

Министерство образования и науки Астраханской области
Государственное автономное образовательное учреждение
Астраханской области высшего образования
«Астраханский государственный архитектурно-строительный университет»



Кафедра «Промышленное и гражданское
строительство»

Техническая механика и сопротивление материалов

учебно-методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для студентов заочного обучения
всех специальностей

Астрахань – 2016

УДК 624.072

Авторы: Завьялова Ольга Борисовна, к.т.н., доцент кафедры «ПГС»

Рецензент: Кокарев Александр Михайлович, к.т.н., доцент кафедры «ПГС» АГАСУ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам-заочникам при изучении дисциплин «Техническая механика» и «Сопротивление материалов». Содержит краткие теоретические материалы по рассматриваемым разделам, подробную методику решения задач, справочные материалы и типовые задания для студентов заочного обучения всех специальностей. – Астрахань, 2016. – с. 112.

© Завьялова О.Б.

© ГАОУ АО ВО «Астраханский государственный архитектурно-строительный университет»

Содержание

Введение.....	4
1. Геометрические характеристики плоских фигур.....	5
2. Центральное растяжение и сжатие. Основные определения и расчётные формулы.....	15
3. Кручение стержня круглого поперечного сечения. Основные определения и расчётные формулы.....	25
4. Прямой поперечный изгиб. Основные определения, зависимости и расчётные формулы.....	30
5. Расчет статически неопределимой балки.....	45
6. Устойчивость сжатых стержней. Основные положения и расчетные формулы	57
7. Сложное сопротивление.....	66
8. Задания на контрольные работы №1 и №2 по технической механике.....	80
9. Задания на контрольные работы №1 и №2 по сопротивлению материалов ..	88
10. Вопросы для закрепления знаний по темам.....	97
Приложение 1А.....	102
Приложение 1Б.....	104
Приложение 1В.....	106
Приложение 2.....	110
Приложение 3.....	111
Приложение 4.....	112
Список литературы.....	112

Введение

Уважаемые студенты заочного обучения! Мы постарались собрать для вас все необходимые определения и формулы для освоения технической механики, являющейся разделом науки «Сопротивление материалов». При этом авторы не ставили перед собой цель заменить учебник, поскольку все приведенные здесь положения даны без доказательств. Прежде чем приступить к решению задач, прочитайте внимательно соответствующий теоретический раздел, затем ознакомьтесь с примером выполнения контрольной работы. Все примеры разобраны подробно, даны ссылки на формулы, используемые в расчете. Все условные обозначения даны нами с транскрипцией (принятым в инженерных кругах произношением), и мы советуем Вам при написании формул не просто копировать их написание, а мысленно или вслух произносить их по буквам, чтобы освоить инженерную терминологию и подготовиться к сдаче зачета и экзамена, а в дальнейшем – и к проектной деятельности. «Техническая механика» и «Сопротивление материалов» готовят Вас к дальнейшему изучению расчетных проектно-конструкторских дисциплин: строительной механики, металлических конструкций, конструкций из дерева и пластмасс, железобетонных и каменных конструкций, для которых условия прочности и жёсткости, а также устойчивости, изучаемые в нашем курсе, являются основными при проектировании всех строительных систем. Поэтому постарайтесь хорошо понять и запомнить основные расчетные положения, научитесь строить эпюры внутренних усилий, являющиеся основой для расчета конструкций. Для контроля усвоения теоретических знаний и практических умений мы приводим в конце теоретической части вопросы по каждому разделу; постарайтесь ответить на них, при необходимости воспользуйтесь помощью преподавателя на консультациях или на сайте кафедры «Промышленное и гражданское строительство», попасть на который можно через образовательный портал АИСИ.

§1. Геометрические характеристики плоских фигур

В школьном курсе геометрии Вы уже изучали простейшие геометрические характеристики, такие, как площадь фигуры и периметр. Однако для расчетов прочности и жесткости конструкций знания только этих характеристик недостаточно. В самом деле, чем объяснить тот факт, что доска, поставленная на ребро, при работе на изгиб будет более прочной и менее деформативной, чем та же доска, лежащая плашмя. Ведь площадь поперечного сечения доски при этом не изменяется. Оказывается, за прочность «отвечает» такая характеристика, как момент сопротивления, а за жёсткость – момент инерции поперечного сечения. Для составных сечений, включающих несколько простых фигур, требуется также умение находить общий центр тяжести.

Положение центра тяжести сложной фигуры, состоящей из нескольких простых фигур, определяют относительно произвольно выбранных осей x_0 ; y_0 по формулам:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (1.1)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n – площади отдельных простых фигур,

x_i ; y_i – координаты центров тяжести этих фигур в выбранной системе координат.

Моментом инерции фигуры относительно некоторой оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок dA на квадраты расстояний до этой точки (рис. 1.1).

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A x^2 \cdot dA, \quad (1.2)$$

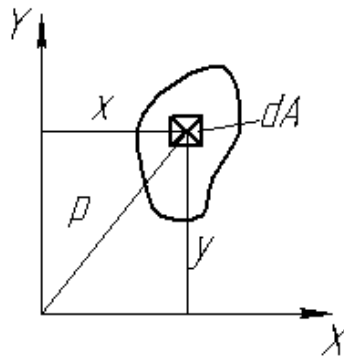


Рис. 1.1

Полярным моментом инерции относительно точки пересечения осей называют интеграл вида: $J_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$.

Единицы измерения момента инерции: $см^4$. Моменты инерции всегда больше нуля.

Теорема: Для двух пар осей (рис. 1.2), из которых одни центральные X_C, Y_C , а другие им параллельны X_I, Y_I , выполняются зависимости:

$$\begin{aligned} J_{X_I} &= J_{X_C} + A \cdot a^2; \\ J_{Y_I} &= J_{Y_C} + A \cdot b^2; \\ J_\rho &= J_{\rho_C} + A \cdot (a^2 + b^2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

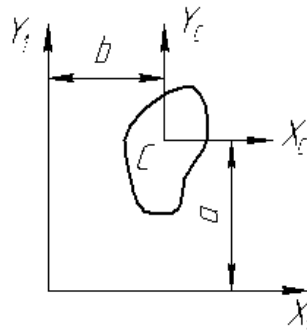


Рис. 1.2

Осевой момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции отдельных простых фигур (или их разности).

Моменты инерции составной фигуры относительно её центральных осей равны сумме соответствующих моментов инерции отдельных простых фигур относительно тех же осей.

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + \dots + I_x^{(n)} \\ I_y &= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + \dots + I_y^{(n)} \\ I_{xy} &= I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + \dots + I_{xy}^{(n)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Каждое слагаемое в правой части выражений (1.4) представляет собой соответствующий момент инерции относительно собственных центральных осей отдельной фигуры плюс поправка на параллельный перенос осей. Например, для первой фигуры:

$$\begin{aligned} I_x^{(1)} &= I_{x1} + A_1 a_1^2 \\ I_y^{(1)} &= I_{y1} + A_1 b_1^2 \\ I_{xy}^{(1)} &= I_{xy1} + A_1 a_1 b_1 \end{aligned}, \quad (1.5)$$

здесь a_1 – расстояние между осями X и X_1 ;

b_1 – расстояние между осями Y и Y_1 .

Значения собственных моментов инерции некоторых простых фигур можно найти в приложении 1, для прокатных профилей все необходимые геометрические характеристики даны в ГОСТах.

Через центр тяжести фигуры можно провести бесконечное множество взаимно перпендикулярных осей. Все они будут называться *центральными осями*. При повороте этих осей на некоторый угол моменты инерции фигуры будут изменяться по величине (смотри формулы 1.8), но сумма осевых моментов инерции относительно любой пары центральных осей будет постоянной величиной. Это значит, что существует такая пара осей, относительно которых моменты инерции будут принимать экстремальные значения (один максимальный, другой минимальный). Эта пара осей называется *главными осями* и обозначается U и V . Центробежный момент инерции относительно главных осей всегда равен нулю. Для простых фигур нахождение главных осей, как правило, не составляет труда. Если фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось (и парная к ней) – главная. Для сложных фигур положение главных осей можно определить по выражению:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (1.6)$$

Угол α_0 считается положительным, если центральные оси X и Y до совмещения с главными осями U и V следует повернуть против хода часовой стрелки. При этом в ось максимального момента инерции (ось U) переходит та из центральных осей (X или Y), относительно которой момент инерции был больше.

Значения главных моментов инерции можно найти по выражению:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}, \quad (1.7)$$

или по формулам, используемым для определения моментов инерции относительно осей, повернутых на некоторый угол:

$$\begin{aligned} I_{x_\alpha} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y_\alpha} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha . \\ I_{x_\alpha y_\alpha} &= \frac{I_x + I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (1.8)$$

При этом в выражениях (1.8) вместо угла α следует подставить найденный угол α_0 . Главные моменты инерции используются при проверке жесткости конструкций.

Моментом сопротивления фигуры (сечения) относительно некоторой оси (полюса) называют отношение соответствующего момента инерции к расстоянию от этой оси (полюса) до наиболее удалённой точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} \quad (1.9)$$

В выражениях (1.9) W_x и W_y – осевые моменты сопротивления, W_ρ – полярный момент сопротивления (читается «дубль вз икс», «дубль вз игрек», «дубль вз ро»). Момент сопротивления сложной фигуры, в отличие от моментов инерции, нельзя находить сложением или вычитанием. Единицы измерения момента сопротивления: см^3 . Эта геометрическая характеристика используется в расчетах прочности.

Моменты сопротивления некоторых простых фигур приведены в приложении 2.

В задачах устойчивости нам понадобится уметь определять радиус инерции перечного сечения. *Радиусом инерции сечения* относительно некоторой оси – называют корень квадратный из отношения соответствующего момента инерции к площади сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} . \quad (1.10)$$

ПРИМЕР выполнения задачи 1.

Для поперечного сечения составного стержня требуется:

- 1) определить координаты центра тяжести;
- 2) вычислить центральные моменты инерции;
- 3) найти направления главных центральных осей инерции;
- 4) определить главные центральные моменты инерции и радиусы инерции, построить эллипс инерции.

Дано: швеллер №22, уголок равнополочный 140×140×12мм. толщина листа 12мм. Схема сечения представлена на рис. 5.1.

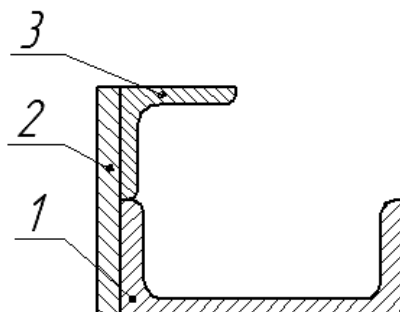


Рис. 1.3. Расчетная схема к задаче 1

Решение:

Сечение состоит из швеллера 1, листа 2 и равнобокого уголка 3.

Рассмотрим швеллер 1. Из сортамента прокатных профилей (Приложение 1) выписываем основные характеристики швеллера №22:

Площадь: $A_1 = 26,7\text{см}^2$, при таком расположении швеллера осевые моменты инерции: $J_{xc1} = 151\text{см}^4$, $J_{yc1} = 2110\text{см}^4$, размеры: $z_{01} = 2,21\text{см}$, $h_1 = 220\text{мм} = 22\text{см}$, $b_1 = 82\text{мм} = 8,2\text{см}$, $s_1 = 5,4\text{мм} = 0,54\text{см}$, $t_1 = 9,2\text{мм} = 0,92\text{см}$.

Рассмотрим лист 2. Толщина листа задана $b_2 = 12\text{мм} = 1,2\text{см}$, а высота листа определяется по рисунку. В данном случае она равна сумме размеров полок швеллера и уголка: $h_2 = 22,2\text{см}$. Площадь листа: $A_2 = 1,2 \cdot 22,2 = 26,64\text{см}^2$. При вертикальном положении листа его осевые моменты инерции:

$$J_{xc2} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 22,2^3}{12} = 1094,1\text{см}^4,$$

$$J_{yc2} = \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} = \frac{1,2^3 \cdot 22,2}{12} = 3,2\text{см}^4.$$

Рассмотрим уголок 3. Из сортамента (Приложение 1) выписываем основные характеристики уголка 140×140×12мм:

Площадь: $A_3 = 32,5\text{см}^2$, осевые моменты инерции: $J_{xc3} = J_{yc3} = 602\text{см}^4$, главные моменты инерции: $J_{x0} = 957\text{см}^4$, $J_{y0} = 248\text{см}^4$, размеры: $z_{03} = 3,9\text{см}$, $h_3 = b_3 = 140\text{мм} = 14\text{см}$.

Построим сечение в выбранном масштабе (1:2). Обозначим центры тяжести каждой фигуры и проведем центральные оси каждой фигуры (рис. 1.5).

1. Определим положение центра тяжести составного сечения относительно произвольных осей x_0, y_0 по формулам 1.1 (в качестве произвольных осей удобнее всего принять оси, проходящие по нижней и левой граням фигуры).

Суммарная площадь сечения, состоящего из трёх фигур:

$$\sum A = A_1 + A_2 + A_3 = 26,7 + 26,64 + 32,5 = 85,84 \text{ см}^2.$$

Вычисляем координаты центра тяжести:

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_3 \cdot y_{C3}}{\sum A} = \frac{26,7 \cdot 2,21 + 26,64 \cdot 11,1 + 32,5 \cdot 18,3}{85,84} = 11,1 \text{ см},$$

$$x_C = \frac{A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + A_3 \cdot x_{C3}}{\sum A} = \frac{26,7 \cdot 12,2 + 26,64 \cdot 0,6 + 32,5 \cdot 5,1}{85,84} = 5,9 \text{ см}.$$

Откладываем полученные расстояния на чертеже и получаем центр тяжести составного сечения – точка C (рис. 1.5). Отмечаем положение центра тяжести на чертеже. Положительные знаки координат x_C и y_C указывают на то, что общий центр тяжести находится выше оси x_0 и правее оси y_0 . Проверкой служит то, что полученный центр тяжести составной фигуры находится внутри треугольника $C_1C_2C_3$.

2. Для того, чтобы определить осевые моменты инерции относительно центральных осей X_C, Y_C , определим координаты центров тяжести отдельных фигур относительно центральных осей X_C, Y_C (с учетом знаков):

Швеллер: $a_1 = y_{C1} - y_C = 2,21 - 11,1 = -8,89 \text{ см},$

$$b_1 = x_{C1} - x_C = 12,2 - 5,9 = 6,3 \text{ см}$$

Лист: $a_2 = y_{C2} - y_C = 0,$

$$b_2 = x_{C2} - x_C = 0,6 - 5,9 = -5,3 \text{ см}$$

Уголок: $a_3 = y_{C3} - y_C = 18,1 - 11,1 = 7,2 \text{ см},$

$$b_3 = x_{C3} - x_C = 5,1 - 5,9 = -0,8 \text{ см}.$$

3. Определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей X_C, Y_C по формулам 1.4 и 1.5. Для каждой фигуры суммируем собственный момент инерции и поправку за счёт параллельного переноса осей (произведение площади на квадрат расстояния между осями). Расстояния между центральными осями всей фигуры и осями отдельных фигур были определены в пункте 2.

$$J_X = J_{X1} + J_{X2} + J_{X3}$$

$$J_{X1} = J_{XC1} + A_1 \cdot a_1^2 = 151 + 26,7 \cdot (-8,89)^2 = 2261,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{X2} = J_{XC2} + A_2 \cdot a_2^2 = 1094,1 + 26,64 \cdot 0^2 = 1094,1 \text{ см}^4,$$

$$J_{X3} = J_{XC3} + A_3 \cdot a_3^2 = 602 + 32,5 \cdot 7,2^2 = 2286,8 \text{ см}^4.$$

Суммируем:

$$\underline{J_X = 2261,2 + 1094,1 + 2286,8 = 5642,1 \text{ см}^4.}$$

$$J_Y = J_{Y1} + J_{Y2} + J_{Y3}$$

$$J_{Y1} = J_{YC1} + A_1 \cdot b_1^2 = 2110 + 26,7 \cdot 6,3^2 = 3169,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{Y2} = J_{YC2} + A_2 \cdot b_2^2 = 3,2 + 26,64 \cdot (-5,3)^2 = 751,5 \text{ см}^4,$$

$$J_{Y3} = J_{YC3} + A_3 \cdot b_3^2 = 602 + 32,5 \cdot (-0,8)^2 = 622,8 \text{ см}^4.$$

В целом:

$$\underline{J_Y = 3169,7 + 751,5 + 622,8 = 4544 \text{ см}^4.}$$

Проверка: все моменты инерции больше нуля.

4. Определим центробежный момент инерции сечения.

Для каждой фигуры суммируем собственный центробежный момент инерции и поправку за счёт параллельного переноса осей. Для центробежного момента поправка равна произведению площади на две координаты $(a_i; b_i)$, определенные в пункте 2, с учётом знаков. Для фигур, у которых их собственные центральные оси являются главными, собственный центробежный момент инерции равен нулю. Из рассматриваемых в контрольной работе фигур – это прямоугольник, швеллер и двутавр. Для уголка его собственные центральные оси X_{C3}, Y_{C3} не являются главными. Главные оси в равнополочном уголке смещены по отношению к осям X_{C3}, Y_{C3} под углом $\alpha_0 = \pm 45^\circ$, поэтому для него собственный центробежный момент определяют по формуле (1.6) с учетом этого угла. Знак центробежного момента зависит от знака угла α_0 , который определяют, учитывая положение уголка на чертеже, а именно, в соответствии с рисунком 1.4.

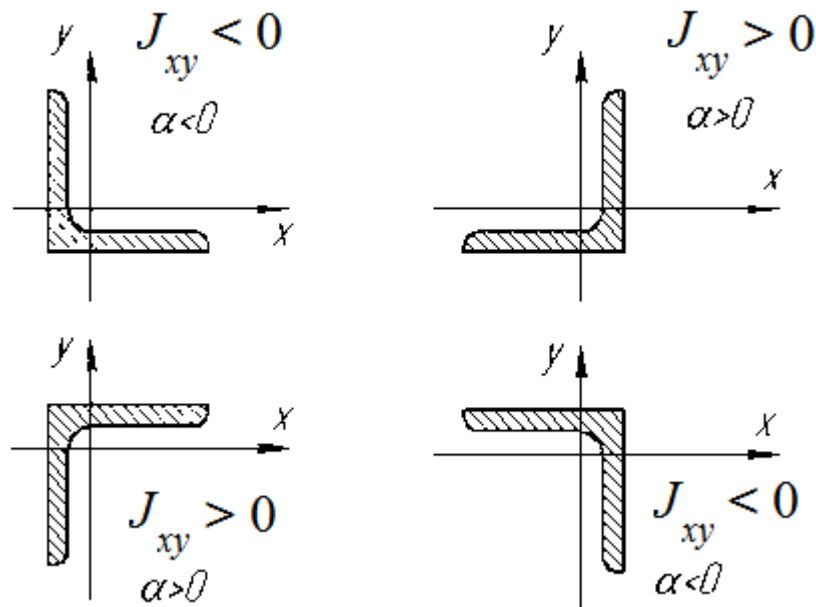


Рис. 1.4. К определению знака центробежного момента инерции уголка

$$J_{XY} = J_{X_1Y_1} + J_{X_2Y_2} + J_{X_3Y_3}$$

$$J_{X_1Y_1} = J_{X_C1Y_C1} + A_1 \cdot a_1 b_1 = 0 + 26,7 \cdot (-8,89) \cdot 6,3 = -1495,4 \text{ см}^4,$$

$$J_{X_2Y_2} = J_{X_C2Y_C2} + A_2 \cdot a_2 b_2 = 0 + 26,64 \cdot 0 \cdot (-5,3) = 0,$$

$$J_{X_3Y_3} = J_{X_C3Y_C3} + A_3 \cdot a_3 b_3$$

При заданном расположении уголка знак $\alpha_0 = +45^\circ$. Тогда:

$$J_{X_C3Y_C3} = \frac{J_{X_0} - J_{Y_0}}{2} \cdot \sin 2 \cdot \alpha_0 + J_{X_0Y_0} \cdot \cos 2 \cdot \alpha_0 = \frac{957 - 248}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) + 0 = 354,5 \text{ см}^4$$

$$J_{X_3Y_3} = 354,5 + 32,5 \cdot 7,2 \cdot (-0,8) = 167,3 \text{ см}^4;$$

Для всей фигуры:

$$\underline{J_{XY} = -1495,4 + 0 + 167,3 = -1328,1 \text{ см}^4}.$$

Проверка центробежного момента: если центр тяжести отдельной фигуры находится в 1-й или 3-й четверти по отношению к центральным осям всей фигуры, знак поправки положительный, если во 2-й или 4-й четвертях, то поправка отрицательна.

5. Найдём направления главных центральных осей инерции:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{XY}}{J_Y - J_X} = -\frac{2 \cdot 1328,1}{4544 - 5642,1} = 2,42, \text{ откуда } 2\alpha_0 = 68^\circ, \text{ или } \alpha_0 = 34^\circ.$$

Поскольку получили $\alpha > 0$, откладывая угол будем против хода часовой стрелки.

Вычислим главные моменты инерции:

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_X + J_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_X - J_Y}{2}\right)^2 + J_{XY}^2} = \frac{5642,1 + 4544}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5642,1 - 4544}{2}\right)^2 + (-1328,1)^2} = 5093,1 \pm 1437,1.$$

Откуда получим:

$$J_U = 5093,1 + 1437,1 = 6530,2 \text{ см}^4 - \text{максимальный момент инерции};$$

$$J_V = 5093,1 - 1437,1 = 3656 \text{ см}^4 - \text{минимальный момент инерции}.$$

Проверяем выполнение условия: $J_X + J_Y = J_U + J_V$,

$$6530,2 + 3656 = 10186,2 \text{ см}^4$$

$$4544 + 5642,1 = 10186,1 \text{ см}^4$$

Отклонение незначительно. Условие проверки выполнено.

В нашем случае в ось максимального момента инерции (ось U) переходит при повороте осей центральная ось X , так как момент инерции относительно этой оси больше ($I_X > I_Y$). Соответственно, в ось минимального момента инерции V переходит ось Y .

б. Вычислим радиусы инерции:

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{\sum A}} = \sqrt{\frac{5642,1}{85,84}} = 8,1 \text{ см},$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{\sum A}} = \sqrt{\frac{4544}{85,84}} = 7,3 \text{ см}$$

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{\sum A}} = \sqrt{\frac{6530,2}{85,84}} = 8,7 \text{ см},$$

$$i_V = \sqrt{\frac{J_V}{\sum A}} = \sqrt{\frac{3656}{85,84}} = 6,5 \text{ см}$$

Полученные радиусы инерции откладываем на осях в обе стороны от центра тяжести: i_X - на оси Y ; i_Y - на оси X ; i_U - на оси V ; i_V - на оси U .

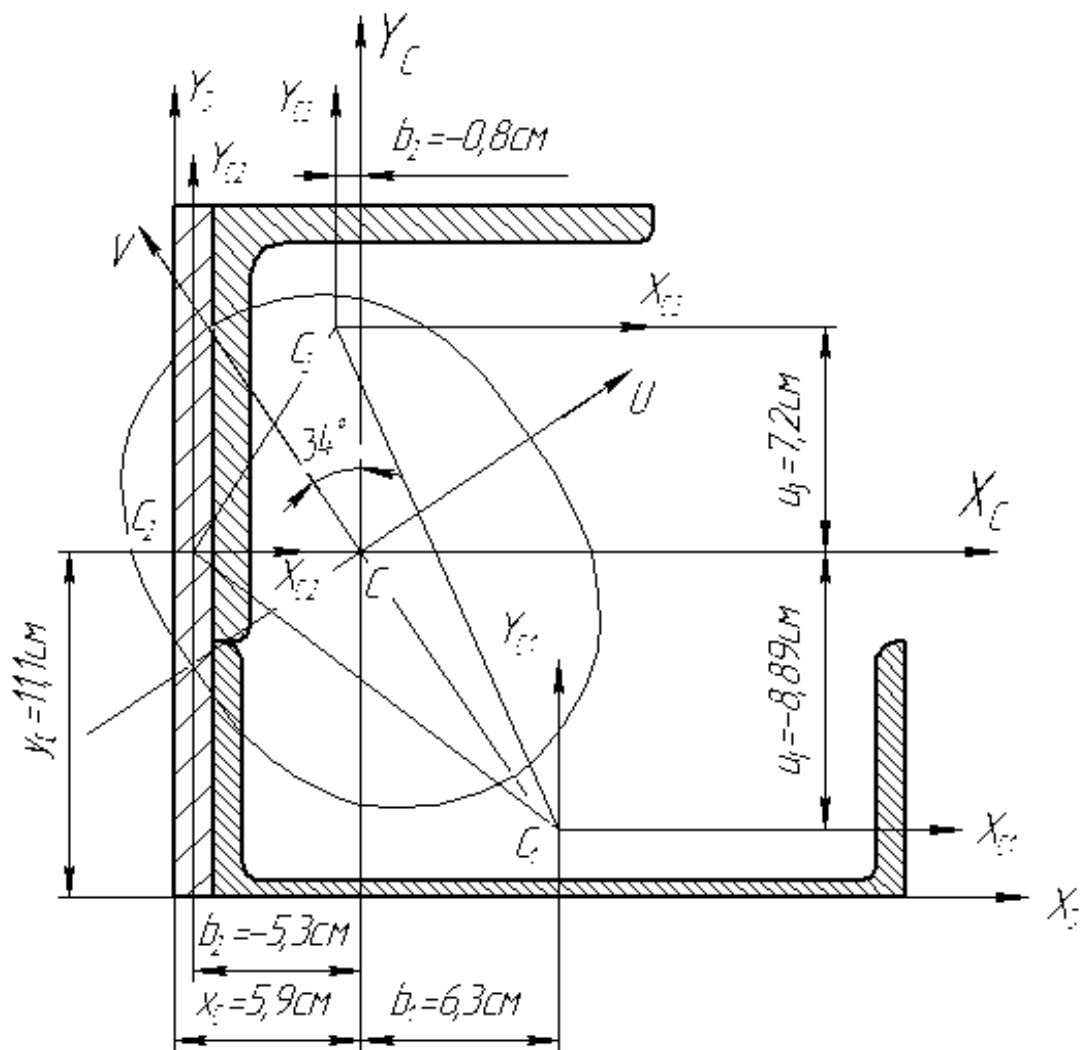


Рис. 1.5. К определению геометрических характеристик составной фигуры

Проверка: большая ось эллипса всегда совпадает с осью минимального момента инерции, то есть с осью V .

§ 2. Центральное растяжение и сжатие. Основные определения и расчётные формулы

Центральным растяжением и сжатием называют такой вид деформации тела, при котором в его поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие – продольная сила N . Эту силу называют также нормальной из-за того, что она действует нормально (перпендикулярно) поперечному сечению. Чтобы найти значение продольной силы в сечении, нужно провести в теле поперечное сечение и составить уравнение равновесия одной из частей тела на нормаль к сечению. Это уравнение должно включать сумму проекций всех внешних нагрузок и опорных реакций, приложенных к телу по одну сторону от рассматриваемого сечения. Нормальная сила считается положительной, если она вызывает в теле растяжение, и отрицательной, если сжатие.

