

Повторные испытания
(таблицы значений функций Пуассона и Лапласа
приведены после заданий для самостоятельной работы)

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний. Вычислим вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз. Поставленную задачу можно решить с помощью формулы Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Пример. Стрелок делает шесть выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна $\frac{2}{3}$. Найти вероятность того, что он попал 4 раза.

Решение. Кратко запишем условие задачи: $n = 6, k = 4, p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$. По формуле Бернулли получаем искомую вероятность:

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{16}{729} = \frac{240}{729} \approx 0,3292.$$

Ответ: 0,3292.

Наивероятнейшая частота появления события k_0 равна целой части $(n+1)p$

Пример. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию $n = 15, p = 0,9$. Тогда $(n+1)p = (15+1)0,9 = 14,4$. Целая часть 14

Таким образом, наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание равно $k_0 = 14$.

Ответ: 14.

Формула Пуассона

При малых значениях p можно вычислить вероятность $P_n(k)$ по формуле Пуассона.

Если $p < 0,1$, а число испытаний достаточно велико $npq \leq 10$, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Пример. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно 1 замок.

Решение. По условию задачи $n = 10000, p = 0.0002$. Тогда $\lambda = np = 2, k = 1$. Таким образом, $P_{10000}(1) \approx \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2} \approx 0,2707$ — вероятность того, что за месяц из строя выйдет ровно один замок (из 10 тысяч).

Ответ: 0,2707.

Локальная теорема Лапласа.

Если n велико и формула Пуассона не подходит, то вероятность определяется локальной теореме Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример. Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно 200 раз.

Решение. Итак, по условию задачи $n = 400, k = 200, p = 0,5, q = 0,5$.

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{0}{10} = 0.$$

Далее по таблице определяем соответствующее значение функции $\varphi(0) \approx 0,3989$. После этого вычисляем искомую вероятность по формуле

$$P_{400}(200) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi(0) \approx \frac{0,3989}{10} = 0,03989 \approx 0,04.$$

Ответ: 0,04.

Интегральная теорема Лапласа

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} \cdot dz.$$

Пример. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

Решение. Итак, по условию задачи $n = 100, k_1 = 65, k_2 = 80$,

$p = 0,7, q = 0,3$. Вычислим требуемые значения аргумента:

$$x_1 = \frac{65 - 100 \cdot 0,7}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-5}{\sqrt{21}} \approx \frac{-5}{4,5825} \approx -1,09;$$

$$x_2 = \frac{80 - 100 \cdot 0,7}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx \frac{10}{4,5825} \approx 2,18.$$

Далее по таблице определяем соответствующие значения функции $\Phi(-1,09) = -\Phi(1,09) \approx -0,3621$; $\Phi(2,18) \approx 0,4854$. Тогда искомая вероятность равна

$$P_{100}(65; 80) \approx \Phi(2,18) - \Phi(-1,09) = 0,4854 + 0,3621 = 0,8475.$$

Ответ: 0,8475.

