



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"Томский государственный архитектурно-строительный университет"

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ, ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители Лазарева Р.И., Куницына Т.С., Зголич М.В.

Томск 2017

Элементы линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии: методические указания по выполнению контрольной работы для студентов заочной формы обучения / составители: Лазарева Р.И., Куницына Т.С., Зголич М.В. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 40 с.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» при изучении тем «Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия» студентами заочной формы обучения всех специальностей и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры «Высшая математика» (протокол № 2 от 29 сентября 2017 г.)

Оригинал-макет подготовлен составителем Р.И. Лазаревой.

Подписано в печать 28.11.17 г.
Формат 60×90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 50 экз. Заказ № _____
Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены для студентов заочного факультета всех специальностей и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров, выполняющих контрольную работу по теме «Элементы линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии». Содержат теоретические сведения, решения типовых задач, а также варианты контрольных заданий.

В методических указаниях изложен ряд практических рекомендаций по выполнению контрольной работы. Данные указания рекомендуются для самостоятельной работы студентов в процессе изучения следующих разделов: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Матрицы и действия над ними

1.1.1. Числовой матрицей размерности $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ размерность матрицы } A = (a_{ij})_{(m \times n)}.$$

Здесь m – число строк, n – число столбцов. Матрица размерности $(n \times n)$ называется квадратной матрицей порядка n .

Примеры; а) матрица размерности (2×3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

б) диагональная матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) единичная матрица

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) треугольная матрица: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Числа a_{ij} , из которых составлена матрица, называются элементами матрицы. Число i обозначает номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых в матрице A расположен элемент a_{ij} . Элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ называются главными диагональными элементами.

1.1.2 Транспонированием матрицы называется операция замены строк матрицы ее столбиками с теми же номерами. Транспонированная матрица обозначается A^T

Операции над матрицами.

1.1.3. Сложение (вычитание) матриц. Складывать (вычитать) можно матрицы одинаковой размерности $A = (a_{ij})_{(m \times n)}$ и

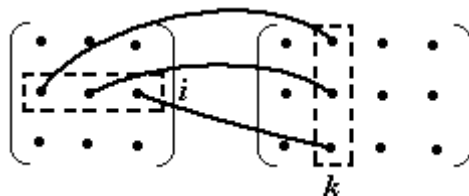
$B = (b_{ij})_{(m \times n)}$. Получим матрицу такой же размерности $C = (c_{ij})_{(m \times n)}$, при этом складываются (вычитаются) соответствующие элементы матриц $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

1.1.4. Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на число λ . $A = \lambda \cdot (a_{ij})_{(m \times n)}$.

1.1.5. Произведение матриц. Матрицу A можно умножить на матрицу B , если число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B . Если $(m \times n)$ – размерность матрицы A , $(n \times p)$ – размерность матрицы B , то матрицу A можно умножить на матрицу B при этом получится матрица $C = A \cdot B$. Формально: $(m \times \boxed{n} \cdot \boxed{n} \times p) = (m \times p)$.

Элементы матрицы C находятся по формуле: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Приведем схему получения элемента c_{ik}



В общем случае $AB \neq BA$; (даже если обе операции допустимы). Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют условию $AB=BA$, то они называются перестановочными.

1.2. Определители

Определителем называется числовая характеристика квадратной матрицы.

1.2.1. *Определителем второго порядка* называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

1.2.2. *Определителем третьего порядка* называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \text{ (правило треугольников)}$$

Обозначения для определителя матрицы A : Δ , $\det A$, $|A|$, D .

1.2.3. *Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n* называется определитель порядка $(n-1)$, который получается в результате вычеркивания i -й строчки и j -го столбика на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

1.2.4. *Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij}* называется минор этого элемента M_{ij} , взятый со своим знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.2.5. *Определитель квадратной матрицы порядка n* равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения, то есть

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

Например, определитель третьего порядка можно вычислить разложением по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^3 a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + \\ &+ a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \end{aligned}$$

1.2.6. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

1.3. Свойства определителей

1.3.1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

1.3.2. При перемене местами двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

1.3.3. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) умножить на отличное от нуля число, определитель умножится на это число

1.3.4. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей.

1.3.5. Определитель, имеющий нулевую строку (или столбец), равен нулю.

1.3.6. Определитель, имеющий два одинаковых столбца (или строки), равен нулю.

1.3.7. Определитель, у которого элементы двух строк (или столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

1.3.8. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо его столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или строки), умноженные на одно и то же число.

стоит из алгебраических дополнений, и является транспонированной:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3).$$

1.6. Матричный метод решения системы

1.6.1. Пусть дана система n линейных уравнений (1) с n неизвестными. Используя введенные матрицы (2), получим матричное уравнение системы в виде: $AX = B$, решение системы (1) сводится к решению данного матричного уравнения. Если $\det A \neq 0$ система будет иметь единственное решение.

1.6.2. В матричном виде решение системы (1) находится по формуле $X = A^{-1}B$.

1.7. Ранг матрицы

1.7.1. Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора. Обозначения ранга r_A или $\text{rang } A$.

1.7.2. Базисным минором называется любой отличный от нуля минор этой матрицы, порядок которого равен рангу матрицы.

1.7.3. Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы.