Нормальная сила в сечении является, по сути, равнодействующей всех нормальных внутренних усилий, распределённых по площади поперечного сечения. Эти распределённые по сечению усилия, образующие продольную силу, называются нормальными напряжениями и обозначаются σ (читается «сигма»). Опытным доказано, что нормальные напряжения при центральном растяжении и сжатии распределены в поперечных сечениях равномерно и равны отношению нормальной силы N к площади поперечного сечения A , т.е.

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

Прочность элементов конструкций при центральном растяжении и сжатии зависит не только от величины продольной силы и размеров сечения, но и от материала, из которого изготовлена конструкция. Условие прочности при растяжении-сжатии выглядит так:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.2)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение для материала. Следует отметить, что для пластичных материалов, к которым можно отнести, например, конструкционную сталь ВСт3, или Сталь 3, допускаемое нормальное напряжение при растяжении и при сжатии одинаково. Однако для большинства строительных материалов, к каковым относятся бетон, кирпич и редко сейчас применяемый чугун, и считающихся хрупкими материалами, условие прочности использует различные допускаемые напряжения при растяжении и сжатии:

$$\sigma = \frac{N_{p(e)}}{A} \leq [\sigma_{p(e)}]. \quad (2.3)$$

При действии нормальных сил размеры тела в продольном и поперечном направлении изменяются. Абсолютную продольную деформацию (абсолютное удлинение) определяют по формуле Р. Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}; \quad (2.4)$$

где l – длина тела до деформации, EA – жёсткость поперечного сечения при растяжении и сжатии, E – модуль упругости материала (модуль Юнга).

Относительная продольная деформация (относительное удлинение) ε (читается «эпсилон») находится как отношение Δl к первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.5)$$

Растяжение и сжатие сопровождаются изменением поперечных размеров стержня (рис. 2.1). При растяжении они уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Разность соответствующих поперечных размеров после деформации и до нее называется *абсолютной поперечной деформацией*.

$$\Delta d = d_1 - d \quad (2.6)$$

При растяжении поперечные деформации отрицательны, а при сжатии – положительны.

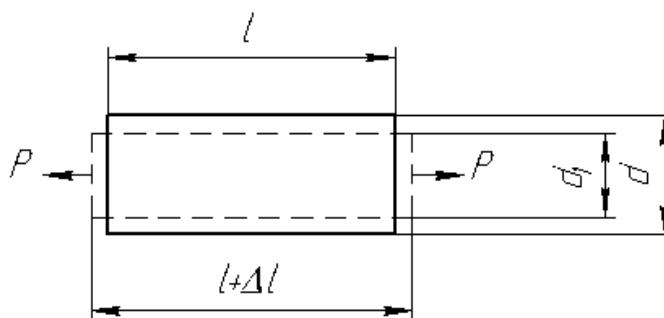


Рис. 2.1

Относительная поперечная деформация ε' (читается «эпсилон штрих») находится как отношение изменения поперечного размера тела Δd к первоначальному размеру d :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} \quad (2.7)$$

Эти два вида относительных деформаций связывает постоянная для любого материала величина, называемая коэффициентом Пуассона μ (читается «мю», безразмерная величина):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.8)$$

В том случае, если требуется решить задачу с учётом веса стержня или каната, то нагрузка от собственного веса определяется по формуле:

$$G = \gamma \cdot A \cdot l, \quad (2.9)$$

а удлинение от собственного веса вертикально расположенного стержня или каната будет равно:

$$\Delta l_G = \frac{G(l/2)}{EA} = \frac{\gamma \cdot l^2}{2EA}; \quad (2.10)$$

здесь γ – объёмный вес материала стержня (каната), G – модуль сдвига материала, связанный с модулем Юнга E соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.11)$$

Иногда задача решается с учетом температурных деформаций. В этом случае удлинение стержня определяется по выражению:

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t. \quad (2.12)$$

В последнем выражении α – коэффициент линейного температурного расширения материала стержня; Δt – изменение температуры стержня.

В некоторых случаях прочность элемента конструкции определяется не по методу допускаемых напряжений, описываемому выражением (2.3), а по методу предельных нагрузок. Предельной нагрузкой конструкции считается такая, при которой в поперечном сечении с наибольшими напряжениями последние достигнут предела текучести (для пластичных материалов) или предела прочности (для хрупких материалов). Предельная нагрузка для растянутого или сжатого стержня из пластичного материала равна:

$$P_{пред.} = \sigma_T A, \quad (2.13)$$

а допускаемая нагрузка равна отношению предельной нагрузки к коэффициенту запаса прочности $k > 1$:

$$[P] = \frac{P_{пред.}}{k} \quad (2.14)$$

ПРИМЕР выполнения задачи 2.

На короткую чугунную опору действуют растягивающие и сжимающие нагрузки (рис. 2.2).

Требуется:

- 1) определить опорную реакцию;
- 2) построить эпюру внутренних продольных сил;
- 3) из расчета на прочность определить для каждого участка конструкции необходимый размер поперечного сечения заданной формы (круглая, квадратная), округлив его до стандартного значения (кратного 2 мм или 5 мм);
- 4) начертить в выбранном масштабе эскиз опоры;
- 5) найти на каждом участке напряжения и построить эпюру напряжений;
- 6) найти на каждом участке абсолютные продольные деформации и построить эпюру перемещений;
- 7) для заданного участка вычислить абсолютную поперечную деформацию.

Дано: $F = 60 \text{ кН}$, $q = 12 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$, $[\sigma_p] = 46 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 98 \text{ МПа}$, $E = 1,7 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,22$, поперечное сечение – квадратное, номер участка для определения деформации – 3.

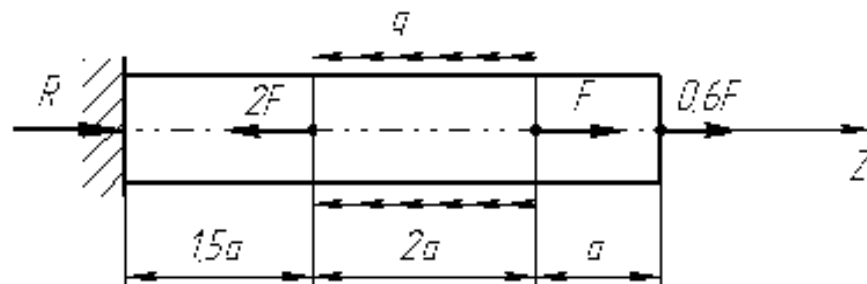


Рис. 2.2. Расчётная схема к задаче 2

Решение:

1) Определим реакцию в опоре R (рис. 2.2). Направление реакции принимаем произвольно. Составляем уравнение проекций всех сил, действующих на балку, включая опорную реакцию, на продольную ось балки – ось «z»

$$\underline{\sum F_z = 0;}$$

$$R - 2F - q \cdot 2a + F + 0,6F = 0,$$

откуда $R = 0,4F + q \cdot 2a = 0,4 \cdot 60 + 12 \cdot 2 = 48 \text{ кН}$.

Положительное значение реакции указывает на то, что её направление совпадает с принятым на чертеже.

2) Построим эпюру продольных сил. Для этого воспользуемся методом сечений.

Рассмотрим силовые участки, начиная справа. На каждом участке проводим секущую плоскость и рассматриваем равновесие одной из частей стержня. Продольная сила N положительна, если она растягивает отсеченную часть стержня.

1 участок $0 \leq z \leq 1,5a$, рассматриваем левую часть (рис. 2.3). Продольную силу всегда направляем от сечения, в данном случае вправо.

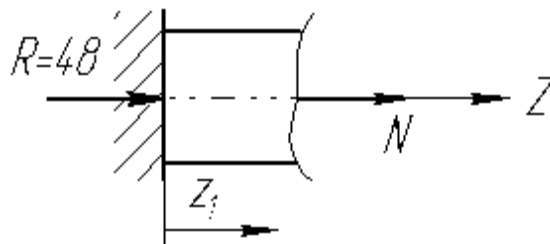


Рис. 2.3. К расчету первого участка

$$\underline{\sum F_z = 0;}$$

$$R + N = 0,$$

откуда $N = -R = -48 \text{ кН}$.

2 участок $0 \leq z_2 \leq 2a$, рассматриваем равновесие правой части (рис. 2.4). Растягивающая нормальная сила направлена влево.

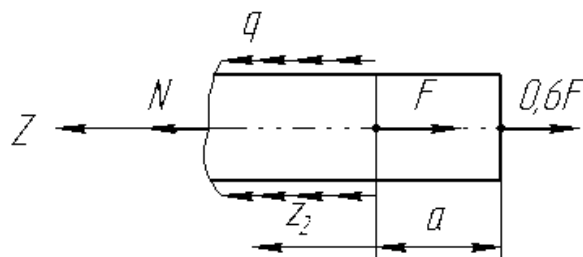


Рис. 2.4. К расчету второго участка

$$\underline{\sum F_z = 0;}$$

$$-N - q \cdot z_2 + F + 0,6F = 0,$$

$$\text{откуда } N = -q \cdot z_2 + 1,6F$$

$$\text{При } z_2 = 0, \quad N = 1,6F = 96 \text{ кН};$$

$$\text{При } z_2 = 2a, \quad N = -q \cdot 2a + 1,6F = -12 \cdot 2 + 1,6 \cdot 60 = 72 \text{ кН}$$

3 участок $0 \leq z_3 \leq a$, рассматриваем равновесие правой части (рис. 2.5).

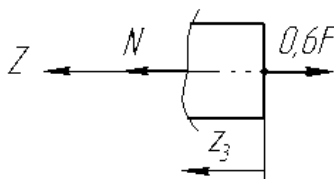


Рис. 2.5. К расчету третьего участка

$$\underline{\sum F_z = 0;}$$

$$-N + 0,6F = 0,$$

$$\text{откуда } N = 0,6F = 36 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рис. 2.6).

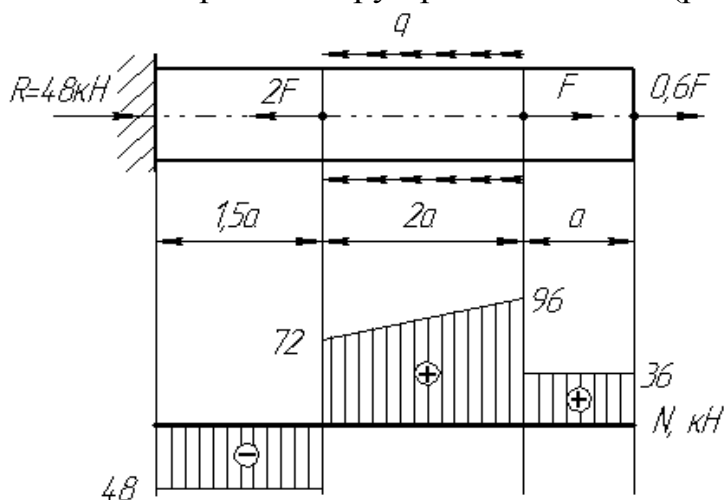


Рис. 2.6. Эпюра продольных сил

Выполняем проверку правильности построения эпюры. На участке с равномерно распределённой нагрузкой эпюра имеет вид наклонной прямой, на участках без распределённой нагрузки – горизонтальной прямой. В сечениях, где приложена сосредоточенная сила (или опорная реакция), эпюра имеет скачок на величину этой силы. Например, на границе 1-го и 2-го участков приложена сила $2F=120$ кН. На эпюре в этом сечении скачок равен: $72 - (-48)=120$. Остальные скачки равны, соответственно, $R=48$ кН; $F=60$ кН; $0,6F = 36$ кН.

3) Из расчета на прочность при растяжении-сжатии определим для каждого участка конструкции необходимую площадь поперечного сечения и запроектируем сечение заданной формы. В нашем случае задано квадратное поперечное сечение.

Рассмотрим первый участок. Продольная сила N – отрицательная. Значит, на этом участке в сечениях возникают сжимающие напряжения. Требуемая площадь сечения для первого участка:

$$A_{TP1} = \frac{|N_1|}{[\sigma_C]} = \frac{48 \cdot 10^3 \text{ Н}}{98 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 4,9 \text{ см}^2.$$

С другой стороны, площадь квадрата определяется формулой $A = a^2$.

Тогда $a_1 = \sqrt{A_{TP1}} = \sqrt{4,9} = 2,21 \text{ см}$; принимаем $a_1 = 22 \text{ мм}$.

Рассмотрим второй и третий участки. Продольная сила N – положительная. Значит, в сечениях этих участков действуют растягивающие напряжения. Требуемая площадь для второго участка (берем максимальное значение продольной силы):

$$A_{TP2} = \frac{N_2}{[\sigma_P]} = \frac{96 \cdot 10^3 \text{ Н}}{46 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 20,87 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 20,87 \text{ см}^2$$

$a_2 = \sqrt{A_{TP2}} = \sqrt{20,87} = 4,57 \text{ см}$; принимаем $a_2 = 46 \text{ мм}$.

Требуемая площадь для третьего участка:

$$A_{TP3} = \frac{N_3}{[\sigma_P]} = \frac{36 \cdot 10^3}{46 \cdot 10^6} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,8 \text{ см}^2$$

$a_3 = \sqrt{A_{TP3}} = \sqrt{7,8} = 2,79 \text{ см}$; принимаем $a_3 = 28 \text{ мм}$.

4). Построим в выбранном масштабе эскиз опоры (рис. 2.7):

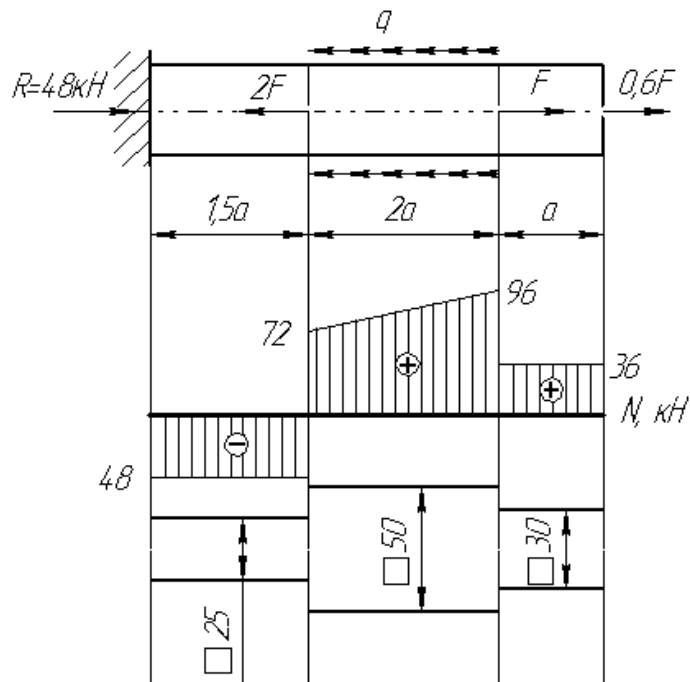


Рис. 2.7. Построение эскиза опоры

Пересчитаем фактическую площадь на участках:

$$A_{\phi 1} = a_1^2 = 2,2^2 = 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$A_{\phi 2} = a_2^2 = 4,6^2 = 21,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$A_{\phi 3} = a_3^2 = 2,8^2 = 7,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

5) Определим нормальные напряжения на участках. Учитываем знак продольной силы. Если эпюра имеет вид наклонной прямой, то напряжения определяем дважды: в начале и в конце этого участка. Проверяем условие прочности, сравнивая полученные напряжения с допускаемыми при растяжении и сжатии. Сечение считается запроектированным оптимально, если отклонение от допускаемого напряжения составляет по модулю не более 5%.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_{\phi 1}} = \frac{-48 \cdot 10^3}{4,84 \cdot 10^{-4}} = -99,2 \text{ МПа}, \quad |\sigma_1| > [\sigma_c] = 98 \text{ МПа}, \quad \text{вычисляем}$$

перенапряжение:

$$\sigma\% = \frac{|\sigma_1| - [\sigma_c]}{[\sigma_c]} \cdot 100\% = \frac{99,2 - 98}{98} \cdot 100\% = 1,2\% < 5\%, \text{ прочность достаточная.}$$

$$\sigma_2^H = \frac{N_2}{A_{\phi 2}} = \frac{72 \cdot 10^3}{21,16 \cdot 10^{-4}} = 34,03 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 46 \text{ МПа}, \text{ сечение в начале участка}$$

работает с большим запасом прочности. Это объясняется тем, что требуемая

площадь сечения определялась, исходя из максимальной продольной силы, действующей в конце этого участка.

$$\sigma_2^{\kappa} = \frac{N_2}{A_{\phi_2}} = \frac{96 \cdot 10^3}{21,16 \cdot 10^{-4}} = 45,4 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 46 \text{ МПа}, \quad \text{условие прочности}$$

выполняется.

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_{\phi_3}} = \frac{36 \cdot 10^3}{7,84 \cdot 10^{-4}} = 45,9 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 46 \text{ МПа}, \quad \text{условие прочности}$$

выполняется.

Вывод: все сечения запроектированы правильно.

Построим эпюру напряжений (рис. 2.8).

б) Вычислим абсолютные продольные деформации по формуле (2.4):

$$\Delta l_i = \int \frac{N_i}{EA_i} dz$$

$$\Delta l_1 = \int_0^{1,5a} \frac{-48}{EA_{\phi_1}} dz = \left. \frac{-48z}{EA_{\phi_1}} \right|_0^{1,5a} = \frac{-48 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 1}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 4,84 \cdot 10^{-4}} = -8,75 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{2a} \frac{-qz + 1,6F}{EA_{\phi_2}} dz = \left. \frac{-q \frac{z^2}{2} + 1,6Fz}{EA_{\phi_2}} \right|_0^{2a} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot \frac{(2 \cdot 1)^2}{2} + 1,6 \cdot 60 \cdot 10^3}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 21,16 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \int_0^a \frac{36}{EA_{\phi_3}} dz = \left. \frac{36z}{EA_{\phi_3}} \right|_0^a = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 1}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 7,84 \cdot 10^{-4}} = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Рассчитаем смещения границ участков и построим эпюру перемещений (рис. 2.8):

$$\lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta l_1 = -8,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta l_2 = (-8,75 + 2) \cdot 10^{-4} = -6,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta l_3 = (-6,75 + 2,7) \cdot 10^{-4} = -4,05 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Все перемещения получились отрицательными, значит, стержень укоротился.

Определим абсолютную поперечную деформацию на участке 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{2,7 \cdot 10^{-4}}{a} = 2,7 \cdot 10^{-4}$$

Относительная поперечная деформация равна:

$$\varepsilon'_3 = -\mu \cdot \varepsilon_3 = -0,22 \cdot 2,7 \cdot 10^{-4} = -0,594 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta d = \varepsilon'_3 \cdot a_3 = -0,594 \cdot 10^{-4} \cdot 28 \text{ мм} = -16,63 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

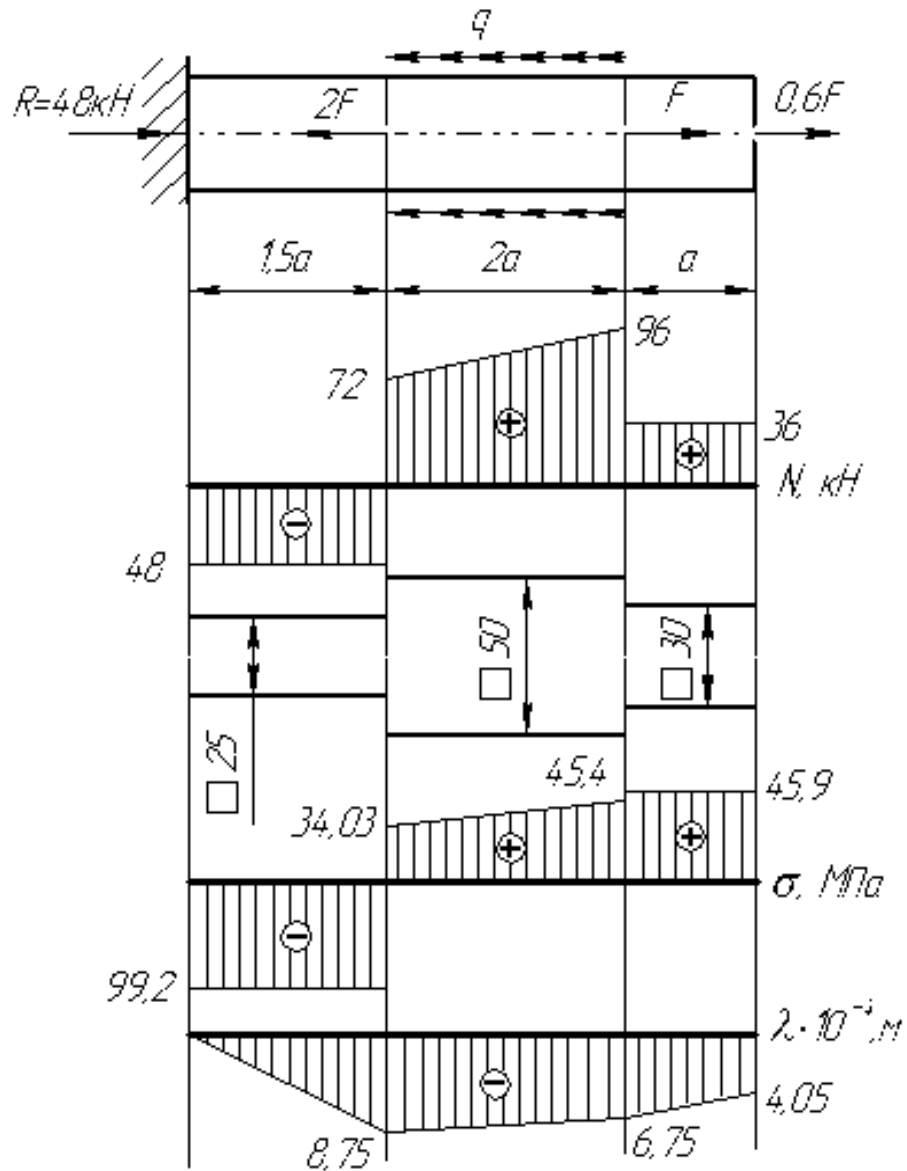


Рис. 2.8. Построение эпюры нормальных напряжений и эпюры прогибов

§ 3. Кручение стержня круглого поперечного сечения.

Основные определения и расчётные формулы

Кручением называют такой вид деформации тела, при котором в любом поперечном сечении возникает только одно внутреннее усилие – крутящий момент. Чтобы создать в теле крутящий момент, нужно приложить к нему пару поперечных противоположно направленных сил, так, чтобы они не пересекали ось тела. График изменения крутящих моментов по длине тела называют эпюрой крутящих моментов.

При кручении тела в его поперечных сечениях возникают напряжения, векторы которых лежат в плоскости сечения. Эти напряжения называют касательными напряжениями и обозначают τ (читается «тау»). Касательные напряжения в круглом поперечном сечении распределены по площади сечения не равномерно, а по линейному закону, описываемому выражением:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \cdot \rho \quad (3.1)$$

Здесь $M_{кр}$ – крутящий момент, ρ – расстояние от центра круга до рассматриваемой точки сечения, τ_{ρ} – касательное напряжение в этой точке, I_{ρ} – полярный момент инерции поперечного сечения.

Для круглого сечения:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad (3.2)$$

Согласно формуле (3.1), наибольшие по абсолютной величине касательные напряжения возникают по периметру сечения, при $\rho_{\max} = d/2$, и равны они

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho} / \rho_{\max}} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \quad (3.3)$$

В последнем выражении W_{ρ} – полярный момент сопротивления круглого сечения (читается «дубль вэ ро»).

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \quad (3.4)$$

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau] \quad (3.5)$$

Допускаемое касательное напряжение зависит от материала и обычно принимается $0,5 \dots 0,6 [\sigma]$, т.е. примерно в два раза меньше допускаемого нормального напряжения для данного материала.

При кручении тела его поперечные сечения поворачиваются на некоторый угол φ , называемый углом закручивания:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{GI_{\rho}}, \quad (3.6)$$

где l – длина участка, на котором действует крутящий момент, GI_{ρ} – жёсткость поперечного сечения при кручении. Угол закручивания, приходящийся на единичную длину участка, называют относительным углом закручивания и обозначают Θ (читается «тэта»). Условие жёсткости при кручении имеет вид:

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}} \leq [\Theta] \quad (3.7)$$

Наименьший диаметр вала, определяемый из условия прочности (3.5), равен:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}}, \quad (3.8)$$

а из условия жесткости при кручении (3.7), равен:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi[\Theta]}}. \quad (3.9)$$

ПРИМЕР выполнения задачи 3.

К стальному валу (рис. 3.1) приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 . Требуется:

- 1) Установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю $\varphi_e = 0$;
- 2) Для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) При заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до стандартного значения (кратного 5 мм);
- 4) Построить эпюру углов закручивания;
- 5) Найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Дано: $a = 1,5\text{ м}$, $b = 2,5\text{ м}$, $c = 1\text{ м}$, $d = 2\text{ м}$, $M_1 = 2\text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_2 = 3\text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_3 = 1\text{ кН} \cdot \text{м}$, $[\tau] = 70\text{ МПа}$, модуль упругости второго рода (модуль сдвига) $G = 0,8 \cdot 10^5\text{ МПа}$.

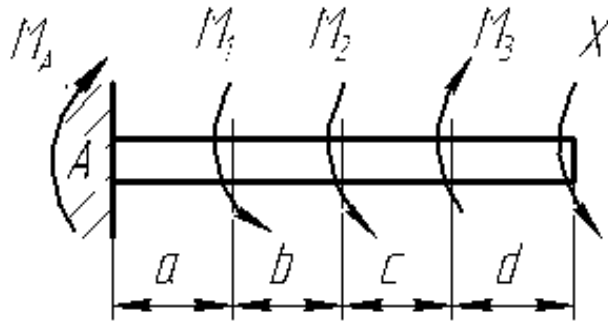


Рис. 3.1. Расчетная схема к задаче 3

Решение:

1) Из условия задачи известно, что $\varphi_e = 0$. В соответствии с принципом независимости действия сил имеем:

$$\varphi_e = \varphi_e^{M_1} + \varphi_e^{M_2} + \varphi_e^{M_3} + \varphi_e^X = 0.$$

Углы закручивания вычисляем по формуле (3.6).

Правило знаков: крутящий момент будем считать положительным, если он вращает рассматриваемую часть вала по часовой стрелке. Каждый из внешних моментов закручивает только ту часть вала, которая расположена между ним и заделкой. При этом правая часть (в том числе и рассматриваемое сечение) поворачивается на такой же угол, что и сечение, в котором приложен внешний крутящий момент.

Имеем:

$$\varphi_b^{M_1} = -\frac{M_1 \cdot a}{GJ_\rho} - \frac{M_2 \cdot (a+b)}{GJ_\rho} + \frac{M_3 \cdot (a+b+c)}{GJ_\rho} - \frac{X \cdot (a+b+c+d)}{GJ_\rho} = 0,$$

Подставим значения:

$$\frac{-2 \cdot 1,5 - 3 \cdot (1,5 + 2,5) + 1 \cdot (1,5 + 2,5 + 1) - X \cdot (1,5 + 2,5 + 1 + 2)}{GJ_\rho} = 0.$$

Откуда $X = -1,43\text{ кН} \cdot \text{м}$.

