Ряды Фурье на различных промежутках

Пусть функция $f(x)$ определена на "неполном" промежутке $[0;\pi]$. Тогда эту функцию можно как-нибудь "продолжить" (доопределить) на промежуток $[-\pi;0]$. При этом значение функции в точке $x=0$ также можно доопределить или переопределить. Полученная таким образом функция будет определена уже на $[-\pi;\pi]$, и ее можно разложить в ряд Фурье.

Так как "продолжение" (доопределение) функции может быть сделано произвольным способом, то существует бесчисленное множество тригонометрических рядов, представляющих заданную функцию на "неполном" промежутке $[0;\ \pi]$.

Четное и нечетное продолжение функций

Рассмотрим частные случаи доопределения функции: четное и нечетное продолжения функции.

а) четное продолжение: $f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in[0;\pi]$;

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ (разложение по косинусам), где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx,\ \ n=0,1,2,\dots.$$

б) нечетное продолжение: $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in[0;\pi]$;

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ (разложение по синусам), где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\dots.$$

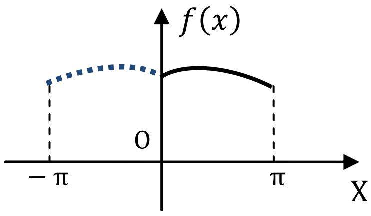

Рис. **Четное продолжение функции**

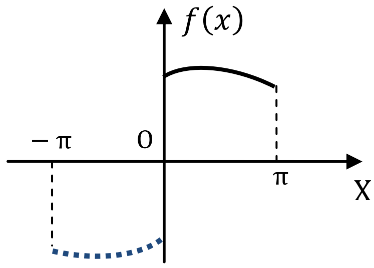

Рис. **Нечетное продолжение функции**

Пример 4.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in[0;\pi]$:
а) по косинусам, б) по синусам. Построить графики функций $f(x)$ и $S(x)$.

Решение.

а) Продолжим заданную функцию с промежутка $[0;\pi]$ на промежуток $[-\pi;\ \pi]$ четным образом;
для новой функции сохраним прежнее обозначение $f(x)$. Тогда имеем:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & x\in[0;\pi]\\ \frac{\pi+x}{2}, & x\in[-\pi;0]\end{cases},\qquad f(x)\sim\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

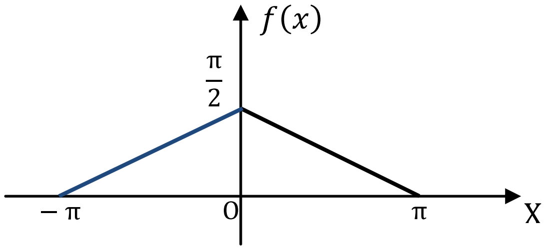

Рис. **Четное продолжение $f(x)$ из примера 4.а**

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(\pi-x)^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}u=\pi-x & \Rightarrow & du=-dx\\ dv=\cos nx\,dx & \Rightarrow & v=\frac{\sin nx}{n}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1-\cos n\pi}{\pi\cdot n^2}=\frac{1-(-1)^n}{\pi\cdot n^2}=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{2}{\pi\cdot(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases},\ k=1,2,3,\dots.$$

Таким образом, получаем:

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\cdot(2k-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big)$$

Так как $f(x)$ - непрерывная функция на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то имеем: $S(x)=f(x)\quad\forall x\in[-\pi;\ \pi]$, или:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2n-1)x\big)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ \dots\right)$$

$\forall x\in[-\pi;\ \pi]$,

График функции $S(x)$ на всей числовой оси получается периодическим продолжением ее графика на промежутке $[-\pi;\pi]$.

