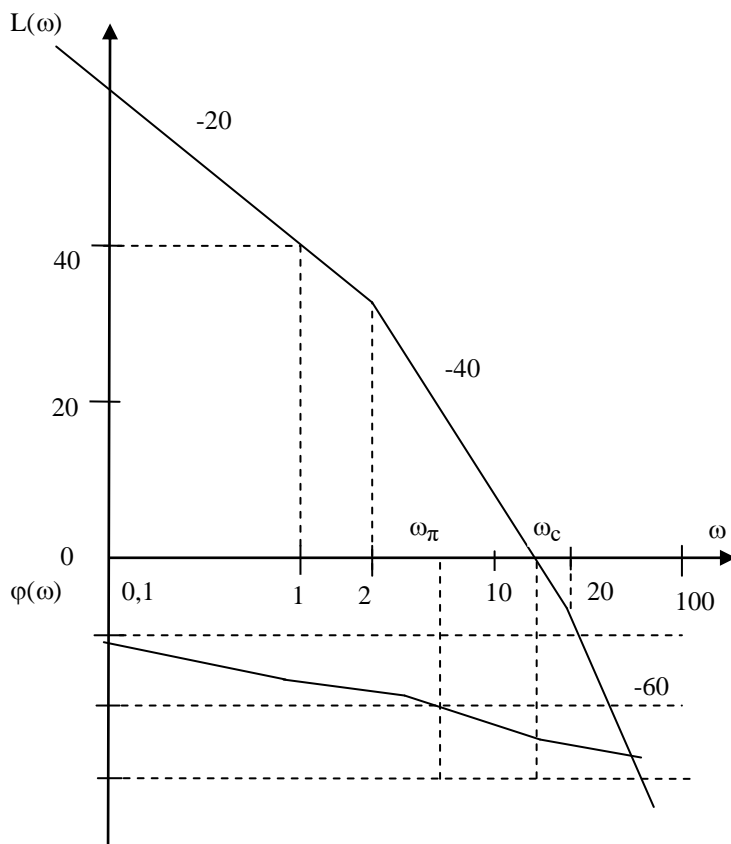
$$K_{\Omega} = \frac{\Omega_2}{\theta} = K_{изм} K_{ус} K_{дв} \frac{1}{i_p} \quad [c^{-1}]$$

Коррекция следящей системы

Рассмотрим построение корректирующих устройств следящей системы, при следующих параметрах: $K_{\Omega} = 100c^{-1}$; $k_{\theta} = 60в/с$; $i_p = 120$; $T_{ус} = 0,05с$; $T_{дв} = 0,5с$.

Сформируем требования к системе: $\theta_{кин} \leq 0,01$; $\sigma \leq 30\%$; $t_p \leq 1,25с$; $\gamma \geq 40^{\circ}$.

Построим логарифмические характеристики и проверим систему на устойчивость и качество.



Из построенных характеристик следует, что замкнутая система неустойчива, поскольку по логарифмическому критерию устойчивости «алгебраическая сумма числа переходов фазовой частотной характеристикой прямой $-\pi$ на диапазоне частот, для которого $L(\omega) > 0$ равно -1 », т.е. нарушено условие устойчивости $\frac{l}{2} = 0$ (числу правых полюсов передаточной функции разомкнутой системы).

Таким образом, система нуждается в коррекции.

Построим для следящей системы последовательное, параллельное корректирующее устройство и корректирующее устройство в цепи

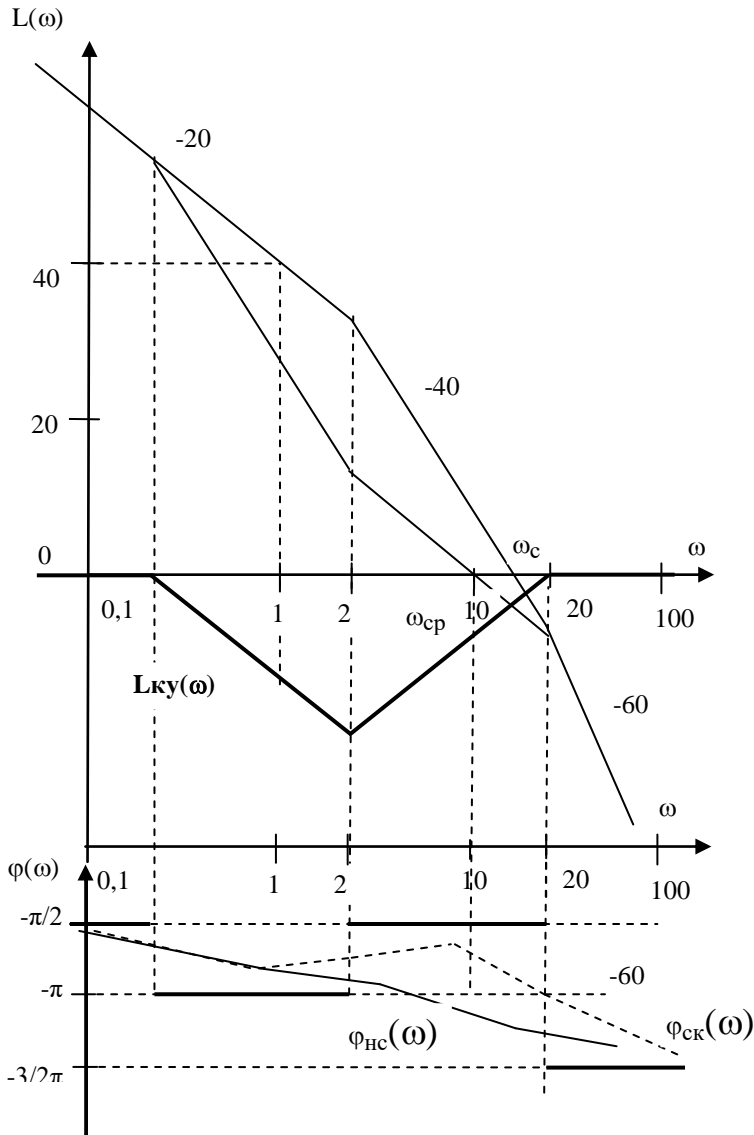
обратной связи.

Последовательная коррекция

Для построения желаемой ЛАЧХ рассчитаем частоту среза скорректированной системы по формуле: $\omega_{ср} = \frac{4\pi}{t_p} = 10$. Проведем асимптоту на средних частотах наклоном -20 дБ/дек через частоту среза, откладывая слева и справа по $0,5$ декады. Соединим отрезок с участком низких частот исходной ЛАЧХ и, таким образом, построим желаемую ЛАЧХ. Вычитая исходную ЛАЧХ из желаемой,

получаем ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства ($L_{КУ}(\omega)$). Строим ЛФЧХ с учетом наклонов логарифмической амплитудной частотной характеристики. По ЛФЧХ определяем устойчивость замкнутой системы и запас по фазе ($\gamma > 40^\circ$). Точность системы определяем по коэффициенту усиления разомкнутой системы $K_\Omega = 100 \text{ с}^{-1}$ и по наклону низкочастотной асимптоты (-20 дБ/дек означает наличие интегрирующего звена и $\theta_{\text{кин}} \leq 0,01$).

По ЛАЧХ корректирующего устройства $L_{ку}(\omega)$ запишем передаточную функцию:



$$W_0(p) = W_{ку}(p) = \frac{(1+0.5p)^2}{(1+5p)(1+0.05p)}$$

Передаточная функция скорректированной системы будет иметь

$$\text{вид: } W_{СК}(p) = \frac{100(1+0.5p)}{p(1+5p)(1+0.05p)^2}$$

Параллельная коррекция

Параллельное корректирующее устройство определяется по найденной при последовательной коррекции разностной передаточной функции

$W_0(p)$ в соответствии с приведенным ранее выражением:

$$W_{ку}(p) = W_1(p) \cdot [W_0(p) - 1]$$

Если параллельное корректирующее устройство подключить к цепи последовательного тока между демодулятором (ДМ) и модулятором (М), то $W_1(p) = 1$ и

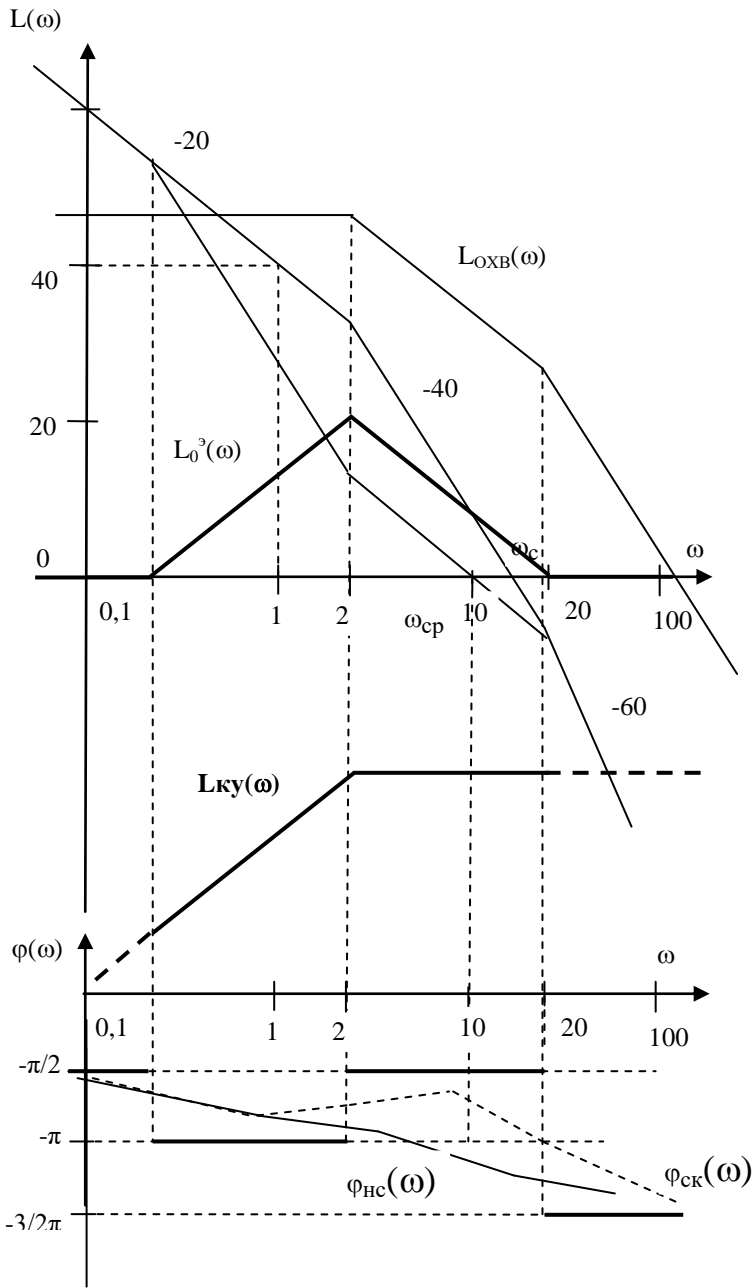
$$W_{ку}(p) = -\frac{4.05p}{(1+5p)(1+0.05p)}$$

Коррекция в цепи обратной связи

Для проведения коррекции в цепи обратной связи необходимо определить звенья, охватываемые обратной связью, в качестве которых рекомендовано выбирать звенья, влияние которых на поведение системы желательно исключить. В качестве таких звеньев выберем усилитель и двигатель, т.е.

