3. *Закон нормального распределения с параметрами* a *и* σ. Непрерывная случайная величина X подчиняется *нормальному закону распределения* на числовой прямой, если она имеет плотность вероятности следующего вида

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ \sigma>0.$$

Тогда функция нормального распределения $F(x)$ запишется в виде

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

То, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, будем записывать так: $X\in N(a,\sigma)$.

Параметры a и σ представляют собой соответственно математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, т. е.

$$a=M(X),\quad \sigma=\sigma(X).$$

На рисунке 19 приведено семейство кривых $f(x)$ плотностей вероятности нормального распределения в зависимости от параметров a и σ (*кривые Гаусса*).

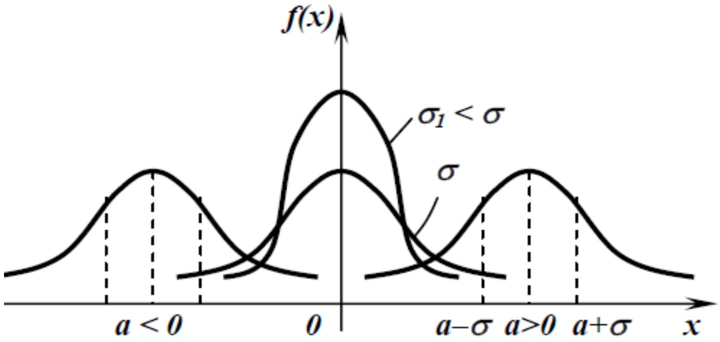

Рисунок 19

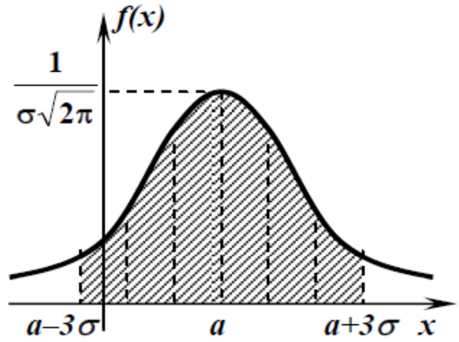

Рисунок 20

Параметр a – точка максимума плотности (сам максимум равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$), а также центр симметрии. При увеличении a график смещается вправо, при уменьшении a – влево. При уменьшении параметра σ максимум плотности $f(x)$ увеличивается, при этом значения плотности в точках, достаточно удалённых от a, уменьшается, так как площадь под кривой плотности для любых значений параметров равна единице.

Если $a=0$ и $\sigma=1$, т. е. $X\in N(0;\,1)$, то соответствующее нормальное распределение называется *стандартным*.

<u>Замечание 1</u>. Вероятность того, что нормальная случайная величина X *с параметрами* a *и* σ

примет значение из интервала (α,β), можно вычислить по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Пример Из пункта C ведётся стрельба из орудия вдоль прямой CK. Предполагается, что дальность полёта распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 5 м. Определить (в процентах) сколько снарядов упадёт с перелётом от 5 до 70м.

. **Решение**: в задаче рассматривается нормально распределённая случайная величина X – дальность полёта снаряда, и по условию $a = 1000,\ \sigma = 5$.

Так как речь идёт о *перелёте* за цель, то $\alpha = 1005,\ \beta = 1070$. Вычислим вероятность $P(1005 < X < 1070)$ – того, что снаряд упадёт в пределах этой дистанции

$$P(1005 < X < 1070) = \Phi\left(\frac{1070-1000}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1005-1000}{5}\right) = \Phi(14)^{\to 0,5} - \Phi(1) \approx 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

Ответ требуется дать в процентах, поэтому рассчитанную вероятность нужно умножить на 100:
– с перелётом от 5 до 70 м упадёт примерно 15,87% снарядов.

Замечание 2. Вероятность того, что с.в. отклониться от своего математического ожидания не более чем на δ вычисляется по формуле $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Пример . Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1,4 до 1,6 см.

$$P(|X-1,5| \le 0,1) = 2\Phi\left(\frac{0,1}{0,04}\right) = 2\Phi(2,5) \approx 2 \cdot 0,4938 = 0,9876$$

– вероятность того, что диаметр наугад взятого подшипника отличается от 1,5 см не более чем на 0,1 см.