1.7.4. Для нахождения ранга матрицы будем применять метод элементарных преобразований. Под элементарными преобразованиями матрицы понимают:

- 1) транспонирование матрицы,
- 2) перестановку двух строк или столбцов,
- 3) вычеркивание нулевой строки или столбца,
- 4) умножение элементов какой-либо строки (или столбца) на число не равное нулю и прибавление к соответствующим элементам другой строки (или столбца).

1.7.5. Используя элементарные преобразования, приводим матрицу к ступенчатому виду. Тогда ранг матрицы будет равен числу не нулевых элементов на главной диагонали.

1.8. Решение произвольных систем линейных уравнений

1.8.1. Произвольной системой называется система из m уравнений с n неизвестными. Решение произвольных систем находим используя понятие ранга матрицы.

1.8.2. Если к основной матрице системы добавить столбец свободных членов, получится расширенная матрица системы A_p .

Пусть задана произвольная система из t уравнений с n неизвестными

[illegible]

Введем основную A и расширенную A_p матрицы системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

1.8.3. Решение вопроса о совместности системы основано на теореме Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли. Для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно чтобы ранг основной матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы $r_A = r_{A_p} = r$.

1.8.4. Замечание: Ранг расширенной матрицы системы не может быть больше ранга основной матрицы. Согласно теореме Кронекера-Капелли если ранг основной матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то система не совместна.

1.8.5. Если ранг системы равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение. Из теоремы о ранге следует, что система имеет ($r = n$) линейно независимых строк. Тогда оставляют в системе n уравнений, остальные ($m - n$) уравнений отбрасывают. Единственное решение системы из n уравнений можно найти методом Крамера, матричным методом или методом Гаусса.

1.8.6. Если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система имеет множество решений. В системе оставляют только r уравнений. Остальные $m - r$ уравнений отбрасывают. В оставленных r уравнениях, те неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор оставляют слева и называют эти неизвестные базисными. Остальные $n - r$ неизвестных переносят вправо и считают их свободными. Для нахождения общего решения системы базисные неизвестные выражают через свободные.

1.9. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

1.9.1. Метод Гаусса применяется для нахождения единственного решения системы, что возможно, если ранг системы равен числу неизвестных ($r = n$). Суть метода Гаусса состоит в том, что путем элементарных преобразований расширенную матрицу системы A_p приводим к ступенчатому виду. В результате получим систему ступенчатого вида в которой первое уравнение содержит все неизвестные, во втором уравнении исключено неизвестное x_1 , в третьем исключены неизвестные x_1 и x_2 и т. д. В итоге последнее уравнение системы будет содержать только оно неизвестное x_n .

1.9.2. Обратный ход метода Гаусса состоит в следующем: из последнего n -го уравнения системы найдем x_n и подставим его значение в $n - 1$ -е уравнение, тогда из $n - 1$ -го урав-

нения найдем x_{n-1} , затем в $n-2$ -е уравнение подставим значения x_n и x_{n-1} и из $n-2$ -го уравнения найдем x_{n-2} и так далее, пока не дойдем до первого уравнения в котором будут найдены все неизвестные, кроме первого. Определяя x_1 из первого уравнения системы, получим совокупность значений неизвестных, которые образуют решение системы.

Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2. 1. Определение вектора, его длины

2.1.1. Вектор – это направленный отрезок (или, другими словами, упорядоченная пара точек).

Для вектора принято обозначение $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало, точка B – конец вектора.

2.1.2. Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между началом вектора и его концом. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

2.1.3. Вектор, у которого совпадают начало и конец, называют *нулевым вектором* и обозначают $\vec{0}$.

2.2. Коллинеарные и компланарные векторы

2.2.1. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Коллинеарность векторов принято обозначать $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Если хотят подчеркнуть сонаправленность коллинеарных векторов, пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, если же коллинеарные векторы противоположно ориентированы, принята запись $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$. Нулевой вектор принято считать коллинеарным любому вектору.

2.2.2. Совокупность трех и более векторов, лежащих в одной плоскости или параллельных одной плоскости, называют *компланарной*.

Например, на рис. 1 тройки векторов $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BB_1}$ являются компланарными, тройка $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ – не компланарна. А векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ – коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$ – коллинеарны, причем, $\overrightarrow{AA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1D_1}$.

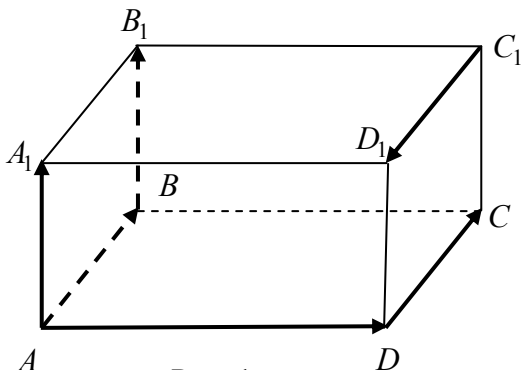


Рис. 1

2.3. Линейные операции над векторами

2.3.1. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который находится либо по правилу параллелограмма (рис. 2), либо по правилу треугольника (рис. 3). В первом случае для нахождения суммы оба вектора откладываются от одной точки, на этих векторах строится параллелограмм. Тогда сумма данных векторов есть вектор, начало которого совпадает с началами обоих векторов-слагаемых и направленный по диагонали параллелограмма (рис. 2).