2) Вычислим значение крутящих моментов на участках вала и построим эпюру крутящих моментов:

Из условия равновесия найдем опорную реакцию M_A в заделке (рис. 6.2):

$$\sum M_A = 0; \quad M_A - M_1 - M_2 + M_3 - X = 0, \text{ откуда}$$

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 + X = 2 + 3 - 1 - 1,43 = 2,57 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Рассмотрим первый участок: $0 \leq z_1 \leq a$

$$M_{кр}^{a-b} = -M_A = -2,57 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим второй участок: $0 \leq z_2 \leq b$

$$M_{кр}^{b-c} = -M_A + M_1 = -2,57 + 2 = -0,57 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим третий участок: $0 \leq z_3 \leq c$

$$M_{кр}^{c-d} = -M_A + M_1 + M_2 = -2,57 + 2 + 3 = 2,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим четвертый участок: $0 \leq z_4 \leq d$

$$M_{кр}^{d-e} = -M_A + M_1 + M_2 - M_3 = -2,57 + 2 + 3 - 1 = 1,43 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3) Находим диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр.\max}|}{W_\rho} \leq [\tau], \text{ где } W_\rho = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \text{ Откуда}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр.\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,57}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0,057 \text{ м} = 57 \text{ мм}.$$

Принимаем $D = 60 \text{ мм}$, кратно 5 мм.

Крутильная жесткость вала:

$$GJ_\rho = 0,8 \cdot 10^8 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,06^4}{32} = 127,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

где $J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$ – полярный момент инерции.

4) Определяем углы закручивания сечений a, b, c, d, e и строим эпюру φ (рис. 6.2).

Угол закручивания сечения φ_a равен нулю, так как находится в заделке.

$$\varphi_{a-b} = \frac{M_{кр}^{a-b} \cdot a}{GJ_{\rho}} = \frac{-2,57 \cdot 1,5}{127,2} = -0,0303 \text{ рад},$$

$$\varphi_{b-c} = \frac{M_{кр}^{b-c} \cdot b}{GJ_{\rho}} = \frac{-0,57 \cdot 2,5}{127,2} = -0,0112 \text{ рад},$$

$$\varphi_{c-d} = \frac{M_{кр}^{c-d} \cdot c}{GJ_{\rho}} = \frac{2,43 \cdot 1}{127,2} = 0,0191 \text{ рад},$$

$$\varphi_{d-e} = \frac{M_{кр}^{d-e} \cdot d}{GJ_{\rho}} = \frac{1,43 \cdot 2}{127,2} = 0,0225 \text{ рад}.$$

Вычисляем углы закручивания границ участков:

$$\varphi_b = \varphi_a + \varphi_{a-b} = 0 - 0,0303 = -0,0303 \text{ рад},$$

$$\varphi_c = \varphi_b + \varphi_{b-c} = -0,0303 - 0,0112 = -0,0415 \text{ рад},$$

$$\varphi_d = \varphi_c + \varphi_{c-d} = -0,0415 - 0,0191 = -0,0224 \text{ рад},$$

$\varphi_e = \varphi_d + \varphi_{d-e} = -0,0224 + 0,0225 = -0,0001 \text{ рад} \approx 0$, что и требовалось по условию задачи.

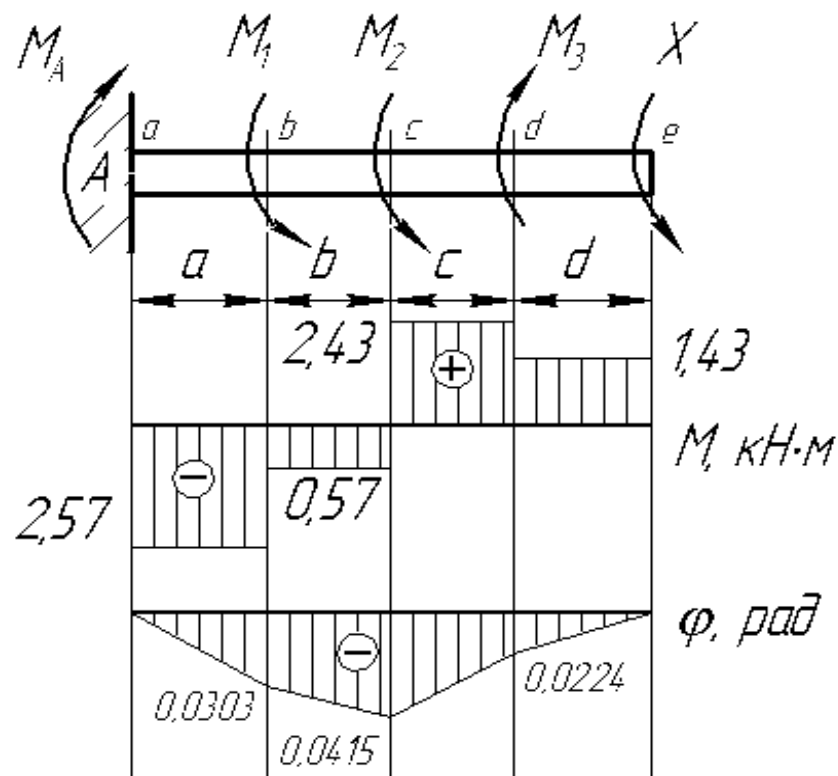


Рис. 3.2. Построение эпюры крутящих моментов и углов закручивания

5) Наибольший относительный угол закручивания будет на первом участке:

$$\theta_{\max} = \frac{|M_{кр.\max}|}{GJ_{\rho}} = \frac{2,57}{127,2} = 0,0202 \text{ рад/м.}$$

§ 4. Прямой поперечный изгиб.

Основные определения, зависимости и расчётные формулы

Прямой поперечный изгиб относится к наиболее часто встречающемуся случаю изгиба. При этом виде деформации в поперечных сечениях прямого стержня возникают два внутренних усилия – изгибающий момент и поперечная сила. Чтобы в теле возник прямой поперечный изгиб, необходимо, чтобы все внешние нагрузки были приложены в одной плоскости, совпадающей с осью тела и одной из главных осей сечения: X или Y .

Поперечная сила в сечении равна геометрической сумме проекций всех внешних нагрузок и опорных реакций, приложенных к телу по одну сторону от рассматриваемого сечения, на одну из главных осей сечения X или Y , соответственно Q_x или Q_y (читается «кю икс» или «кю игрек»). Поперечная сила считается положительной, если она вращает отсечённую (рассматриваемую) часть тела по часовой стрелке. Поперечная сила имеет синоним «перерезывающая сила».

Изгибающий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов всех внешних нагрузок и опорных реакций, приложенных к телу по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно одной из главных осей сечения X или Y , соответственно M_x или M_y . Изгибающий момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна в балках и правые в стойках. Эпюра изгибающих моментов в строительных конструкциях строится со стороны растянутых волокон. Это объясняется тем, что наиболее широко используемый в строительстве материал – бетон практически не работает на растяжение. Эпюра моментов показывает, где расположены опасные зоны работы бетона, т.е. на каких участках рассматриваемого элемента требуется устанавливать армирование,

Из курса теоретической механики известно, что момент силы равен произведению величины силы на плечо, где плечо – длина перпендикуляра, отложенного из моментной точки на линию действия силы. В случае распределённой нагрузки, она должна быть вначале заменена на равнодействующую силу, а затем умножена на плечо.

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки существуют дифференциальные зависимости, открытые русским ученым XIX века Д. И Журавским:

$$Q = \frac{dM}{dz} \quad q = \frac{dQ}{dz} \quad q = \frac{d^2M}{dz^2} \quad (4.1)$$

Первая из этих зависимостей означает, что поперечная сила на участке равна первой производной функции изгибающего момента на этом участке, вторая – что интенсивность распределенной нагрузки на участке равна первой производной поперечной силы, либо (третья зависимость) второй производной изгибающего момента на этом участке.

Знание дифференциальных зависимостей позволяет выполнять проверку правильности построения эпюр M и Q при прямом поперечном изгибе.

1. Если на участке не приложена распределённая нагрузка, то эпюра Q имеет вид горизонтальной прямой, а эпюра M – наклонная прямая.
2. Если на участке действует равномерно распределённая нагрузка $q = \text{const}$, то эпюра Q имеет вид наклонной прямой, а эпюра M – квадратная парабола, обращенная выпуклостью в сторону действия нагрузки.
3. Если на участке с распределённой нагрузкой поперечная сила меняет знак, то эпюра моментов в этом сечении имеет экстремум.
4. Площадь эпюры поперечной силы на участке равна приращению функции момента на этом участке.
5. Если поперечная сила на участке положительна, то линия, изображающая эпюру моментов, слева направо возрастает, т. е. идёт вниз.
6. Если в каком-либо сечении приложена сосредоточенная сила, то эпюра поперечной силы в этом сечении имеет скачок на величину силы, а эпюра моментов – излом в сторону действия силы.
7. Если в каком-либо сечении приложен сосредоточенный момент, то эпюра моментов в этом сечении имеет скачок на величину момента; на эпюре поперечной силы – без изменений.

От действия изгибающего момента в поперечном сечении возникают нормальные напряжения, распределённые по высоте сечения неравномерно. Наибольшие по величине нормальные напряжения действуют в так называемых фибровых волокнах, т.е. наиболее удалённых от изогнутой оси.

Распределение напряжений σ в поперечном сечении от действия момента M_x описывается формулой:

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (4.2)$$

Здесь y – координата точки, относительно которой определяют нормальное напряжение. При $y=0$ (т.е. на оси X сечения) нормальные напряжения не возникают. Ось X при этом называют нейтральной осью сечения. Напряжения в фибровых волокнах, т.е. при y_{\max} , будут равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{I_x / y_{\max}} = \frac{M_x}{W_x} \quad (4.3)$$

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4.4)$$

В последних формулах I_x – момент инерции сечения, W_x – осевой момент сопротивления сечения относительно его главной оси X .

Поперечная сила вызывает в сечении появление касательных напряжений. Эти напряжения распределены по площади сечения неравномерно, в соответствии с зависимостью:

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{omc}}{I_x b_y} \quad (4.5)$$

Эта формула носит название теоремы Журавского. В ней участвуют характеристики: τ_y – касательное напряжение в точке сечения с координатой « y », S_x^{omc} – статический момент части площади, расположенной выше (или) ниже точки, в которой определяют напряжение: $S_x^{omc} = A^{omc} \cdot y_c^{omc}$, т.е. произведение этой отсеченной площади на координату её центра тяжести; b_y – ширина сечения на уровне рассматриваемой точки. Наибольшее по величине касательное напряжение от поперечной силы Q_y возникает на оси X , там, где нормальное напряжение $\sigma_y = 0$; и наоборот, в фибровых волокнах, где $\sigma_y = \sigma_{\max}$, касательные напряжения равны нулю. Это следует из того, что на нейтральной оси X статический момент максимален, так как рассматривается половина сечения, а в фибровых волокнах он равен нулю, из-за того, что выше этих волокон площади сечения нет.

В курсе технической механики мы будем изучать расчет статически определимых балок. Статически определимая балка имеет три связи, минимально необходимые для обеспечения её геометрической неизменяемости. Это может быть жёсткая заделка, закрепляющая один конец балки (в этом случае балка называется консолью), или две опоры: шарнирно-неподвижная и шарнирно подвижная. Балка на двух опорах может иметь одну или две консоли

(свисающие части), или быть бесконсольной. Расстояние между опорами называется *пролетом балки*, а длина свисающей части – *вылетом консоли*. Опорные реакции определяют из уравнений равновесия.

ПРИМЕР выполнения задачи 4

Для заданных двух схем балок: (рис 4.1а) консольной балки и (рис. 4.1б) балки на двух опорах требуется:

1. Построить эпюры Q_y и M_x ; если необходимо, найти максимальный момент M_{\max} ;
2. Для схемы а): подобрать деревянную балку круглого поперечного сечения;
3. Для схемы б):
 - из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе определить требуемый осевой момент сопротивления поперечного сечения W_x ;
 - запроектировать сечение балки: а) круглое диаметром d ; б) квадратное $a \times a$; в) прямоугольное с соотношением сторон h/b ; г) двух швеллеров; д) двутавровое; е) кольцевое с соотношением диаметров d/D
 - Составить сравнительную таблицу подобранных сечений. Сделать вывод об их экономической эффективности;
 - Для двутаврового сечения выполнить проверку прочности в опасном сечении по III гипотезе прочности.

Дано: $P = 10 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 5 \text{ кН/м}$, $l_1 = 3 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$, $\frac{a_1}{a} = 2$,

$\frac{a_2}{a} = 6$, $\frac{a_3}{a} = 5$, принять для древесины $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$, для стали $[\sigma] = 178 \text{ МПа}$,

для прямоугольного сечения $\frac{h}{b} = 1,5$, для кольцевого сечения $\frac{d}{D} = 0,8$.

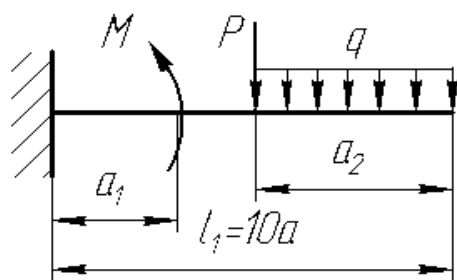


схема к задаче 2а)

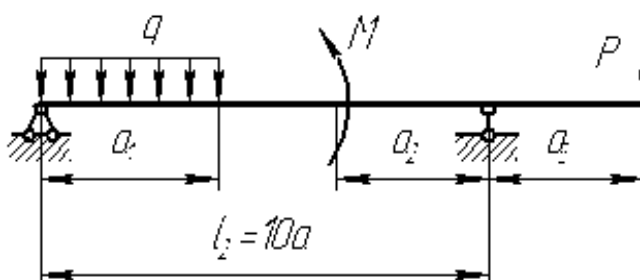


схема к задаче 2б)

Рис. 4.1. Расчетные схемы к задаче 4

Задача 4а.

Решение:

$l_1 = 3\text{ м} = 10a$, следовательно $a = 0,3\text{ м}$. При этом $a_1 = 2a = 0,6\text{ м}$, $a_2 = 6a = 1,8\text{ м}$.

Расчётная схема примет вид (рис. 4.2):

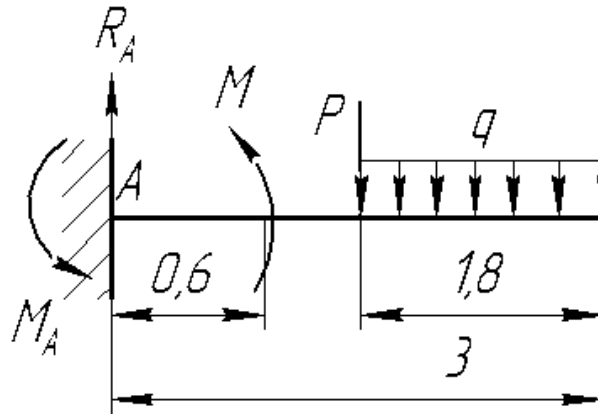


Рис. 4.2. Расчетная схема консольной балки

- 1) Определим реакции в опоре. Так как продольных сил в балке нет, то из трёх возможных для плоской задачи реакций в заделке остаются две (рис. 4.2):

$$\underline{\sum F_Y = 0:}$$

(положительными считаем силы, направленные вверх)

$$R_A - q \cdot 1,8 - P = 0; \text{ отсюда}$$

$$R_A = 1,8q + P = 1,8 \cdot 5 + 10 = 19 \text{ кН};$$

$$\underline{\sum M_A = 0;}$$

(положительными считаем моменты, направленные по часовой стрелке)

$$-M_A + q \cdot 1,8 \cdot \left(1,2 + \frac{1,8}{2}\right) + P \cdot 1,2 - M = 0, \text{ отсюда}$$

$$M_A = q \cdot 1,8 \cdot \left(1,2 + \frac{1,8}{2}\right) + P \cdot 1,2 - M = 5 \cdot 1,8 \cdot \left(1,2 + \frac{1,8}{2}\right) + 10 \cdot 1,2 - 20 = 10,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2) Построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил на участках балки. Разобьем балку на грузовые участки. Границей участка считается начало и конец балки, места приложения сосредоточенных сил или моментов (включая опорные реакции), а также начало или конец распределённой нагрузки. Балка на рисунке 4.1(а) имеет три участка, а на рисунке 4.1(б) – четыре участка.

Рассмотрим 1 участок, начиная слева. В пределах участка проводим секущую плоскость и отбрасываем правую часть балки (рис. 4.3). Со стороны отброшенной части прикладываем поперечную силу и изгибающий момент, в соответствии с правилом знаков, указанным выше (смотри §4). Изгибающий момент растягивает нижние волокна, а поперечная сила вращает по часовой стрелке. На первом участке координата секущей плоскости изменяется в пределах: $0 \leq z_1 \leq 0,6$ м.

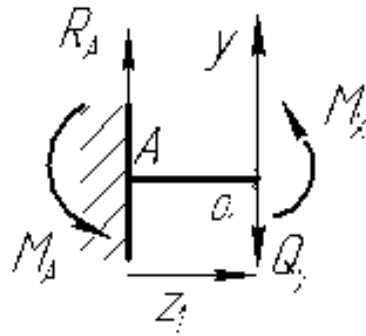


Рис. 4.3. К расчёту первого участка

$$\underline{\sum F_Y = 0;}$$

$$-Q_y + R_A = 0, \text{ откуда } Q_y = R_A = 19 \text{ кН.}$$

Эпюрой Q_y будет прямая горизонтальная линия.

Уравнение моментов составляем относительно рассматриваемого сечения (т. O_1):

$$\underline{\sum M_{O_1} = 0;}$$

$$-M_A + M_X + R_A \cdot z_1 = 0, \text{ откуда}$$

$$M_X = R_A \cdot z_1 - M_A = 19z_1 - 10,9; \text{ график изобразится наклонной прямой.}$$

Находим значение момента в начале и в конце участка:

$$M_X(0) = 19 \cdot 0 - 10,9 = -10,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Строим эпюры на первом участке.

Рассмотрим 2 участок.

Заходим слева (рис. 4.4): $0 \leq z_2 \leq 0,6$.

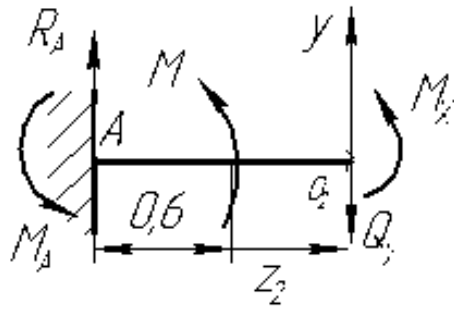


Рис. 4.4. К расчёту второго участка

$$\underline{\sum F_Y = 0};$$

$$-Q_y + R_A = 0; \quad \text{получим} \quad Q_y = R_A = 19 \text{ кН}.$$

Эпюрой будет – прямая линия.

$$\sum M_{O_2} = 0;$$

$$-M_A - M_X - M + R_A \cdot (0,6 + z_2) = 0,$$

откуда

$$M_X = R_A \cdot (z_1 + 0,6) - M_A - M = 19z_1 - 19,5;$$

$$M_X = [-19,5; -8,1] \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюрой будет наклонная прямая.

Рассмотрим 3 участок, заходим справа (рис. 4.5): $0 \leq z_3 \leq 1,8$.

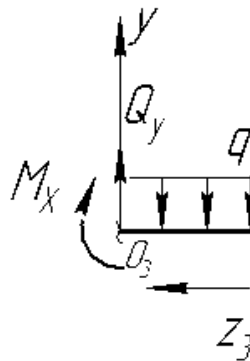


Рис. 4.5. К расчёту третьего участка

$$\underline{\sum F_Y = 0};$$

$$Q_y - q \cdot z_3 = 0; \quad \text{откуда} \quad Q_y = q \cdot z_3 = 5z_3, \quad Q_y = [0; 9] \text{ кН}.$$

Эпюрой будет наклонная прямая.

$$\sum M_{O_3} = 0; \quad -M_X - \frac{q \cdot z_3^2}{2} = 0, \quad \text{откуда}$$

$$M_x = -\frac{q \cdot z_3^2}{2} = -\frac{5 \cdot z_3^2}{2}, \quad M_x = [0; -8,1] \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюрой будет квадратная парабола.

По полученным данным строим эпюру поперечных сил и эпюру моментов (рис. 4.6).

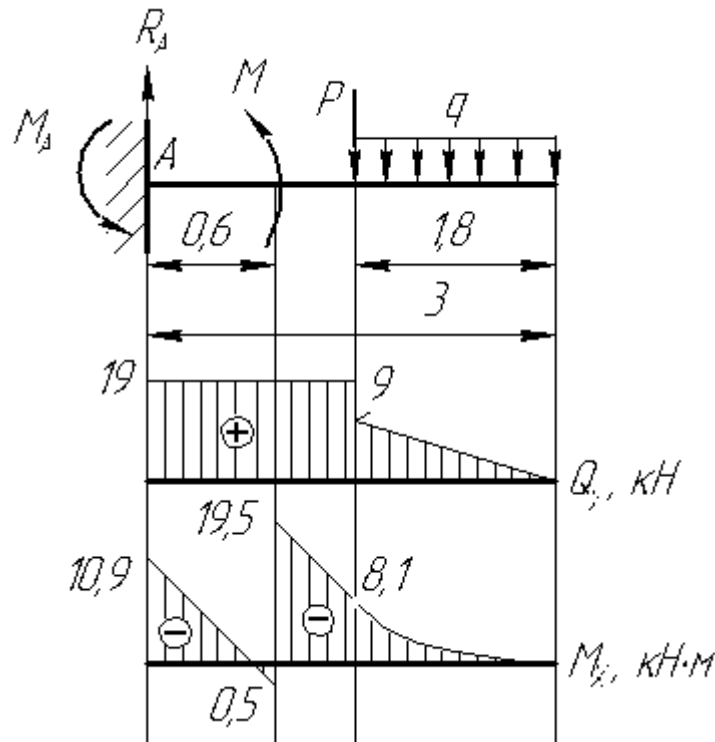


Рис. 4.6. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Выполним проверку построенных эпюр. На участке с равномерно распределённой нагрузкой эпюра поперечных сил имеет вид наклонной прямой, эпюра моментов – квадратная парабола, выгнутая в сторону действия распределённой нагрузки. На участке без q поперечная сила постоянна, изгибающий момент имеет вид наклонной прямой. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы P и R_A – скачок на величину этих сил. На эпюре моментов скачки в сечениях, где приложены моменты M и M_A . Для определения диаметра деревянного бруса используем условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}.$$

Для круглого сечения $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$. Подставляя это значение в условие прочности, получим:

$$\frac{32M_{\max}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

Отсюда находим, что $d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 19,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,2709 \text{ м}$.

Принимаем $d = 270 \text{ мм}$.

Задача 4б.

Исходные данные:

$$P = 10 \text{ кН}, \quad M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad q = 5 \text{ кН/м}, \quad l_1 = 3 \text{ м}, \quad l_2 = 4 \text{ м}, \quad \frac{a_1}{a} = 2, \quad \frac{a_2}{a} = 6, \\ \frac{a_3}{a} = 5, \quad [\sigma]_b = 178 \text{ МПа}, \quad \frac{h}{b} = 1,5, \quad \frac{d}{D} = 0,8.$$

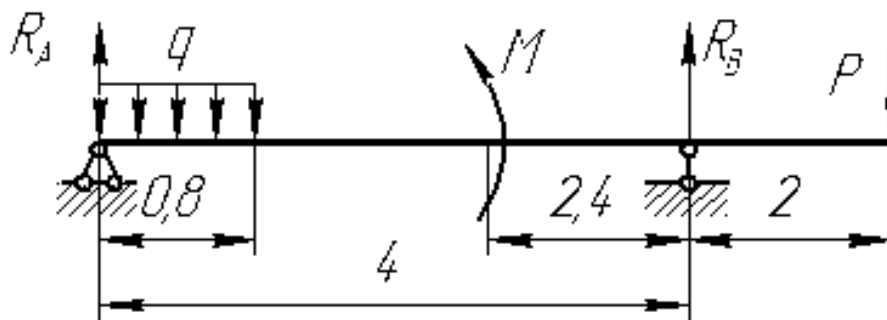


Рис. 4.7. Расчётная схема балки на двух опорах

Решение:

На рисунке изображена статически определимая балка, $l_2 = 4 \text{ м} = 10a$, следовательно $a = a_1 = 0,8 \text{ м}$. При этом $a_2 = 6a = 2,4 \text{ м}$, $a_3 = 5a = 2 \text{ м}$. Балка имеет четыре грузовых участка (рис. 4.7).

1. Определим реакции в опорах:

$$\underline{\sum M_A = 0;}$$

$$-P \cdot 6 + R_B \cdot 4 + M - q \cdot \frac{0,8^2}{2} = 0,$$

$$\text{откуда } R_B = \frac{P \cdot 6 - M + q \cdot \frac{0,8^2}{2}}{4} = \frac{10 \cdot 6 - 20 + 5 \cdot \frac{0,8^2}{2}}{4} = 10,4 \text{ кН}.$$

$$\underline{\sum M_B = 0;}$$

$$-P \cdot 2 - R_A \cdot 4 + M + q \cdot 0,8 \cdot \left(4 - \frac{0,8}{2}\right) = 0,$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{-P \cdot 2 + M + q \cdot 0,8 \cdot \left(4 - \frac{0,8}{2}\right)}{4} = \frac{-10 \cdot 2 + 20 + 5 \cdot 0,8 \cdot \left(4 - \frac{0,8}{2}\right)}{4} = 3,6 \text{ кН}.$$

Проверка опорных реакций:

$$\sum F_Y = 0;$$

$$R_A - q \cdot 0,8 + R_B - P = 0;$$

$$3,6 - 5 \cdot 0,8 + 10,4 - 10 = 0$$

Условие проверки выполнено, реакции найдены верно.

2. Разобьем балку на грузовые участки и зайдем слева (рис. 4.8).

Рассмотрим 1 участок: $0 \leq z_1 \leq 0,8$.

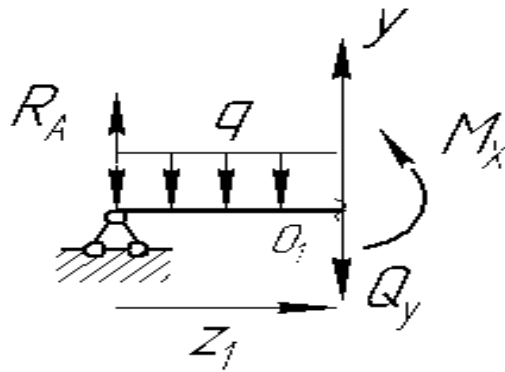


Рис. 4.8. К расчёту первого участка

$$\sum F_Y = 0;$$

$$R_A - Q_y - qz_1 = 0;$$

$$\text{откуда } Q_y = R_A - qz_1 = 3,6 - 5z_1; \quad Q_y = [3,6; -0,4] \text{ кН}.$$

Функция Q зависит от z , эпюрой будет наклонная прямая линия.

