Глава 5

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

5.1. Центр тяжести плоской фигуры

Постановка задачи. *Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры.*

План решения

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем площади и координаты x_i, y_i цнтров тяжссти отдсльных частсй. Площади вырсзанных частей берем со знаком минус.

3. Находим общую площадь фигуры по формуле $A = \sum A_i$.

4. Определяем координаты центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}.$$

Пример. Найти площадь и координаты центра тяжести плоской фигуры. Криволинейный участок контура является половиной окружности с центром на оси Ox (рис. 74). Размеры на рисунке даны в метрах.

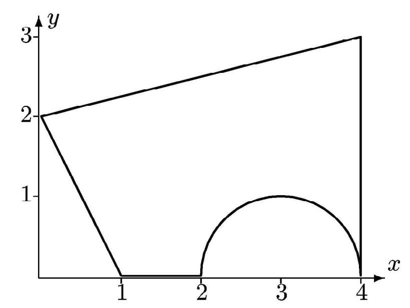


Рис. 74

Решение

1. Разбиваем фигуру на простые отдельные части, положение центров тяжести которых известны.

Центр тяжести прямоугольника находится в его геометрическом центре, положение центра тяжести других фигур, встречающихся в задачах, изображено на рис. 75.

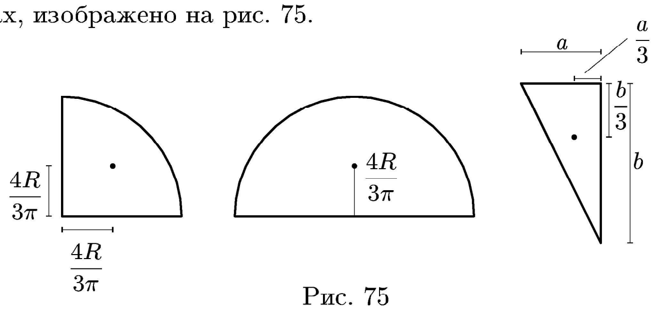


Рис. 75

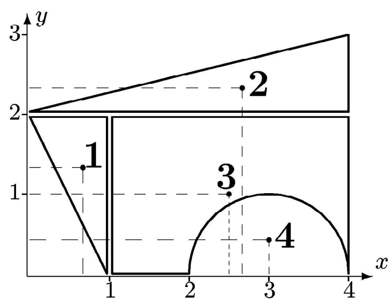


Рис. 76

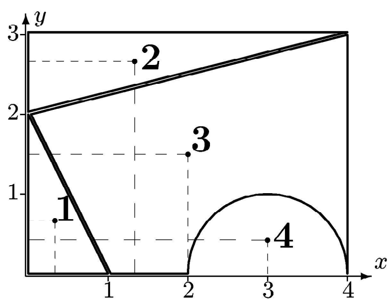


Рис. 77

Представляем фигуру в виде двух треугольников **1**,**2**, прямоугольника **3** и вырсза **4** в видс полукруга (рис. 76).

2. Вычисляем площадь (в м^2) и координаты центра тяжести (в м) каждого элемента:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1, \quad x_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0.667, \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1.333,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 2.667, \quad y_2 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2.333,$$

$$A_3 = 3 \cdot 2 = 6, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2.5, \quad y_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$A_4 = -\frac{3.142 \cdot 1^2}{2} = -1.571, \quad x_4 = 3, \quad y_4 = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot \pi} = 0.424.$$

Площадь выреза берем со знаком минус.

3. Площадь фигуры $A = \sum A_i = 1 + 2 + 6 - 1.571 = 7.429$ м^2.

4. Находим координаты центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{0.667 \cdot 1 + 2.667 \cdot 2 + 2.5 \cdot 6 - 3 \cdot 1.571}{7.429} = 2.192 \text{ м},$$
$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1.333 \cdot 1 + 2.333 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 0.424 \cdot 1.571}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

Вычисления удобно свести в таблицу:

i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	1	0.667	1.333	0.667	1.333
2	2	2.667	2.333	5.333	4.667
3	6	2.5	1	15	6
4	-1.571	3	0.424	-4.712	-0.666
$\sum$	7.429			16.288	11.333

Сначала заполняем столбцы A_i, x_i, y_i, затем вычисляем статические моменты $A_i x_i$, $A_i y_i$. Внизу записываем суммы столбцов, необходимые для вычисления координат центра тяжести. Таким образом

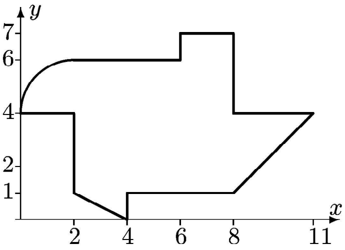
$$x_c = \frac{16.288}{7.429} = 2.192 \text{ м}, \; y_c = \frac{11.333}{7.429} = 1.526 \text{ м}.$$

Замечание 1. Большинство задач на определение центра тяжести допускает несколько способов разбиения фигуры. Это можно использовать для проверки решения. Второй вариант разбиения фигуры в данном примере состоит из прямоугольника **3** с размерами 4м$\times$3м и вырезанных из него полукруга **4** и двух треугольников **1** и **2** (рис. 77).