Чтобы найти сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника, нужно расположить векторы последовательно (от конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}$). Тогда их сумма – это вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора (вектора $\vec{a}$), а конец совпадает с концом второго вектора (вектора $\vec{b}$) (рис. 3).

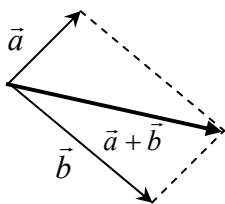


Рис. 2

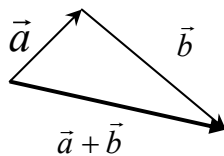
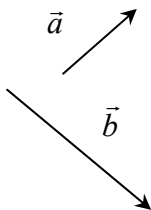


Рис. 3

2.3.2. Сумму любого числа векторов находят по правилу многоугольника (рис. 4).

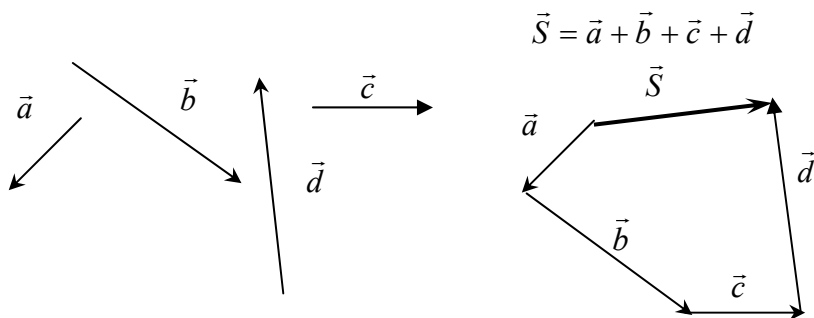


Рис. 4

По правилу многоугольника путем параллельного переноса начало каждого последующего вектора помещают в конец предыдущего. Вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ получен путем соединения начала первого вектора и конца последнего вектора.

2.3.3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$;

$\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.

2. $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

$$3. 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$$

При этом принята запись $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

На рис.5 изображены векторы $\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$.

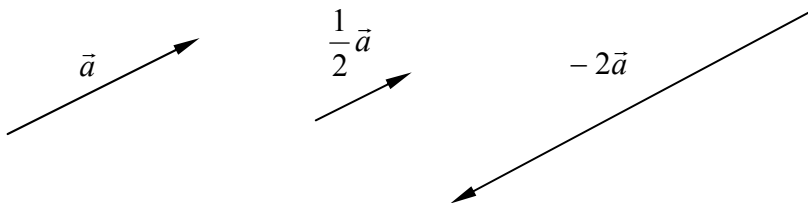


Рис. 5

2.4 Базис. Разложение вектора по базису

2.4.1. Базисом на плоскости называют пару ненулевых неколлинеарных векторов.

2.4.2. Разложить вектор $\vec{c}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – значит представить вектор $\vec{c}$ в виде

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b},$$

где α, β – некоторые числа, которые называются *координатами* вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.4.3. Два вектора коллинеарны, если их координаты пропорциональны.

Например, в пространстве векторы $\vec{a} = \{1, 2, -3\}$ и $\vec{b} = \{-2, -4, 6\}$ – коллинеарны, так как $\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \lambda$, где $\lambda = -\frac{1}{2}$. Векторы $\vec{c} = \{3, -5\}$ и $\vec{d} = \{6, 7\}$ на плоскости не коллинеарны, так как $\frac{3}{6} \neq \frac{-5}{7}$, значит они образуют базис.

2.4.4. Если известны координаты начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то его координаты находятся по формуле $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

2.4.5. Если вектор $\vec{a} = \{x; y\}$ на плоскости задан своими координатами, то его длина находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. В пространстве длина вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2.5. Скалярное произведение векторов

2.5.1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Для скалярного произведения принято обозначение $(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, по определению

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, скалярное произведение полагается равным нулю.

2.5.2. Зная координаты векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, можно найти их скалярное произведение по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

2.5.3. С помощью скалярного произведения можно вычислить угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Или в координатах

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2.5.4. Из 2.5.3 следует *условие перпендикулярности* не нулевых векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

2.6. Векторное произведение векторов

2.6.1. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ ориентирован так, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует правую тройку векторов;
- 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Для векторного произведения принято обозначение $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

2.6.2. Из определения получаем *условие коллинеарности* двух векторов: два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (угол φ между ними равен 0 или 180° , значит $\sin \varphi = 0$) тогда и только тогда, когда их векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ равно нулю.

2.6.3. В декартовых координатах векторное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ представляется в виде определителя третьего порядка

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартова базиса это единичные взаимно перпендикулярные векторы, образующие правую тройку в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 6).

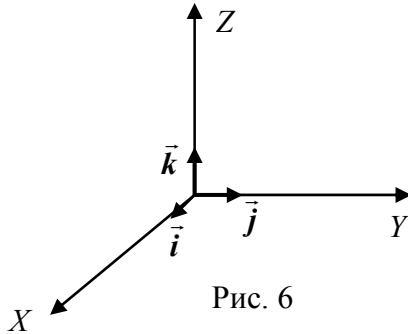


Рис. 6

2.6.4. Геометрический смысл векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заключается в том, что модуль векторного произведения данных векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 6, б).

$$S_{\text{пар-ма}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|$$

2.7. Смешанное произведение векторов

2.7.1. Смешанным произведением трех векторов называется скалярное произведение (т.е. число) векторного произведения двух первых векторов на третий вектор.