$W_{ОХВ}(p) = W_{УС}(p)W_{ДВ}(p)$. Найдем $K_{ОХВ} = \frac{K_{\Omega} \cdot i_{ред}}{K_{\theta}} = \frac{100 \cdot 120}{60} = 200$. Таким образом, передаточная функция элементов, охватываемых обратной связью, имеет вид: $W_{ОХВ}(p) = \frac{200}{(1+pT_{ДВ})(1+pT_{УС})}$.

Следует отметить, что для построения корректирующего устройства в цепи обратной связи можно воспользоваться характеристикой $L'_0(\omega) = -L_0(\omega)$, отразив ее от частотной оси. $L_{ОХВ}(\omega)$ строится на 6 дБ выше исходной; $L_{ку}(\omega)$ строится на диапазоне частот, для которого $L'_0(\omega) \geq 0$.



Фазовая частотная характеристика не меняется по сравнению с предыдущими построениями, поскольку определяется скорректированной ЛАЧХ.

Запишем выражение передаточной функции корректирующего устройства:

$$W_{\text{КУ}}(p) = \frac{K_{\text{OC}} p}{1 + 0,5p}$$

$$K_{\text{OC}} = 0,025$$

Корректирующее устройство реализуется на RC – цепочке и представляет собой реальное дифференцирующее звено, подключаемое через тахогенератор в цепь постоянного тока к выходу демодулятора (рис.6.8).

На рис.6.12 представлена структурная схема скорректированной системы.

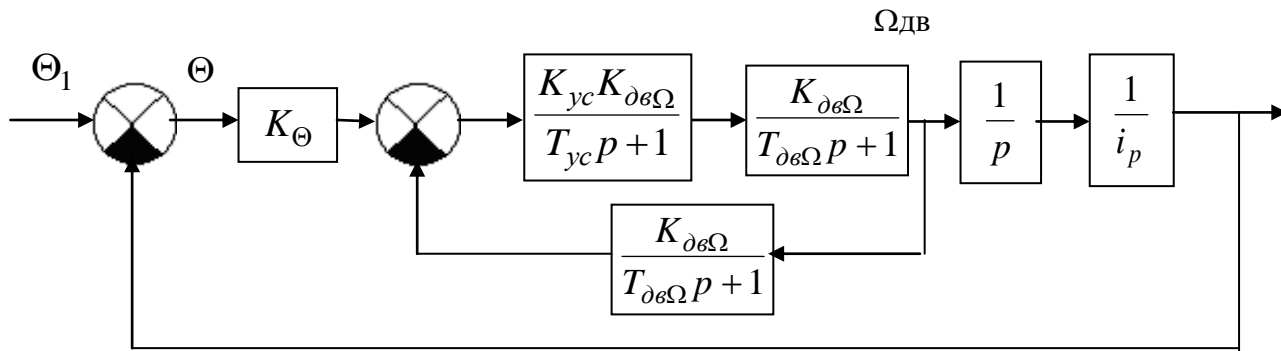


Рис.6.12. Структурная схема скорректированной системы

6.3. Модальное управление САУ

Модальное управление - управление, при котором достигается требуемый характер переходных процессов за счет обеспечения необходимого расположения корней характеристического полинома на комплексной плоскости. При этом задача сводится к определению коэффициентов соответствующих обратных связей по состоянию объекта. Если при этом используются все переменные состояния, то полученный регулятор называют регулятором состояния полного порядка. С его помощью можно обеспечить любое желаемое распределение корней характеристического полинома замкнутой системы на комплексной плоскости и тем самым добиться желаемого качества переходных процессов.

Рассмотрим задачу синтеза линейного закона управления для полностью управляемой системы, заданной описанием в пространстве состояний:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad (6.1)$$

$$Y(t) = CX(t). \quad (6.2)$$

где $X(t) \in R^n$ – вектор состояния; $u(t) \in R$, – входной и выходной сигналы, A – $(n \times n)$ -матрица коэффициентов, b – $(n \times 1)$ – матрица входов, C – $(p \times n)$ -матрица выходов. Пусть объект является полностью наблюдаемым и управляемым.

Полная управляемость означает существование ограниченного входного сигнала u , переводящего объект за конечный интервал времени из любого начального состояния x_0 в любое наперед заданное состояние x . Если бы объект не был полностью управляемым, то нельзя рассчитывать на то, что замкнутой системе, содержащей этот объект, можно придать любые динамические свойства, т.е. желаемое расположение корней.

Условием полной управляемости объекта является равенство ранга его матрицы управляемости Q_y порядку n объекта. Матрица управляемости выражается через параметры объекта :

$$Q_y = \begin{vmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

Рассмотрим случай, когда все составляющие вектора состояния объекта управления доступны непосредственному измерению. Задача сводится к определению коэффициентов обратных связей по состоянию объекта.

Но прежде возникает вопрос о расположении корней, к которому нужно стремиться. Этот вопрос решают с учётом свойств конкретного объекта, т. к. вид переходного процесса определяется не только полюсами (корнями), но и нулями замкнутой системы. Если передаточная функция замкнутой

системы не имеет нулей, то при выборе её характеристического полинома можно руководствоваться стандартными формами. Во время синтеза систем модального управления используют стандартные формы характеристических полиномов (фильтр Баттерворта, полином с биномиальными коэффициентами и полиномы, которые обеспечивают минимизацию некоторого оптимизирующего функционала) и многие другие.

Метод стандартных коэффициентов заключается в обеспечении одинаковости всех корней характеристического уравнения, то есть для обеспечения «оптимальной» реакции корни характеристического уравнения должны быть равными ω_0 .

Тогда левая часть характеристического уравнения обращается в бином Ньютона $(s + \omega_0)^n$, разворачивая который, получаем стандартные (желаемые) значения коэффициентов характеристического уравнения дискретной передаточной функции.

Таким образом, получим стандартные дискретные биномиальные формы, которые указываются в Таблице 1.

$$\begin{aligned}
 & s + \omega_0 \\
 & s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \\
 & s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 \\
 & s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4 \\
 & s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5 \\
 & s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6 \\
 & s^7 + 7\omega_0 s^6 + 21\omega_0^2 s^5 + 35\omega_0^3 s^4 + 35\omega_0^4 s^3 + 21\omega_0^5 s^2 + 7\omega_0^6 s + \omega_0^7
 \end{aligned}$$

Таблица 1. Биномиальные стандартные формы

На Рис 6.13 приводятся реакции на ступенчатое возмущение систем от первого до восьмого порядка (по оси абсцисс отложено значение $\omega_0 t_p$).

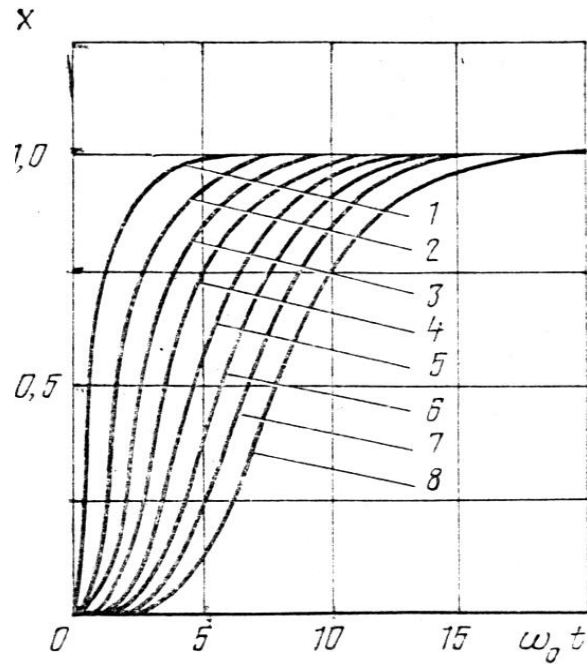


Рис 6.13. Реакции на ступенчатое воздействие систем с биномиальными коэффициентами.

Выходные сигналы регулятора могут быть поданы на систему в тех же точках, через которые могут подаваться измеримые внешние воздействия

Структурная схема замкнутой системы, образующейся в результате, показана на Рис.6.14

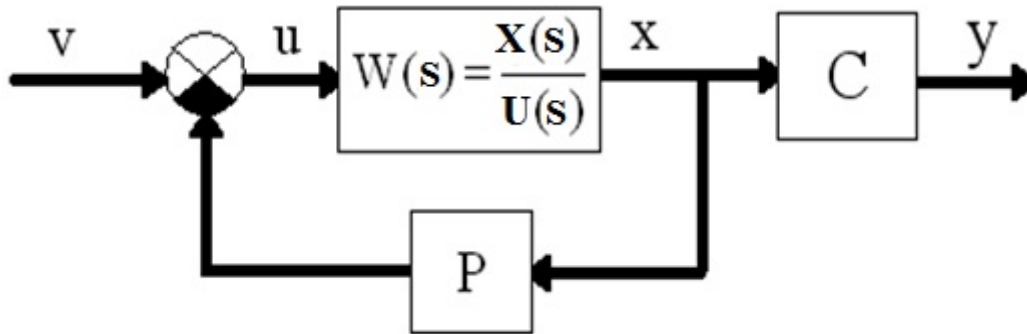


Рис.6.14. Структурная схема замкнутой системы.