Задания для самостоятельной работы

- 1) (Бернулли) В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 6 волокон длинных окажется: а) четыре;
- 2) (Пуассона) Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не более 2 бактерий.
- 3) (Интегральная и локальная теоремы Лапласа) Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий будут от 500 до 550 первого сорта. Определите наивероятнейшее число и вероятность наивероятнейшего числа изделий первого сорта.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\text{Значение функции } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3989 | 0,3988 | 0,3986 | 0,3984 | 0,3982 | 0,3980 | 0,3977 | 0,3973 |
| 0,1 | 0,3970 | 0,3965 | 0,3961 | 0,3956 | 0,3951 | 0,3945 | 0,3939 | 0,3932 | 0,3925 | 0,3918 |
| 0,2 | 0,3910 | 0,3902 | 0,3894 | 0,3885 | 0,3876 | 0,3867 | 0,3857 | 0,3847 | 0,3836 | 0,3825 |
| 0,3 | 0,3814 | 0,3802 | 0,3790 | 0,3778 | 0,3765 | 0,3752 | 0,3739 | 0,3726 | 0,3712 | 0,3697 |
| 0,4 | 0,3683 | 0,3668 | 0,3653 | 0,3637 | 0,3621 | 0,3605 | 0,3589 | 0,3572 | 0,3555 | 0,3538 |
| 0,5 | 0,3521 | 0,3503 | 0,3485 | 0,3467 | 0,3448 | 0,3429 | 0,341 | 0,3391 | 0,3372 | 0,3352 |
| 0,6 | 0,3332 | 0,3312 | 0,3292 | 0,3271 | 0,3251 | 0,3230 | 0,3209 | 0,3187 | 0,3166 | 0,3144 |
| 0,7 | 0,3123 | 0,3101 | 0,3079 | 0,3056 | 0,3034 | 0,3011 | 0,2989 | 0,2966 | 0,2943 | 0,2920 |
| 0,8 | 0,2897 | 0,2874 | 0,2850 | 0,2827 | 0,2803 | 0,2780 | 0,2756 | 0,2732 | 0,2709 | 0,2685 |
| 0,9 | 0,2661 | 0,2637 | 0,2613 | 0,2589 | 0,2565 | 0,2541 | 0,2516 | 0,2492 | 0,2468 | 0,2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 0,2396 | 0,2371 | 0,2347 | 0,2323 | 0,2299 | 0,2275 | 0,2251 | 0,2227 | 0,2203 |
| 1,1 | 0,2179 | 0,2155 | 0,2131 | 0,2107 | 0,2083 | 0,2059 | 0,2036 | 0,2012 | 0,1989 | 0,1965 |
| 1,2 | 0,1942 | 0,1919 | 0,1895 | 0,1872 | 0,1849 | 0,1826 | 0,1804 | 0,1781 | 0,1758 | 0,1736 |
| 1,3 | 0,1714 | 0,1691 | 0,1669 | 0,1647 | 0,1626 | 0,1604 | 0,1582 | 0,1561 | 0,1539 | 0,1518 |
| 1,4 | 0,1497 | 0,1476 | 0,1456 | 0,1435 | 0,1415 | 0,1394 | 0,1374 | 0,1354 | 0,1334 | 0,1315 |
| 1,5 | 0,1295 | 0,1276 | 0,1257 | 0,1238 | 0,1219 | 0,1200 | 0,1182 | 0,1163 | 0,1145 | 0,1127 |
| 1,6 | 0,1109 | 0,1092 | 0,1074 | 0,1057 | 0,1040 | 0,1023 | 0,1006 | 0,0989 | 0,0973 | 0,0957 |
| 1,7 | 0,0940 | 0,0925 | 0,0909 | 0,0893 | 0,0878 | 0,0863 | 0,0848 | 0,0833 | 0,0818 | 0,0804 |
| 1,8 | 0,0790 | 0,0775 | 0,0761 | 0,0748 | 0,0734 | 0,0721 | 0,0707 | 0,0694 | 0,0681 | 0,0669 |
| 1,9 | 0,0656 | 0,0644 | 0,0632 | 0,0620 | 0,0608 | 0,0596 | 0,0584 | 0,0573 | 0,0562 | 0,0551 |

[illegible]