Кроме того, эпюра поменяла знак. Найдем значение z_1 , при котором происходит смена знака, т.е. точку экстремума функции:

$$Q_y = 0,$$

$$Q_y = 3,6 - 5z_1 = 0, \text{ тогда } z_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,6}{5} = 0,72 \text{ м}.$$

$$\sum M_{o_1} = 0;$$

$$M_x + \frac{q \cdot z_1^2}{2} - R_A \cdot z_1 = 0,$$

$$\text{откуда } M_x = R_A \cdot z_1 - \frac{q \cdot z_1^2}{2} = 3,6z_1 - \frac{5z_1^2}{2}.$$

$M_x = [0; 1,28]$ кН·м Эпюрой будет квадратная парабола.

Найдем максимальное значение изгибающего момента при $z_1 = 0,72$ м :

$$M_x(0,72) = 3,6 \cdot 0,72 - \frac{5 \cdot 0,72^2}{2} = 1,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим 2 участок; зайдём справа (рис. 4.9): $0 \leq z_2 \leq 0,8$.

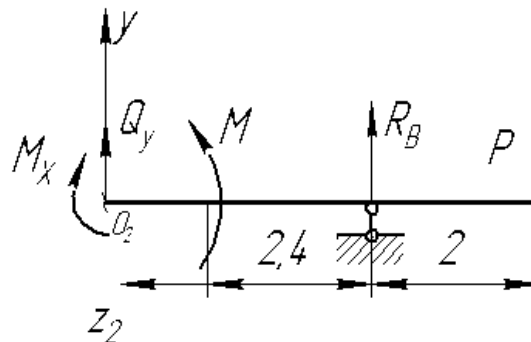


Рис. 4.9. К расчёту второго участка

$$\sum F_Y = 0;$$

$$Q_y + R_B - P = 0;$$

откуда $Q = P - R_B = 10 - 10,4 = -0,4$ кН. Эпюра – прямая линия.

$$\sum M_{O_2} = 0;$$

$$-M_x + M + R_B \cdot (2,4 + z_2) - P \cdot (4,4 + z_2) = 0,$$

откуда

$$M_x = M + R_B \cdot (2,4 + z_2) - P \cdot (4,4 + z_2) = 20 + 10,4 \cdot (2,4 + z_2) - 10 \cdot (4,4 + z_2) = 0,96 + 0,4z_2$$

$$M_x = [0,96; 1,28] \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюрой будет наклонная прямая линия.

Рассмотрим 3 участок; заходим справа (рис. 4.10):

$$0 \leq z_3 \leq 2,4.$$

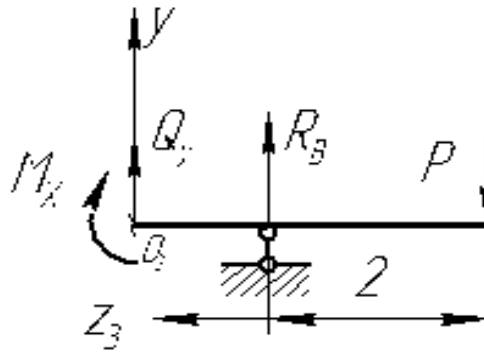


Рис. 4.10. К расчёту третьего участка

$$\underline{\sum F_Y = 0;}$$

$$Q + R_B - P = 0; \text{ откуда } Q = -R_B + P = -10,4 + 10 = -0,4 \text{ кН}.$$

Эпюра – прямая линия.

$$\underline{\sum M_{O_3} = 0;}$$

$$-M_X - P \cdot (2 + z_3) + R_B \cdot z_3 = 0, \text{ откуда}$$

$$M_X = -P \cdot (2 + z_3) + R_B \cdot z_3 = -10 \cdot (2 + z_3) + 10,4 \cdot z_3 = -20 + 0,4z_3.$$

$$M_X = [-20; -19,04] \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюрой будет наклонная прямая линия.

Рассмотрим 4 участок, заходим справа (рис. 4.11):

$$0 \leq z_4 \leq 2.$$

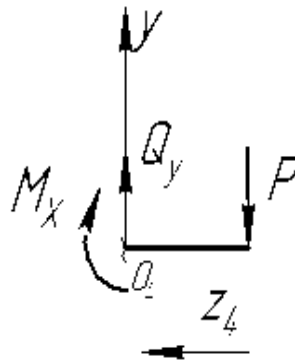


Рис. 4.11. К расчёту четвёртого участка

$$\underline{\sum F_Y = 0;}$$

$$Q - P = 0; \text{ откуда } Q = P = 10 \text{ кН}. \text{ Эпюра – прямая линия.}$$

$$\sum M_{O_4} = 0;$$

$$-M_X - P \cdot z_4 = 0,$$

откуда $M_X = -P \cdot z_4 = -10z_4$.

$$M_X = [0; -20] \text{кН} \cdot \text{м}$$

Эпюрой будет наклонная прямая (рис.4.12).

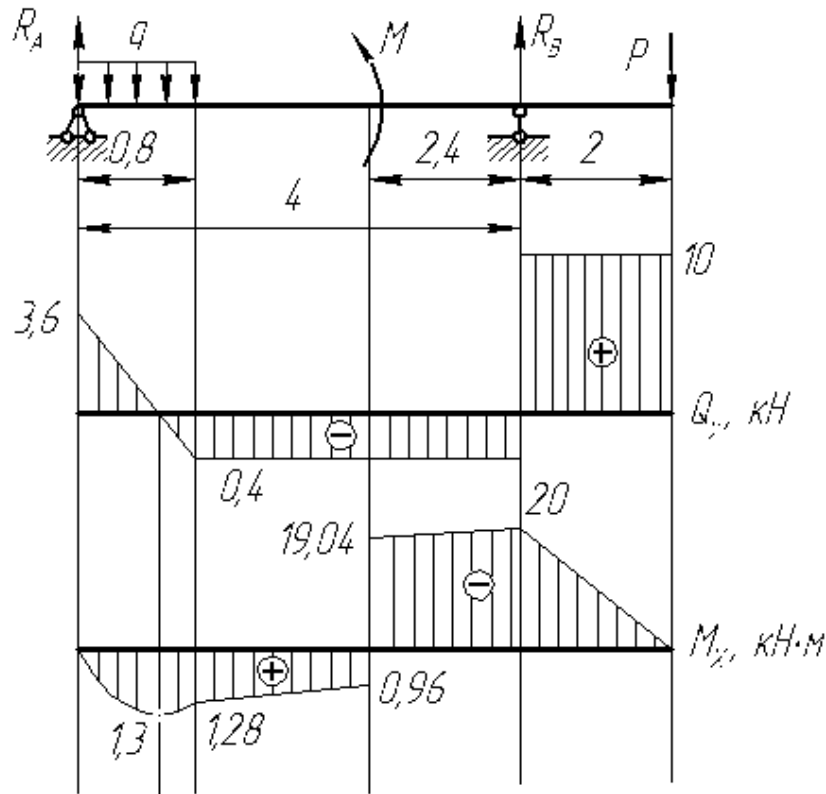


Рис. 4.12. Эпюры поперечных сил и эпюра изгибающих моментов

Из эпюры M_x видно, что опасным будет сечение с максимальным по абсолютному значению изгибающим моментом $M_{\max} = 20 \text{кН} \cdot \text{м}$.

Для вычисления требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе. С учетом заданного допускаемого напряжения $[\sigma] = 178 \text{МПа}$, получим:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X},$$

$$\text{откуда } W_{X, \text{треб}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{178 \cdot 10^6} = 112,3 \text{см}^3.$$

3. Запроектируем сечение балки:

а) круглое сечение: $W_X = \frac{\pi d^3}{32},$

$$\text{откуда } d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_{X, \text{треб}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 112,3}{3,14}} = 10,5 \text{ см.}$$

Принимаем $d=105$ мм.

$$\text{Площадь круглого сечения: } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10,5^2}{4} = 85,6 \text{ см}^2.$$

б) квадратное сечение со стороной «а»: $W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{a^3}{6}$, откуда

$$a = \sqrt[3]{6W_{X, \text{треб}}} = \sqrt[3]{6 \cdot 112,3} = 8,77 \text{ см} = 87,7 \text{ мм}$$

Принимаем сечение 88x88 мм. Площадь сечения: $A = a^2 = 8,8^2 = 77,44 \text{ см}^2$

в) прямоугольное сечение с соотношением сторон $h/b = 1,5$

$$W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (1,5b)^2}{6} = 0,375b^3$$

$$\text{откуда } b = \sqrt[3]{\frac{W_{X, \text{треб}}}{0,375}} = \sqrt[3]{\frac{112,3}{0,375}} = 6,7 \text{ см} = 67 \text{ мм}$$

тогда $h=3b=3 \cdot 67=201$ мм.

$$\text{Площадь сечения: } A = bh = 1,5b^2 = 1,5 \cdot 6,7^2 = 67,2 \text{ см}^2$$

г) кольцевое сечение:

$$W_X = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{3,14 \cdot D^3(1 - 0,8^4)}{32} = 0,058D^3$$

$$\text{откуда } D = \sqrt[3]{\frac{W_{X, \text{треб}}}{0,058}} = \sqrt[3]{\frac{112,3}{0,058}} = 12,5 \text{ см}$$

$$\text{Площадь сечения: } A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14 \cdot 12,5^2 \cdot (1 - 0,8^2)}{4} = 44,2 \text{ см}^2$$

г) сечение из двух рядом стоящих швеллеров:

$$W_1 = \frac{1}{2} W_{X, \text{треб}} = \frac{112,3}{2} = 56,15 \text{ см}^3$$

Из сортамента выбираем швеллер №14, у которого $W_{1X} = 70,2 \text{ см}^3$.

$$\text{Площадь сечения: } A = 2A_1 = 2 \cdot 15,6 = 31,2 \text{ см}^2.$$

д) двутавровое сечение, $W_{X, \text{треб}} = 112,3 \text{ см}^3$

Из сортамента выбираем двутавр №16 с $W_X = 109 \text{ см}^3$. Учитывая, что

$109\text{см}^3 < W_x = 112,3\text{см}^3$, сечение может быть перегружено. Проверим напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{20\text{кН} \cdot \text{м}}{109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 183,5 \text{ МПа} > [\sigma] = 178 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составит: $\sigma\% = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{183,5 - 178}{178} \cdot 100\% = 3,1\%$,

что составляет менее 5%. Прочность достаточная.

Площадь сечения: $A = 20,2\text{см}^2$

Вывод: С точки зрения экономической эффективности выгоднее выбрать двутавровое сечение, имеющее меньшую площадь.

Следует отметить, однако, что в случае действия значительных поперечных сил, двутавровое сечение (а также швеллеры) должны быть проверены на прочность при совместном действии нормальных и касательных напряжений. В сечениях, имеющих резкие перепады ширины (двутавр, швеллер, коробчатое сечение), возникают значительные касательные напряжения в местах соединения стенки и полок. Это при том, что и нормальные напряжения в этих местах близки к допускаемым.

Проверку прочности производят в сечении, где и поперечная сила, и изгибающий момент имеют большие значения. В нашем случае это сечение на правой консоли вблизи опоры «В», где действуют $M_x = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $Q_y = 10 \text{ кН}$.

Проверку прочности проводят по III гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Нормальное напряжение в опасных точках находят по формуле (4.2), а касательное напряжение – по формуле (4.5):

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y, \quad \text{где } y = \frac{h}{2} - t_{\text{полки}}.$$

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b_y}, \quad \text{где } b_y - \text{ширина стенки, } S_x^{\text{отс}} = b_{\text{полки}} \cdot t_{\text{полки}} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t_{\text{полки}}}{2} \right).$$

Выполним проверку прочности подобранного двутавра №16. Из ГОСТа выписываем необходимые геометрические характеристики этого профиля.

$$h = 160 \text{ мм};$$

$$b_{\text{стенки}} = 5 \text{ мм};$$

$$b_{\text{полки}} = 81 \text{ мм};$$

$$t_{\text{полки}} = 7,8 \text{ мм};$$

$$I_x = 873 \text{ см}^3.$$

Вычисляем $y = \frac{16}{2} - 0,78 = 7,22 \text{ см}$.

$$S_x^{omc} = 8,1 \cdot 0,78 \cdot \left(\frac{16}{2} - \frac{0,78}{2} \right) = 48,08 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{20 \text{ кН} \cdot \text{м}}{873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot 7,22 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 165407 \text{ кПа} = 165,41 \text{ МПа},$$

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{omc}}{I_x b_y} = \frac{10 \text{ кН} \cdot 48,08 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{873 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 11180 \text{ кПа} = 11,18 \text{ МПа}.$$

Подставляем полученные напряжения в условие прочности по III гипотезе:

$$\sigma_{расч} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{165,41^2 + 4 \cdot 11,18^2} = 166,7 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 178 \text{ МПа},$$

условие прочности выполняется.

§ 5. Расчет статически неопределимой балки

В теме «Изгиб» мы уже рассматривали расчет на изгиб статически определимой балки. Напомним, что статически определимой называют систему, все усилия и реакции в которой можно найти из уравнений равновесия. Если неизвестных больше, чем уравнений статики, задача считается статически неопределимой. Для того, чтобы балка, не имеющая шарнирных стыков по длине, была статически определимой, она должна иметь три опорных связи в той плоскости, в которой к ней приложены нагрузки. При большем числе связей балка становится статически неопределимой и для её расчёта требуется составить дополнительные уравнения деформаций (уравнения прогибов в сечениях балки, где она имеет «лишние» опорные связи). Прогибы и углы поворота балок требуется определять также для проверки условия жёсткости и при решении динамических задач.

В сопротивлении материалов уравнения прогибов будем составлять на основе Метода начальных параметров.

Рассмотрим основные положения этого метода. За начало координат в этом методе принимают левый конец балки (рис. 5.1).

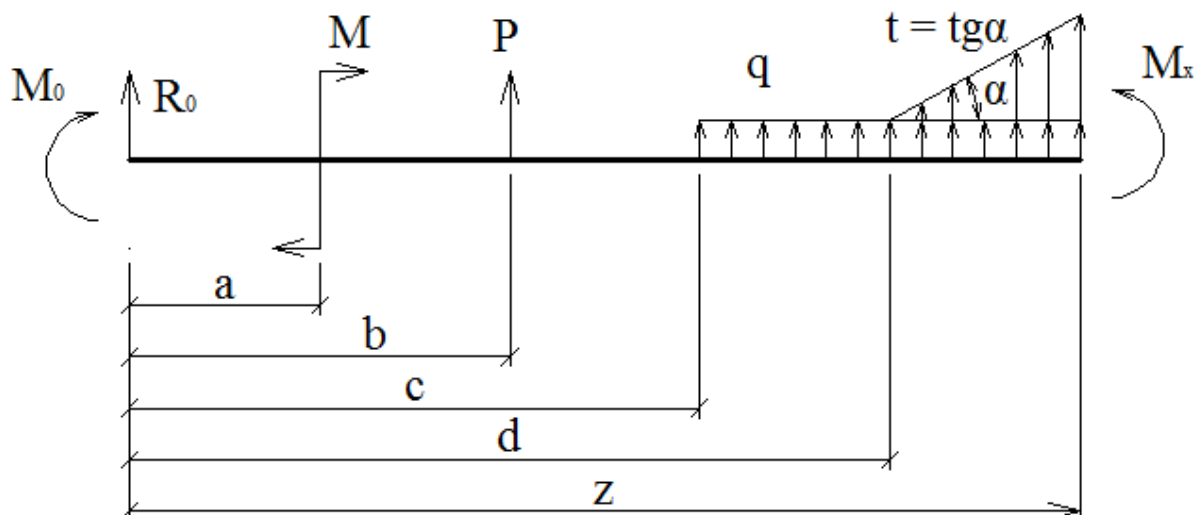


Рисунок 5.1. К уравнению метода начальных параметров

Начальными параметрами называют силовые и геометрические параметры на левом конце. К силовым относятся поперечная сила и момент (это могут быть опорные реакции или внешние нагрузки), к геометрическим – прогиб и угол поворота в том же сечении балки.

Уравнение прогибов в сечении с координатой «z» для балки, изображённой на рисунке 5.1, имеет вид:

$$y(z) = y_0 + \Theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{z^2}{2} + R_0 \frac{z^3}{6} + \sum M_i \frac{(z-a_i)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(z-b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z-c_i)^4}{4!} + \sum t_i \frac{(z-d_i)^5}{5!} \right] \quad (5.1)$$

Из уравнения (5.1), зная, что угол поворота есть первая производная от функции изгибающего момента, получим:

$$\Theta(z) = y'(z) = \Theta_0 + \frac{1}{EI_x} \left[M_0 z + R_0 \frac{z^2}{2} + \sum M_i (z-a_i) + \sum P_i \frac{(z-b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z-c_i)^3}{3!} + \sum t_i \frac{(z-d_i)^4}{4!} \right] \quad (5.2)$$

В приведённых выше формулах:

$y_0; \Theta_0$ – прогиб и угол поворота в начале координат;

$M_0; R_0$ – изгибающий момент и сила в начале координат;

EI_x – изгибная жесткость поперечного сечения балки в плоскости изгиба. На рисунке (5.1) эта плоскость вертикальна.

Знаки внешних нагрузок и силовых параметров положительны, если они совпадают с изображенными на рисунке 5.1.

Положительный прогиб в этих выражениях происходит вверх, т. е. совпадает с положительным направлением оси Y; положительный угол поворота – против часовой стрелки.

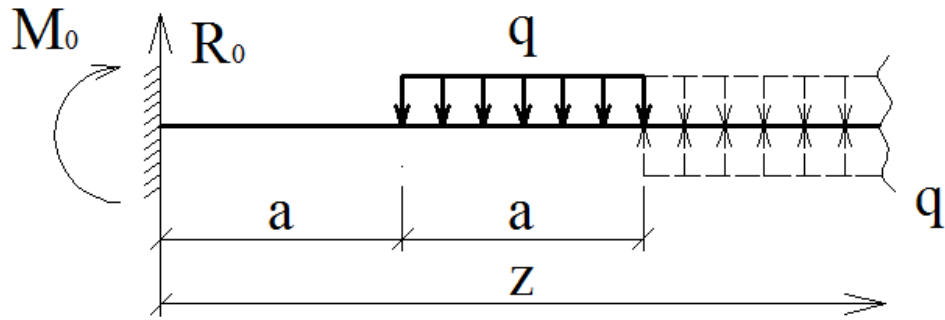


Рисунок 5.2. Учет распределённой нагрузки

Если при использовании уравнений (5.1) и (5.2) распределенная нагрузка заканчивается, не доходя до рассматриваемого сечения (см. рис. 5.2), то поступают следующим образом: мысленно продолжают эту нагрузку до нужного сечения и добавляют снизу такую же нагрузку, но противоположную по знаку, на участке, где сверху её не было. При этом в уравнении будет два слагаемых, содержащих указанную нагрузку.

Начальные параметры зависят от граничных условий на левом конце балки. Например, если балка слева закреплена, то прогиб и угол поворота в начале координат будут равны нулю, а $M_0; R_0$ равны опорным реакциям в заделке от внешних нагрузок (рис. 5.3).

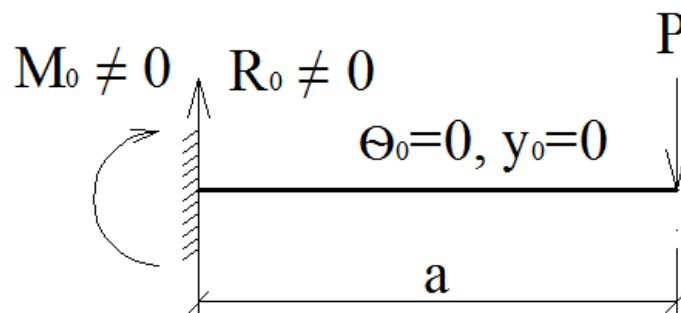
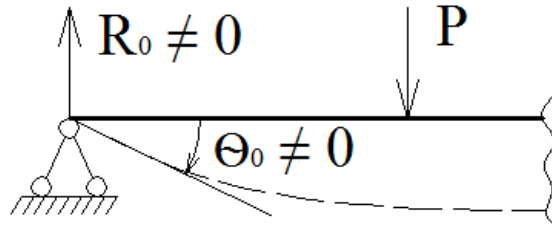


Рисунок 5.3. Граничные условия в закреплённом начале координат

Если на левом конце шарнирная опора, то будут равны нулю начальный прогиб и реактивный момент левой опоры (рис. 5.4).



$$M_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

Рисунок 5.4. Граничные условия в шарнирном начале координат
 В случае свободного конца имеются начальный прогиб и угол поворота, но нет опорных реакций (рис. 5.5).

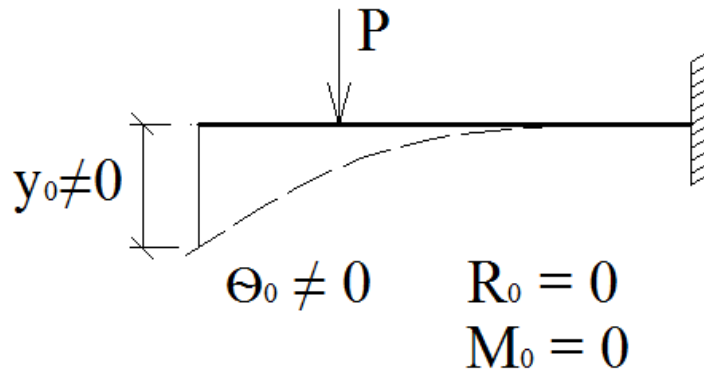


Рисунок 5.5. Граничные условия на свободном конце

ПРИМЕР выполнения задачи 1 по сопротивлению материалов.

Для балки, изображенной на рис.5.6, требуется:

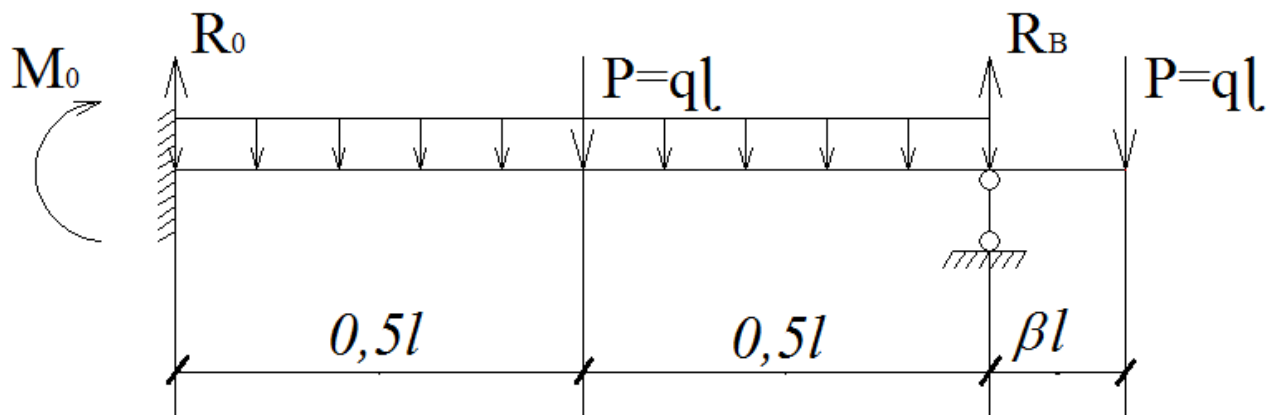


Рисунок 5.6. К расчёту статически неопределимой балки

1. Найти опорные реакции;
2. Записать уравнения изгибающих моментов и поперечных сил на участках балки и построить эпюры M_x и Q_y (в долях от ql^2 и ql);
3. Построить эпюру прогибов, вычислив три равноотстоящих ординаты в пролёте и две на консоли.

Исходные данные $\beta=0,3$.

Решение.

При действии вертикальной нагрузки в данной балке возникают три опорные реакции: две в заделке – R_0 и M_0 , и вертикальная реакция правой опоры R_B . Для вычисления этих реакций мы можем составить всего два уравнения статики:

$$\sum M = 0,$$

$$\sum F_y = 0.$$

Следовательно, система один раз статически неопределима.

Отметим, что уравнение проекций на ось X в данном случае составлять не имеет смысла, так как горизонтальных нагрузок в балке нет.

Для вычисления R_0 и M_0 составим систему двух уравнений – сумму моментов относительно точки B и уравнение метода начальных параметров для определения прогиба балки в сечении над опорой B , который в действительности равен нулю. В обоих уравнениях реакция R_B отсутствует.

$$\sum M_B = 0:$$

$$M_0 + R_0 l - P \frac{l}{2} + P\beta l - ql \frac{l}{2} = 0, \text{ с учетом значений } P=ql \text{ и } \beta=0,3 \text{ получим:}$$

$$M_0 + R_0 l - ql \frac{l}{2} + ql \cdot 0,3l - ql \frac{l}{2} = 0, \text{ откуда}$$

$$\underline{M_0 + R_0 l - 0,7ql^2 = 0} \text{ – первое уравнение системы.}$$

Уравнение прогибов в точке B имеет вид:

$$y_B(z=l) = y_0 + \Theta_0 z + \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{z^2}{2} + R_0 \frac{z^3}{6} - P \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{6} - q \frac{(l-0)^4}{24} \right] =$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{l^2}{2} + R_0 \frac{l^3}{6} - P \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} - q \frac{l^4}{24} \right] = \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{l^2}{2} + R_0 \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{16} \right] = 0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $\frac{l^2}{2}$:

$$M_0 + R_0 \frac{l}{3} - 0,125ql^2 = 0 \text{ – второе уравнение системы.}$$

Решаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} M_0 + R_0 l - 0,7ql^2 = 0 \\ M_0 + R_0 \frac{l}{3} - 0,125ql^2 = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$0,667R_0 l - 0,575ql^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$R_0 = \frac{0,575ql^2}{0,667l} = 0,862ql.$$

Подставим R_0 первое уравнение системы (не имеет значения, можно и во второе подставить):

$$M_0 = -R_0 l + 0,7ql^2 = -0,862ql^2 + 0,7ql^2 = -0,162ql^2.$$

Составим уравнение проекций на ось Y для вычисления опорной реакции R_B .

$$R_0 + R_B - P - P - ql = 0, \text{ откуда:}$$

$$R_B = 2P + ql - R_0 = 3ql - 0,862ql = 2,138ql.$$

Все опорные реакции найдены.

Запишем выражения для поперечных сил и изгибающих моментов на участках балки.

Участок 1. Заходим слева. $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$

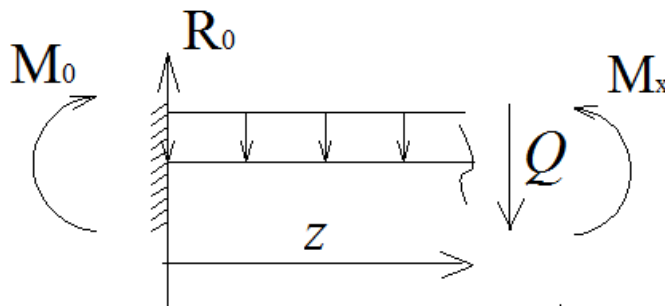


Рисунок 5.7. К расчёту внутренних усилий на первом участке

Поперечная сила:

$$Q_y(z) = R_0 - qz = 0,862ql - qz; \text{ — уравнение наклонной прямой.}$$

$$\text{При } z=0 \rightarrow Q_y(0) = 0,862ql$$

$$\text{При } z = \frac{l}{2} \rightarrow Q_y\left(\frac{l}{2}\right) = 0,862ql - 0,5ql = 0,362ql.$$

Изгибающий момент:

$$M_x(z) = M_0 + R_0z - qz \frac{z}{2} = -0,162ql^2 + 0,862qlz - q \frac{z^2}{2} \text{ — уравнение квадратной параболы.}$$

При $z=0 \rightarrow M_x(0) = -0,162ql^2$; знак «-», следовательно, растянуты верхние волокна, откладываем на эпюре моментов сверху.