Обозначая эти внешние воздействия через v , а $m \times n$ -матрицу преобразования регулятора через P , получаем полное воздействие на объект

$$u = v - Px. \quad (6.4)$$

Объединяя уравнения (6.1) и (6.4), получим следующее уравнение замкнутой системы:

$$X(t) = (A - BP)x(t) + Bv(t). \quad (6.5)$$

Если в области изображений по Лапласу уравнения (6.4) и (6.5) разрешить относительно $X(s)$, то получим следующие матричные передаточные функции, описывающие систему:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = (s \cdot I - A)^{-1} B, \quad (6.6)$$

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = (s \cdot I - A + BP)^{-1} B \quad (6.7)$$

Задача состоит в нахождении такой $(m \times n)$ - матрицы P регулятора, при которой замкнутая система получает наперед заданное расположение корней характеристического уравнения, имеющего вид

$$\det(sI - A + BP) = 0 \quad (6.8)$$

Представим передаточную функцию объекта в другом виде. Записав обратную матрицу в развернутой форме и перемножив её с матрицей B , получим

$$W(s) = (sI - A)^{-1} B = \frac{g(s)}{F(s)} = \frac{1}{F(s)} \begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Здесь $g(s)$ - матрица-столбец $n \times 1$, а

$$F(s) = \det(sI - A) \quad (6.10)$$

- характеристический полином.

Характеристическое уравнение этой системы (6.6), получается приравниванием к нулю суммы из произведения передаточных функций звеньев контура, взятого со знаком минус и единицы. В данном случае:

$$P \frac{g(s)}{F(s)} + 1 = 0 \quad (6.11)$$

Пусть желаемый полином замкнутой системы $H(p) = (s - a_1) \dots (s - a_n)$. Приводя левую часть уравнения (6.11) к общему знаменателю и учитывая, что получившийся числитель равен характеристическому полиному $H(s)$ замкнутой системы, приходим к соотношению:

$$P \cdot g(s) = H(s) - F(s) = \sum_{i=1}^n P_i g_i(s) \quad (6.12)$$

В этом соотношении неизвестной является только матрица P . Матрица-столбец $g(s)$ вместе с полиномом $F(s)$, а также полином $H(s)$, предопределены соответственно параметрами объекта и желаемым расположением корней замкнутой системы. Приравнивая коэффициенты левой и правой частей (6.12) при одинаковых степенях p , получаем систему алгебраических уравнений. Из этой системы можно найти все элементы матрицы регулятора P , обеспечивающего заданное расположение корней замкнутой системы. [1][2]

Методика расчета параметров модального управления.

Таким образом, расчет и конструирование модальных регуляторов можно свести к последовательности действий, описанной ниже.

1. Представляем передаточную функцию объекта в виде (6.9).
2. Вычисляем выражение для левой части соотношения (6.12).
3. Выбираем желаемое распределение корней характеристического уравнения, то есть, выбираем желаемую стандартную форму характеристического полинома замкнутой системы.
4. Находим характеристический полином с помощью формулы (6.10).
5. Вычисляем выражение для правой части соотношения (6.12).
6. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях с полиномов, полученных на 2 и 5 шагах, получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров. Решив ее при известных остальных параметрах системы, находим параметры одномерного модального регулятора p .

6.4. Примеры построения модальных регуляторов

Выберем в качестве исследуемой систему, построенную на операционных усилителях:

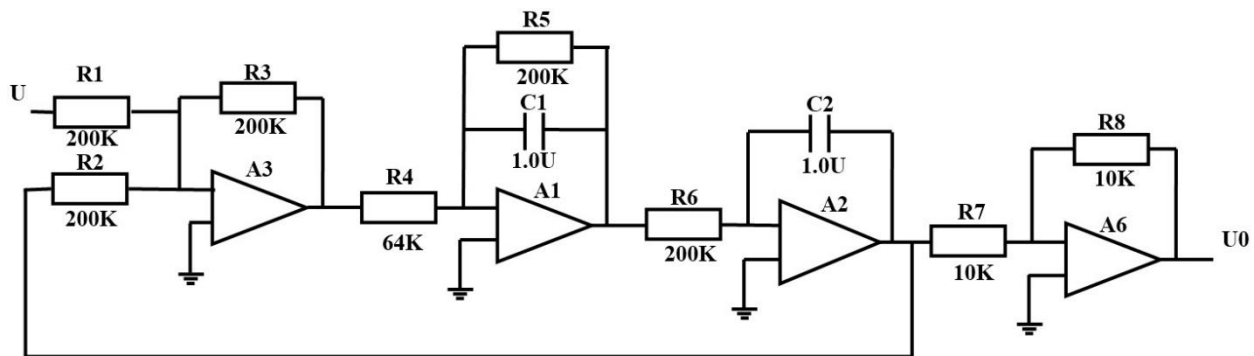


Рис.6.15. Электрическая схема исследуемой системы.

Данная система представляет собой колебательное звено с передаточной функцией вида:

$$W(s) = \frac{k}{T^2s + 2\xi Ts + 1};$$

Рассчитаем передаточную функцию для каждой части системы:

Рассмотрим первую часть электрической схемы:

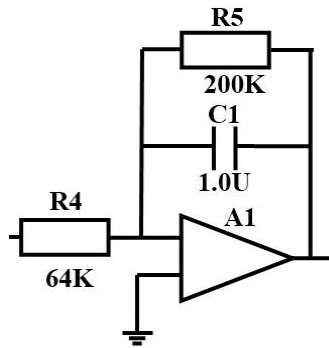


Рис.6.16. Низкочастотный фильтр. Часть исследуемой системы.

$$Z_1 = \frac{R_5}{1 + pR_5C_1}$$

Передаточная функция этого звена будет равна:

$$W_1 = \frac{\frac{R_5}{R_4}}{1 + sR_5C_1} = \frac{\frac{200}{64}}{1 + 0.2s}$$

Передаточная функция для второго блока будет выглядеть следующим образом:

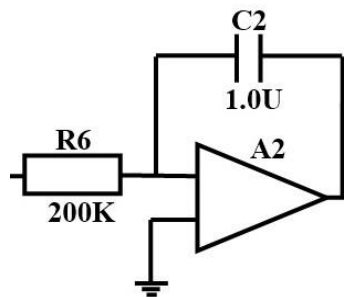


Рис.6.17. Интегратор. Часть исследуемой системы.

$$W_2 = \frac{1}{1 + sR_6C_2} = \frac{1}{0.2s}$$

Система (рис.6.15) представляет собой колебательное звено, описываемое передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{1}{0.0127s^2 + 0.063s + 1}$$

Смоделируем полученное звено и систему, представленную в виде передаточных функций в программном пакете MatLab Simulink.

Схема моделирования системы в виде колебательного звена и в виде структурной схемы передаточных функций электрической схемы представлены на следующем рисунке:

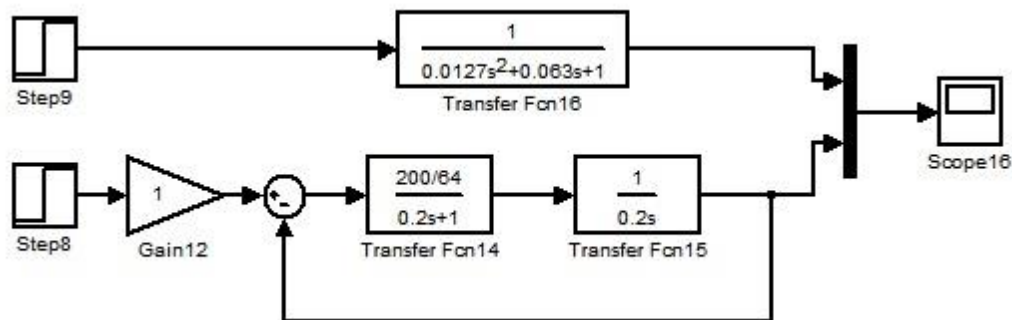


Рис. 6.18. Схема моделирования как колебательного звена с параметрами, восстановленными по переходному процессу, и в виде структурной схемы передаточных функций электрической схемы.

В программном пакете Matlab можно наблюдать, что переходные процессы на выходе обеих систем практически идентичны (время регулирования $t_p=2,1$ с.):

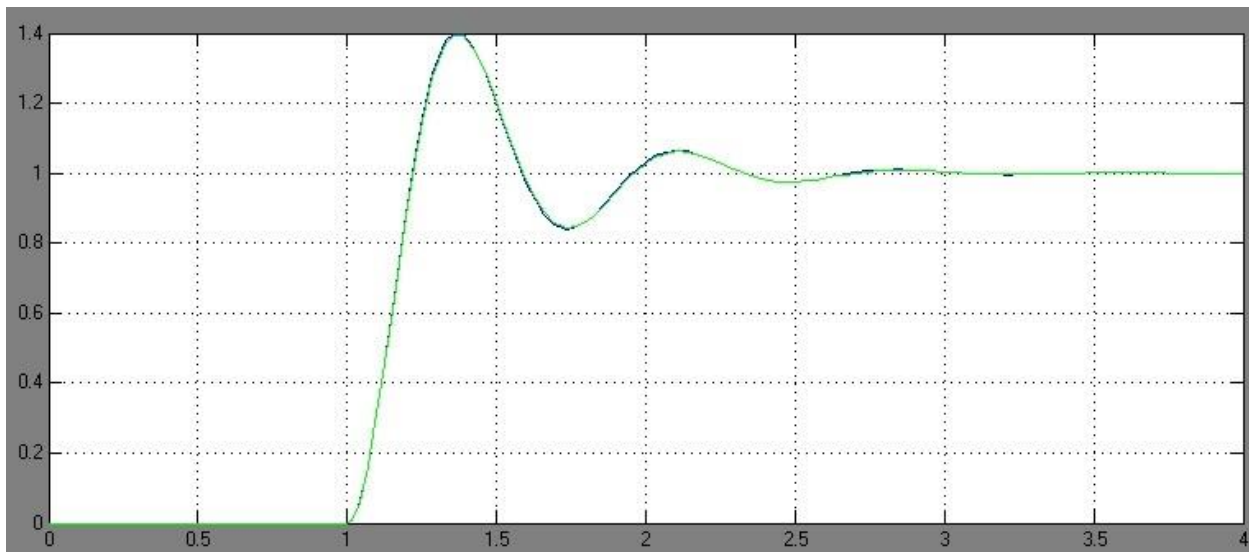


Рис.6.19. Переходные процессы, полученные на выходе схем моделирования.