$$\text{Значение функции } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

| x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,00 | 0,00 00 | 0,26 | 0,10 26 | 0,52 | 0,19 85 | 0,78 | 0,28 23 | 1,04 | 0,35 08 |
| 0,01 | 0,00 40 | 0,27 | 0,10 64 | 0,53 | 0,20 19 | 0,79 | 0,28 52 | 1,05 | 0,35 31 |
| 0,02 | 0,00 80 | 0,28 | 0,11 03 | 0,54 | 0,20 54 | 0,80 | 0,28 81 | 1,06 | 0,35 54 |
| 0,03 | 0,01 20 | 0,29 | 0,11 41 | 0,55 | 0,20 88 | 0,81 | 0,29 10 | 1,07 | 0,35 77 |
| 0,04 | 0,01 60 | 0,30 | 0,11 79 | 0,56 | 0,21 23 | 0,82 | 0,29 39 | 1,08 | 0,35 99 |
| 0,05 | 0,01 99 | 0,31 | 0,12 17 | 0,57 | 0,21 57 | 0,83 | 0,29 67 | 1,09 | 0,36 21 |
| 0,06 | 0,02 39 | 0,32 | 0,12 55 | 0,58 | 0,21 90 | 0,84 | 0,29 95 | 1,10 | 0,36 43 |
| 0,07 | 0,02 79 | 0,33 | 0,12 93 | 0,59 | 0,22 24 | 0,85 | 0,30 23 | 1,11 | 0,36 65 |
| 0,08 | 0,03 19 | 0,34 | 0,13 31 | 0,60 | 0,22 57 | 0,86 | 0,30 51 | 1,12 | 0,36 86 |
| 0,09 | 0,03 59 | 0,35 | 0,13 68 | 0,61 | 0,22 91 | 0,87 | 0,30 78 | 1,13 | 0,37 08 |
| 0,10 | 0,03 98 | 0,36 | 0,14 06 | 0,62 | 0,23 24 | 0,88 | 0,31 06 | 1,14 | 0,37 29 |
| 0,11 | 0,04 38 | 0,37 | 0,14 43 | 0,63 | 0,23 57 | 0,89 | 0,31 33 | 1,15 | 0,37 49 |
| 0,12 | 0,04 78 | 0,38 | 0,14 80 | 0,64 | 0,23 89 | 0,90 | 0,31 59 | 1,16 | 0,37 70 |
| 0,13 | 0,05 17 | 0,39 | 0,15 17 | 0,65 | 0,24 22 | 0,91 | 0,31 86 | 1,17 | 0,37 90 |
| 0,14 | 0,05 57 | 0,40 | 0,15 54 | 0,66 | 0,24 54 | 0,92 | 0,32 12 | 1,18 | 0,38 10 |
| 0,15 | 0,05 96 | 0,41 | 0,15 91 | 0,67 | 0,24 86 | 0,93 | 0,32 38 | 1,19 | 0,38 30 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,42 | 0,16 28 | 0,68 | 0,25 17 | 0,94 | 0,32 64 | 1,20 | 0,38 49 |
| 0,17 | 0,06 75 | 0,43 | 0,16 64 | 0,69 | 0,25 49 | 0,95 | 0,32 89 | 1,21 | 0,38 69 |
| 0,18 | 0,07 14 | 0,44 | 0,17 00 | 0,70 | 0,25 80 | 0,96 | 0,33 15 | 1,22 | 0,38 83 |
| 0,19 | 0,07 53 | 0,45 | 0,17 36 | 0,71 | 0,26 11 | 0,97 | 0,33 40 | 1,23 | 0,39 07 |
| 0,20 | 0,07 93 | 0,46 | 0,17 72 | 0,72 | 0,26 42 | 0,98 | 0,33 65 | 1,24 | 0,39 25 |
| 0,21 | 0,08 32 | 0,47 | 0,18 08 | 0,73 | 0,26 73 | 0,99 | 0,33 89 | 1,25 | 0,39 44 |
| 0,22 | 0,08 71 | 0,48 | 0,18 44 | 0,74 | 0,27 03 | 1,00 | 0,34 13 | 1,26 | 0,39 62 |
| 0,23 | 0,09 10 | 0,49 | 0,18 79 | 0,75 | 0,27 34 | 1,01 | 0,34 38 | 1,27 | 0,39 80 |
| 0,24 | 0,09 48 | 0,50 | 0,19 15 | 0,76 | 0,27 64 | 1,02 | 0,34 61 | 1,28 | 0,39 97 |
| 0,25 | 0,09 87 | 0,51 | 0,19 50 | 0,77 | 0,27 94 | 1,03 | 0,34 85 | 1,29 | 0,40 15 |

| λ m | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 |
| 1 | 0,2707 | 0,1494 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 | 0,0005 |
| 2 | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0050 | 0,0023 |
| 3 | 0,1805 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 | 0,0076 |
| 4 | 0,0902 | 0,1681 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 | 0,0189 |
| 5 | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 | 0,0378 |
| 6 | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 | 0,0631 |
| 7 | 0,0034 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1045 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1171 | 0,0901 |
| 8 | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0653 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 | 0,1126 |
| 9 | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0689 | 0,1014 | 0,1241 | 0,1318 | 0,1251 |
| 10 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1186 | 0,1251 |
| 11 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 | 0,1137 |
| 12 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0113 | 0,0264 | 0,0481 | 0,0728 | 0,0948 |
| 13 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 | 0,0729 |
| 14 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 | 0,0521 |
| 15 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 | 0,0347 |
| 16 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0015 | 0,0045 | 0,0109 | 0,0217 |
| 17 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 | 0,0128 |
| 18 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0009 | 0,0029 | 0,0071 |
| 19 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0014 | 0,0037 |