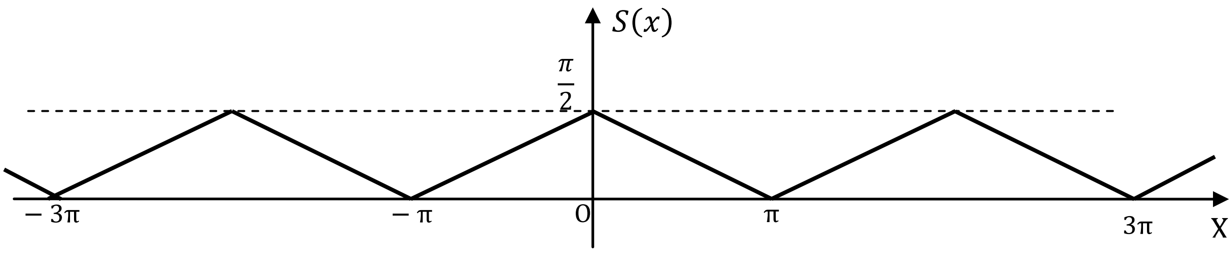

Рис. **График функции $S(x)$ из примера 4.а**

Ответ.

$$S(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ \dots\right),$$

$x\in(-\infty;\ +\infty)$; $\quad S(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad \forall x\in[0;\pi]$.

Следствие.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ \dots=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)}\quad \forall x\in[-\pi;\pi].$$

б) Продолжим заданную функцию с промежутка $[0;\pi]$ на промежуток $[-\pi;\pi]$ нечетным образом; для новой функции сохраним прежнее обозначение $f(x)$. Тогда имеем:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & x\in(0;\pi]\\ -\frac{\pi+x}{2}, & x\in[-\pi;\ 0)\end{cases},\ f(x)\sim\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

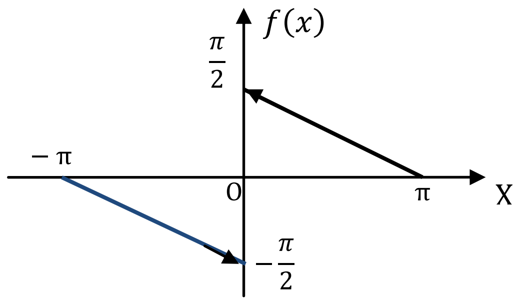

Рис. **Нечетное продолжение $f(x)$ из примера 4.б**

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ (\pi-x)\cdot\sin nx\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=\pi-x & \Rightarrow & du=-dx\\ dv=\sin nx\,dx & \Rightarrow & v=-\frac{\cos nx}{n}\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left(-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\cos 0}{n}-\ 0\right)=\frac{1}{n},\ n=1,2,\ 3,\dots\ .$$

Таким образом, получаем:

$$f(x)\sim\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin nx.$$

Так как $f(x)$ - непрерывная функция на $[-\pi;\,0)\cup(0;\pi]$ и $f(\pi)=f(-\pi)$, то имеем: $S(x)=f(x)\quad\forall x\in[-\pi;\,0)\cup(0;\pi]$, или:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin nx=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ \dots\quad\forall x\in[-\pi;\,0)\cup(0;\pi],$$

$$S(0)=\frac{1}{2}\left(f(0-)+f(0+)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

График функции $S(x)$ на всей числовой оси получается периодическим продолжением ее графика на промежутке $[-\pi; \pi]$.