При $z = \frac{l}{2} \rightarrow M_x\left(\frac{l}{2}\right) = 0,144ql^2$; знак «+», следовательно, растянуты нижние волокна, откладываем снизу.

Участок 2. Заходим слева. $\frac{l}{2} \leq z \leq l$

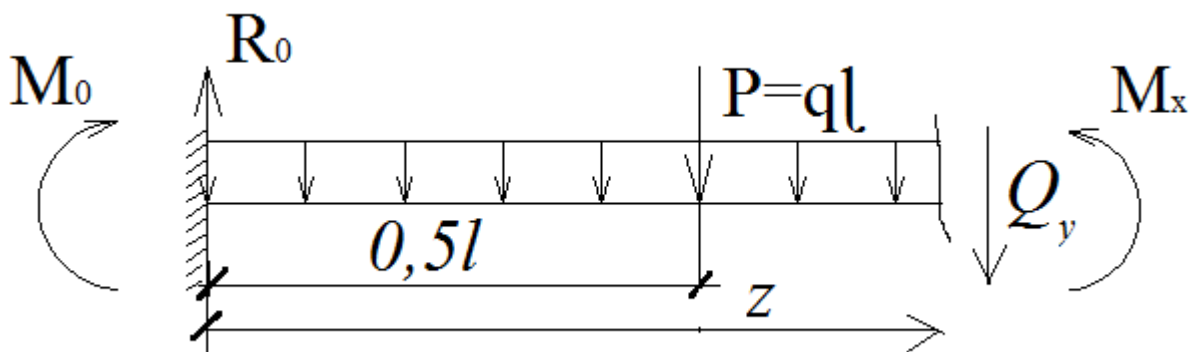


Рисунок 5.8. К расчёту внутренних усилий на втором участке

Поперечная сила:

$$Q_y(z) = R_0 - P - qz = 0,862ql - ql - qz = -0,138ql - qz; \text{ — уравнение наклонной прямой.}$$

$$\text{При } z=0,5l \rightarrow Q_y(0,5l) = -0,138ql - 0,5ql = -0,638ql;$$

При $z=l \rightarrow Q_y(l) = -0,138ql - ql = -1,138ql$.

Изгибающий момент:

$$M_x(z) = M_0 + R_0z - P(z - 0,5l) - qz \frac{z}{2} = -0,162ql^2 + 0,862qlz - ql(z - 0,5l) - q \frac{z^2}{2}$$

– уравнение квадратной параболы.

При $z=0,5l \rightarrow M_x(0,5l) = 0,144ql^2$; знак «+», следовательно, растянуты нижние волокна, откладываем на эпюре моментов снизу.

При $z=l \rightarrow M_x(l) = -0,3ql^2$; знак «-», следовательно, растянуты верхние волокна, откладываем сверху.

Участок 3. Заходим справа. $0 \leq z \leq 0,3l$

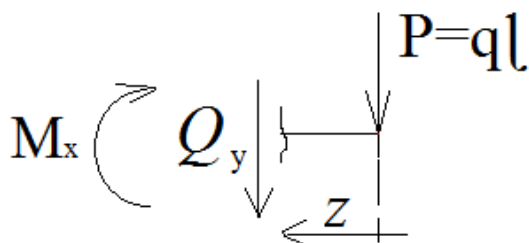


Рисунок 5.9. К расчёту внутренних усилий на третьем участке

Поперечная сила:

$Q_y(z) = P = ql$; – постоянное значение, эпюра горизонтальная.

Изгибающий момент:

$M_x(z) = -Pz = -qlz$, – уравнение наклонной прямой.

При $z=0 \rightarrow M_x(0) = 0$;

При $z=0,3l \rightarrow M_x(0,3l) = -0,3ql^2$; знак «-», следовательно, растянуты верхние волокна, откладываем сверху.

Выполним проверку построенных эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

На первом и втором участках балки действует равномерно распределённая нагрузка. Эпюра поперечной силы имеет вид наклонной прямой, убывающей слева направо, а эпюра моментов изменяется по закону квадратной параболы, выпуклостью вниз, т.е. в сторону действия нагрузки. На границе первого и второго участков эпюра моментов имеет излом от сосредоточенной силы P . На третьем участке, где распределённая нагрузка

отсутствует, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Построим эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две – на консоли.

Вычисление прогибов в пролёте балки

Пролет балки разбиваем на четыре участка с границами:

$$z = 0,25l; \quad 0,5l; \quad 0,75l; \quad l.$$

Вычисляем прогибы с помощью метода начальных параметров.

Запишем уравнение прогибов на первом участке (рис. 5.7):

$$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

$$y_0 = \Theta_0 = 0, \text{ (заделка)}$$

$$y_B(z) = \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{z^2}{2} + R_0 \frac{z^3}{6} - q \frac{(z-0)^4}{24} \right] = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{z^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \right]$$

Вычислим прогибы в сечениях первого участка:

$$y_B(0,25l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{(0,25l)^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{(0,25l)^3}{6} - q \frac{(0,25l)^4}{24} \right] = \frac{-2,98 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4$$

– знак «-», прогиб вниз.

$$y_B(0,5l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{(0,5l)^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{(0,5l)^3}{6} - q \frac{(0,5l)^4}{24} \right] = \frac{-4,90 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4,$$

отрицательный прогиб вниз.

Уравнение прогибов на втором участке:

$$y_B(z) = \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{z^2}{2} + R_0 \frac{z^3}{6} - P \frac{(z-0,5l)^3}{6} - q \frac{(z-0)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{z^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{z^3}{6} - ql \frac{(z-0,5l)^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \right]$$

Вычислим прогибы в сечениях второго участка (рис. 5.8):

$$y_B(0,75l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{(0,75l)^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{(0,75l)^3}{6} - ql \frac{(0,75l - 0,5l)^3}{6} - q \frac{(0,75l)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{-0,74 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4, \text{ прогиб вниз.}$$

$$y_B(l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{l^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{l^3}{6} - ql \frac{(l - 0,5l)^3}{6} - q \frac{l^4}{24} \right] = \frac{-0,16 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4 \approx 0,$$

как и должно быть на опоре. Небольшая погрешность вызвана неточностями при округлении величин опорных реакций.

Уравнение прогибов на консоли:

$$l \leq z \leq 1,3l$$

Вычисляем прогибы в двух сечениях: в середине и конце консоли.

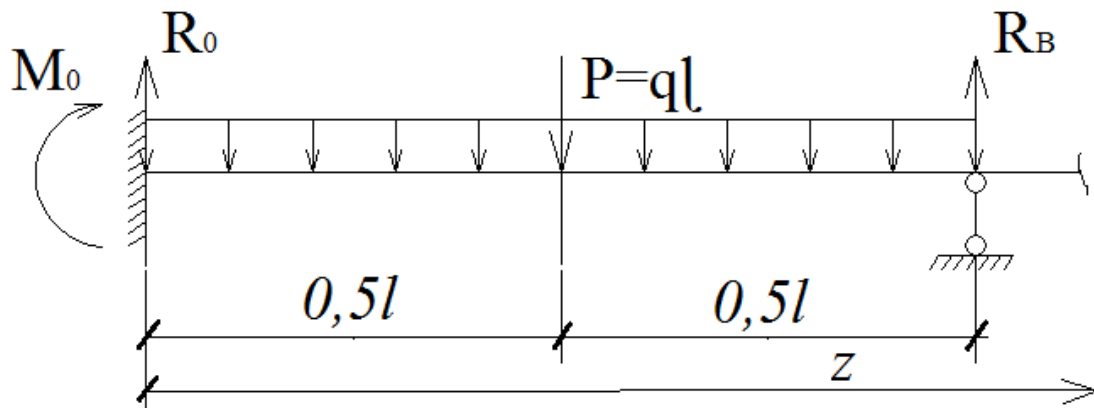


Рисунок 5.10. К вычислению прогибов консоли

$$y_B(z) = \frac{1}{EI_x} \left[M_0 \frac{z^2}{2} + R_0 \frac{z^3}{6} - P \frac{(z - 0,5l)^3}{6} - q \frac{(z - 0)^4}{24} + q \frac{(z - l)^4}{24} + R_B \frac{(z - l)^3}{6} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{z^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{z^3}{6} - ql \frac{(z - 0,5l)^3}{6} - q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z - l)^4}{24} + R_B \frac{(z - l)^3}{6} \right].$$

Слагаемое $+q \frac{(z-l)^4}{24}$ появилось за счет «добавления» нагрузки противоположного знака на консоли, чтобы сивелировать неточность, обусловленную предыдущим слагаемым (смотри теоретический раздел).

Прогиб в середине консоли при $z = 1,15l$:

$$y_B(1,15l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{(1,15l)^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{(1,15l)^3}{6} - ql \frac{(1,15l - 0,5l)^3}{6} - \right. \\ \left. - q \frac{(1,15l)^4}{24} + q \frac{(1,15l - l)^4}{24} + 2,138ql \frac{(1,15l - l)^3}{6} \right] = \frac{-6,046 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4$$

Прогиб в конце консоли при $z = 1,3l$

$$y_B(1,3l) = \frac{1}{EI_x} \left[-0,162ql^2 \cdot \frac{(1,3l)^2}{2} + 0,862ql \cdot \frac{(1,3l)^3}{6} - ql \frac{(1,3l - 0,5l)^3}{6} - \right. \\ \left. - q \frac{(1,3l)^4}{24} + q \frac{(1,3l - l)^4}{24} + 2,138ql \frac{(1,3l - l)^3}{6} \right] = \frac{-15,63 \cdot 10^{-3}}{EI_x} ql^4$$

Эпюра прогибов (или искривление оси балки под нагрузкой) показана на рисунке 5.11.

Следует отметить, что точки перегиба эпюры прогибов соответствуют сечениям балки, в которых значение изгибающего момента равно нулю. На участках балки, где эпюра моментов отложена на верхних волокнах, эпюра прогибов имеет выгиб вверх, что соответствует растяжению сверху. И наоборот, на участке, где эпюра моментов отложена снизу, ось балки выгнута вниз. Сечения балки, близкие к заделке, не испытывают прогибов и углов поворота.

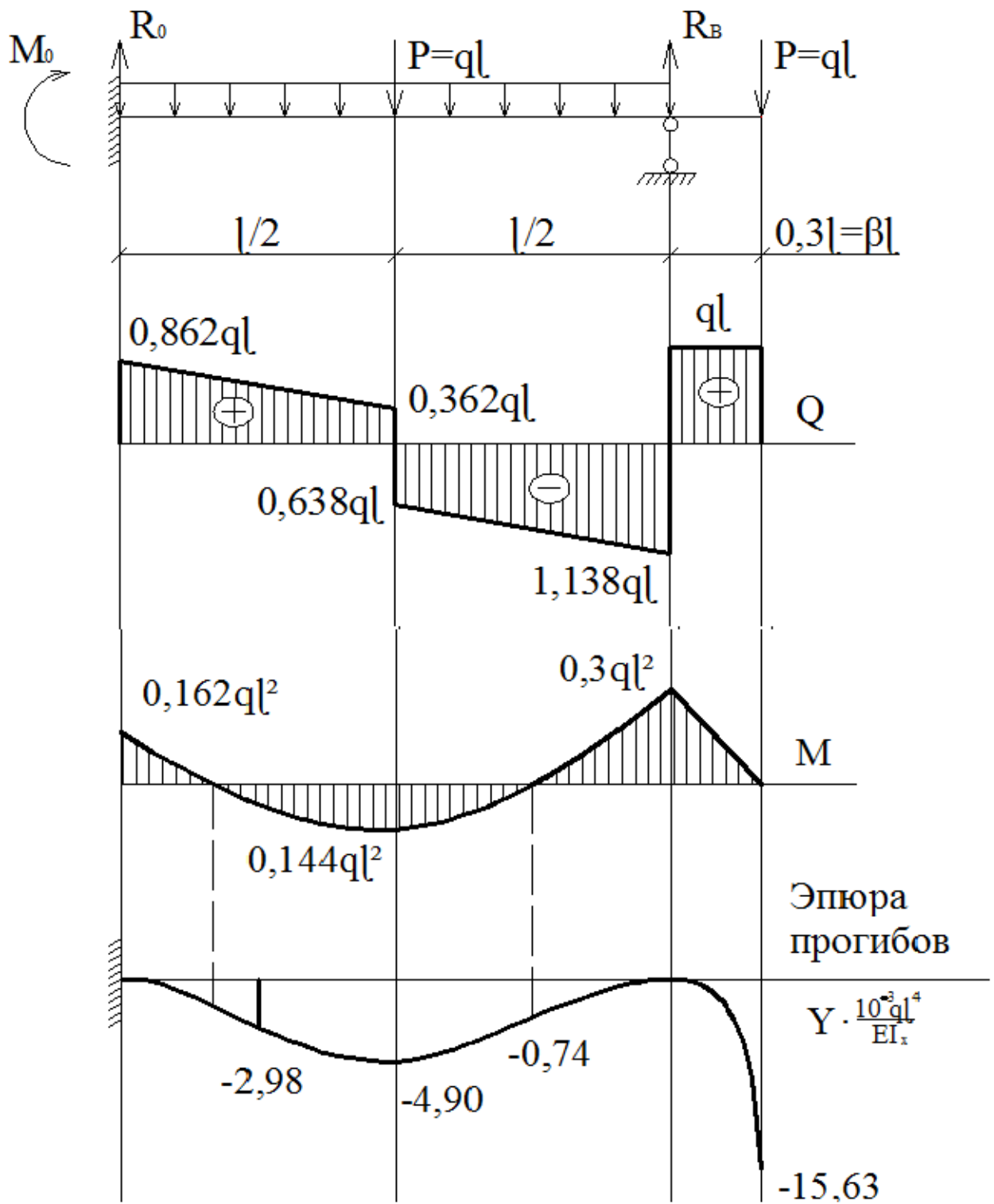


Рисунок 5.11. Оформление результатов расчета в контрольной работе

§ 6. Устойчивость сжатых стержней.

Основные положения и расчетные формулы

Устойчивостью называют способность системы сохранять под нагрузкой заданную форму упругого равновесия, и возвращаться к ней, если случайные причины, вызвавшие отклонение от положения равновесия, исчезают.

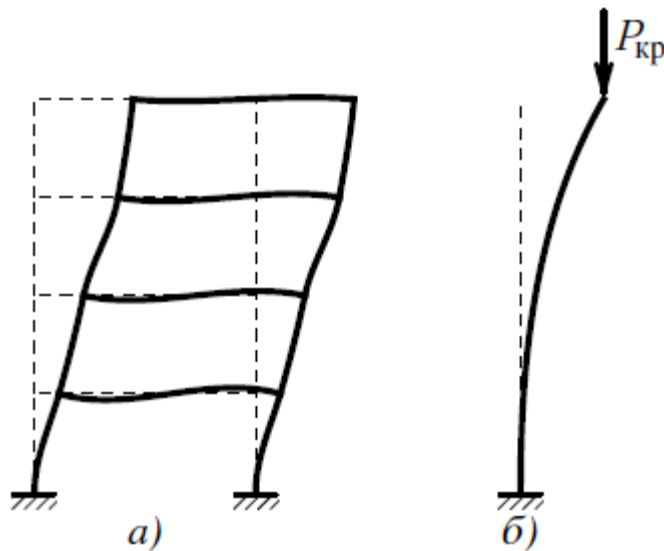


Рис. 6.1. Потеря устойчивости рамы (а) и консольного стержня (б) при действии критической нагрузки

Минимальное значение нагрузки, при которой конструкция (или отдельный её стержень) теряет устойчивость, называют критической нагрузкой или критической силой, а соответствующее этой нагрузке напряжение – критическим напряжением. В курсе сопротивления материалов рассматривается устойчивость отдельных стержней, а устойчивостью стержневых систем занимается дисциплина «Строительная механика». При достижении продольной силой критического значения стержень теряет приданное ему изначально положение равновесия и занимает новое, искривленное положение, т.е. получает изгиб. Поэтому потерю устойчивости называют ещё продольным изгибом (рис. 6.1).

Потеря устойчивости конструкции так же опасна, как и потеря прочности, поэтому правильное определение критической нагрузки имеет большое значение. Величина критической силы зависит от свободной длины стержня, геометрических характеристик его поперечного сечения и условий закрепления концов стержня (граничных условий). Все перечисленные выше обстоятельства

определяют так называемую гибкость стержня, имеющую численное значение и определяемую по формуле:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) приняты обозначения:

λ_{\max} – максимальная гибкость стержня (читается «лямбда»), безразмерная величина;

i_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \quad (6.2)$$

μl – приведенная длина стержня;

l – свободная длина стержня (длина между закреплениями);

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от условий опирания стержня. μ – это безразмерная величина, равная числу, обратному количеству полуволн, возникающих по длине стержня в момент изгиба при потере устойчивости. Для различных случаев закрепления концов стержня μ принимает значения (рис. 6.2):

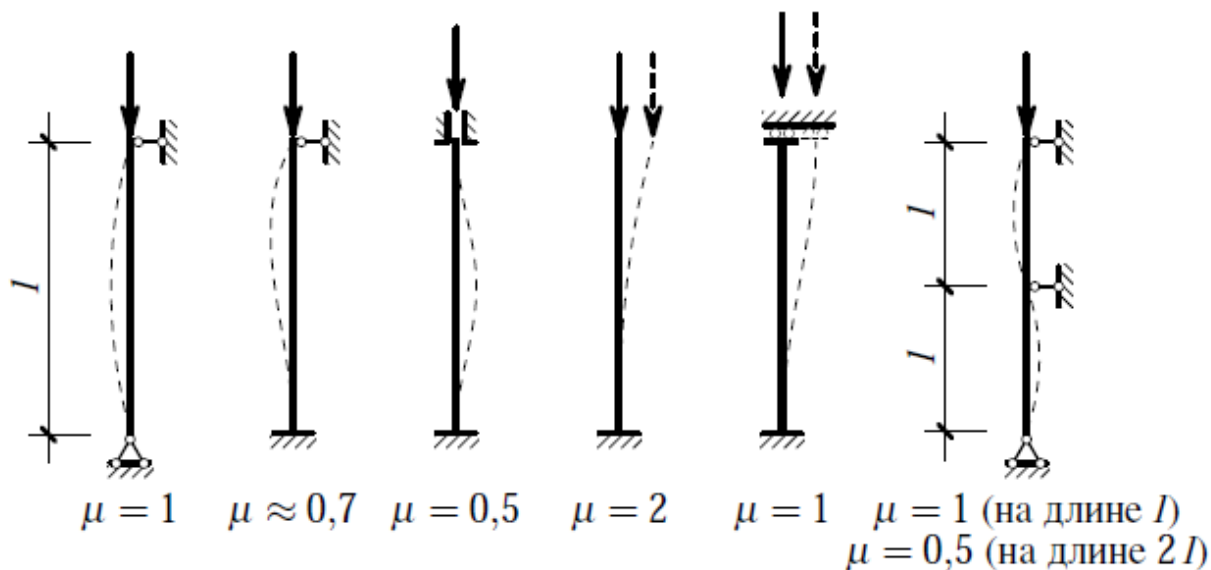


Рис. 6.2. Величина коэффициента приведения длины в зависимости от условий закрепления стержня

Следует отметить, что потеря устойчивости всегда происходит из той плоскости, где гибкость стержня имеет наибольшее значение. Поэтому, если стержень имеет различные условия опирания и отличающиеся моменты инерции относительно двух главных силовых плоскостей, то при расчете

устойчивости следует определять гибкость в обеих плоскостях, принимая затем для расчета максимальную.

Критическую нагрузку и критическое напряжение определяют по формулам Эйлера или Ясинского в зависимости от гибкости (λ) согласно графика (рис. 6.3):

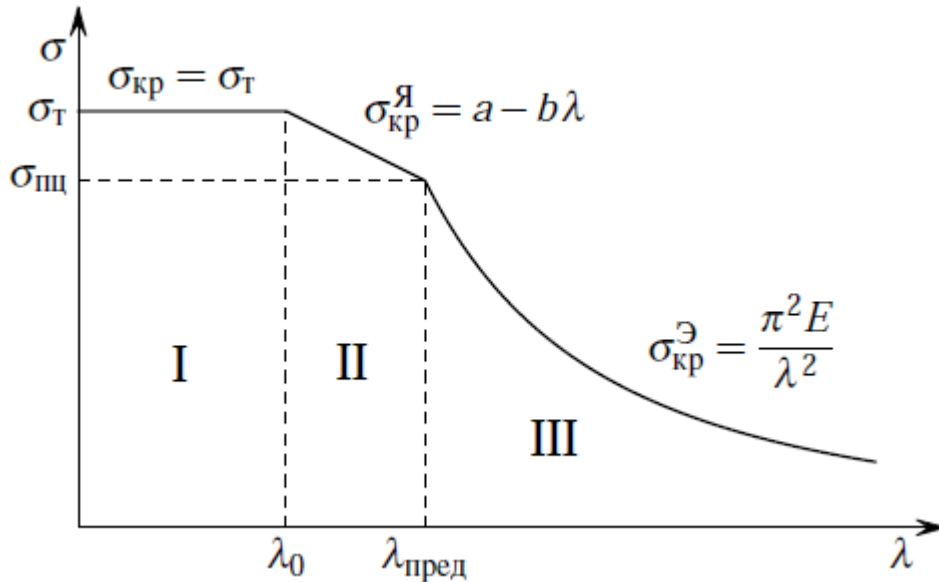


Рис. 6.3. Зависимость критического напряжения от гибкости стержня

На рисунке (6.3) зона I соответствует потере прочности (а не устойчивости). Эта зона относится к стержням, имеющим малую и небольшую гибкость ($\lambda < \lambda_0$), для которых продольный изгиб невозможен. Несущая способность таких стержней определяется достижением в их поперечных сечениях напряжений, равных пределу текучести σ_T . Зона II соответствует стержням средней гибкости ($\lambda_0 < \lambda < \lambda_{пред}$). Критическое напряжение для таких стержней определяется по формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр}^Я = a - b\lambda, \tag{6.3}$$

где a и b – постоянные, зависящие от материала стержня. Величина критического напряжения в этой зоне находится в интервале от предела пропорциональности до предела текучести: $\sigma_{пц} \leq \sigma_{кр}^Я \leq \sigma_T$.

Критическая сила Ясинского находится по выражению:

$$P_{кр}^Я = \sigma_{кр}^Я \cdot A. \quad (6.4)$$

И, наконец, зона III соответствует стержням большой гибкости ($\lambda > \lambda_{пред}$). В этой зоне критическое напряжение вычисляется по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр}^Э = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (6.5)$$

Напряжение Эйлера соответствует упругой работе материала, и его величина не превышает предела пропорциональности: $\sigma_{кр}^Э \leq \sigma_{пц}$.

Критическая сила Эйлера может быть вычислена через критическое напряжение Эйлера:

$$P_{кр}^Э = \sigma_{кр}^Э \cdot A, \quad (6.6)$$

Или по формуле Эйлера:

$$P_{кр}^Э = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (6.7)$$

Для конструкционной стали, применяемой в строительстве, (Ст.3), значения характеристик, применяемых в расчетах устойчивости: $a = 310 \text{ МПа}$; $b = 1,14 \text{ МПа}$; $\lambda_0 = 60$; $\lambda_{пред} = 100$. Для некоторых других материалов значения приведены в Приложении 4.

Таким образом, чтобы определить критическое напряжение (или критическую силу) для стержня, необходимо:

- 1). Вычислить значение гибкости;
- 2). Определить, в каком интервале лежит найденное значение;
- 3). Найти $\sigma_{кр}$ или $P_{кр}$ по формуле Эйлера или Ясинского.

Если требуется подобрать сечение стержня из условия устойчивости, зная действующую на него нагрузку, то расчёт ведут по условию устойчивости. Условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma], \quad (6.8)$$

где N – продольная сила, A – площадь поперечного сечения стержня, φ – коэффициент продольного изгиба (понижает основное допускаемое напряжение, применяемое в задачах прочности), $0 < \varphi < 1$.

Задача о подборе сечения решается методом последовательных приближений по следующему алгоритму:

- 1). Задаются значением φ из интервала $0 \dots 1$, например, $\varphi_1 = 0,5$.
- 2). Определяют требуемую площадь сечения из условия устойчивости (6.8):

$$A = \frac{N}{\varphi \cdot [\sigma]}; \quad (6.9)$$

- 3). Проектируют сечение заданной формы (или подбирают по сортаменту прокатных профилей);
- 4). Для принятого сечения вычисляют минимальный момент инерции и радиус инерции;
- 5). Вычисляют гибкость стержня λ ; для полученного значения λ в зависимости от материала стержня по таблицам определяют коэффициент продольного изгиба φ'_0 ;
- 6). Проверяют напряжение в стержне по условию (6.8), расхождение не должно превышать 5%. Если условие не выполняется, производят следующее приближение, принимая $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$, затем $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$ и т.д.

Коэффициент φ определяется по таблице Приложения 3.

ПРИМЕР выполнения задачи 2 по сопротивлению материалов

Стальной стержень сжимается силой F (рис. 6.4).