Для смешанного произведения принято обозначение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Таким образом, по определению $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

2.7.2. Смешанное произведение трех векторов, взятое по модулю, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах: $V_{\text{пар-да}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$

2.7.3. Условие компланарности трех векторов: смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равно 0 тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

2.7.4. Если известны координаты векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Тема 3. Элементы аналитической геометрии

3.1. Прямая линия на плоскости

3.1.1. Уравнение прямой можно записать, если:

1) на прямой известна точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный этой прямой (вектор $\vec{n} = (A, B)$ называют *нормальным вектором* прямой) (рис. 7, а)

2) на прямой известна точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\vec{S} = (m, n)$, параллельный этой прямой (вектор $\vec{S}$ называется *направляющим вектором* прямой), (рис. 7, б).



Рис. 7

3.1.2. Как получить уравнение прямой в том и другом случаях?

а) Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\vec{n} = (A, B)$. Получим уравнение прямой, проходящей через точку

M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$. Для этого возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ (рис. 8, а)

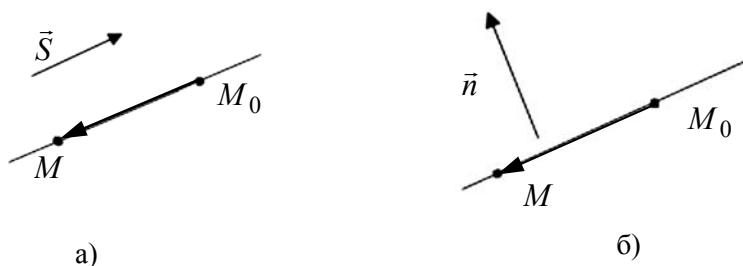


Рис. 8

Поскольку векторы $\vec{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, т.е., $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$, то их скалярное произведение равно нулю: $(\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0$. А так как $\vec{n} = (A, B)$, $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$, то в координатах получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $C = -Ax_0 - By_0$, получаем *общее уравнение прямой на плоскости*

$$Ax + By + C = 0.$$

б) Пусть теперь задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и известен вектор $\vec{S} = (m, n)$. Получим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{S} = (m, n)$. Для этого возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ (рис.8, б).

По условию коллинеарности векторов (см. свойство 2.4.3) $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ и $\vec{S} = (m, n)$ получаем **каноническое уравнение прямой на плоскости**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

3.1.3. Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ тогда также известен направляющий вектор $\vec{S} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 9) прямой и каноническое уравнение примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки.

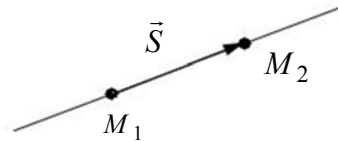


Рис. 9

3.2. Плоскость в пространстве

3.2.1. Уравнение плоскости можно получить в каждом из следующих двух случаев:

1) Если на плоскости в заданной системе координат известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и известен нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости (т.е. вектор, перпендикулярный плоскости).

2) Если на плоскости известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и известны два неколлинеарных между собой вектора, параллельных данной плоскости.

Как получить уравнение плоскости в том и другом случаях?

1) Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$. Требуется получить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 10).

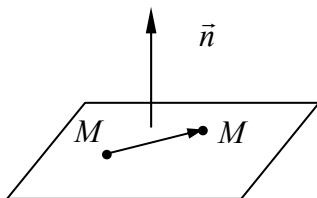


Рис. 10

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. По условию перпендикулярности $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$.

Переходя к координатам векторов, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Введем обозначение $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, тогда уравнение плоскости примет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это уравнение называют *общим уравнением плоскости*. Заметим, что в этом уравнении коэффициенты A, B, C – координаты нормального вектора плоскости.

2) Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Требуется получить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ (рис. 11).

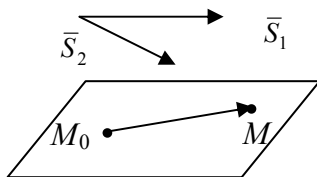


Рис. 11

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. По условию задачи векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$ компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{S_1}, \vec{S_2}) = 0.$$

Переходя к координатам векторов, получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Линейная алгебра

1. Что называется матрицей размерности $(m \times n)$? Что такое квадратная матрица второго порядка, третьего порядка? Привести примеры.

2. Какие операции можно производить над матрицами? Привести примеры.

3. Способы вычисления определителя третьего порядка. Привести примеры.

4. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как найти обратную матрицу?

5. В чем состоит метод Крамера решения системы линейных уравнений?

6. В чем состоит матричный метод решения системы линейных уравнений?
7. Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?
8. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
9. В чем заключается метод Гаусса решения системы линейных уравнений?

Векторная алгебра

1. Что называется вектором и длиной (модулем) вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными и компланарными?
3. Что называется суммой векторов? Каковы способы нахождения суммы двух и большего числа векторов?
4. Что называется произведением вектора на число?
5. Что называется базисом на плоскости?
6. Что значит «разложить вектор по базису»? Что называется координатами вектора в данном базисе?
7. В каком случае векторы являются коллинеарными?
8. Как выражаются координаты вектора через координаты начала и конца вектора?
9. Как вычисляется длина вектора?
10. Что называется скалярным произведением двух векторов, как оно выражается через координаты векторов?
11. Как вычисляется угол между двумя векторами?
12. Каково условие перпендикулярности векторов?
13. Что называется векторным произведением двух векторов и как оно выражается через координаты векторов?
14. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов?
15. В чем заключается геометрический смысл векторного произведения?
16. Что называется смешанным произведением трех векторов, каков его геометрический смысл и как оно выражается через координаты векторов?