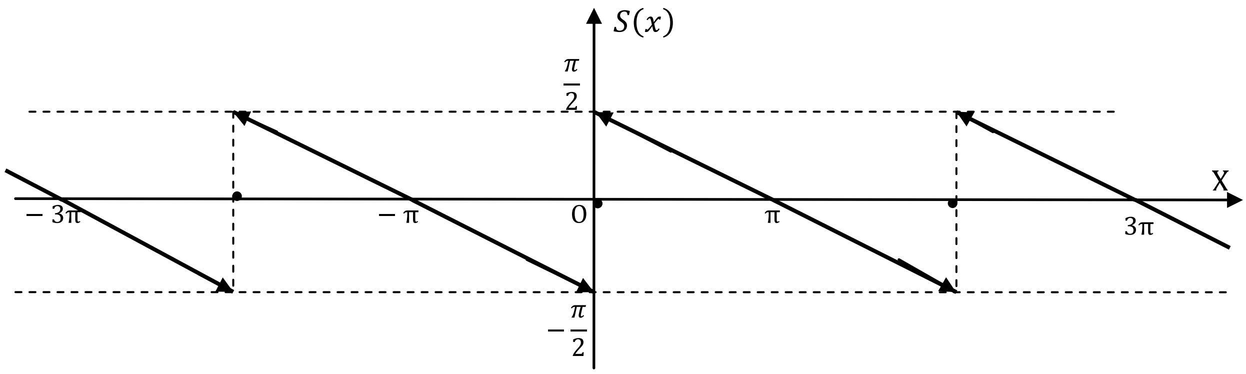

Рис. **График функции $S(x)$ из примера 4.б**

Заметим, что в данном примере сумма ряда $S(x)$ на промежутке $(\pi; 2\pi)$ совпадает с исходной функцией $f(x)$, продолженной на этот промежуток.

***Ответ*.**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ \dots, \ x \in (-\infty;\ +\infty);$$

$$S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \forall x \in (0;\ 2\pi); \quad S(2\pi n) = 0,\ n \in Z.$$

Следствие.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ \dots = \frac{\pi - x}{2}} \quad \forall x \in (0;\ 2\pi).$$

Ряды Фурье функций произвольного периода

Перейдем к рассмотрению периодических функций с периодом, отличным от 2π.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ удовлетворяет условиям **Дирихле** на промежутке $[-l; l]$.

Введем обозначения:

1) $t = \frac{\pi}{l} \cdot x$, тогда $-\pi \le t \le \pi$, $x = \frac{l}{\pi} \cdot t$, $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} \cdot t\right)$;

2) $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi} \cdot t\right)$.

Тогда функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и, значит, разложима в ряд Фурье:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad t \in [-\pi; \pi],$$

где коэффициенты a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cdot \cos nt\, dt,\ n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cdot sin\, nt\, dt,\ n = 1, 2, 3, ...$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\ \left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n sin\ \left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right),\ \ x \in [-l; l],$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = \begin{bmatrix} t = \frac{\pi}{l}\cdot x,\ \ dt = \frac{\pi}{l}\cdot dx,\ \varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right) = f(x) \\ t = -\pi\ \ \Rightarrow\ x = -l,\quad t = \pi\ \ \Rightarrow\ x = l \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx;$

далее аналогично:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cdot cos\, nt\, dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cdot sin\, nt\, dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 1, 2, 3, \dots.$$

Таким образом, получаем разложение в ряд Фурье $2l$ - периодических функций:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot cos\ \frac{n\pi x}{l} + b_n\cdot sin\ \frac{n\pi x}{l}\right),\ \ \ x \in [-l; l],$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 1, 2, 3, \dots.$$

Для четных и нечетных функций эти формулы несколько упрощаются.

Если $f(x)$ - четная функция на $[-l; l]$, то разложение в ряд **Фурье** имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot cos\frac{n\pi x}{l},\ \ \ x \in [-l; l],$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

Если $f(x)$ - нечетная функция на $[-l; l]$, то разложение в ряд **Фурье** имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\frac{n\pi x}{l},\ \ \ x \in [-l; l],$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n = 1, 2, 3, \dots.$$

Пример 5.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|,\ x \in [-1; 1]$. Построить графики функций $f(x)$ и $S(x)$.

Решение.

Здесь $l = 1$, функция $f(x)$ - четная; разложение в ряд Фурье имеет вид: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\pi x),\ \ x \in [-1; 1]$, где

$$a_n = 2\cdot\int_{0}^{1} f(x)\cdot cos(n\pi x)\, dx,\ \ \ n = 0, 1, 2, \dots$$

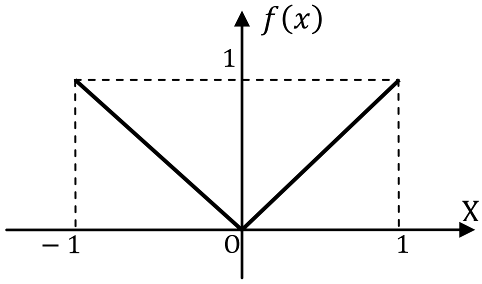

Рис. **График функции $f(x)$ из примера 5**

$a_0 = 2\cdot\int_0^1 f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^1 |x|\,dx = 2\cdot\int_0^1 x\,dx = x^2|_0^1 = 1;$