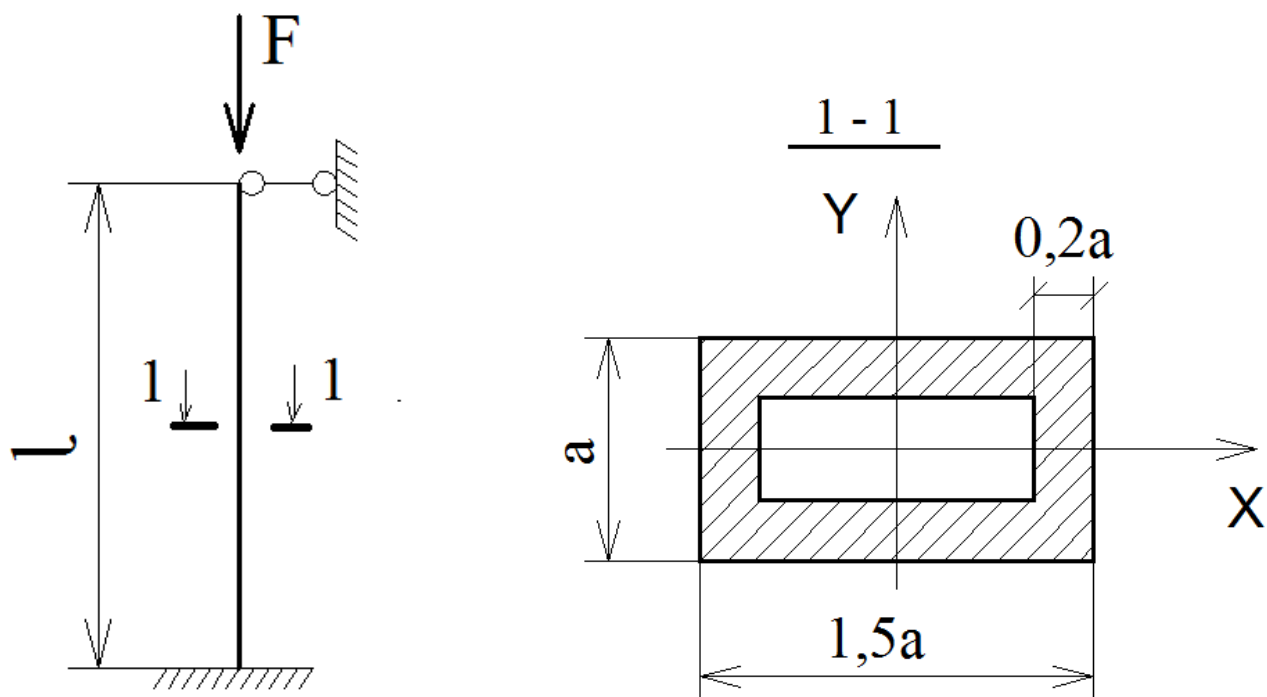


Рисунок 6.4. Исходные данные к задаче по устойчивости

Требуется:

- 1). Найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma] = 160$ МПа;
- 2). Найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Исходные данные:

Сталь С 38/23, длина стержня $l = 2,7$, $F = 100$ кН, модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, характеристики устойчивости: $\lambda_0 = 60$, $\lambda_{\text{пред.}} = 100$, $a = 310$ МПа, $b = 1.14$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение: Для заданной схемы стержня $\mu = 0,7$.

Предварительно определим геометрические характеристики поперечного сечения.

$$\text{Площадь } A = 1,5a \cdot a - 1,1a \cdot 0,6a = 0,84a^2,$$

откуда искомая сторона сечения $a = \sqrt{\frac{A}{0,84}} = 1,09\sqrt{A}$.

Определяем осевые моменты инерции сечения:

$$I_x = \frac{1,5a \cdot a^3}{12} - \frac{1,1a \cdot (0,6a)^3}{12} = 0,1052a^4$$

$$I_y = \frac{a \cdot (1,5a)^3}{12} - \frac{0,6a \cdot (1,1a)^3}{12} = 0,2147a^4 .$$

В нашем случае $I_y > I_x$, то есть $I_x = I_{\min}$

Вычисляем минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,1052}{0,84a^2}} = 0,354a .$$

Расчет ведём методом последовательных приближений.

1-е приближение.

Задаемся $\varphi_1 = 0,5$.

Вычисляем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A_{1,тр.об.} \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{100кН}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^3 кПа} = 12,5 \cdot 10^{-4} м^2 = 12,5 см^2 .$$

Тогда искомый поперечный размер стержня составит:

$$a = 1,09\sqrt{A} = 1,09\sqrt{12,5 см^2} = 3,85 см, \text{ принимаем} \quad a = 4 см = 40 мм .$$

Фактическая площадь сечения составит:

$$A = 0,84a^2 = 0,84 \cdot 4^2 = 13,44 см^2 ,$$

Проверяем стержень подобранного сечения на устойчивость.

Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = 0,354a = 0,354 \cdot 4 = 1,416 см .$$

Гибкость стержня:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 270 см}{1,416 см} = 133,5 .$$

По таблицам продольного изгиба определяем интервал коэффициента φ .

При $\lambda = 130$ $\varphi = 0,4$

$\lambda = 140$ $\varphi = 0,36$.

Линейной интерполяцией определяем φ ($\lambda=133,5$):

$$\phi'_1 = 0,4 - \frac{0,4 - 0,36}{10} (133,5 - 130) = 0,386.$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{N}{\phi'_1 \cdot A_{1.факт}} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{100 \text{ кН}}{0,384 \cdot 13,44 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 193,8 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 193,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

Перенапряжение больше 5%, следовательно, условие устойчивости не выполняется.

2-е приближение.

$$\text{Находим } \phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,384}{2} = 0,442$$

Повторим расчёт:

$$A_{2,треб.} \geq \frac{F}{\phi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{100 \text{ кН}}{0,442 \cdot 160 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 14,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 14,1 \text{ см}^2.$$

Искомый поперечный размер сечения стержня составит:

$$a = 1,09 \sqrt{A} = 1,09 \sqrt{14,1 \text{ см}^2} = 4,09 \text{ см},$$

принимаем $a = 4,2 \text{ см} = 42 \text{ мм}$.

Фактическая площадь сечения составит:

$$A = 0,84 a^2 = 0,84 \cdot 4,2^2 = 14,82 \text{ см}^2,$$

Проверяем подобранное сечение на устойчивость.

Минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{\min} = 0,354 a = 0,354 \cdot 4,2 = 1,487 \text{ см}.$$

Гибкость стержня:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 270 \text{ см}}{1,487 \text{ см}} = 127,1.$$

По таблицам продольного изгиба определяем интервал коэффициента ϕ .

При $\lambda = 120$ $\phi = 0,45$

$\Lambda = 130$ $\phi = 0,4$.

Линейной интерполяцией определяем $\phi(\lambda=133,5)$:

$$\phi'_2 = 0,45 - \frac{0,45 - 0,4}{10} (127,1 - 120) = 0,415.$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

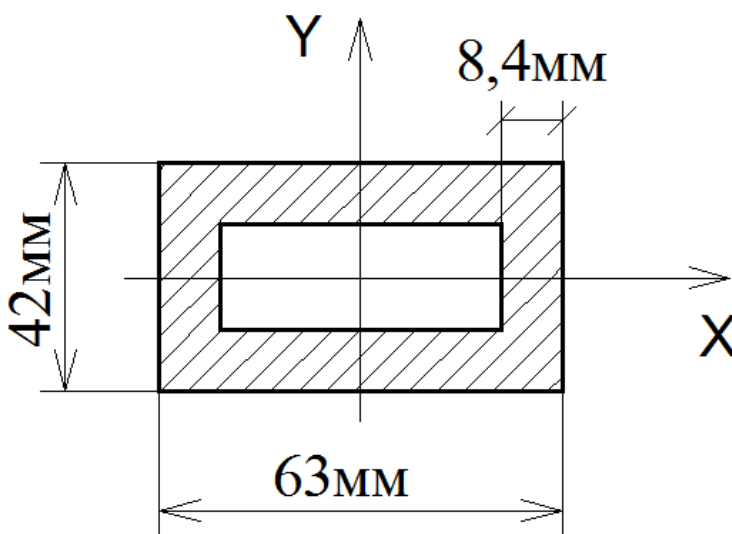
$$\sigma = \frac{N}{\varphi_2' \cdot A_{2.факт}} \leq [\sigma]$$

$$\sigma = \frac{100 \text{ кН}}{0,415 \cdot 14,82 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 162,6 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 162,6 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

Найдем перенапряжение:

$$\frac{162,6 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,6\% > 5\%, \text{ допускается.}$$

Таким образом, принимаем сечение $A = 14,82 \text{ см}^2$, $a = 4,2 \text{ см} = 42 \text{ мм}$.



Находим критическую силу. Определяем применимость формул Эйлера / Ясинского. В последнем приближении гибкость $\lambda = 127,1 > \lambda_{пред} = 100$, следовательно, расчет критического напряжения ведем по формуле Эйлера.

$$\sigma_{кр}^Э = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}}{127,1^2} = 122,2 \text{ МПа.}$$

Критическая сила составит:

$$P_{кр}^Э = \sigma_{кр}^Э \cdot A = 122,2 \cdot 10^3 \text{ кПа} \cdot 14,82 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 181,1 \text{ кН.}$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{181,1}{100} = 1,81 > 1,5,$$

следовательно, запас устойчивости достаточный.

§ 7. Сложное сопротивление

Для успешного освоения этого раздела студенту требуется повторить простые виды сопротивления: центральное растяжение и сжатие, изгиб, кручение, а также определение возникающих от них напряжений.

Сложным сопротивлением называют такой вид деформации, при котором в поперечном сечении тела возникают не менее двух внутренних силовых факторов (т.е. сумма нескольких простых сопротивлений). Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при нём в сечениях тела и возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Это объясняется тем, что в большинстве случаев расчеты на прочность и жёсткость ведутся без учёта влияния поперечных сил.

Все случаи сложного сопротивления можно разделить на две группы. К первой относятся те из них, при которых в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения, либо влияние касательных напряжений незначительно. К этой группе относятся кривой изгиб, а также внецентренное растяжение и сжатие.

В случаях сложного сопротивления, относящихся ко второй группе, в поперечных сечениях стержня возникают и нормальные, и касательные напряжения, например: изгиб с кручением, растяжение или сжатие с кручением, а также растяжение и сжатие с изгибом и кручением.

Рассмотрим первую группу сложного сопротивления, когда в сечении возникают только нормальные напряжения. Их могут создать только нормальная сила и изгибающие моменты M_x и M_y . При их одновременном действии имеем условие прочности для первой группы сложного сопротивления:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \leq [\sigma]. \quad (7.1)$$

В выражении (7.1):

Нормальная сила N подставляется в это выражение со своим знаком: «+» при растяжении и «-» при сжатии;

M_x и M_y - значения изгибающих моментов относительно главных осей инерции сечения;

I_x и I_y - главные центральные моменты инерции;

x и y - координаты точки поперечного сечения, в которой определяют напряжение;

знаки «плюс» или «минус» перед вторым и третьим слагаемыми зависят от того, где находится точка, в которой определяют напряжение. Если изгибающий момент растягивает сечение в окрестности рассматриваемой точки, то знак «плюс», если сжимает, то «минус».

Если конструкция выполняется из пластичного материала, для которого допускаемое нормальное напряжение при растяжении и сжатии одинаково, т.е. $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, то условие (7.1) проверяется для точки, в которой действует наибольшее по абсолютному значению (по модулю) нормальное напряжение, независимо от того, находится эта точка в растянутой или сжатой зоне сечения. Для хрупких материалов, у которых допускаемое напряжение при сжатии намного больше, чем при растяжении, условие (7.1) проверяется дважды: для самой растянутой и самой сжатой точек:

$$\sigma_p^{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \leq [\sigma_p] \quad (7.2)$$

$$\sigma_{сж}^{\max} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \leq [\sigma_c] \quad (7.3)$$

В прямоугольном сечении при косом изгибе с растяжением или сжатием опасными точками будут являться угловые точки, которые одновременно наиболее удалены от обеих нейтральных осей – x и y . Для этих точек с координатами $(x_{\max}; y_{\max})$ выражение (7.1) записывается в виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_{p(c)}] \quad (7.4)$$

В круглом сечении положение опасной точки находят по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{M_x}{M_y} \right|, \quad (7.5)$$

где α – угол между осью x и радиус-вектором, проведенным к опасной точке. Максимальные напряжения при косом изгибе с растяжением или сжатием в круглом сечении определяют по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} \leq [\sigma_{p(c)}] \quad (7.6)$$

В случае внецентренного растяжения или сжатия прямого бруса линия действия силы P параллельна оси бруса, но не проходит через центр тяжести

поперечного сечения, в результате чего в сечении, кроме нормальной силы, возникают изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} M_x &= P \cdot y_p; \\ M_y &= P \cdot x_p. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь $x_p; y_p$ – координаты точки приложения силы P .

Выражение (3.1) в этом случае удобно переписать в виде:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} \right) \leq [\sigma_{p(c)}] \quad (7.8)$$

где $i_x^2; i_y^2$ – квадраты радиусов инерции поперечного сечения бруса относительно центральных осей X и Y ;

$$\begin{aligned} i_x^2 &= \frac{I_x}{A}, \\ i_y^2 &= \frac{I_y}{A} \end{aligned} \quad (7.9)$$

P – продольная сила (берётся с плюсом при растяжении и с минусом при сжатии бруса;

A – площадь поперечного сечения бруса;

x, y – координаты точки поперечного сечения бруса, где определяют напряжения σ ;

$I_x; I_y$ – главные центральные моменты инерции поперечного сечения относительно осей X и Y .

Все координаты $x_p; y_p; x; y$ берут в главных центральных осях поперечного сечения X и Y .

В случае растяжения и сжатия с одновременным изгибом в сечении часть волокон растянута, а часть – сжата. Разделяет растянутую и сжатую зоны нейтральная линия, на которой нормальные напряжения равны нулю. Чем дальше точка сечения от нейтральной линии, тем большие нормальные напряжения в ней возникают. Положение нейтральной линии определяют, вычисляя длину отрезков, отсекаемых ею на осях X и Y :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}. \quad (7.10)$$

Условия прочности в опасных точках сечения (там, где действуют наибольшие по модулю растягивающие и сжимающие нормальные напряжения), имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{раст}^{\max} &\leq [\sigma_p] \\ |\sigma_{сж}^{\max}| &\leq [\sigma_c]\end{aligned}\quad (7.11)$$

Расчёт на прочность для второй группы сложного сопротивления производится с использованием теорий прочности.

Для пластичных материалов применяются 3-я и 4-я теории прочности.

По третьей теории прочности:

$$\sigma^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7.12)$$

По четвертой теории прочности:

$$\sigma^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7.13)$$

Рассмотрим случай сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении возникают четыре силовых фактора: нормальная сила, два изгибающих момента – M_x и M_y , и крутящий момент $M_{кр}$. Как выше было сказано, действием поперечных сил мы пренебрегаем. Очень важно, что прямоугольное сечение длинной стороной следует располагать в плоскости действия наибольшего изгибающего момента, так, чтобы наибольшему моменту соответствовал наибольший момент сопротивления. Если в сечении $M_x > M_y$, то необходимо, чтобы выполнялось условие $W_x > W_y$. Это означает, что большему воздействию будет соответствовать большая несущая способность.

В прямоугольном сечении при действии крутящего момента касательные напряжения в угловых точках не возникают, а наибольшие касательные напряжения действуют в точках – серединах сторон прямоугольного сечения.

В середине длинной стороны:

$$\tau_h^{\max} = \frac{M_{кр}}{\beta \cdot b^3} \quad (7.14)$$

В середине короткой стороны:

$$\tau_b^{\max} = \gamma \tau_h^{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \gamma}{\beta \cdot b^3} \quad (7.15)$$

В этих точках условие прочности согласно третьей теории имеет вид: в середине длинной стороны (при $M_x > M_y$):

$$\sigma^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\beta \cdot b^3}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (7.16)$$

В середине короткой стороны (при $M_x > M_y$):

$$\sigma^{III} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр} \cdot \gamma}{\beta \cdot b^3}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (7.17)$$

Прочность в угловых точках в стержне из пластичного материала проверяют по выражению:

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (7.18)$$

В круглом сечении, испытывающем кривой изгиб с растяжением или сжатием, при появлении крутящего момента положение опасной точки не изменится, так как максимальные касательные напряжения от $M_{кр}$ возникают по периметру сечения, в том числе и в точке, где действуют наибольшие нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x и M_y .

Получим напряжения в опасной точке, применив третью теорию прочности:

$$\sigma^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_{осевой}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_{\rho}}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (7.19)$$

Пренебрегая продольной силой, напряжения от которой обычно невелики, и учитывая, что $W_{\rho} = 2W_{осевых}$, получим упрощенное выражение:

$$\sigma^{III} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}}{W_{осевой}} = \frac{M_{расч}^{III}}{W_{осевой}} \leq [\sigma], \quad (7.20)$$

где $M_{расч}^{III}$ – расчетный момент по третьей теории прочности.

При тех же условиях для четвертой теории прочности формула (7.13) получит вид:

$$\sigma^{IV} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_{осевой}} = \frac{M_{расч}^{IV}}{W_{осевой}} \leq [\sigma] \quad (7.21)$$

здесь $M_{расч}^{IV}$ – расчетный момент по четвертой теории прочности.

ПРИМЕР выполнения задачи 3 по сопротивлению материалов.

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

Условие задачи:

Короткий чугунный стержень сжимается продольной силой P , приложенной в точке A (рис.7.1).

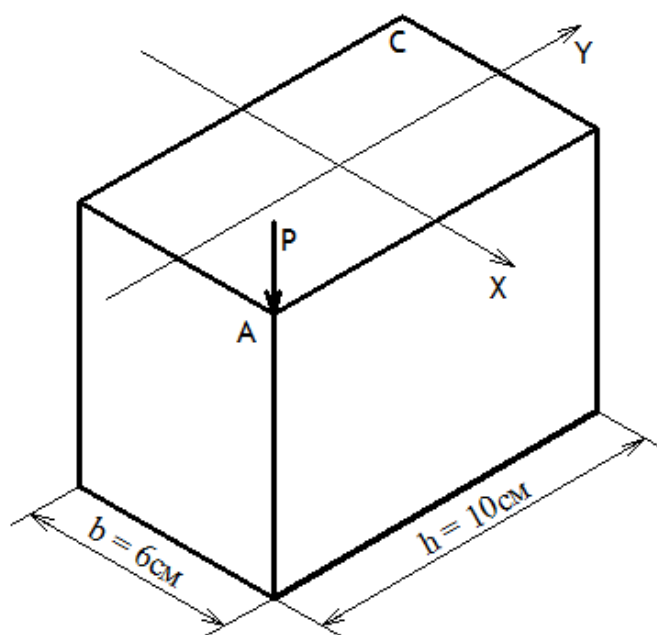


Рисунок 7.1. К расчёту прямого бруса на внецентренное сжатие

Требуется:

1. вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении;
2. найти допускаемую нагрузку $[P]$ из условия прочности

Исходные данные: $b=6$ см; $h=10$ см. Допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для чугуна принять: $[\sigma_p]=30$ МПа, $[\sigma_c]=80$ МПа.

Решение.

Главные центральные оси X и Y поперечного сечения в рассматриваемом примере совпадают с осями симметрии сечения, следовательно, они являются главным центральными осями. Координаты точки приложения силы P в главных осях $A(3;-5)$, т. е. $x_p = 3$ см; $y_p = -5$ см.

Площадь сечения: $A = bh = 6 \cdot 10 = 60 \text{ см}^2$.

Вычисляем моменты инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{6^3 \cdot 10}{12} = 180 \text{ см}^4$$

По формулам (3.9) находим квадраты радиусов инерции поперечного сечения

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{500}{60} = 8,333 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{180}{60} = 3 \text{ см}^2.$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях X и Y

Определим по формулам (3.10):

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{3}{3} = -1 \text{ см};$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{8,333}{-5} = 1,67 \text{ см}.$$

Следовательно, нейтральная линия проходит через точки K и L с координатами:

$$K(a_x; 0) = (-1; 0); \quad L(0; a_y) = (0; 1,67).$$

Находим опасные точки. Так как нормальные напряжения σ , согласно формуле (3.8), линейно зависят от координат x , y , то максимальные по модулю напряжения возникнут в точках A и C поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии.

В области поперечного сечения, расположенной ниже нейтральной линии, возникнут сжимающие напряжения. В точке A они будут наибольшими.

По формуле (3.8)

$$\sigma_A = \frac{(-P)}{A} \left(1 + \frac{x_p \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_A}{i_x^2} \right) = \frac{(-P)}{60} \left(1 + \frac{3 \cdot 3}{3} + \frac{(-5) \cdot (-5)}{8,333} \right) = -0,117P$$

Выше нейтральной линии сечение растянуто. Поэтому в точке C действуют наибольшие растягивающие напряжения:

$$\sigma_C = \frac{(-P)}{A} \left(1 + \frac{x_p \cdot x_C}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_C}{i_x^2} \right) = \frac{(-P)}{60} \left(1 + \frac{3 \cdot (-3)}{3} + \frac{(-5) \cdot (+5)}{8,333} \right) = -0,0833P$$

Определим допускаемую нагрузку на стержень из условия прочности:

Из условия прочности при сжатии:

$$|\sigma_A| \leq [\sigma_c]$$

$$0,117P \leq 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН} / \text{см}^2,$$

$$P \leq 68,4 \text{ кН}.$$

Из условия прочности при растяжении:

$$|\sigma_c| \leq [\sigma_p]$$

$$0,0833P \leq 30 \text{ МПа} = 3 \text{ кН} / \text{см}^2,$$

$$P \leq 36 \text{ кН}.$$

В качестве допускаемой нагрузки примем наименьшее из найденных значений, удовлетворяющее обоим условиям:

$$[P] = 36 \text{ кН}.$$

Примечание: при расчете брусьев сложного поперечного сечения вычисление осевых моментов инерции $I_x; I_y$ следует производить с использованием таблицы геометрических характеристик простых фигур (см. приложение 2).

ПРИМЕР выполнения задачи 4 по сопротивлению материалов.

ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ ЛОМАНОВОГО СТЕРЖНЯ

Условие задачи:

Для ломаного стержня круглого поперечного сечения, загруженного вертикальной нагрузкой (рис.7.2), требуется:

1. построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
2. установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

Исходные данные: $\alpha=1,8$.

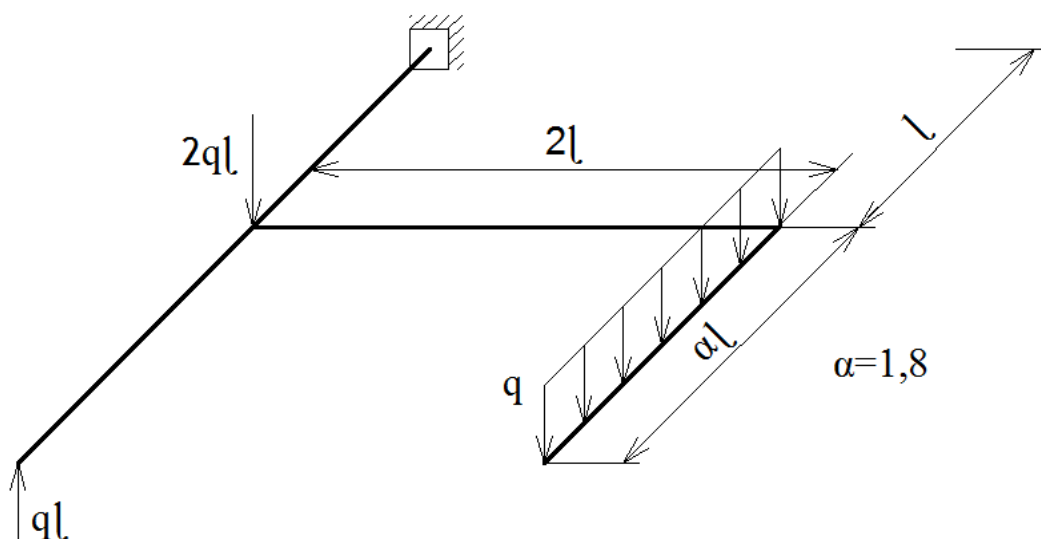


Рисунок 7.2. К задаче по изгибу с кручением ломаного стержня

Решение.

Стержень имеет четыре участка. В пределах каждого участка проводим сечение на расстоянии z от его границы, составляем уравнения изгибающих и крутящих моментов в сечении. Устанавливаем правило знаков: положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна стержня, положительный крутящий – закручивает стержень по часовой стрелке, если смотреть со стороны внешней нормали к сечению. Эпюру изгибающего момента откладываем со стороны растянутых волокон.

Внутренние усилия на участках определяем методом сечений.

Участок 1. $0 \leq z \leq l$

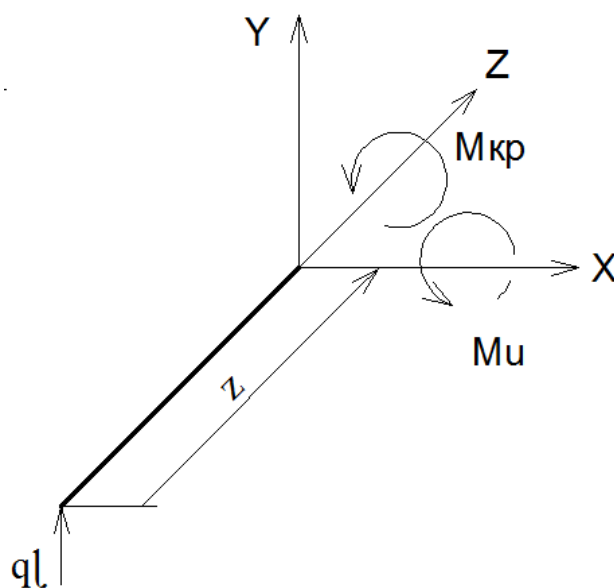


Рисунок 7.3. К расчету первого участка

Составляем уравнения моментов относительно осей X и Z. Относительно оси Y в рассматриваемой задаче момент отсутствует, так как все нагрузки параллельны этой оси.

$$\underline{\sum M_x = 0.}$$

$$M_x - ql \cdot z = 0$$

$M_x = ql \cdot z$, изменяется по закону прямой линии, знак «+», следовательно, растянуты нижние волокна.

При $z=0, \rightarrow M_x = 0.$

При $z=\alpha l \rightarrow M_x = ql \cdot \alpha l = \alpha \cdot ql^2 = 1,8ql^2.$

$$\underline{\sum M_z = 0.}$$

$$M_{кр} = 0.$$

Участок 2. $0 \leq z \leq l$

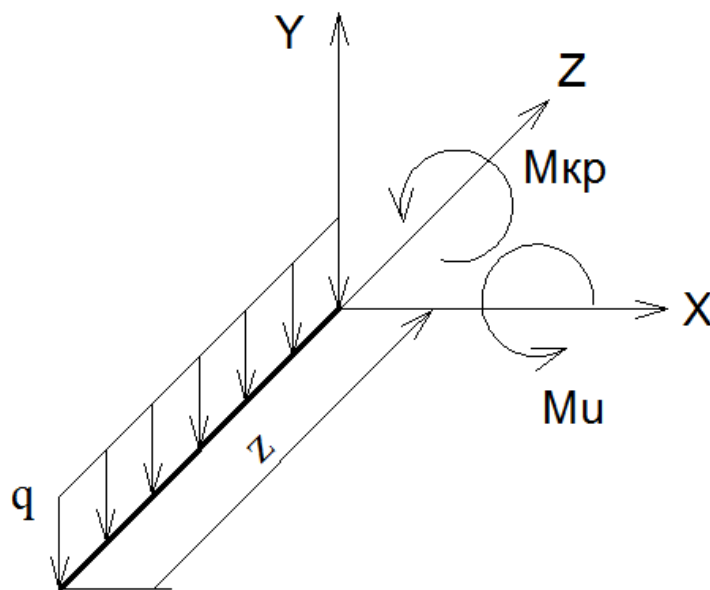


Рисунок 7.4. К расчету второго участка

Уравнения моментов имеют вид:

$$\underline{\sum M_x = 0.}$$

$$M_x + qz \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$M_x = -q \frac{z^2}{2}$, изменяется по закону квадратной параболы, знак «-», следовательно, растянуты верхние волокна.

При $z=0, \rightarrow M_x = 0$.

При $z=\alpha l \rightarrow M_x = q \cdot \frac{(\alpha l)^2}{2} = -1,62ql^2$.

$$\underline{\sum M_z = 0.}$$

$$M_{кр} = 0.$$

Участок 3.