17. Сформулируйте условие компланарности трех векторов?

Аналитическая геометрия

1. Что называется нормальным и направляющим векторами прямой на плоскости?

2. Как записать уравнение прямой на плоскости, если известен ее нормальный (направляющий) вектор?

3. Как записать уравнение прямой, проходящей через две точки?

4. Как записывается уравнение плоскости, если известна точка, через которую она проходит, и нормальный вектор?

5. Как записывается уравнение плоскости, если известна точка, через которую она проходит, и два неколлинеарных вектора, параллельных ей?

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) методом Гаусса;

2) методом Крамера;

3) матричным способом.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

Решение. 1. Запишем расширенную матрицу системы согласно пункту 1.8.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{array} \right)$$

С помощью элементарных преобразований (пункт 1.7.4) найдем ранг основной матрицы и ранг расширенной матрицы. Чтобы удобнее было получать нули под главной диагональю, в

дальнейшем будем обозначать строку L . Вычтем из третьей строки первую, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5-4 & 6-(-3) & -2-2 & 18-9 \end{array} \right)$$

Результат запишем в первую строку. В символике эта операция будет выглядеть следующим образом: $L_3 - L_1 \rightarrow L_1$. В результате получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-3 & 2 & 9 & 9 \\ 2 & 5-3 & 4 & 4 \\ 5 & 6-2 & 18 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow \left| L_3 - L_1 \rightarrow L_1 \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9-4 & 9 & 9 \\ 2 & 5-3 & 4 & 4 \\ 4-3 & 2 & 9 & 9 \end{array} \right)$$

Первую строку умножим на (-2) и прибавим ко второй строке, результат отправим во вторую строку, то есть: $L_1 \cdot (-2) + L_2 \rightarrow L_2$. Затем первую строку умножим на (-4) и прибавим к третьей строке, результат отправим в третью строку, то есть: $L_1 \cdot (-4) + L_3 \rightarrow L_3$, при этом первая строка не изменится, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} L_1 \cdot (-2) + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1 \cdot (-4) + L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array} \right)$$

Вторую строку умножим на (-3) и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & -39 & 18 & -27 \end{array} \right) \Rightarrow |L_2(-3) + L_3 \rightarrow L_3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 0 & -13 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang} A = \text{rang} A_p.$$

Совместность системы доказана (п. 1.8.3), так как ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. Ранг основной матрицы равен числу неизвестных, следовательно, система имеет единственное решение (п. 1.8.5).

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ примем за базисный (п. 1.7.2). Базис-

ные переменные: x_1, x_2, x_3 ; свободных переменных – нет. Запи-

шем систему эквивалентную заданной:
$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 9 \\ -13x_2 + 5x_3 = -14 \\ 3x_3 = 15 \end{cases}$$

Проведем обратный ход метода Гаусса (п.1.9.2). Из третьего

уравнения найдем $x_3 = \frac{15}{3} = 5$, подставим во второе уравнение:

$-13x_2 + 5 \cdot 5 = -14$, получим $x_2 = 3$. Полученные значения под-

ставим в первое уравнение: $x_1 + 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 9 \Rightarrow x_1 = 2$. От-

вет: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

2. Решим систему методом Крамера (п. 1.4.1). Запишем основную матрицу системы А и матрицу-столбец свободных членов В.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель основной мат-

рицы системы, например, по правилу треугольников (п. 1.2.2).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \cdot 2 - \\ - 4 \cdot 6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) \cdot (-2) = 39 \neq 0.$$

Поскольку определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение (п. 1.4.1). При вычислении определителя Δ_1 заменим в определителе Δ первый столбец свободными элементами. Определители Δ_2 и Δ_3 получим аналогично, заменой в определителе основной матрицы второго и третьего столбца соответственно столбцом свободных элементов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \\ 18 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) \cdot 18 + 4 \cdot 6 \cdot 2 - 18 \cdot 5 \cdot 2 - \\ - 9 \cdot 6 \cdot (-3) - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = -90 + 162 + 48 - 180 + 162 - 24 = 78;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 18 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot (-2) + 9 \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 18 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - \\ - 4 \cdot 18 \cdot (-3) - 2 \cdot 9 \cdot (-2) = -32 - 135 + 72 - 40 + 216 + 36 = 117.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 18 + (-3) \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 9 - 5 \cdot 5 \cdot 9 - \\ - 4 \cdot 6 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 18 = 360 - 60 + 108 - 225 - 96 + 108 = 195.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{117}{39} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{195}{39} = 5.$$

3) Решим систему матричным способом. Используя формулу (2) из пункта 1.4.1 запишем основную матрицу системы A , матрицу-столбец свободных элементов B и матрицу-столбец неизвестных X . Согласно пункту 1.6.1 получим матричное уравнение системы $AX = B$. Так как определитель Δ матрицы A отличен от нуля ($\Delta = \det A = 39 \neq 0$), то решение единственно:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричном виде находится по формуле $X = A^{-1}B$ (п.1.6.2), где обратную матрицу найдем согласно пункту 1.5.3. Для нахождения союзной матрицы $\tilde{A}$ будем находить миноры M_{ij} (п. 1.2.3.) и алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (п. 1.2.4) к каждому элементу матрицы A . При четных степенях будем получать положительный знак

