Дана булева функция таблицей.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & \epsilon_3 \\ 0 & 1 & 1 & \epsilon_4 \\ 1 & 0 & 0 & \epsilon_5 \\ 1 & 0 & 1 & \epsilon_6 \\ 1 & 1 & 0 & \epsilon_7 \\ 1 & 1 & 1 & \epsilon_8 \end{array}$$

Теперь - описание задач типового расчёта. Во-первых, каждый человек должен получить свою булеву функцию, чтобы с ней работать. Откуда её взять? Ответ таков. Берём запись произвольной булевой функции; она перед Вами. В ней первые три столбца - это векторы (начиная с вектора (000) и кончая вектором (111). В последнем (четвёртом столбце написаны значения функции на этих векторах). Они пока не даны (только обозначены через $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_8$, их надо получить. Откуда получить? Берёте Ваш номер в списке группы и записываете его в двоичной системе. Получилась цепочка нулей и единиц. Если в этой цепочке меньше восьми цифр; допишите слева нули, чтобы стало восемь; если цифр больше восьми, удаляем несколько последних, чтобы осталось ровно восемь. Цепочку записываем в виде столбца (транспонируем). Вот и получили четвёртый столбец. И мы получили матричную запись нашей функции. Эта таблица имеет вид

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon_2 \\ 0 & 1 & 0 & \epsilon_3 \\ 0 & 1 & 1 & \epsilon_4 \\ 1 & 0 & 0 & \epsilon_5 \\ 1 & 0 & 1 & \epsilon_6 \\ 1 & 1 & 0 & \epsilon_7 \\ 1 & 1 & 1 & \epsilon_8 \end{array}$$

Здесь ϵ_i -это значения нашей функции, которые мы только что нашли; например,$\epsilon_1 = f(000)$.

Итак, Вы получили табличную запись булевой функции, с которой надо работать дальше. В чём состоит эта работа? Во-первых, выписываем носитель Вашей булевой функции, т.е. векторы, на которых функция принимает значение 1 (по-просту говоря, берёте из Вашей таблицы строки, которые кончаются единицей и эту единицу отбрасываете. Носитель получен.

Следующий шаг: возьмём из носителя первый вектор $(a_1a_2a_3)$ и по нему составляем элементарную конъюнкцию $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$. То же делаем с другими векторами из носителя. Полученные элементарную конъюнкции пишем подряд, перемежая их со знаками дизъюнкции. Итак, ДНФ получена.

Следующий шаг - упрощение полученной ДНФ. Для этого используем две формулы для булевой функции. Вот они: $a \vee ab = a, ab \vee \overline{a}b = b$. Их называют формула поглощения и формула склейки. Нам придётся использовать их, беря в качестве a, b некоторые функции. Таким образом, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1, K_1a \vee K_1\overline{a} = K_1$. Вот пример применения этих формул. $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2, .$

Многочлены Жегалкина.

В множестве $D = \{0, 1\}$ вводим операцию $\oplus$ по правилам: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 =$ 1,$1 \oplus 1 = 0$(это называется сложение по модулю 2). Её можно задать и на функциях, т.е. образовать функции $f(x) \oplus g(x)$. Используя умножение и сложение по модулю 2, введём многочлены как суммы одночленов вида $x_{i_1}x_{i_2}\cdots$. Это и будут многочлены Жегалкина. Для случая двух переменных они имеют вид $a_0 \oplus b_1x_1 \oplus b_2x_2 \oplus cx_1x_2$, где каждая из величин a_0, b_1, b_2, c- это либо 1, либо 0. Для трёх переменных многочлен выглядит так:$a_0 \oplus b_1x_1 \oplus b_2x_2 \oplus b_3x_3 \oplus c_1x_1x_2 \oplus c_2x_1x_3 \oplus c_3x_3x_2 \oplus dx_1x_2x_3$, Любую булеву функцию можно записать в виде многочлены Жегалкина. Для примера проделаем это для функции $x_1 \to x_2$. Для этого запишем равенство $x_1 \to x_2 = a_0 \oplus b_1x_1 \oplus b_2x_2 \oplus cx_1x_2$ (коэффициенты пока не известны). Чтобы найти a_0 подставим здесь вектор 000. Получим $a_0 = 1$. Таким образом $x_1 \to x_2 = 1 \oplus b_1x_1 \oplus b_2x_2 \oplus cx_1x_2$. Далее, подставляя векторы (10), (11), получаем $b_1 = 1, b_2 = 0, c = 1$. В итоге $x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2/$

Как просто!

Если Вы уже записали Вашу функцию в виде ДНФ, то из неё можно также получить представление функции в виде многочлена Жегалкина. Для этого достаточно записать в виде многочлена Жегалкина отрицание и дизъюнкцию (ибо любая ДНФ выражается через эти две функции). Легко проверить, что $\overline{x} = 1 \oplus x, x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$ (проверьте!)В нашем типовом расчёте требуется представить данную функцию в виде ДНФ двумя методами: методом неопределённых коэффициентов и с использованием ДНФ.