Рассмотрим правую отсечённую часть.

$$0 \leq z \leq 2l$$

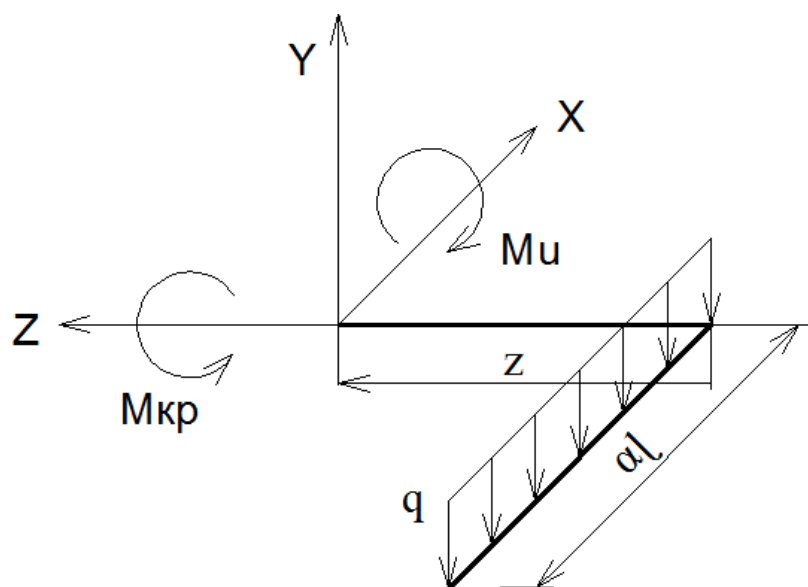


Рисунок 7.5. К расчету третьего участка

$$\underline{\sum M_x = 0.}$$

$$M_x + q \cdot \alpha l \cdot z = 0$$

$M_x = -q \alpha l z$, изменяется по закону прямой, знак «-», следовательно, растянуты верхние волокна.

При $z=0, \rightarrow M_x = 0$.

При $z=\alpha l \rightarrow M_x = q \cdot \alpha l \cdot 2l = -3,6ql^2$.

$$\underline{\sum M_z = 0.}$$

$$M_{кр} + q \cdot \alpha l \cdot \frac{\alpha l}{2} = 0.$$

$M_{кр} = -q \cdot \frac{(\alpha l)^2}{2} = -1,62ql^2$, – постоянное значение, вращает против часовой стрелки.

Участок 4.

Поскольку опорные реакции не были нами определены, рассматриваем ближнюю часть конструкции.

$$0 \leq z \leq l$$

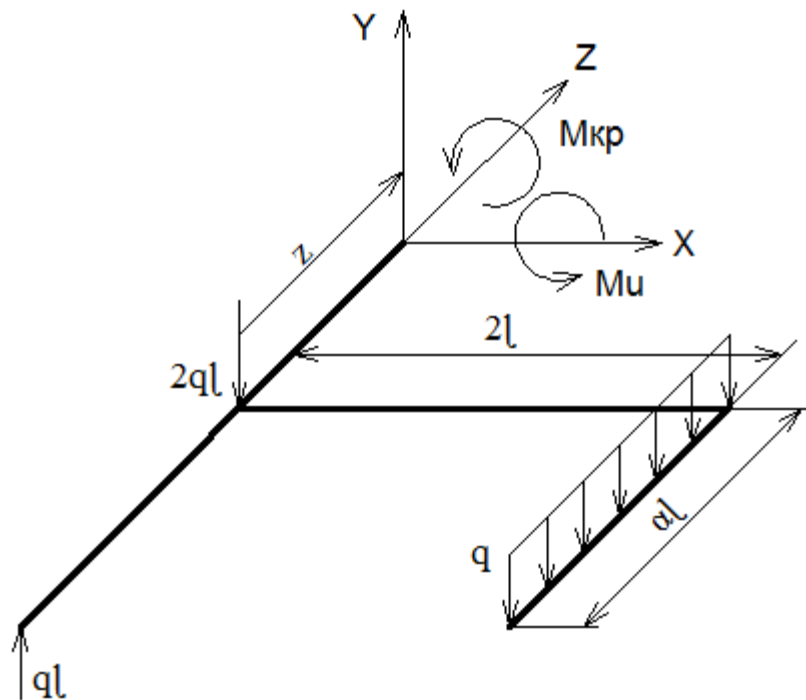


Рисунок 7.6. К расчету четвертого участка

$$\underline{\sum M_x = 0.}$$

$$M_x = q \cdot \alpha l^2 + qlz - 2qlz - q \cdot \alpha lz - q \frac{(\alpha l)^2}{2} = 0,18ql^2 - 2,8qlz \quad - \quad \text{закон}$$

изменения прямой линии.

При $z=0, \rightarrow M_x = 0,18ql^2$, знак «+», следовательно, растянуты нижние волокна. Эпюру M_x откладываем снизу.

При $z=l \rightarrow M_x = -2,62ql^2$, знак «-», эпюру M_x откладываем сверху.

$$\sum M_z = 0.$$

$$M_{кр} - q \cdot \alpha l \cdot 2l = 0.$$

$M_{кр} = -2q \cdot \alpha l^2 = -3,6ql^2$, – постоянное значение, вращает против часовой стрелки. Строим эпюры изгибающих и крутящих моментов.

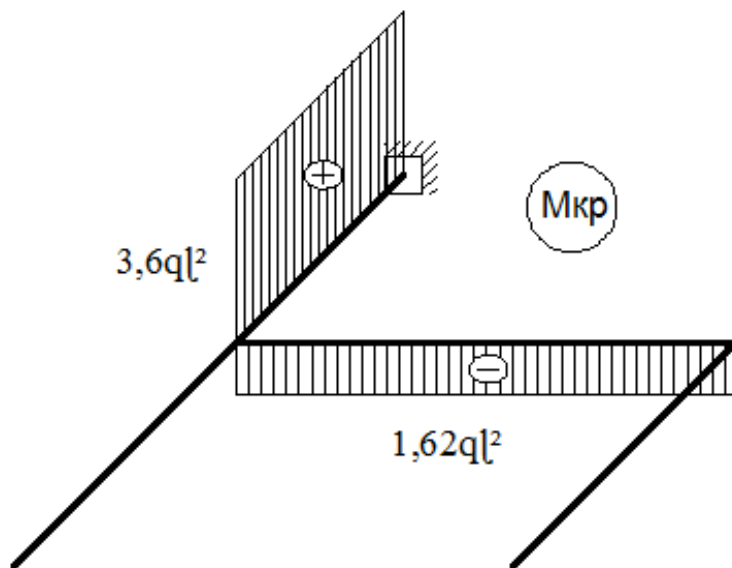


Рисунок 7.7. Эпюра крутящих моментов

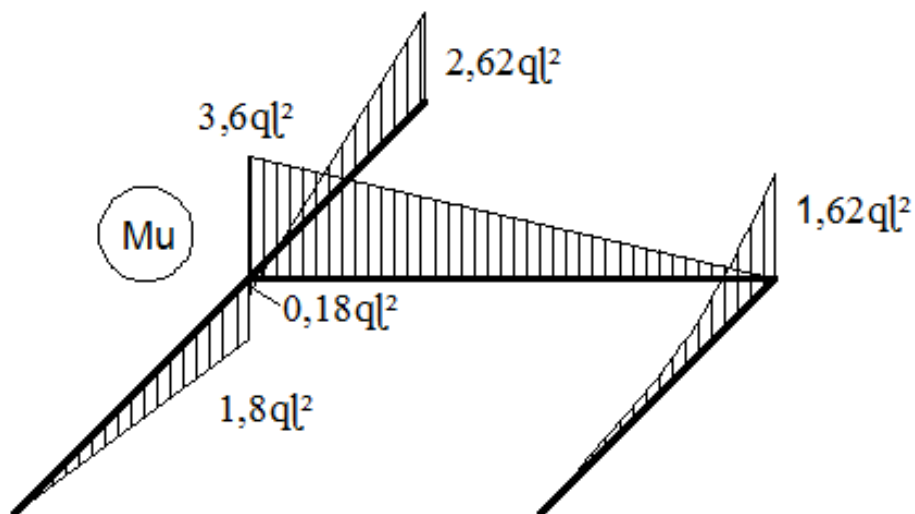


Рисунок 7.8. Эпюра изгибающих моментов

Определяем наиболее опасное сечение. В данной задаче предположительно два опасных сечения:

Сечение 1. Вблизи точки *A* на третьем участке:

$$|M_x| = 3,6ql^2.$$

$$|M_{кр}| = 1,62ql^2.$$

Сечение 2. Вблизи опоры на четвертом участке.

$$|M_x| = 2,62ql^2,$$

$$|M_{кр}| = 3,6ql^2.$$

Определим расчётный момент по IV гипотезе прочности для обоих сечений. Формула приведённого момента в случае круглого поперечного сечения (3.20).

$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{кр}^2}.$$

В нашей задаче $M_y = 0$, формула расчетного момента упростится:

$$M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_x^2 + 0,75M_{кр}^2}.$$

Имеем:

Сечение 1.

$$M_{расч1}^{IV} = \sqrt{(3,6ql^2)^2 + 0,75 \cdot (1,62ql^2)^2} = 3,87ql^2.$$

Сечение 2.

$$M_{расч2}^{IV} = \sqrt{(2,62ql^2)^2 + 0,75 \cdot (3,6ql^2)^2} = 4,07ql^2.$$

$$M_{расч2}^{IV} > M_{расч1}^{IV}$$

Таким образом, расчетный момент для рассмотренной конструкции равен

$$M_{расч}^{IV} = 4,07ql^2.$$

8. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ №1 и №2 ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ДЛЯ ВСЕХ ПРОФИЛЕЙ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Варианты задания выбираются по последним четырем цифрам шифра зачетной книжки. Например:

шифр – 1 0 | 5 | 4 | 3 | 6
буквы – | в | г | д | е

Буквы обозначают номер столбца, цифры шифра – номер строки. Например, для **Задачи 1**, Контрольной работы № 1, вариант задания выбирается по таблице 1 следующим образом:

Тип сечения VI, Толщина листа $b=16$ мм, Уголок равнобокий – 90x90x8мм, Номер двутавра – 16, Номер швеллера – 24.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1. Определение геометрических характеристик плоской фигуры

Для поперечного сечения составного стержня требуется:

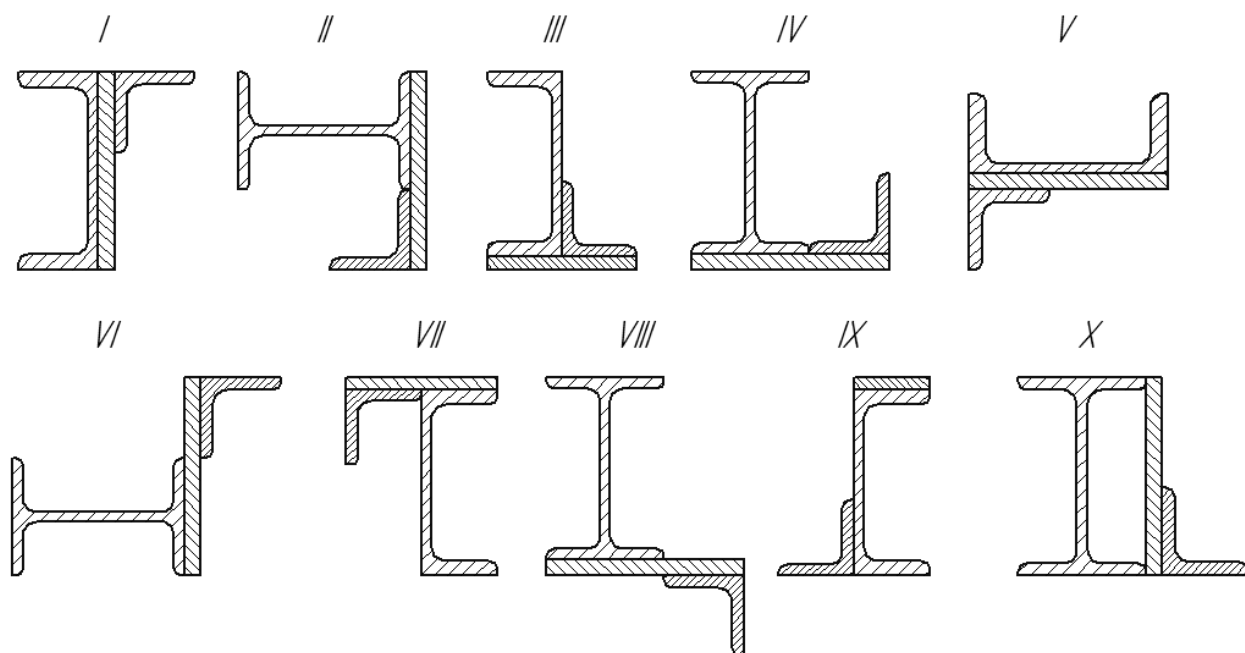
- 1) Определить координаты центра тяжести;
- 2) Вычислить центральные моменты инерции;
- 3) Найти направления главных центральных осей инерции;
- 4) Определить главные центральные моменты инерции и радиусы инерции, построить эллипс инерции.

Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1

№ строки	Тип сечения	Толщина листа b , мм	Уголок равнобокий, мм	Номер двутавра	Номер швеллера
1	I	8	80x80x6	12	14
2	II	10	80x80x8	14	16
3	III	12	90x90x6	16	18
4	IV	14	90x90x8	18	20
5	V	16	100x100x10	20	22
6	VI	18	100x100x12	22	24
7	VII	20	125x125x10	24	27
8	VIII	22	125x125x12	27	30
9	IX	24	140x140x10	30	33
0	X	26	140x140x12	33	36
	е	в	г	д	е

Типы сечений к задаче 1.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 2. Центральное растяжение и сжатие

На короткую чугунную опору действуют растягивающие и сжимающие нагрузки. Требуется:

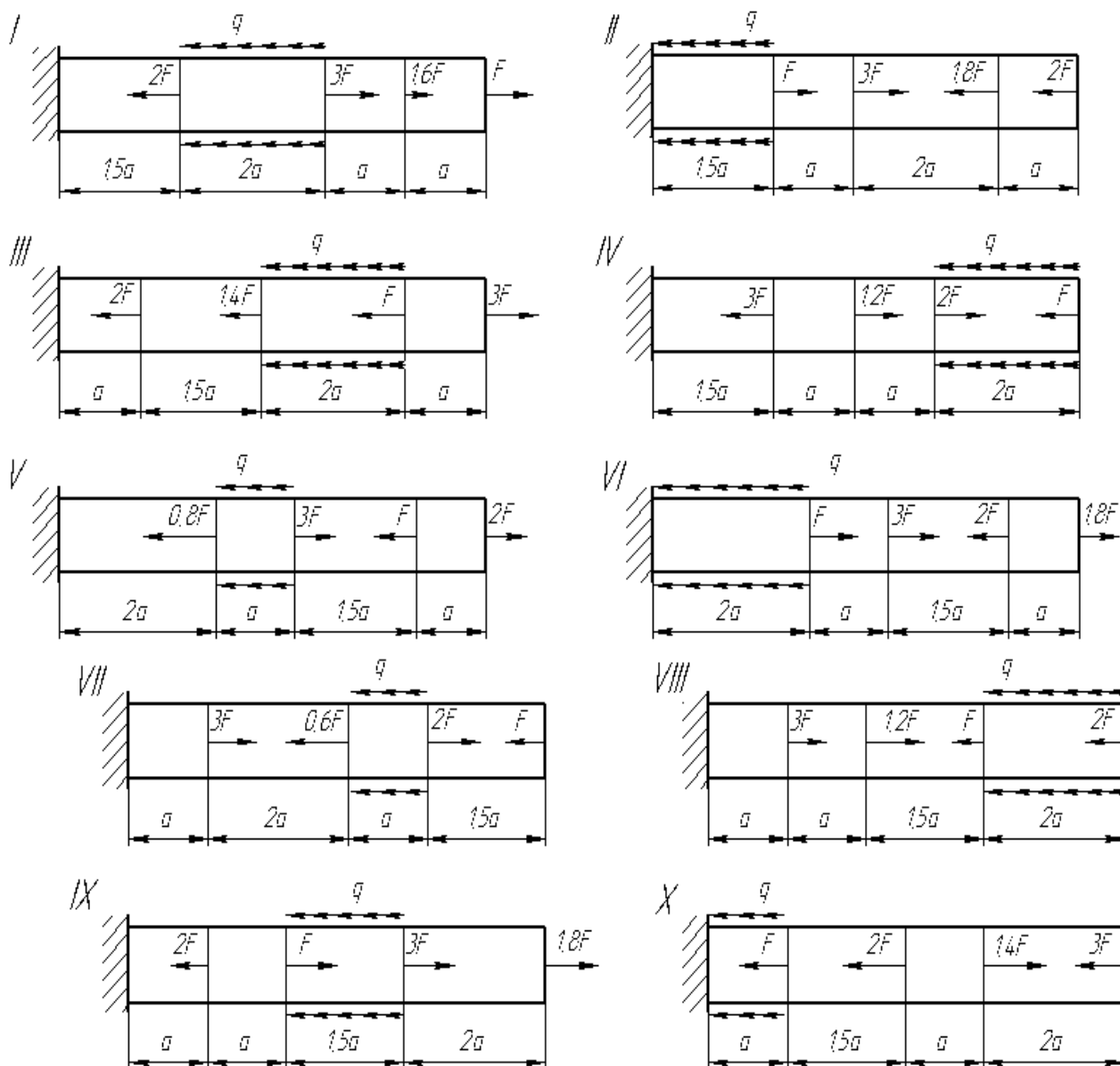
- 1) определить опорную реакцию;
- 2) построить эпюру внутренних продольных сил;
- 3) из расчета на прочность определить для каждого участка конструкции необходимый размер поперечного сечения заданной формы (круглая, квадратная), округлив его до стандартного значения (кратного 2 мм или 5 мм);
- 4) начертить в выбранном масштабе эскиз опоры;
- 5) найти на каждом участке напряжения и построить эпюру напряжений;
- 6) найти на каждом участке абсолютные продольные деформации и построить эпюру перемещений;
- 7) для заданного участка вычислить абсолютную поперечную деформацию.

Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

№ строки	схема	F, кН	q, кН/м	a, м	$[\sigma_p]$ МПа	$[\sigma_c]$ МПа	$E \times 10^5$ МПа	μ	Форма поперечного сечения	№ участка для определ. деформации
1	I	50	95	0,18	30	90	0,8	0,22	кругл.	1
2	II	55	90	0,20	34	94	0,9	0,22	квадр.	2
3	III	60	85	0,22	38	98	1,0	0,23	кругл.	3
4	IV	65	80	0,24	42	102	1,1	0,24	квадр.	4
5	V	70	75	0,26	46	106	1,2	0,25	кругл.	1
6	VI	75	70	0,28	50	110	1,3	0,25	квадр.	2
7	VII	80	65	0,30	54	114	1,4	0,26	кругл.	3
8	VIII	85	60	0,32	58	118	1,5	0,26	квадр.	4
9	IX	90	55	0,34	62	122	1,6	0,27	кругл.	1
0	X	95	50	0,36	65	126	1,7	0,27	квадр.	2
	е	в	г	д	е	в	г	д	е	в

Схемы к задаче 2.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задача 1. Кручение

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 .
Требуется:

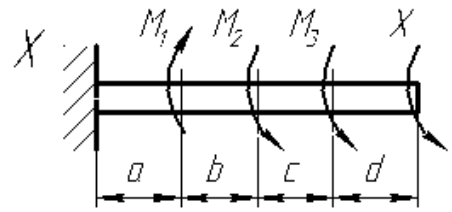
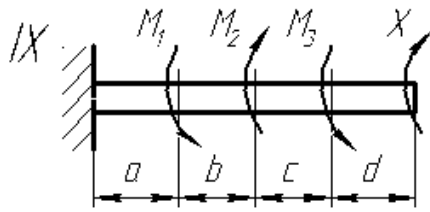
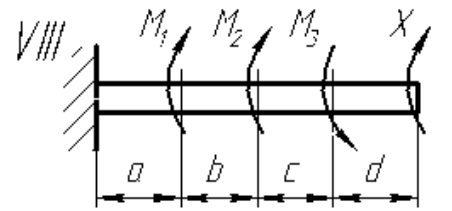
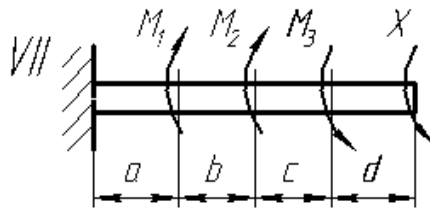
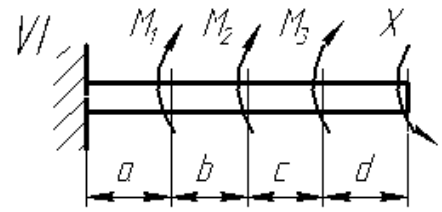
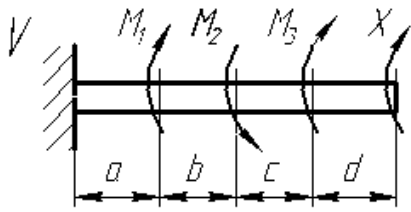
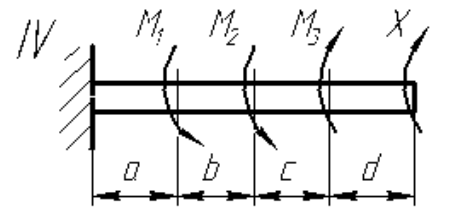
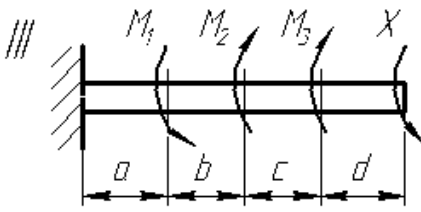
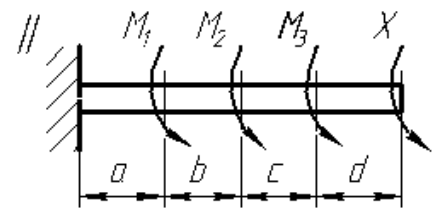
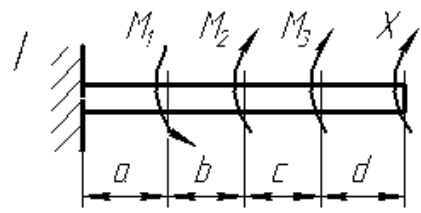
- 1) Установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
- 2) Для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) При заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до стандартного значения (кратного 5 мм);
- 4) Построить эпюру углов закручивания;
- 5) Найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Исходные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3

№ строки	схема	Расстояния, м				Моменты, кН·м			$[\tau]$, МПа
		a	b	c	d	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,0	2,0	1,0	2,0	3,0	2,0	1,0	35
2	II	1,1	2,1	1,1	2,1	3,1	2,1	1,1	40
3	III	1,2	2,2	1,2	2,2	3,2	2,2	1,2	45
4	IV	1,3	2,3	1,3	2,3	3,3	2,3	1,3	50
5	V	1,4	2,4	1,4	2,4	3,4	2,4	1,4	55
6	VI	1,5	2,5	1,5	2,5	3,5	2,5	1,5	60
7	VII	1,6	2,6	1,6	2,6	3,6	2,6	1,6	65
8	VIII	1,7	2,7	1,7	2,7	3,7	2,7	1,7	70
9	IX	1,8	2,8	1,8	2,8	3,8	2,8	1,8	75
0	X	1,9	2,9	1,9	2,9	3,9	2,9	1,9	80
	е	в	г	д	е	в	г	д	е

Схемы к задаче 1.



Задача 2. Прямой поперечный изгиб балок

Для заданных двух схем балок: а) консоль и б) балка на двух опорах требуется:

1. Определить опорные реакции и выполнить проверку реакций;
2. Разбить расчетную схему на участки и записать выражения Q_y и M_x для каждого участка в общем виде;
3. Построить эпюры Q_y и M_x , если необходимо, найти M_{\max} .
4. Для схемы а) подобрать деревянную балку круглого поперечного сечения;
5. Для схемы б):
 - из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе определить требуемый осевой момент сопротивления поперечного сечения W_x ;
 - запроектировать сечение балки: а) круглое диаметром d ; б) квадратное $a \times a$; в) прямоугольное с соотношением сторон h/b ; г) из двух швеллеров;
 - д) двутавровое; е) кольцевое с соотношением диаметров d/D .
 - Составить сравнительную таблицу подобранных сечений. Сделать вывод об их экономической эффективности;
 - Для двутаврового сечения выполнить проверку прочности по III гипотезе прочности.

Исходные данные представлены в таблице 4.

Таблица 4

№ строки	схема	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	расстоян ие, м		Расстояние в долях пролета			[σ], МПа		$\frac{h}{b}$	$\frac{d}{D}$
					l_1	l_2	$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$	схема а)	схема б)		
1	I	8	10	4	1,0	1	10	6	1	6	160	1,5	0,8
2	II	10	12	6	1,2	2	9	7	2	6	162	1,5	0,9
3	III	12	14	8	1,4	3	8	8	3	7	164	2,0	0,8
4	IV	14	16	10	1,6	4	7	9	4	7	166	2,0	0,9
5	V	16	18	12	2,8	5	6	10	5	8	168	2,5	0,8
6	VI	18	20	14	2,0	6	5	6	1	8	170	2,0	0,9
7	VII	20	22	16	2,2	7	4	7	2	9	172	2,5	0,8
8	VIII	22	24	18	2,4	8	3	8	3	9	174	3,0	0,9
9	IX	24	26	20	2,6	9	2	9	4	10	176	3,0	0,8
0	X	26	28	22	2,8	10	1	10	5	10	178	3,5	0,9
	е	в	г	д	е	в	г	д	е	в	г	д	е

Схема к задаче 2а).