$a_n = 2\int_0^1 |x|\cdot cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cdot cos(n\pi x)\,dx =$

$= \left[\begin{matrix} u = x \;\; \Rightarrow \;\; du = dx \\ dv = cos\,(n\pi x)dx \;\Rightarrow\; v = \frac{sin\,(n\pi x)}{n\pi} \end{matrix}\right] = 2\left(x\cdot\frac{sin\,(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{sin\,(n\pi x)}{n\pi}dx\right) =$

$= 2\left(0 + \frac{cos\,(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right) = 2\frac{cos\,(n\pi) - cos\,0}{(n\pi)^2} = 2\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{-4}{\pi^2\cdot(2k-1)^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$,

$k = 1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, получаем:

$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2\cdot(2k-1)^2}\cdot cos\,\left((2k-1)\pi x\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2},$

$x \in [-1; 1]$.

Так как $f(x)$ - непрерывная функция на $[-1; 1]$ и $f(1) = f(-1)$, то имеем: $S(x) = f(x) \quad \forall x \in [-1; 1]$, или:

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{cos\;x}{1^2} + \frac{cos\;3x}{3^2} + \frac{cos\;5x}{5^2} + \;\ldots\right)$

$\forall x \in [-1; 1]$.

График функции $S(x)$ на всей числовой оси получается периодическим продолжением ее графика на промежутке $[-1; 1]$.

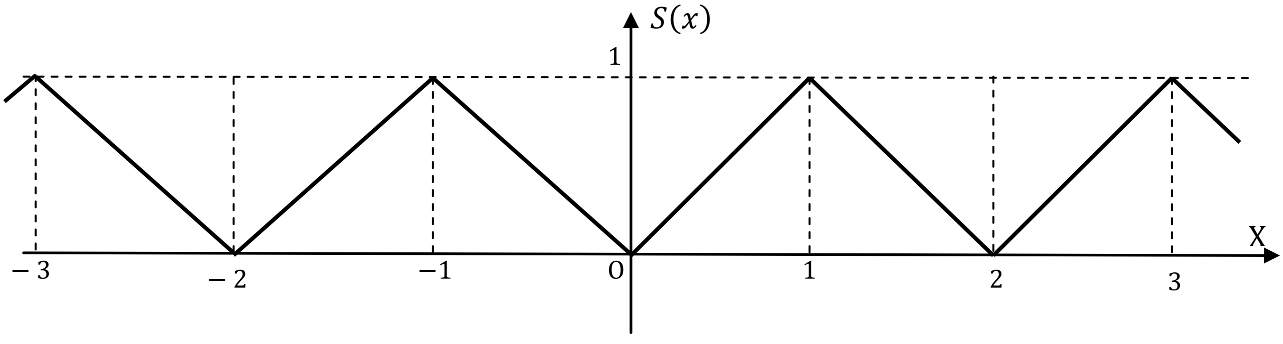

Рис. **График функции $S(x)$ из примера 5**

Ответ.

$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\left((2n-1)\pi x\right)}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{cos\;\pi x}{1^2} + \frac{cos\;3\pi x}{3^2} + \frac{cos\;5\pi x}{5^2} + \;\ldots\right),$

$x \in (-\infty;\; +\infty); \qquad S(x) = |x| \quad \forall x \in [-1; 1]$.

Если функция $f(x)$ определена на "неполном" промежутке $[0; l]$, то ее можно "продолжить" на промежуток $[-l; 0]$ различными способами, например, четным или нечетным способом. В этом случае можно получить разложения функции в ряд **Фурье** только по синусам или только по косинусам.