Правило «трех сигм»: практически достоверным является тот факт, что нормально распределённая случайная величина X примет значение из промежутка $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

Нормальное распределение является наиболее важным распределением непрерывных случайных величин. Множество явлений в практической жизни можно описать с помощью модели нормального распределения. Например: распределение высоты деревьев; площадей садовых участков; массы людей; дневной температуры и т.п.

Нормальное распределение используется и для решения многих проблем в экономической жизни. По нормальному закону распределяется, например, число дневных продаж в магазине; число посетителей универмага в неделю; число работников в некоторой отрасли; объемы выпуска продукции на предприятии и т.д.

§ 17. Закон больших чисел

Практика изучения случайных явлений показывает, что хотя результаты отдельных наблюдений, даже проведенных в одинаковых условиях, могут сильно отличаться, в то же время средние результаты для достаточно большого числа наблюдений устойчивы и слабо зависят от результатов отдельных наблюдений. Теоретическим обоснованием этого замечательного свойства случайных явлений является закон больших чисел. Общий смысл закона больших чисел - совместное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая. Это позволяет предвидеть ход явлений.

Закон больших чисел – это обобщенное название нескольких теорем (к ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли), из которых следует, что при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным.

Вспомогательное неравенство Чебышева, по которому устанавливается вероятность отклонения X от ее математического ожидания:

$$P\{|X - M[X]| < \xi\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\xi^2}.$$

Неравенство Чебышева дает оценку вероятности события для случайной величины, распределение которой неизвестно, известны лишь ее математическое ожидание и дисперсия.

Пример. Устройство состоит из 100 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,03. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом (математическом ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение. а). Обозначим через X число отказавших элементов за время T. Тогда M[X] = *np* = 100 ? 0,03 = 3 и D[X] = *npq* = 100 ? 0,03 ? 0,97 = 2,91 (см. пример). Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\{|X - M[X]| < \xi\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\xi^2},$$

подставив в него M[X] = 3, D[X] = 2,91, ξ = 2, получим

$$P\{|X - 3| < 2\} \geq 1 - \frac{2,91}{4} \approx 0,27.$$

б). События $|X - 3| < 2$ и $|X - 3| \geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$$P\{|X - 3| \geq 2\} \leq 1 - 0,27 = 0,83.$$

<u>Теорема.</u> (Закон больших чисел в форме Чебышева)

Если дисперсии независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ ограничены одной константой С, а число их достаточно велико, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине будет сколь угодно мало, т.е. для данного положительного числа ε, каким бы малым оно ни было: $\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+\cdots+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$

<u>Сущность теоремы Чебышева</u> Среднее арифметическое $\bar{X}$ большого числа независимых случайных величин (X_1; X_2; ... X_n), являясь случайной величиной, фактически утрачивает характер случайности, становясь неизменной константой $M(\bar{X})$. Эта константа равна среднему арифметическому математических ожиданий величин (X_1; X_2; ... X_n). В этом и состоит закон больших чисел.

Пример . Как известно, газ, помещенный в закрытый сосуд, оказывает давление на стенки сосуда. Согласно законам газового состояния, при неизменной температуре газа это давление постоянно. Давление газа имеет своей причиной хаотические удары отдельных его молекул о стенки сосуда. Скорости и направления движения у всех молекул разные, поэтому разными являются и силы ударов различных молекул о стенки сосуда. Однако давление газа на стенки сосуда определяется не силой ударов отдельных молекул, а их *средней* силой. Но она, как средняя из огромного числа независимо действующих сил, согласно закону больших чисел, будет сохранять практически неизменное значение. Поэтому практически неизменным оказывается и давление газа на стенки сосуда.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико. Другими словами, если ε сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности

Закон больших чисел лежит в основе различных видов страхования (страхование жизни человека на всевозможные сроки, имущества, скота, посевов и др.).

При планировании ассортимента товаров широкого потребления учитывается спрос на них населения. В этом спросе проявляется действие закона больших чисел.

Центральная предельная теорема

(Теорема Ляпунова)

Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Теорема Ляпунова объясняет широкое распространение нормального закона распределения и поясняет механизм его образования. Теорема позволяет утверждать, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией суммы, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом. А поскольку случайные величины всегда порождаются бесконечным количеством причин и чаще всего ни одна из них не имеет дисперсии, сравнимой с дисперсией самой случайной величины, то большинство встречающихся в практике случайных величин подчинено нормальному закону распределения.