Синтез систем модального управления с полным вектором состояния.

Для синтеза системы необходимо рассчитать параметры регулятора при использовании полного вектора состояния. Методика для расчёта представлена в предыдущем разделе.

Рассчитаем параметры модального регулятора для $t_p = 0.4(c)$:

1. Представляем передаточную функцию объекта в виде (6.9):

$$W(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{g(s)}{F(s)} = \frac{1}{F(s)} \begin{bmatrix} g_1(s) \\ \dots \\ g_n(s) \end{bmatrix}$$

Здесь $g(s)$ - матрица-столбец $n \times 1$, а $F(s) = \det(sI - A)$ - характеристический полином.

Система в области изображений Лапласа в виде структурной схемы передаточных функций имеет вид:

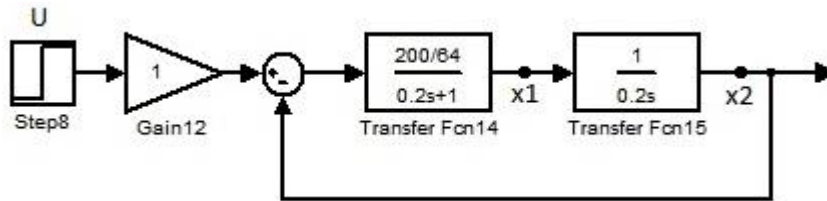


Рис. 6.20. Структурная схема системы.

Структурная схема описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1000}{64} x_2 - \frac{1000}{64} U(t) - 5x_1 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в виде матричных:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{Y} &= C\bar{x} \end{aligned}$$

Где A -матрица состояния, B -матрица управления, C - матрица выходного сигнала, \bar{x} - вектор состояния объекта, \bar{u} - вектор воздействий, которые могут быть поданы на объект со стороны, \bar{Y} - вектор выходных сигналов. Соответственно в численном виде матрица A , B , C будут выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & \frac{1000}{64} \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

$$\frac{Y}{U} = C^T \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{A}{s}} B = C^T \frac{1}{sI - A} B$$

Представим передаточную функцию объекта в виде:

$$W(p) = \frac{1}{s^2 + 5s - \frac{625}{8}} \cdot \begin{pmatrix} s & \frac{1000}{64} \\ 5 & s + 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s - \frac{625}{8}} \cdot \begin{pmatrix} 5s \\ 25 \end{pmatrix}$$

2. Вычисляем выражение для левой части соотношения (6.12):

$$P \cdot g(s) = H(s) - F(s) = \sum_{i=1}^n P_i g_i(s)$$

Выбираем желаемое распределение корней характеристического уравнения, то есть, выбираем желаемую стандартную форму характеристического полинома замкнутой системы.

По методу стандартных коэффициентов, руководствуясь графиками реакций на ступенчатое воздействие систем от первого до восьмого порядка и требуемым значением времени регулирования, выбираем стандартную форму полинома второго порядка:

$$H(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$$

3. Находим характеристический полином с помощью формулы (6.10).

$$F(p) = \det(sI - A) = s^2 + 5s - \frac{625}{8}$$

4. Вычисляем выражение для правой части соотношения (6.12).

$$\sum_{i=1}^n P_i g_i(s) = (p_1 \quad p_2) \begin{pmatrix} 5s \\ 25 \end{pmatrix}$$

5. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях с полиномов, полученных на 2,3 и 5 шагах, получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров. Решив ее при известных остальных параметрах системы, находим параметры одномерного модального регулятора p .

Сделав преобразования, получаем систему уравнений:

$$5p_1 + 5 - 2\omega_0 = 0$$

$$25p_2 - \frac{625}{8} - \omega_0^2 = 0$$

Решая систему уравнений, получаем:

$P(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0.4\omega_0 - 1 \\ 0.04\omega_0^2 + 3.125 \end{pmatrix}$, откуда для разных значений ω_0 можно получить значения

коэффициентов обратных связей. Для того чтобы выполнялось условие по времени регулирования, нужно взять $\omega_0 = 10$.

$$P(20) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7.125 \end{pmatrix}.$$

Коэффициент на входе системы выбираем, исходя из условия равенства U_0 и v в установившемся режиме.

Реализуем систему с модальным регулятором на операционных усилителях.

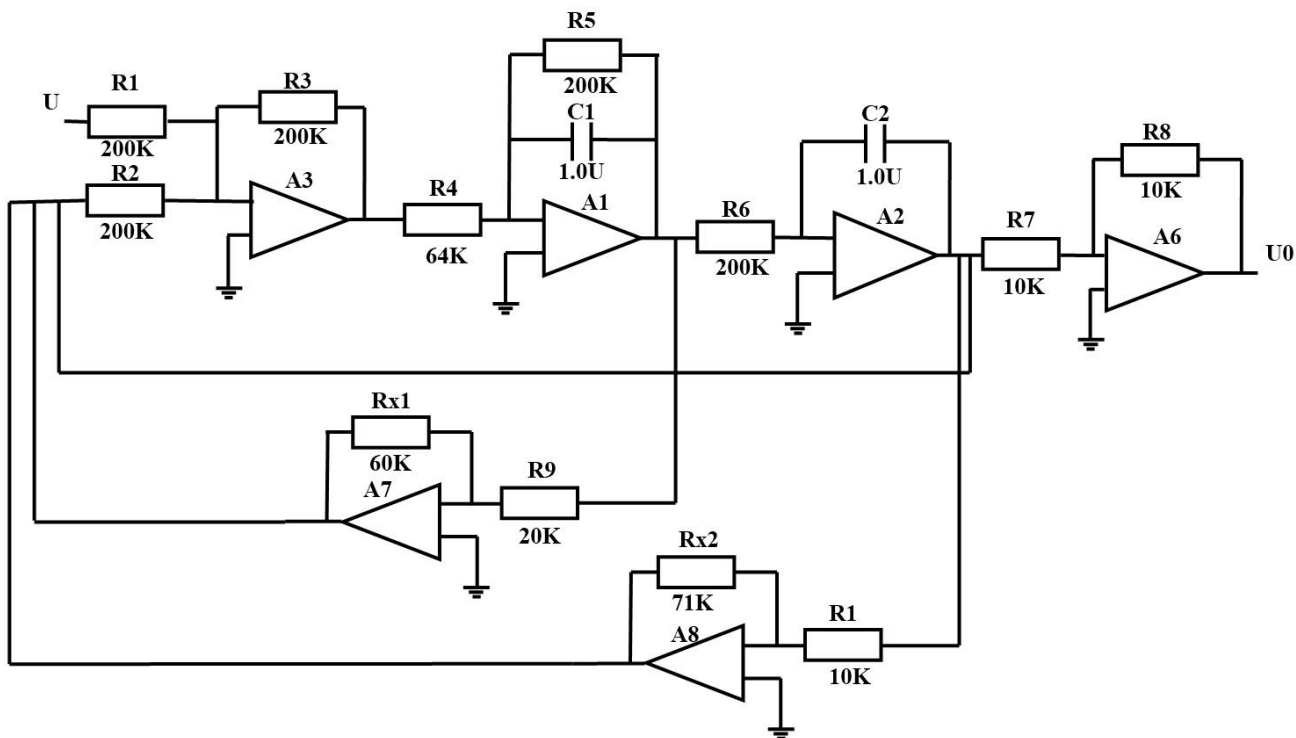


Рис.6.21. Электрическая схема системы с модальным регулятором.

Коэффициенты k_1 и k_2 обратной связи реализованы на операционных усилителях A7 и A8.

Используются варьлируемые сопротивления $Rx1$ и $Rx2$.

На выходе электрической схемы с коэффициентами обратной связи модального регулятора переходный процесс имеет вид, представленный на рис.6.22.