Если функция $f(x)$ определена на произвольном конечном промежутке $[a; b]$, то и в этом случае ее можно разложить в ряд **Фурье**, причем различными способами.

Суммы тригонометрических и числовых рядов

Используя формулы и примеры, рассмотренные выше, можно находить суммы различных тригонометрических и числовых рядов.

Пример 6.

Найдем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \ \dots$.

Для этого используем суммы следующих рядов (см. *Следствия* к Примерам 3 и 4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - x^2\right) \text{ и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right), \quad x \in [-\pi; \pi].$$

Первый ряд разобьем на две суммы: в первой из них будут слагаемые с нечетными значениями n, а во второй – с четными значениями:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k-2} \cdot \frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k-1} \cdot \frac{\cos 2kx}{(2k)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4\cdot k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

Найдем разность исходных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - x^2\right) = \frac{\pi^2}{24} + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi\cdot|x|}{4}.$$

С другой стороны, эту разность можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

Следовательно: $\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi\cdot|x|}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + x^2 - \pi\cdot|x|.$$

Введем обозначение: $t = 2x$, тогда $x = \frac{t}{2}$ и $t \in [-2\pi; 2\pi]$.

Таким образом, имеем: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{t^2}{4}-\frac{\pi\cdot|t|}{2}$, или (после переобозначения переменной t):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{x^2}{4}-\frac{\pi\cdot|x|}{2}=\frac{2\pi^2+3x^2-6\pi\cdot|x|}{12},\ x\in[-2\pi;2\pi].$$

Итак, получен следующий результат:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}+\ \dots=\frac{2\pi^2+3x^2-6\pi\cdot|x|}{12}},\ x\in[-2\pi;2\pi].$$

Пример 7.

Найдем разложение в ряд Фурье функции $f(x)=e^x,\ x\in[-\pi;\pi]$:

$$e^x\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in[-\pi;\pi].$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{2}{\pi}sh\,\pi$. Для вычисления коэффициентов a_n и b_n воспользуемся известными формулами:

$\int e^x\cdot\cos nx\,dx=\frac{\cos nx+n\cdot\sin nx}{n^2+1}\cdot e^x$ и $\int e^x\cdot\sin nx\,dx=\frac{\sin nx-n\cdot\cos nx}{n^2+1}\cdot e^x$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ e^x\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx+n\cdot\sin nx}{n^2+1}\cdot e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2+1}\cdot e^{\pi}-\frac{\cos(-n\pi)}{n^2+1}\cdot e^{-\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot e^{\pi}-\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot e^{-\pi}\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2+1}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2+1},\ \ n=1,2,3,\dots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ e^x\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx-n\cdot\cos nx}{n^2+1}\cdot e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-n\cdot\cos n\pi}{n^2+1}\cdot e^{\pi}-\frac{-n\cdot\cos(-n\pi)}{n^2+1}\cdot e^{-\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-n\cdot(-1)^n}{n^2+1}\cdot e^{\pi}+\frac{n\cdot(-1)^n}{n^2+1}\cdot e^{-\pi}\right)==$$
$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}(e^{\pi}-e^{-\pi})=-\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1},\ \ n=1,2,3,\dots.$$

Таким образом, имеем разложение:

$$e^x\sim\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\cdot\sin nx),\quad x\in[-\pi;\pi].$$

Учитывая непрерывность функции e^x на интервале $(-\pi;\pi)$, получаем:

$$e^x=\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\cdot\sin nx)\quad\forall x\in(-\pi;\pi).$$

Из этого разложения функции e^x легко получаются разложения гиперболических функций $sh\,x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ и $ch\,x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$:

$$sh\,x=\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}\cdot\sin nx\quad\forall x\in(-\pi;\pi),$$
$$ch\,x=\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\cos nx\quad\forall x\in[-\pi;\pi].$$