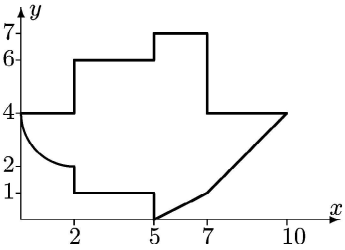
Замечание 2. Решение задачи в системе Maple V методом контурного интегрирования приведено в § 15.2, с. 355.

Условия задач. *Найти площадь (в м^2) и координаты центра тяжести плоской фигуры (в м). Отметки на осях даны в метрах. Криволинейный участок контура является дугой половины или четверти окружности.*

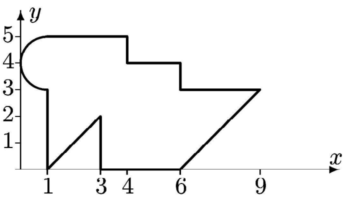
1



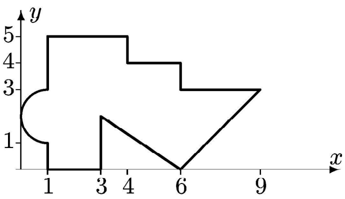
2



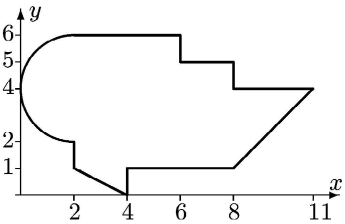
3



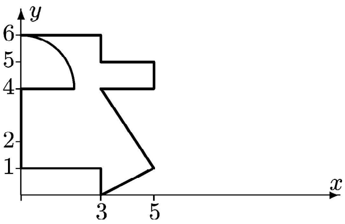
4



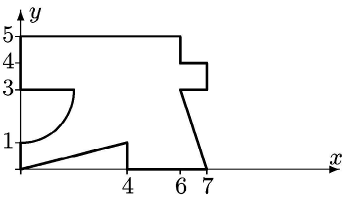
5



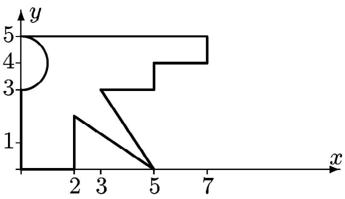
6



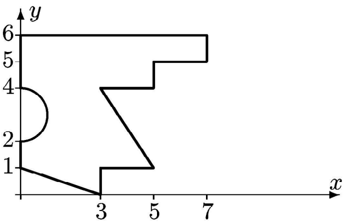
7



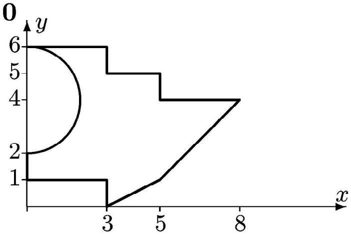
8



9



10



Замечание 3. Во всех вариантах фигуру можно разбить на пять частей.

Ответы

	A	x_c	y_c		A	x_c	y_c
1	40.642	5.203	3.627	6	17.858	2.380	2.964
2	35.642	4.764	3.495	7	27.358	3.582	2.653
3	27.071	3.887	2.492	8	19.429	2.668	2.945
4	26.071	3.755	2.441	9	23.929	2.668	3.585
5	39.783	4.702	3.351	10	22.217	3.593	2.950

5.2. Пространственная стержневая система

Постановка задачи. *Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из N однородных стержней.*

План решения

1. Разбиваем фигуру на отдельные стержни.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем длины и координаты x_i, y_i, z_i, $i = 1, ..., N$ центров тяжести отдельных стержней. Координаты центра прямолинейного однородного стержня вычисляем как полусумму координат его концов.

3. Находим суммарную длину стержней системы $L = \sum\limits_{i=1}^{N} L_i$.

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} L_i x_i,\ \ y_c = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} L_i y_i,\ \ z_c = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N} L_i z_i.$$

Пример. Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (рис. 78). Даны размеры: $a = 12$ м, $b = 16$ м, $c = 10$ м, $d = 5$ м.

Решение

1. Разбиваем фигуру на шесть стержней.

2. Выбираем систему координат (рис. 78). Вычисляем длины и координаты x_i, y_i, z_i, $i = 1, ..., N$ центров тяжести отдельных стержней.