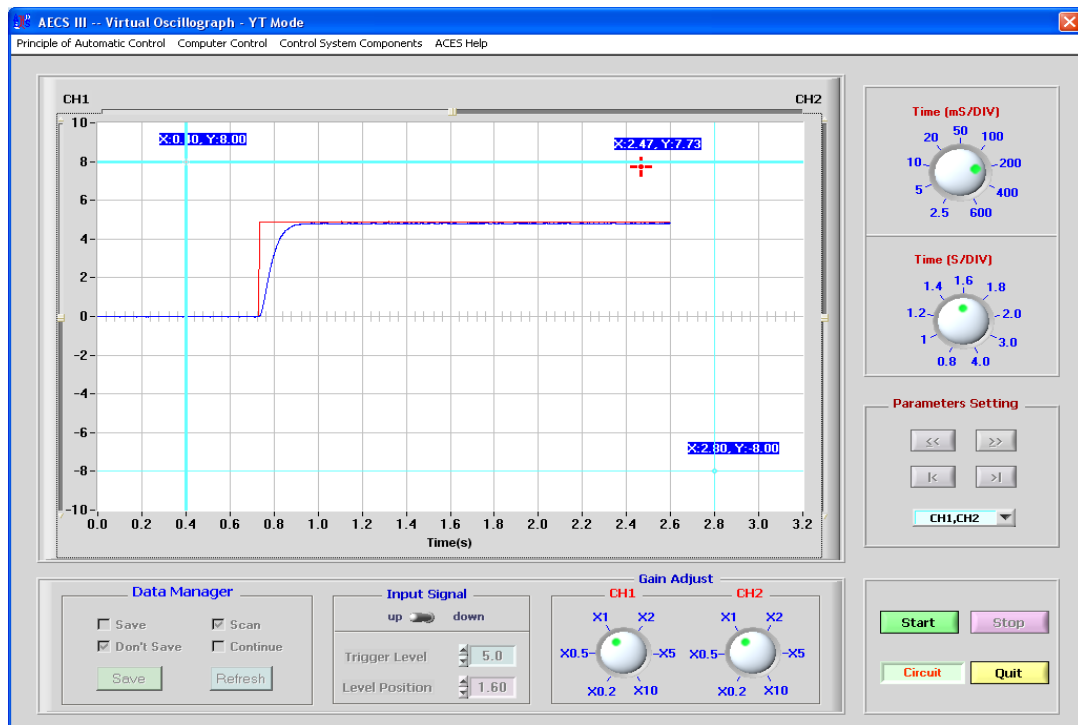


Рис. 6.22. Переходный процесс электрической схемы с коэффициентами обратной связи модального регулятора.

Из переходного процесса можно судить об отсутствии перерегулирования, плавности процесса и сокращении времени регулирования до заданного значения, равного 0,4 с. Следует отметить, что из-за влияния обратных связей входной сигнал требуется усилить.

Моделирование схемы с модальным регулятором в Simulink MatLab проводится в соответствии со схемой (рис.6.23).

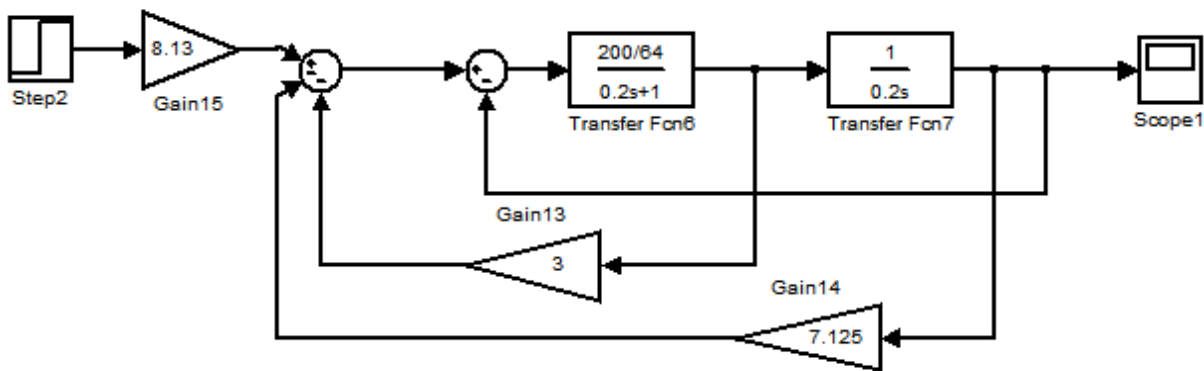


Рис.6.23. Реализация системы модального управления в Simulink MATLAB.

На рис. 6.24 представлен переходной процесс в системе с модальным регулятором, который, естественно, совпадает с результатами моделирования схемы на операционных усилителях (рис.6.23).



Рис.6.24. Переходный процесс системы с модальным регулятором в Simulink MATLAB.

6.5. Выводы

Для повышения эффективности работы систем автоматического управления в них вводятся корректирующие устройства, классификация которых приводится в разделе 6.1.1. Наиболее часто используются электрические корректирующие устройства на постоянном токе, основные типы и характеристики которых представлены в 6.1.1. В разд. 6.2 приводятся этапы синтеза САУ по логарифмическим частотным характеристикам, основными из которых является построение желаемой ЛАЧХ (скорректированной) разомкнутой системы (разд.6.2.2), выбор метода подключения корректирующего устройства (последовательное, параллельное, в цепи обратной связи) и алгоритмы построения корректирующих устройств. Примеры последовательной, параллельной коррекции и коррекции в цепи обратной связи приведены в разд. 6.2.3. , где подробно рассмотрены все виды коррекции для следящей системы, предназначенной для отслеживания угла поворота задающего вала исполнительным устройством.

При известном математическом описании линейной системы для повышения эффективности управления системой можно использовать модальное управление, которое

позволяет поместить полюса передаточной функции системы в заранее заданное положение, определяемое по желаемому времени регулирования за счет введения обратных связей по переменным состояниям системы. В разд.6.3 рассматривается теория модального управления, приводится алгоритм построения модального регулятора, а в разд 6.4 – пример построения модального регулятора для системы 2-го порядка.

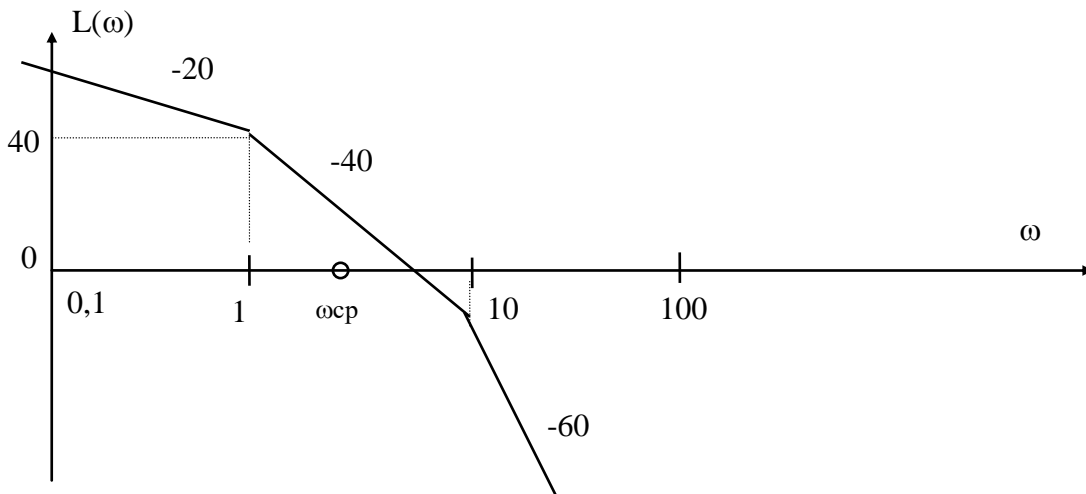
6.6. Вопросы

- 1. Дайте краткую классификацию корректирующих устройств.**
- 2. Изобразите корректирующие устройства дифференцирующего типа и выведите их частотные характеристики**
- 3. Изобразите корректирующее устройство интегрирующего типа и выведите его частотные характеристики.**
- 4. Изобразите корректирующее устройство интегро-дифференцирующего типа и выведите его частотные характеристики.**
- 5. Перечислите этапы синтеза систем автоматического управления по логарифмическим характеристикам.**
- 6. Приведите алгоритм построения последовательного и параллельного корректирующих устройств.**
- 7. Приведите алгоритм построения корректирующих устройств в цепи обратной связи.**
- 8. Какие требования предъявляются к желаемой ЛАЧХ на участках нижних, средних и высоких частот.**
- 9. Объясните назначение и основные элементы следящей системы.**
- 10. Продемонстрируйте пример построения последовательного корректирующего устройства для заданных в разделе 6.2.3. параметров следящей системы.**
- 11. Продемонстрируйте пример построения параллельного корректирующего устройства для заданных в разделе 6.2.3. параметров следящей системы.**
- 12. Продемонстрируйте пример построения корректирующего устройства в цепи обратной связи для заданных в разделе 6.2.3. параметров следящей системы.**
- 13. Приведите структурную схему следящей системы без коррекции и с коррекцией в цепи обратной связи.**
- 14. Приведите алгоритм построения модального регулятора для линейной одномерной непрерывной системы.**

15. Приведите пример построения модального регулятора для одномерной непрерывной линейной системы.

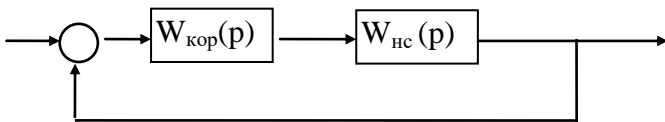
6.7. Задания

1. На рисунке приведена ЛАЧХ нескорректированной системы и отмечена частота среза скорректированной ЛАЧХ. найти передаточные функции последовательного, параллельного корректирующего устройства и корректирующего устройства в цепи обратной связи, исходя из следующих требований: кинетическая ошибка скорректированной системы не больше ошибки исходной нескорректированной системы, запас устойчивости по фазе больше или равен 40 градусов, относительное перерегулирование около 40%.

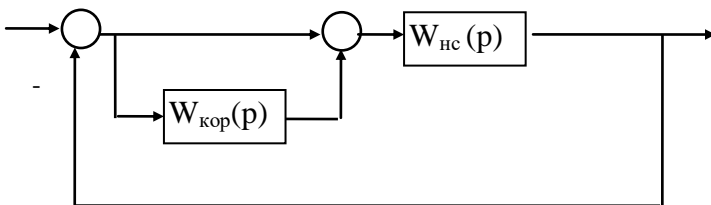


Схемы с коррекцией представлены ниже.