$(-1)^2 = (-1)^4 = \dots = (-1)^{2k} = 1$, а при нечетных – отрицательный:
 $(-1)^1 = (-1)^3 = \dots = (-1)^{2k+1} = -1$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 6 \cdot (-3) = 8;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(2(-2) - 5(-3)) = -11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -13;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -((-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 6) = 6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 = -18;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 6 - 5 \cdot (-3)) = -39;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2) = 16;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 26.$$

Найденные алгебраические дополнения и значение определителя подставим в формулу обратной матрицы (п. 1.5.3), получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы A^{-1} и B , согласно пункту 1.6.2, найдем решение системы по формуле:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = \\ &= \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 \cdot 9 + 6 \cdot 4 + (-1) \cdot 18 \\ -11 \cdot 9 + (-18) \cdot 4 + 16 \cdot 18 \\ -13 \cdot 9 + (-39) \cdot 4 + 26 \cdot 18 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78/39 \\ 117/39 \\ 195/39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases}.$$

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; 4\}$, $\vec{c} = \{-7; 8\}$.

Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Покажем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Действительно, они ненулевые и неколлинеарные, поскольку

$\frac{1}{-3} \neq \frac{-2}{4}$, то согласно пункту 2.4.1 векторы образуют базис.

Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть представим вектор $\vec{c}$ в виде $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ и найдем его координаты (числа α и β). Для этого подставим в данное равенство координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. В результате получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов α и β :

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = -7, \\ -2\alpha + 4\beta = 8. \end{cases}$$

Решая полученную систему определяем $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Следовательно, вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим образом: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Ответ: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Задача 3. Даны точки $A_1(-4, 2)$, $A_2(2, -3)$, $A_3(-10, 5)$.

Найти: 1) длину вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

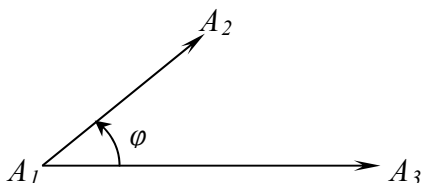


Рис.12

Решение.

1. Чтобы найти длину (модуль) вектора $\overline{A_1A_2}$ найдем координаты вектора $\overline{AB}$ согласно пункту 2.4.4: $\overline{A_1A_2} = \{2 - (-4); -3 - 2\} = \{6; -5\}$. Теперь, следуя указанию 2.4.5, вычислим длину вектора $\overline{A_1A_2}$:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}.$$

2. Угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ (п. 2.5.3) найдем по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|}.$$

Найдем координаты вектора $\overline{A_1A_3} = \{-10 - (-4); 5 - 2\} = \{-6; 3\}$, а затем вычислим скалярное произведение

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}) = 6 \cdot (-6) + (-5) \cdot 3 = 51.$$

Найдем модуль вектора $|\overline{A_1A_3}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ (п. 2.4.5):

Подставляя найденные величины в формулу для нахождения косинуса угла, получаем

$$\cos \varphi = \frac{51}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{45}} = \frac{51}{\sqrt{61} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{305}}.$$

Задача 4. Даны вершины пирамиды $A(-4, 2, 6)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-10, 5, 8)$ и $D(-5, 2, -4)$. Найти: 1) площадь грани ABC ; 2) объем пирамиды.

Решение.

1. Чтобы найти площадь грани ABC , воспользуемся формулой

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, получим:

$$\overline{AB} = \{2 - (-4); -3 - 2; 0 - 6\} = \{6; -5; -6\}$$

$$\overline{AC} = \{-10 - (-4); 5 - 2; 8 - 6\} = \{-6; 3; 2\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле из пункта 2.6.3:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 24\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Тогда, согласно (п. 2.4.5), модуль векторного произведения:

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{8^2 + 24^2 + (-12)^2} = \sqrt{64 + 576 + 144} = \sqrt{784} = 28.$$

Окончательно, площадь грани ABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$ кв.ед.

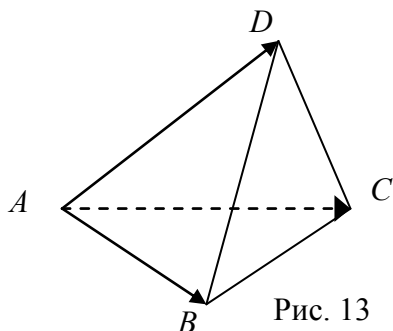


Рис. 13

2. Из школьного курса известно, что объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах. Таким образом,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

И мы получаем $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 112$. Искомый

объем равен $V_{\text{пир}} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$ куб.ед.

Задача 5. Заданы вершины треугольника $A(3, 4)$, $B(5, -2)$ и $C(-4, 6)$. Требуется составить уравнения: 1) стороны AB ; 2) высоты BP , проведенной из вершины B .

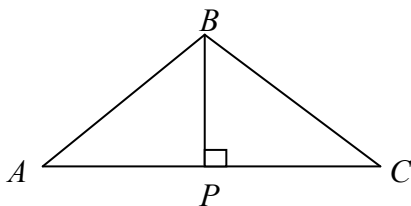


Рис. 14

Решение.