Подставим в разложении $ch\,x$ значение $x=0$:

$$\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2\cdot sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\cos 0=\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2\cdot sh\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=ch\,0=1\Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\left(1-\frac{sh\,\pi}{\pi}\right)\frac{\pi}{2\cdot sh\,\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{sh\,\pi}-1\right)=\frac{\pi\cdot e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}.$$

Получаем сумму числового ряда:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{\pi\cdot e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2}}.$$

Подставим в разложении $ch\,x$ значение $x=\pi$:

$$\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2\cdot sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\cos n\pi=\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2\cdot sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot(-1)^n=$$

$$=\frac{sh\,\pi}{\pi}+\frac{2\cdot sh\,\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=ch\,\pi\;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\left(ch\,\pi-\frac{sh\,\pi}{\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2\cdot sh\,\pi}=\frac{1}{2\cdot sh\,\pi}(\pi\cdot ch\,\pi-sh\,\pi)=$$

$$=\frac{\pi\cdot(e^{\pi}+e^{-\pi})-(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\cdot(e^{\pi}-e^{-\pi})}=\frac{\pi\cdot(e^{2\pi}+1)-(e^{2\pi}-1)}{2\cdot(e^{2\pi}-1)}=\frac{(e^{2\pi}-1)\cdot(\pi-1)+2\pi}{2\cdot(e^{2\pi}-1)}=\frac{\pi-1}{2}+\frac{\pi}{e^{2\pi}-1}.$$

Получаем сумму числового ряда:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi}{e^{2\pi}-1}+\frac{\pi-1}{2}}.$$

Приведем без доказательства еще несколько разложений функций в ряды **Фурье**:

1. $ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\cos nx \quad \forall x\in(-\pi;\pi)$;

2. $ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos nx \quad \forall x\in(0;2\pi)$;

3. $x\cdot\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cdot\cos nx \quad \forall x\in[-\pi;\pi]$;

4. $x\cdot\cos x=-\frac{1}{2}\sin x+2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{n^2-1}\cdot\sin nx \quad \forall x\in(-\pi;\pi)$.

Из первых двух формул можно получить еще одно разложение:

$$ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)-ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=ln\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}\cdot\cos nx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-2}+1}{2k-1}\cdot\cos(2k-1)x=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\cos(2n-1)x\;\Rightarrow$$

$$ln\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\;\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}=\frac{1}{2}ln\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)\quad\forall x\in(0;\pi).$$

Из третьей формулы при $x=0$ имеем:

$$0=1-\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\Rightarrow\;\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{4}.$$

Из четвертой формулы при $x=\frac{\pi}{2}$ имеем:

$$0=-\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}=2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-(2k-1)}{(2k-1)^2-1}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-1)\cdot(-1)^k}{(2k-1)^2-1}=2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-1)\cdot(-1)^n}{(2n-1)^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)}{(n-1)\cdot n}\;\Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)}{(n-1)\cdot n}=1.$$

В случае равномерной сходимости тригонометрических рядов можно применить к ним почленное интегрирование или дифференцирование. В результате этих действий можно получить формулы для сумм новых тригонометрических рядов.

Вопрос об условиях равномерной сходимости тригонометрических рядов остается за рамками нашего обсуждения. Об этом можно прочитать в дополнительной литературе.

Рассмотрим в качестве примеров тригонометрические ряды, к которым формально применим почленное дифференцирование.

Пример 8.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,nx}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin\,nx}{n^2}$.

а) Пусть $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, тогда имеем: $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)'=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\,(2n-1)x}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left(ctg\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$

$$S(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\ln\left(ctg\frac{t}{2}\right)dt \quad \text{(учитывая, что } S(0)=0).$$

Таким образом, сумма тригонометрического ряда равна сходящемуся несобственному интегралу 2 рода:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\ln\left(ctg\frac{t}{2}\right)dt,\ x\in(0;\pi).$$

б) Пусть $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,nx}{n^2}$, тогда имеем: $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,nx}{n^2}\right)'=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\,nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$

$$S(x)=-\int_0^x\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt \quad \text{(учитывая, что } S(0)=0).$$

Сумма ряда здесь также равна сходящемуся несобственному интегралу 2 рода:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\,nx}{n^2}=-\int_0^x\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt,\ x\in(0;2\pi).$$

в) Пусть $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin\,nx}{n^2}$, тогда имеем:
$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin\,nx}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\cos\,nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\Rightarrow$
$S(x)=\int_0^x\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt$ (учитывая, что $S(0)=0$).