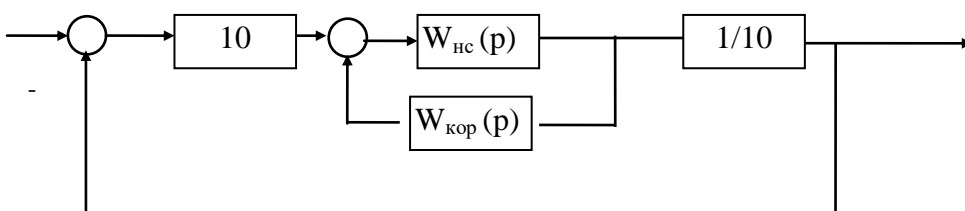
Последовательная коррекция:



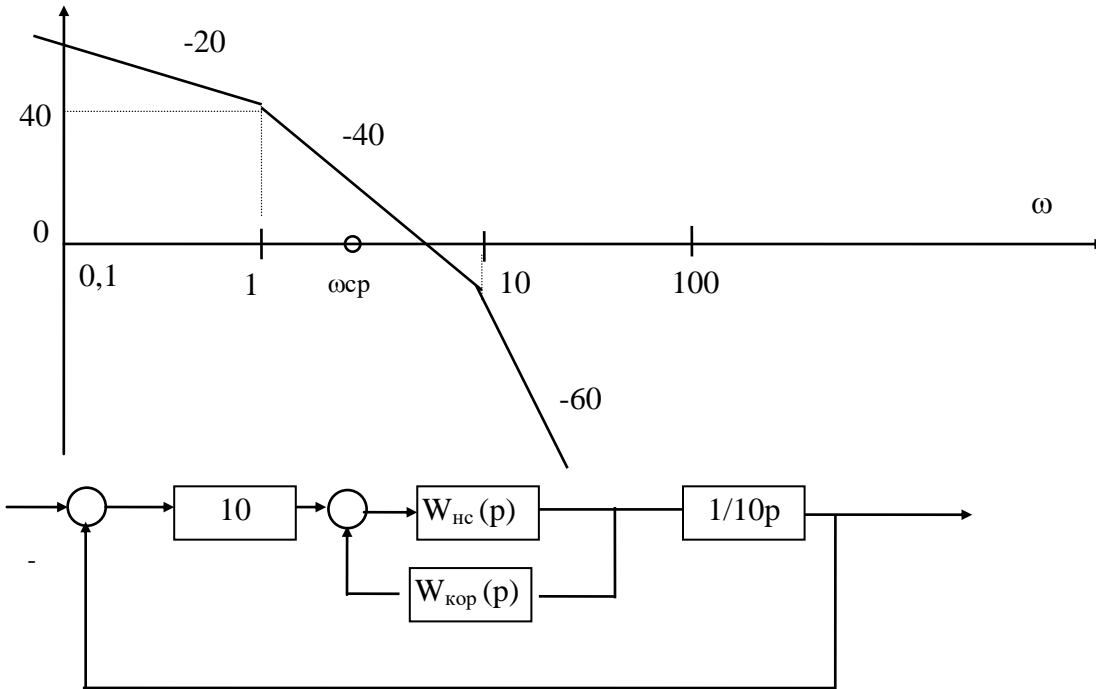
Параллельная коррекция:



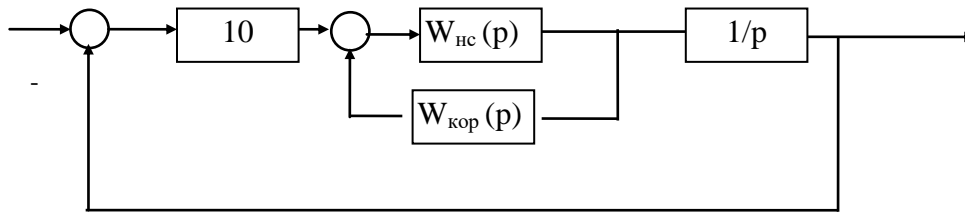
Коррекция в цепи обратной связи:



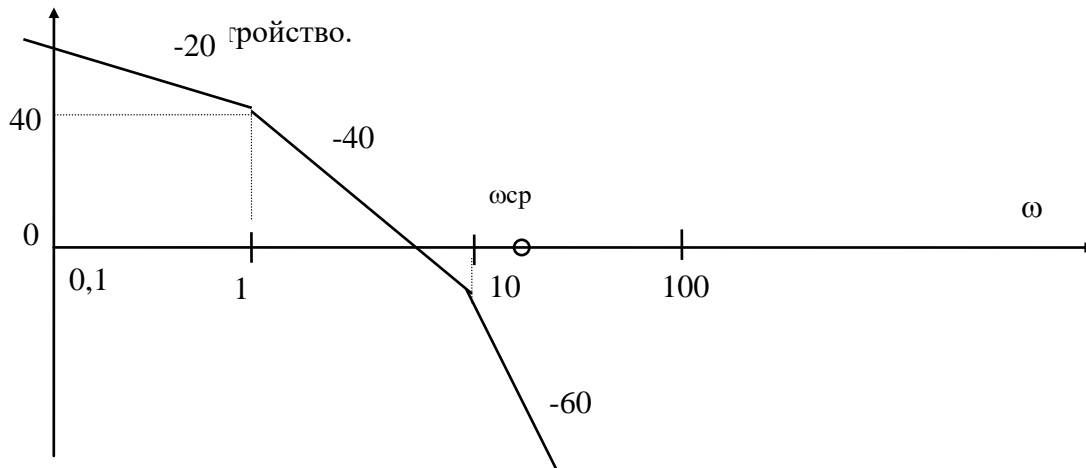
2. При условиях задачи 1 найти корректирующее устройство в цепи обратной связи, подключенное так, как представлено на рисунке.



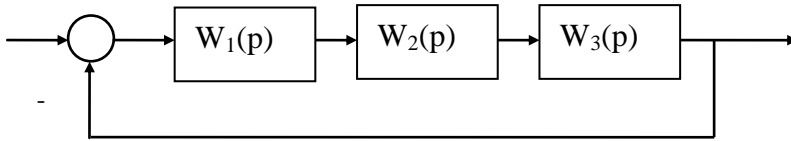
3. При условии предыдущей задачи найти корректирующее устройство в обратной связи, подключенное так, как представлено на рисунке.



4. При условиях задачи 1 найти последовательное и параллельное корректирующее устройство.



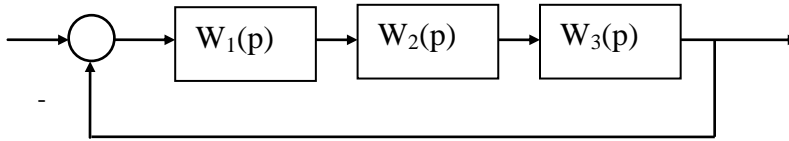
5. Структурная схема замкнутой САУ представлена на рисунке:



$$W_1(p) = \frac{50}{1 + 0.2p}; \quad W_2(p) = \frac{1}{1 + 0.045p}; \quad W_3(p) = \frac{1}{p}$$

Выбрать последовательное и параллельное корректирующие устройства так, чтобы замкнутая скорректированная система удовлетворяла следующим требованиям: кинетическая ошибка меньше или равна 0.02, относительное перерегулирование не больше 30%; запас устойчивости по фазе больше 40° ; время регулирования около 2 с.

6. Выбрать последовательное корректирующее устройство и устройство в цепи обратной связи так, чтобы замкнутая скорректированная система удовлетворяла следующим требованиям: кинетическая ошибка меньше или равна 0.01; относительное перерегулирование не больше 30%; запас устойчивости по фазе больше 40° ; время регулирования около 2 с. Корректирующей обратной связью охватить $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Структурная схема представлена на рисунке.



$$W_1(p) = \frac{50}{1 + 0.2p}; \quad W_2(p) = \frac{2}{1 + 0.05p}; \quad W_3(p) = \frac{1}{p}$$

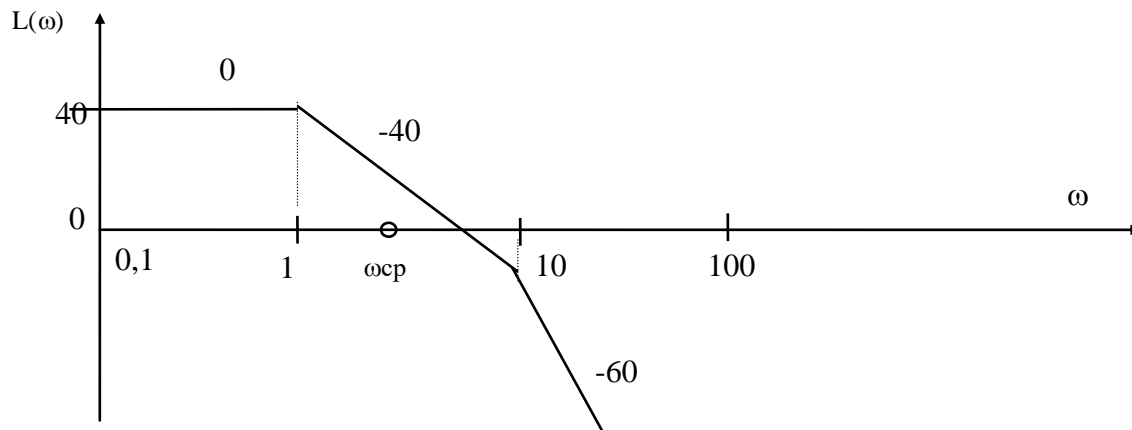
7. Для структурной схемы предыдущей задачи выбрать последовательное корректирующее устройство и устройство в цепи обратной связи так, чтобы замкнутая скорректированная система удовлетворяла следующим требованиям: кинетическая ошибка меньше или равна 0.01; относительное перерегулирование не больше 30%; запас устойчивости по фазе больше 40° ; время регулирования около 2 с. Корректирующей обратной связью охватить звено $W_1(p)$.

$$W_1(p) = \frac{50}{1 + 0.25p}; \quad W_2(p) = \frac{2}{1 + 0.035p}; \quad W_3(p) = \frac{1}{p}$$