1. Чтобы получить уравнение стороны AB , воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (п. 3.1.3):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Уравнение прямой AB примет вид:

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y - 4}{-2 - 4} \Rightarrow \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{-6}.$$

Полученное каноническое уравнение простым преобразованием приведем к виду

$$3x + y - 13 = 0.$$

Это общее уравнение прямой AB .

2. Чтобы получить уравнение высоты BP , воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{AC}$ является нормальным вектором прямой BP (первый случай из пункта 3.1.2). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка этой прямой. Так как вектора $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BM}) = 0$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BM}$: $\overrightarrow{AC} = \{-7, 2\}$, $\overrightarrow{BM} = \{x - 5; y + 2\}$. Тогда запишем общее уравнение прямой BP : $-7(x - 5) + 2(y + 2) = 0$, или $7x - 2y - 39 = 0$.

Задача 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1, 0, 1)$, и параллельной плоскости $4x - 2y + z + 6 = 0$.

Решение.

Из общего уравнения плоскости $4x - 2y + z + 6 = 0$ находим координаты ее нормального вектора $\vec{n} = \{4; -2; 1\}$. Так как по условию данная плоскость параллельна искомой плоскости, то ее нормальный вектор перпендикулярен искомой плоскости (рис. 15).

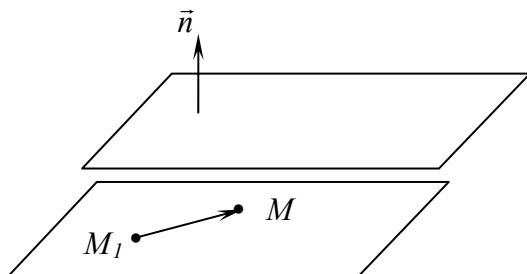


Рис. 15

Таким образом, получаем первый случай из рассмотренных выше (п. 3.2.1). Векторы $\vec{M_1M}$, $\vec{n}$ перпендикулярны, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{n}, \vec{M_1M}) = 0.$$

Имея координаты этих векторов: $\vec{M_1M} = \{x + 1; y; z - 1\}$ и $\vec{n} = \{4; -2; 1\}$ запишем скалярное произведение, получим:

$$4(x + 1) + (-2)y + 1(z - 1) = 0.$$

Упростив это уравнение, получаем общее уравнение искомой плоскости:

$$4x - 2y + z + 3 = 0.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1-10. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами:

- методом Гаусса;
- методом Крамера;
- матричным способом.

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \\
3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} & 4. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \\
5. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \\
7. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} & 8. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \\
9. \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases} & 10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}
\end{array}$$

11-20. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Показать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

11. $\vec{a} = \{4; -2\}, \vec{b} = \{3; 5\}, \vec{c} = \{1; -7\};$
12. $\vec{a} = \{3; -2\}, \vec{b} = \{-2; 1\}, \vec{c} = \{7; -4\};$
13. $\vec{a} = \{3; 5\}, \vec{b} = \{1; -7\}, \vec{c} = \{7; 3\};$
14. $\vec{a} = \{3; 1\}, \vec{b} = \{2; -1\}, \vec{c} = \{8; 1\};$
15. $\vec{a} = \{3; 1\}, \vec{b} = \{2; -1\}, \vec{c} = \{5; 5\};$
16. $\vec{a} = \{3; 1\}, \vec{b} = \{2; -1\}, \vec{c} = \{1; -3\};$
17. $\vec{a} = \{4; -2\}, \vec{b} = \{3; 5\}, \vec{c} = \{5; -9\};$
18. $\vec{a} = \{2; 1\}, \vec{b} = \{-1; 2\}, \vec{c} = \{1; 8\};$
19. $\vec{a} = \{2; 1\}, \vec{b} = \{-1; 2\}, \vec{c} = \{12; 1\};$

20. $\vec{a} = \{5; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -4\}$, $\vec{c} = \{4; 12\}$.

21-30. Даны координаты точек $A_1 A_2 A_3$: Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{A_1 A_2}$;

2) угол между векторами $\overrightarrow{A_1 A_2}$ и $\overrightarrow{A_1 A_3}$.

21. $A_1(4; 2)$, $A_2(0; 7)$, $A_3(0; 2)$.

22. $A_1(4; 4)$, $A_2(4; 6)$, $A_3(2; 8)$.

23. $A_1(4; 6)$, $A_2(6; 9)$, $A_3(2; 10)$.

24. $A_1(3; 5)$, $A_2(8; 7)$, $A_3(5; 10)$.

25. $A_1(10; 6)$, $A_2(-2; 8)$, $A_3(6; 8)$.

26. $A_1(1; 8)$, $A_2(5; 2)$, $A_3(5; 7)$.

27. $A_1(6; 6)$, $A_2(4; 9)$, $A_3(4; 6)$.

28. $A_1(7; 2)$, $A_2(5; 7)$, $A_3(5; 3)$.

29. $A_1(8; 6)$, $A_2(10; 5)$, $A_3(5; 6)$.

30. $A_1(7; 7)$, $A_2(6; 5)$, $A_3(3; 5)$.

31-40. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$:

Найти: 1) площадь грани $A_1 A_2 A_3$; 2) объем пирамиды.

31. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

32. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4; 6; 2)$, $A_3(2; 8; 4)$, $A_4(9; 6; 9)$.