И здесь сумма тригонометрического ряда равна сходящемуся несобственному интегралу 2 рода:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin\,nx}{n^2}=\int_0^x\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt,\ x\in(-\pi;\pi)$$

Читателям предлагается в качестве упражнения доказать самостоятельно сходимость этих несобственных интегралов 2 рода.

Приложения

Суммы тригонометрических рядов

1. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\ \dots = \frac{\pi - x}{2}}$, $x \in (0;\ 2\pi)$

2. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin nx}{n} = \frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ \dots = \frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi;\ \pi)$

3. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} = \frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\ \dots = \frac{\pi}{4}}$, $x \in (0;\ \pi)$

4. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos (2n-1)x}{2n-1} = \frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 5x}{5}+\ \dots = \frac{1}{2}\ln\left(ctg\,\frac{x}{2}\right)}$, $x\in(0;\pi)$

5. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2} = \frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ \dots = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)}$, $x \in [-\pi;\pi]$

6. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ \dots = \frac{2\pi^2+3x^2-6\pi\cdot|x|}{12}}$, $x \in [-2\pi;2\pi]$

7. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx = \frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-+\cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3}-x^2\right)}$, $x\in [-\pi;\pi]$

8. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx = \frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ \dots = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)}$, $x\in (0;\ 2\pi)$

9. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx = \frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\ \dots = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)}$, $x \in (-\pi;\pi)$

10. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}\sin nx = \frac{\sin x}{1^2+1}-\frac{2\sin 2x}{2^2+1}+\frac{3\sin 3x}{3^2+1}-\ \dots = \frac{\pi}{2\cdot sh\,\pi}\cdot sh\,x}$, $x\in (-\pi;\pi)$

11. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}\cos nx = \frac{\cos x}{1^2+1}-\frac{\cos 2x}{2^2+1}+\frac{\cos 3x}{3^2+1}-\cdots = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi\cdot ch\,x}{sh\,\pi}\right)}$, $x \in [-\pi;\pi]$

12. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{n^2-1}\sin nx = \frac{2\sin 2x}{2^2-1}-\frac{3\sin 3x}{3^2-1}+\frac{4\sin 4x}{4^2-1}-\ \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2}+x\cdot\cos x\right)}$,

$x \in (-\pi;\pi)$;

13. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-1}\cos nx = \frac{\cos 2x}{2^2-1}-\frac{\cos 3x}{3^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}-\ \dots = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}-x\cdot\sin x\right)}$,

$x \in [-\pi;\pi]$;

14. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin nx = \frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots = -\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt}$, $x \in (0;2\pi)$

15. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx = \frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}-\cdots = \int_0^x \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt}$, $x\in(-\pi;\pi)$

16. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\cdots = \frac{1}{2}\int_0^x \ln\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)dt}$, $x \in (0;\pi)$.

Суммы числовых рядов

1. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots=ln\,2}$

2. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \ldots=\frac{\pi}{4}}$

3. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{6}}$

4. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{12}}$

5. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{8}}$

6. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ \ldots=\frac{\pi^4}{90}}$

7. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ \ldots=\frac{3}{4}}$

8. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}-\frac{1}{5^2-1}+\ \ldots=\frac{1}{4}}$

9. $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)}{(n-1)\cdot n}=\frac{3}{1\cdot2}-\frac{5}{2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4}-\frac{9}{4\cdot5}+\ \ldots=1}$

10. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\ \ldots=\frac{\pi}{e^{2\pi}-1}+\frac{\pi-1}{2}}$

11. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+\ \ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi\cdot e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}}$

12. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots+\frac{1}{m}\right)}$

13. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)\cdot(p+n+1)\cdot\ldots\cdot(p+n+m)}=\frac{1}{m\cdot(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)}}$

14. $\boxed{\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2}=\frac{1}{2m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots+\frac{1}{2m}\right)}$

Расчетное задание «Ряды Фурье»

а). Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$. Построить графики функций $f(x)$ и $S(x)$.

б). Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, $x \in [0;l]$ - по синусам или косинусам. Построить графики функций $f(x)$ и $S(x)$.

Примерные варианты заданий (№ $1 \div 32$):

1. а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ 2x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = -1$, $x \in [0;3]$ - по синусам

2. а) $f(x) = x \cdot sin\, x$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in [0;2]$ – по косинусам

3. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = x^2$, $x \in [0;\pi]$ - по синусам

4. а) $f(x) = e^{2x}$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in [0;1]$ - по синусам

5. а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ 1, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = x^3$, $x \in [0;2]$ - по косинусам

6. а) $f(x) = sh\, 2x$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = -x$, $x \in [0;3]$ - по косинусам

7. а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ 0, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in [0;1]$ - по косинусам

8. *а*) $f(x) = ch\, 2x$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$, $x \in [0;1]$ - по синусам

9. а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ 2, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = sin\, \frac{x}{2}$, $x \in [0;\pi]$ - по косинусам

10. а) $f(x) = \left\{\frac{x}{\pi}\right\}$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = cos\, \frac{x}{2}$, $x \in [0;\pi]$ - по синусам

11. а) $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ 1-x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = -x^2$, $x \in [0;1]$ - по синусам

12. а) $f(x) = x \cdot cos\, x$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = 3x$, $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ - по косинусам

13. а) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = x \cdot (\pi - x)$, $x \in [0;2]$ - по косинусам

14. а) $f(x) = sin\, \frac{x}{2}$, $x \in [-\pi;\pi]$ б) $f(x) = x \cdot (\pi - x)$, $x \in [0;2]$ - по синусам

15. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi;0) \\ c, & x = 0 \\ -x, & x \in (0;\pi] \end{cases}$ б) $f(x) = -2x$, $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ - по косинусам

16. a) $f(x) = cos\,\frac{x}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = \{2x\}$, $x \in [0; 1]$ - по синусам

17. а) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ 3, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = x$, $x \in [0; 2]$ - по косинусам

18. а) $f(x) = cos\,\frac{3x}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = e^x$, $x \in [0; 1]$ - по синусам

19. а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ 0, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = cos\,x$, $x \in [0; \pi]$ - по синусам

20. а) $f(x) = sin\,\frac{3x}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = 2x$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ - по косинусам

21. a) $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ 1, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = e^x$, $x \in [0; 1]$ - по косинусам

22. а) $f(x) = \left\{\frac{2x}{\pi}\right\}$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = sin\,x$, $x \in [0; \pi]$ - по косинусам

23. а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ -x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = cos\,\frac{x}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$ - по синусам

24. а) $f(x) = x^3$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = sin\,\frac{x}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$ - по косинусам

25. а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ 1, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\}$, $x \in [0; 3]$ - по косинусам

26. а) $f(x) = |sin\,x|$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = x - 1$, $x \in [0; 2]$ - по синусам

27. а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ -x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\}$, $x \in [0; 3]$ - по синусам

28. а) $f(x) = \left[\frac{x}{\pi}\right]$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = x^3$, $x \in [0; 1]$ - по косинусам

29. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ x^2, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = 1 - x$, $x \in [0; 1]$ - по синусам

30. а) $f(x) = \left[\frac{2x}{\pi}\right]$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = 1 - x$, $x \in [0; 1]$ - по косинусам

31. а) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [-\pi; 0) \\ c, & x = 0 \\ x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$ б) $f(x) = 2x + 1$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ - по синусам

32. а) $f(x) = \left|x + \frac{\pi}{2}\right|$, $x \in [-\pi; \pi]$ б) $f(x) = 2x - 1$, $x \in [0; 1]$ - по косинусам