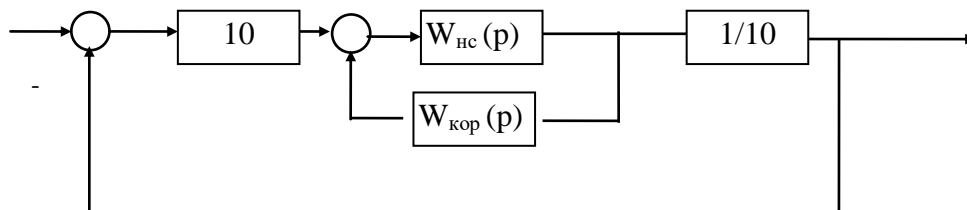
8. Для структурной схемы предыдущей задачи выбрать последовательное корректирующее устройство и устройство в цепи обратной связи так, чтобы замкнутая скорректированная система удовлетворяла следующим требованиям: кинетическая ошибка меньше или равна 0.01; относительное перерегулирование не больше 30%; запас устойчивости по фазе больше 40° ; время регулирования около 2 с. Корректирующей обратной связью охватить звено $W_2(p)$ и $W_3(p)$.

$$W_1(p) = \frac{50}{1+0.2p}; \quad W_2(p) = \frac{3}{1+0.04p}; \quad W_3(p) = \frac{1}{p}$$

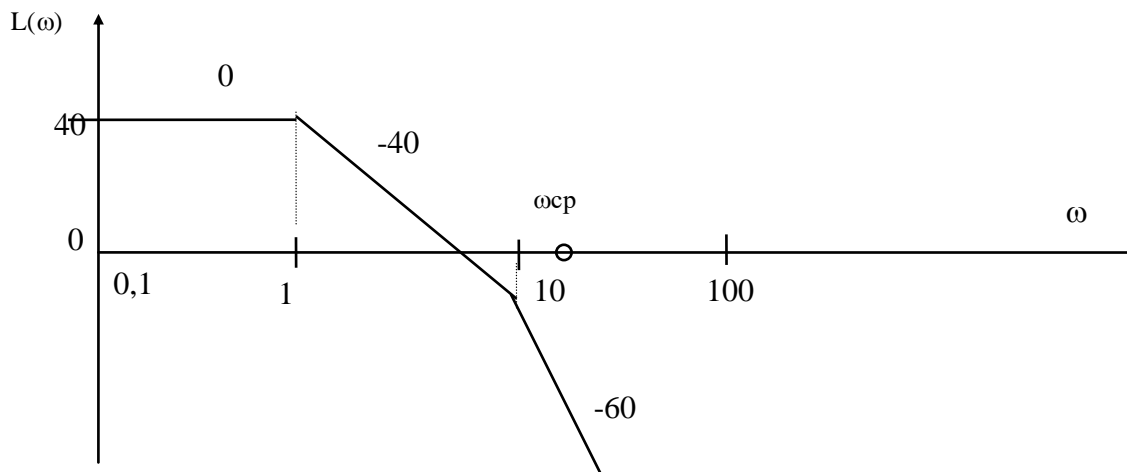
9. На рисунке приведена ЛАЧХ нескорректированной системы и отмечена частота среза скорректированной ЛАЧХ. найти передаточные функции корректирующего устройства в цепи обратной связи, исходя из следующих требований: статическая ошибка скорректированной системы не больше ошибки исходной нескорректированной системы, запас устойчивости по фазе больше или равен 40 градусов, относительное перерегуливание около 30%.



Структурная схема представлена на рисунке:

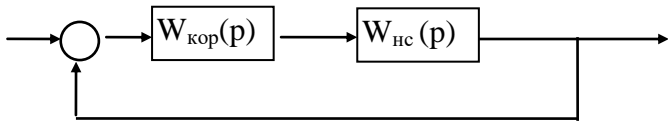


10. На рисунке приведена ЛАЧХ нескорректированной системы и отмечена частота среза скорректированной ЛАЧХ. Найти передаточные функции последовательного и параллельного корректирующего устройства, исходя из следующих требований: статическая ошибка скорректированной системы не больше ошибки исходной нескорректированной системы, запас устойчивости по фазе меньше или равен 40 градусов, относительное перерегуливание около 40%.

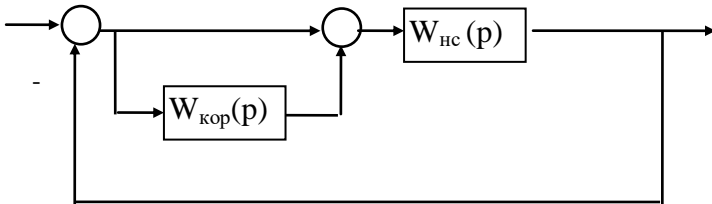


Схемы с коррекцией представлены ниже.

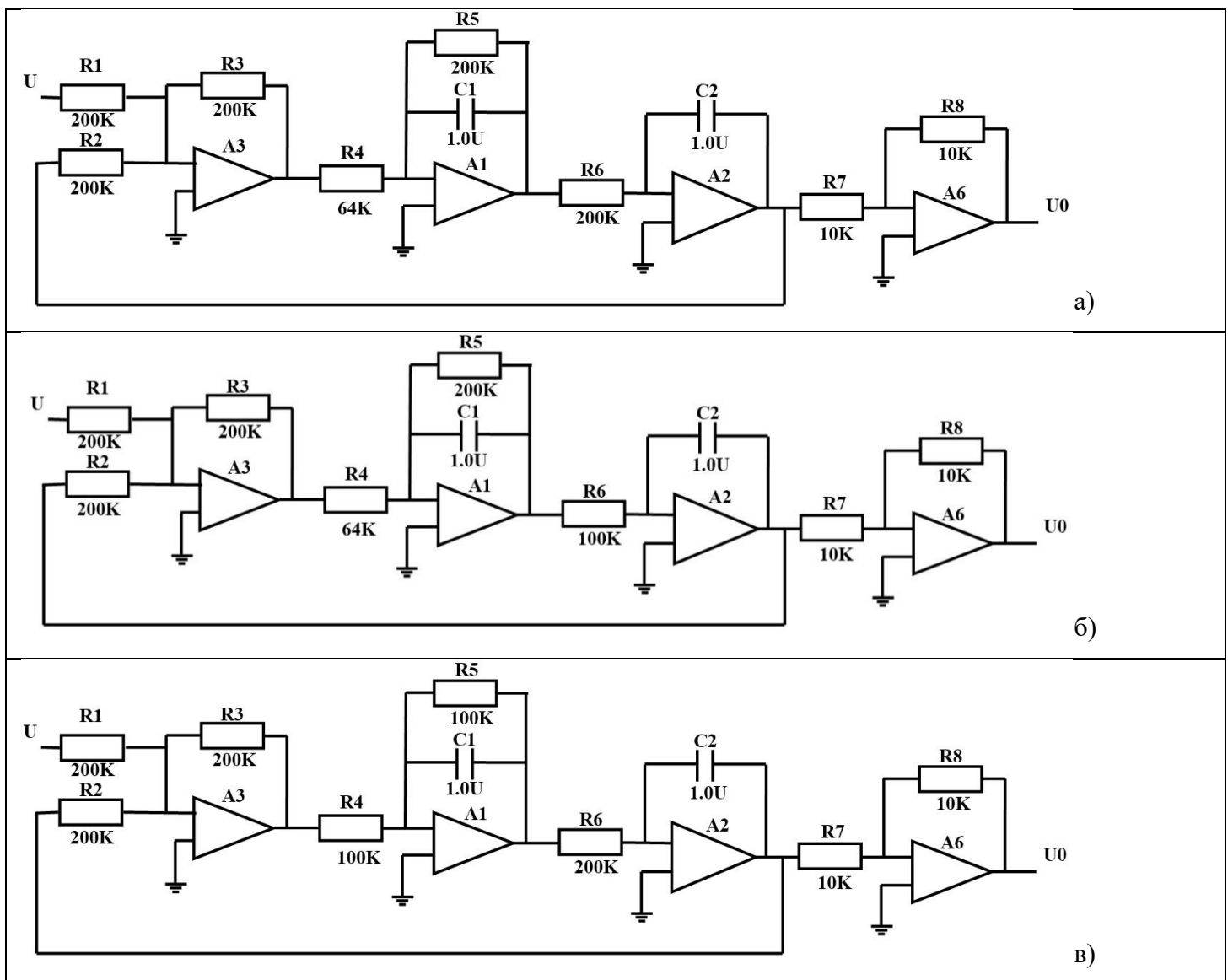
Последовательная коррекция:



Параллельная коррекция:



11. Для схем, представленных ниже, построить модальные регуляторы, обеспечивающие плавные (апериодические) переходные процессы с временем регулирования $t_p=1$ с.

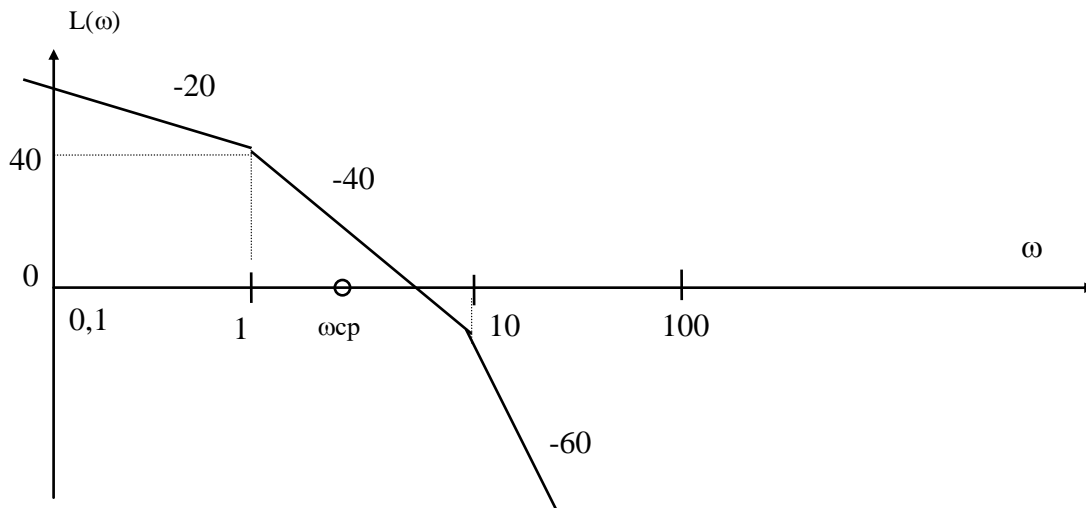


12. Для схем, представленных ниже, построить модальные регуляторы, обеспечивающие плавные (апериодические) переходные процессы с временем регулирования $t_p=1$ с.