33. $A_1(4; 6; 5)$, $A_2(6; 9; 4)$, $A_3(2; 10; 10)$, $A_4(7; 5; 9)$.

34. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

35. $A_1(10; 6; 6)$, $A_2(-2; 8; 2)$, $A_3(6; 8; 9)$, $A_4(7; 10; 3)$.

36. $A_1(1; 8; 2)$, $A_2(5; 2; 6)$, $A_3(5; 7; 4)$, $A_4(4; 10; 9)$.

37. $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$.

38. $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(5; 7; 7)$, $A_3(5; 3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$.

39. $A_1(8; 6; 4)$, $A_2(10; 5; 5)$, $A_3(5; 6; 8)$, $A_4(8; 10; 7)$.

40. $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

41-50. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

- 1) уравнение стороны АВ;
2) уравнение высоты, проведенной из вершины А.

41. $A(-8; -2), B(2; 10), C(4; 4)$.

42. $A(-5; -2), B(7; 6), C(5; -4)$.

43. $A(4; 8), B(2; -10), C(-6; -2)$.

44. $A(-6; -2), B(4; 8), C(2; -8)$.

45. $A(2; 6), B(4; -2), C(-2; -6)$.

46. $A(-7; 3), B(2; -1), C(-1; -5)$.

47. $A(-2; -2), B(7; -6), C(1; 2)$.

48. $A(-5; 3), B(3; 4), C(7; -3)$.

49. $A(-2; 0), B(2; 6), C(4; 2)$.

50. $A(0; 0), B(1; 6), C(4; 2)$.

51-60. Даны координаты точки M_1 . Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и параллельной заданной плоскости P .

51. Точка $M_1(2; 1; 0)$ и плоскость $P: 3x + 2y + z + 2 = 0$.

52. Точка $M_1(-1; 2; 1)$ и плоскость $P: x - 2y + z + 3 = 0$.

53. Точка $M_1(2; 1; -1)$ и плоскость $P: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

54. Точка $M_1(3; 1; 1)$ и плоскость $P: 3x + 2y - z + 1 = 0$.

55. Точка $M_1(2; -1; -1)$ и плоскость $P: 2x + y - z + 2 = 0$.

56. Точка $M_1(-1; 1; 1)$ и плоскость $P: x - 2y + z + 3 = 0$.

57. Точка $M_1(2; 1; 1)$ и плоскость $P: 2x - y - 2z + 1 = 0$.

58. Точка $M_1(0; 1; 0)$ и плоскость $P: x - 2y + z + 3 = 0$.

59. Точка $M_1(2; -1; -1)$ и плоскость $P: 3x + 2y - z + 1 = 0$.

60. Точка $M_1(1; 1; 2)$ и плоскость $P: x - 2y + z + 3 = 0$.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. На обложке тетради должно быть написано название контрольной работы, разборчиво написана фамилия студента его инициалы, учебный номер (шифр).

2. Например, если Ваш шифр 526-008, тогда номер Вашего варианта 8. Вам необходимо решить все задачи из Вашего варианта, номера задач 8, 18, 28, 38, 48, 58 из таблицы

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

3. Решение задач необходимо излагать подробно и аккуратно. Условие задачи переписывается полностью.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Виленкин, И.В. Высшая математика / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов-н/Д. : «Феникс», 2010. – Гл. 1, с. 14 – 62.

2. Баврин, И.И. Высшая математика / И.И. Баврин. – М.: Академкнига, 2009. – Гл. 2, с. 36 – 85.

Дополнительная литература

3. Лесняк Л.И., Старенченко В.А. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко– Томск: Изд-во НТЛ, 2008. – С. 6 – 140.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006. – С. 143 – 196.

5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии /

Д.В. Клетеник. – СПб.: Лань, 2010. – С. 121 – 139, 201 – 222.

6. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /Д.В. Беклемешев. – М.: Наука, 1980 – 1987. – С. 142 – 231.

2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии./ Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980. – С. 35 – 83.

7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980 – 1999. – Ч. 1. С. 76 – 148.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Тема I. Элементы линейной алгебры	3
1.1. Матрицы и действия над ними	3
1.2. Определители.....	5
1.3. Свойства определителей.....	6
1.4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.....	7
1.5. Обратная матрица.....	7
1.6. Матричный метод решения системы.....	8
1.7. Ранг матрицы.....	8
1.8. Решение произвольных систем линейных уравнений.....	9
1.9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.....	10
Тема 2. Элементы векторной алгебры	11
2.1. Определение вектора, его длины.....	11
2.2. Коллинеарные и компланарные векторы.....	11
2.3. Линейные операции над векторами.....	12
2.4. Базис. Разложение вектора по базису.....	14
2.5. Скалярное произведение векторов.....	15
2.6. Векторное произведение векторов.....	16
2.7. Смешанное произведение векторов.....	17
Тема 3. Элементы аналитической геометрии	18
3.1. Прямая линия на плоскости.....	18
3.2. Плоскость в пространстве.....	20
	39

Вопросы для самопроверки.....	22
Линейная алгебра.....	22
Векторная алгебра.....	23
Аналитическая геометрия.....	24
Рекомендации по решению задач.....	24
Задачи для контрольных заданий.....	34
Правила оформления контрольной работы.....	38
Список рекомендуемой литературы.....	38