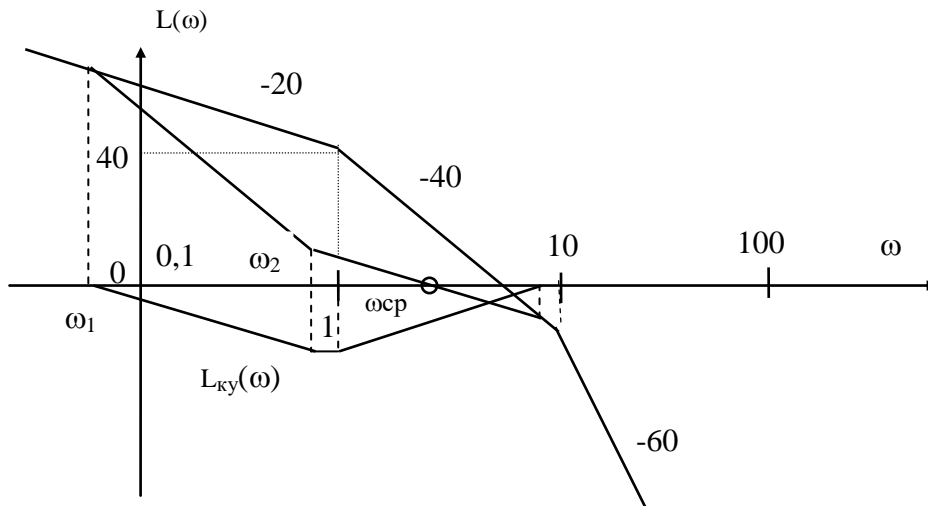
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Схема | а | б | в | а | б | в | а | б | в | а | б | в |
| t_p | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.5 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.5 | 0.3 | 0.3 |

6.8. Практикум по главе 6

Построить последовательное, параллельное корректирующее устройство и корректирующее устройство в цепи обратной связи при заданной логарифмической амплитудной частотной характеристике и заданной частоте среза скорректированной системы, исходя из требований: кинетическая ошибка не больше 0,01, запас по фазе больше 40 градусов, относительное перерегулирование около 50%.



Последовательная коррекция:



Строим ЛАЧХ скорректированной системы, исходя из требования точности на диапазоне низких частот, проводя низкочастотную асимптоту так же, как в исходной системе, высокочастотную, исходя из требований к помехозащищенности и средне частотную – из требований заданного быстродействия и плавности переходного процесса в скорректированной замкнутой системе в соответствии с рекомендациями, рассмотренными в разделе 6.2.2

Вычитая ЛАЧХ нескорректированной системы из ЛАЧХ скорректированной, получаем логарифмическую амплитудную частотную характеристику последовательного корректирующего устройства $L_{ку}(\omega)$. Определяя частоты сопряжения $\omega_1 = 0,056$ и $\omega_2 = 0,063$, находим соответствующие частоты сопряжения и записываем передаточную функцию корректирующего устройства $W_{ку}(p) = \frac{(1+1,58p)(1+p)}{(1+17,85p)(1+0,158p)}$. Корректирующее устройство реализуется интегро-дифференцирующим контуром.

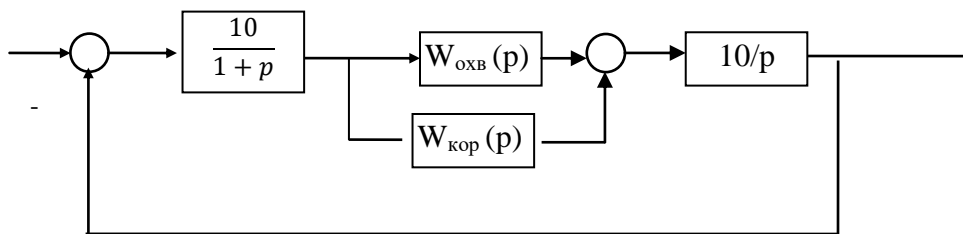
Проверим запас устойчивости по фазе на частоте $\omega_{ср} = 2,8$, записывая передаточную функцию скорректированной системы: $W_{ск}(p) = \frac{100(1+1,58p)}{p(1+17,85p)(1+0,158p)(1+0,1p)}$ и выражение для фазовой частотной характеристики $\varphi_{ск}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg(17,85\omega) + arctg(1,58\omega) - arctg(0,158\omega) - arctg(0,1\omega)$. На частоте $\omega_{ср} = 2,8$ $\varphi_{ск}(\omega)$ принимает значение -133° , т.е. запас по фазе равен 47° , что на 7° больше требуемого значения.

Относительное перерегулирование можно получить построением переходной функции замкнутой скорректированной системы по формуле разложения или моделированием в Matlab.

Значение относительного перерегулирования σ составляет %.

Параллельная коррекция

Структурная схема подключения параллельного корректирующего устройства представлена на рисунке.



Из структурной схемы следует, что $W_{охв}(p)$ можно найти, восстановив передаточную функцию нескорректированной системы по ЛАЧХ, а именно $W_{нс}(p) = \frac{100}{p(1+p)(1+0,1p)}$.

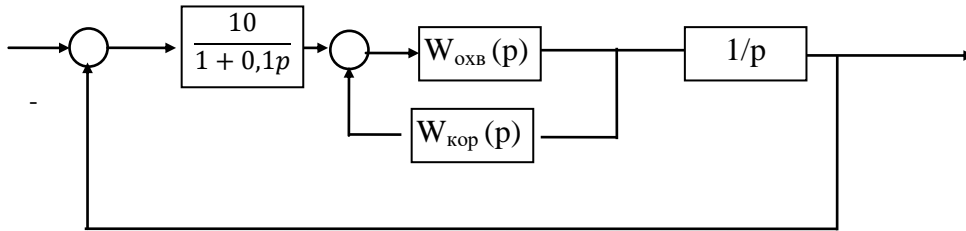
$$W_{охв}(p) = \frac{W_{нс}(p)p(1+p)}{100} = \frac{1}{1+0,1p}$$

Найдем передаточную функцию параллельного корректирующего устройства по формуле $W_{\text{ку}}(p) = W_{\text{охв}}(p) \cdot (W_0(p) - 1)$, принимая $W_0(p)$, равной найденной передаточной функции последовательного корректирующего устройства, т.е. $W_0(p) = \frac{(1+1,58p)(1+p)}{(1+17,85p)(1+0,158p)}$.

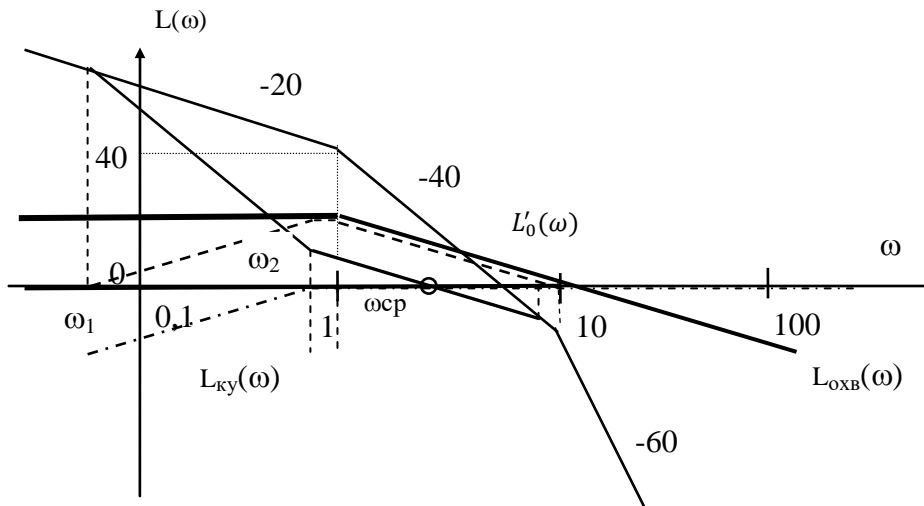
Вычисляя $W_{\text{ку}}(p)$, получаем $W_{\text{ку}}(p) = -\frac{15,43p(1+0,08p)}{(1+0,1p)(1+0,158p)(1+17,85p)}$, представляющего собой соединение инерционного, реального дифференцирующего и упругого интегрирующего звеньев.

Коррекция в цепи обратной связи

Структурная схема подключения корректирующего устройства приведена на рисунке



Воспользуемся проведенными ранее построениями для выбора корректирующего устройства с учетом передаточной функции звеньев, охваченных обратной связью: $W_{\text{охв}}(p) = \frac{10}{1+p}$.



Таким образом, в результате построения получена ЛАЧХ корректирующего устройства в цепи обратной связи, по которому можно восстановить его передаточную функцию: $W_{\text{ку}}(p) = \frac{K_{\text{ку}}p}{1+T_{\text{ку}}p}$,

где $K_{\text{ку}}=0,633$; $T_{\text{ку}}=1,58$.

Проверить величину относительного перерегулирования можно, построив $h(t)$ по формуле разложения, либо в программе Matlab моделированием скорректированной системы.

6.9. Список литературы

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления, «Энергия», ч.1 -1965.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства Москва, Машиностроение, 1976 г., 184 с.
3. Н.А. Бабаков, А.А. Воронов и др. Под редакцией А.А. Воронова Теория автоматического управления ч.1 Теория линейных систем автоматического управления Москва, Высшая Школа,1977 г.,303 с.
4. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк.,1982, 400 с.
5. Теория автоматического управления: Учеб. Для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др. – М.: Высш.шк., 1986. – 367 с.
6. Колосов О.С., Хризолитова С.А. Лабораторные работы по курсу "Основы теории автоматического управления". М.: Изд. МЭИ, 1994.-30с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.-М.: ФИЗМАТГИЗ, 2010. -312 с.