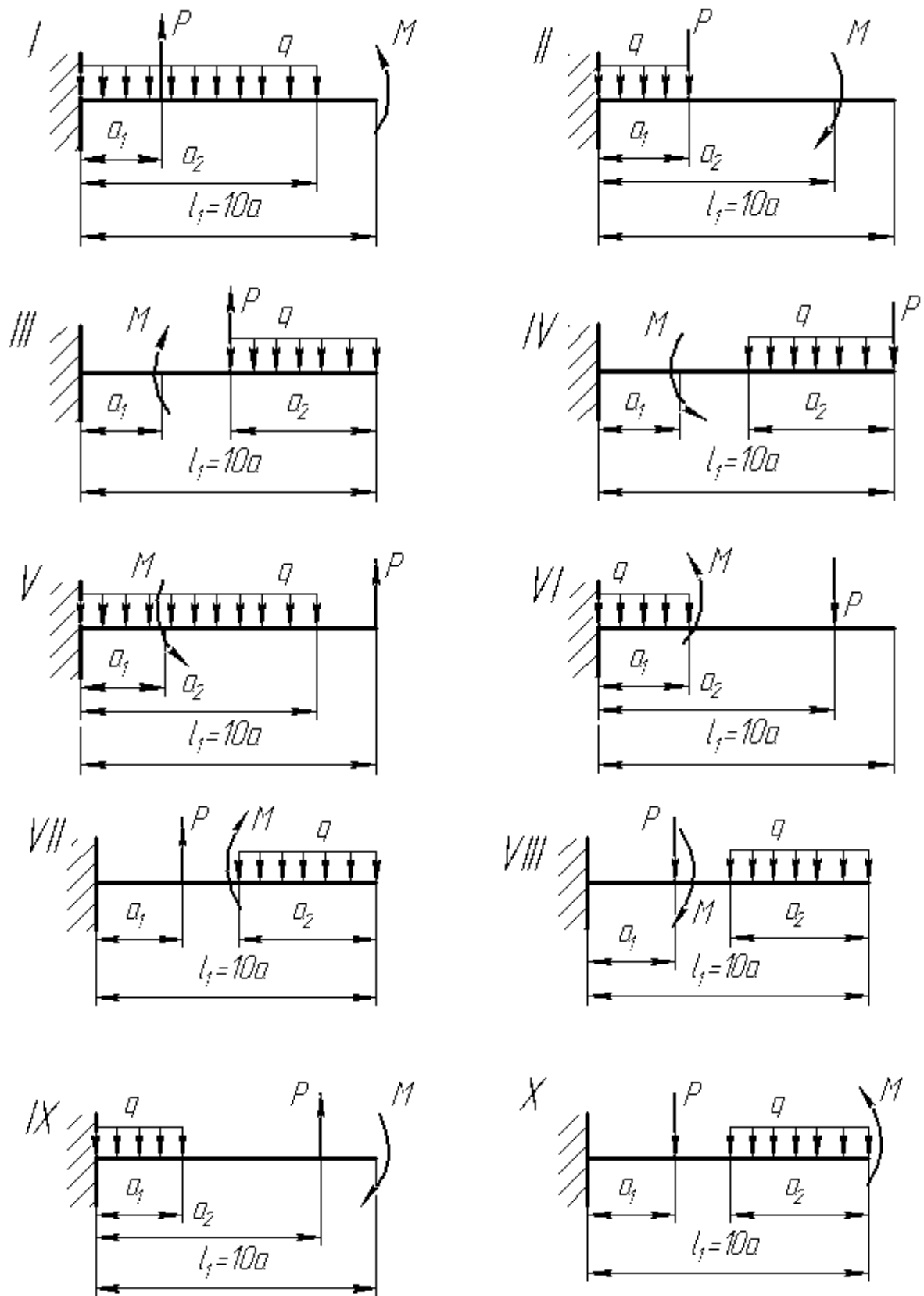
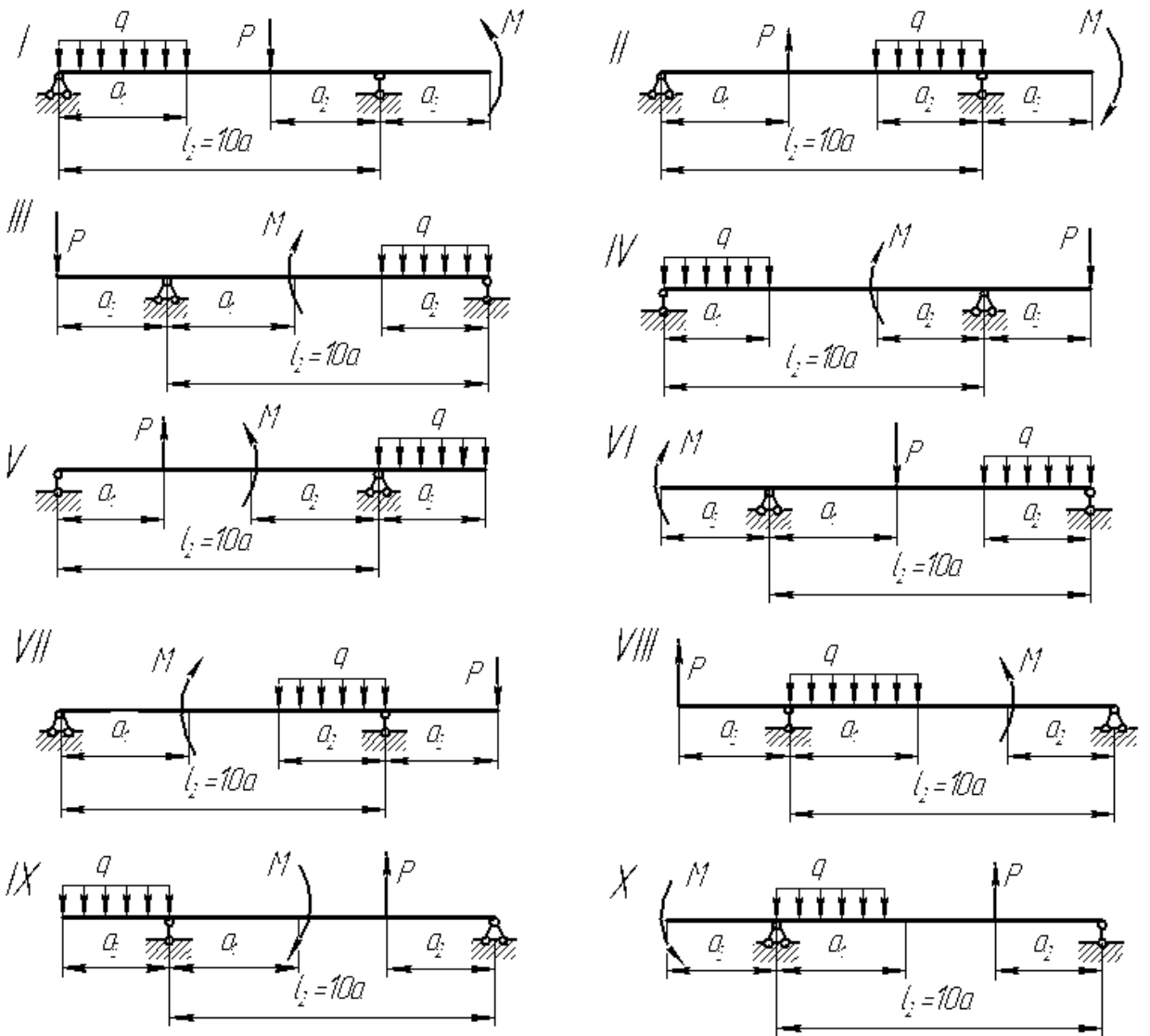


Схема к задаче 2б)



**9. ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ №1 и №2
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ
ДЛЯ ПРОФИЛЯ «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ
СТРОИТЕЛЬСТВО» ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ**

Варианты задания выбирается по последним четырем цифрам шифра зачетки.
Например:

шифр –	1	0	5	4	3	6
буквы –			в	г	д	е

Буквы обозначают номер столбца, цифры шифра – номер строки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 по сопротивлению материалов

Задача 1. Изгиб статически неопределимой балки

На балку, изображенную на схеме, действуют распределенная нагрузка q , сосредоточенные силы $P = \alpha ql$ и $F = \beta ql$. Требуется:

- 5) Найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
- 6) Построить эпюры Q_y и M_x ;
- 7) Построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две – на консоли.

Исходные данные представлены в таблице 5.

Указания: Для ответа на первый вопрос нужно выбрать основную систему в виде свободно лежащей на двух опорах балки и составить уравнение деформаций, выражающее мысль, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента равен нулю.

Можно также решить задачу иначе, составив два уравнения: 1) уравнение статики в виде суммы моментов всех сил относительно правой опоры; 2) уравнение метода начальных параметров, выражающее мысль, что прогиб на правой опоре равен нулю. Из этих уравнений можно найти изгибающий момент и реакцию на первой опоре.

Для ответа на третий вопрос целесообразнее всего использовать метод начальных параметров, так как два начальных параметра (y_0 и θ_0) известны, а

два других (M_0 и Q_0) будут найдены в процессе выполнения первых двух пунктов контрольной работы.

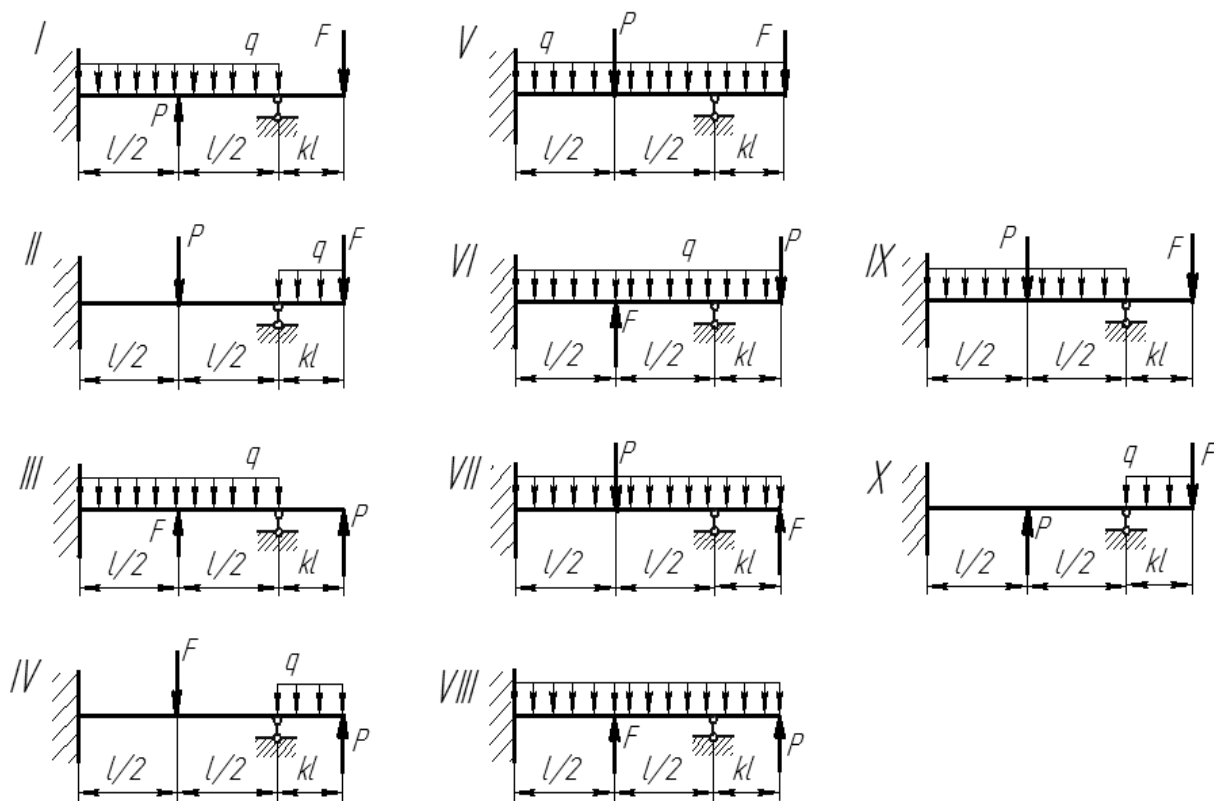
При построении эпюры прогибов надо учесть, что упругая линия балки обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, и выпуклостью вверх там, где он отрицательный. Нулевым точкам эпюры M соответствуют точки перегиба упругой линии.

Исходные данные к задаче 1

Таблица 5

№ строки	Схема	α	β	k
1	I	0,1	0,1	0,30
2	II	0,2	0,2	0,35
3	III	0,3	0,3	0,40
4	IV	0,4	0,4	0,45
5	V	0,5	0,5	0,50
6	VI	0,6	0,6	0,55
7	VII	0,7	0,7	0,60
8	VIII	0,8	0,8	0,65
9	IX	0,9	0,9	0,70
0	X	1,0	1,0	0,75
	е	в	г	д

Схемы к задаче 1.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 по сопротивлению материалов

Задача 2. Устойчивость

Стальной стержень длиной l сжимается силой P . Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $[\sigma]=160\text{МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$);
2. Найти значение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Исходные данные представлены в таблице 6.

Общие исходные данные:

Материал стержня – Сталь 3.

модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$;

$a = 310\text{МПа}$; $b = 1,14\text{МПа}$;

$\lambda_0 = 60$; $\lambda_{пред} = 100$.

Предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$

Исходные данные к задаче 2

Таблица 6

№ строки	Форма сечения стержня	P, кН	l, м	Схема закрепления концов стержня
1	I	100	2,1	I
2	II	150	2,2	II
3	III	200	2,3	III
4	IV	250	2,4	IV
5	V	300	2,5	V
6	VI	350	2,6	VI
7	VII	400	2,7	I
8	VIII	450	2,8	II
9	IX	500	2,9	III
0	X	550	3,0	IV
	е	в	г	д

Форма сечения стержня к задаче 2.

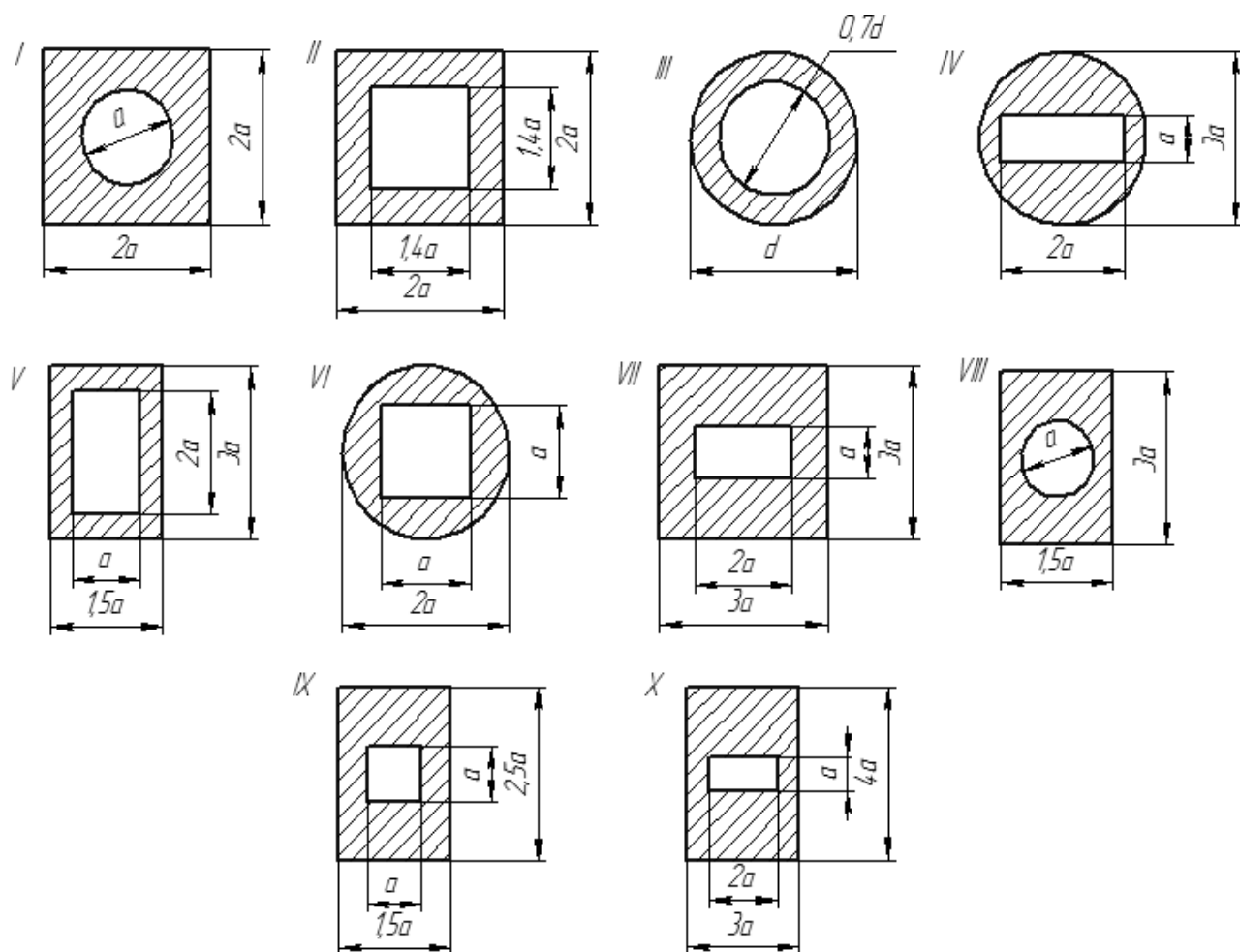
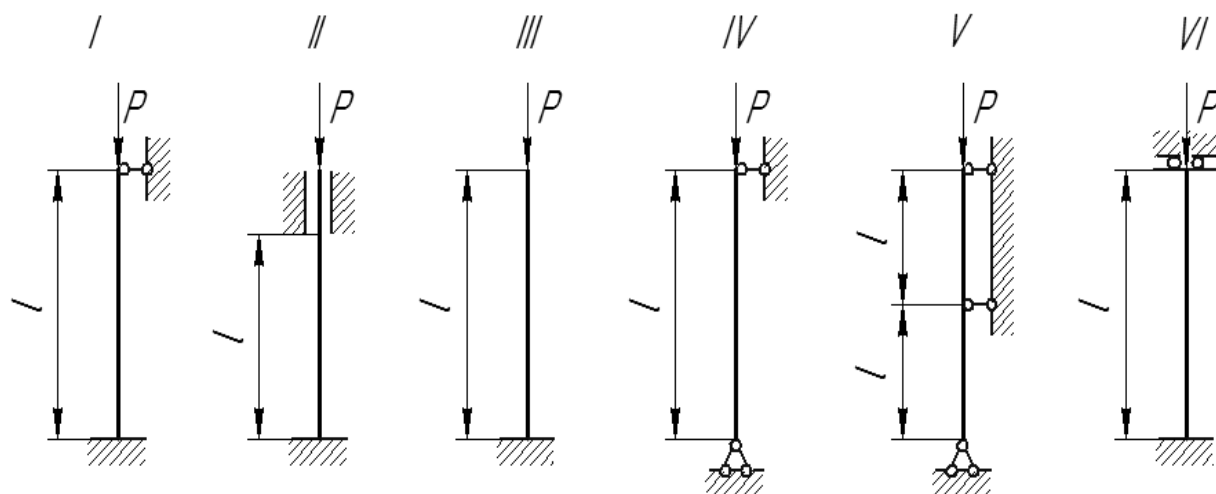


Схема закрепления концов стержня к задаче 2.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 по сопротивлению материалов

Задача 3. Сложное сопротивление (изгиб с кручением)

На схеме изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости, с прямыми углами в точках A и B . На стержень действует вертикальная нагрузка.

Требуется:

1. Построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;
2. Установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

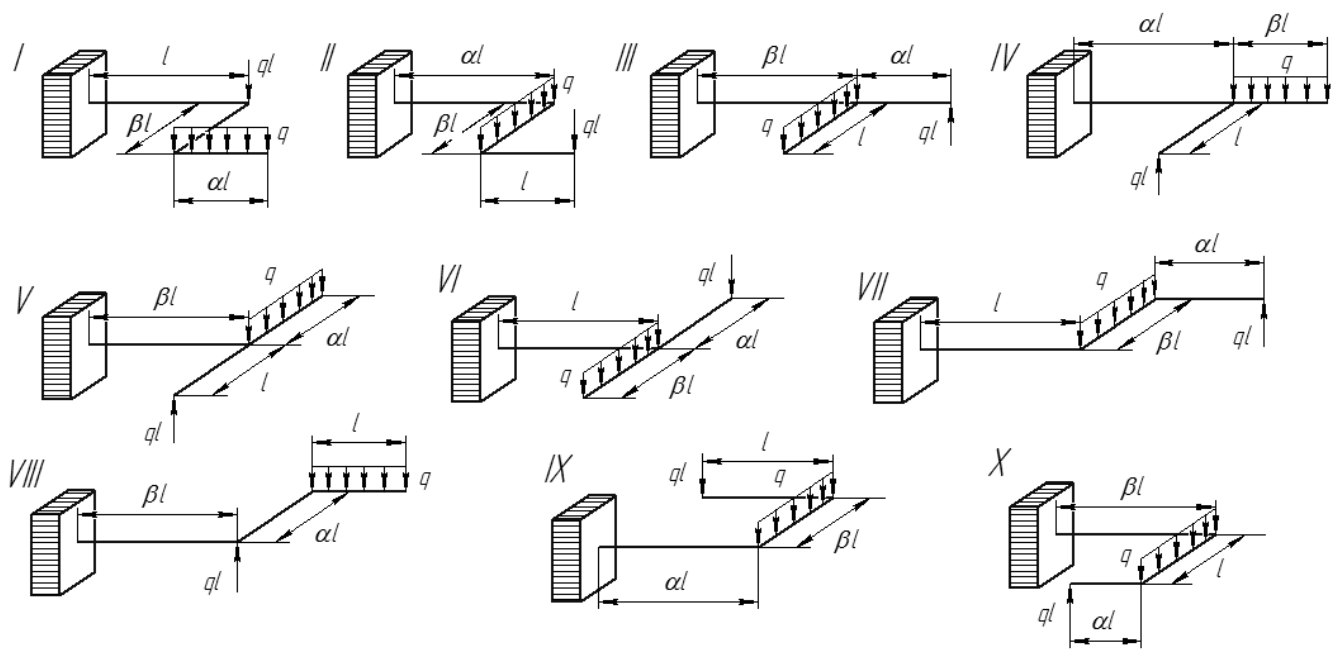
Исходные данные представлены в таблице 7.

Исходные данные для задачи 3

Таблица 7

№ строки	Схема	α	β
1	I	0,5	0,5
2	II	0,6	0,6
3	III	0,7	0,7
4	IV	0,8	0,8
5	V	0,9	0,9
6	VI	1,0	1,0
7	VII	1,1	1,1
8	VIII	1,2	1,2
9	IX	1,3	1,3
0	X	1,4	1,4
	е	д	г

Схемы к задаче 3.



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 по сопротивлению материалов

Задача 4. Внецентренное растяжение-сжатие

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на схеме, сжимается продольной силой P , приложенной в точки A . Требуется:

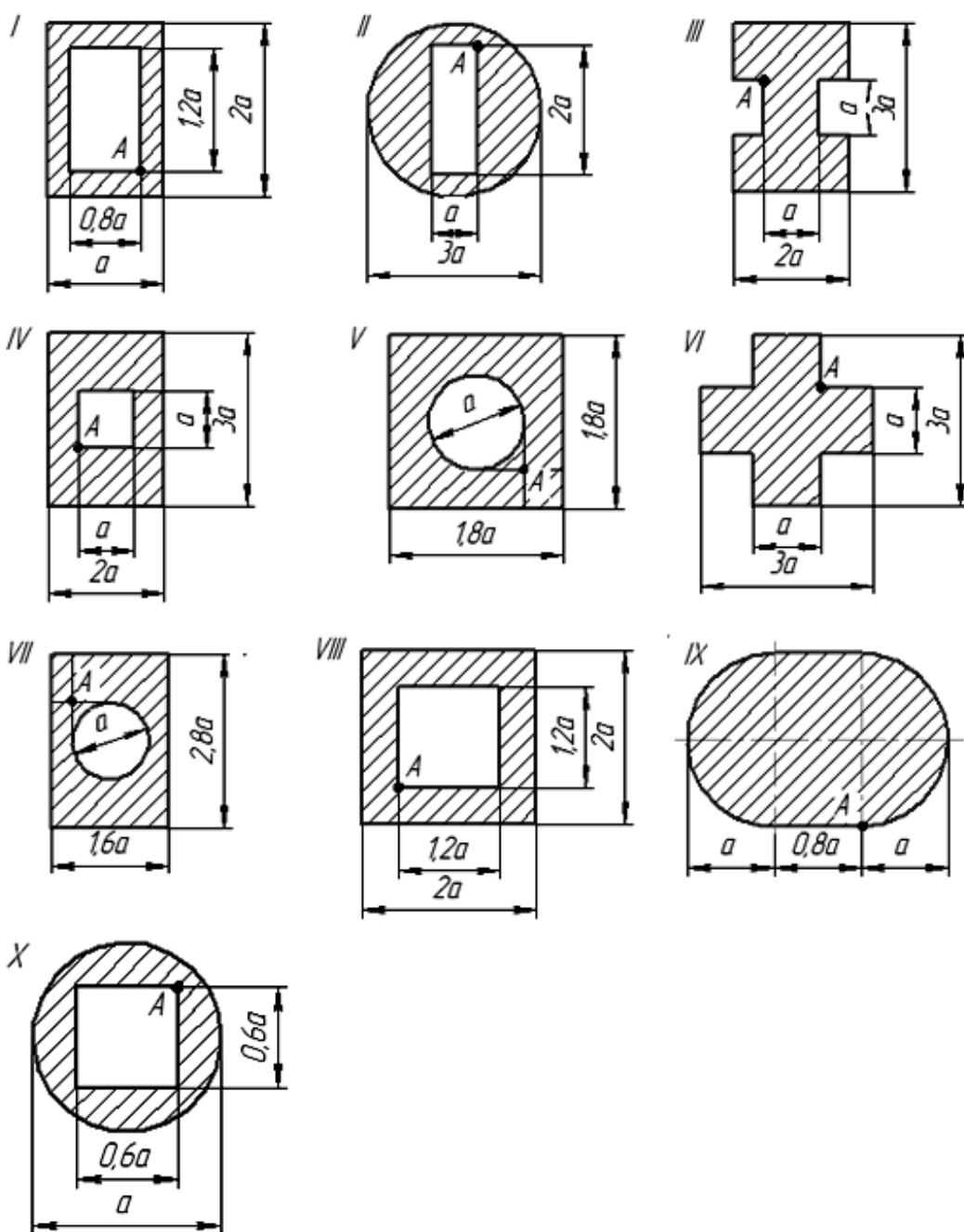
4. Вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P и размеры сечения;
5. Найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_C]$ и на растяжение $[\sigma_P]$.

Исходные данные представлены в таблице 8.

Таблица 8

№ строки	схема	a , см	$[\sigma_C]$	$[\sigma_P]$
			МПа	
1	I	2	60	21
2	II	3	70	22
3	III	4	80	23
4	IV	5	90	24
5	V	6	100	25
6	VI	7	110	26
7	VII	8	120	27
8	VIII	9	130	28
9	IX	10	140	29
0	X	11	150	30
	е	д	г	в

Схемы к задаче 4



Вопросы для закрепления знаний по темам

Тема «Геометрические характеристики плоских фигур»

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси?
2. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?
3. Какова размерность статического момента сечения?
4. Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
5. Как определяются координаты центра тяжести простых и сложных сечений?
6. Какова размерность моментов инерции сечения?
7. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
8. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника относительно оси совпадающей с одной из его сторон, и относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
9. Чему равен осевой момент инерции круга относительно оси, проходящей через его центр тяжести? То же кольца?
10. Чему равен полярный момент инерции круга относительно его центра? То же кольца?
11. Теорема о параллельном переносе осей.
12. В плоскости сечения проведён ряд параллельных осей, относительно какой из них осевой момент инерции имеет наименьшее значение?
13. Что такое главные центральные моменты инерции?
14. Какие оси называют главными центральными осями инерции?
15. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных центральных осей?
16. В каких случаях можно без вычисления определить положение главных осей?
17. В какой последовательности определяют значения главных центральных моментов инерции сложного сечения?
18. Как определяются осевые и полярный моменты сопротивления? Какова их размерность?
19. Можно ли вычислить момент сопротивления сложной фигуры как сумму моментов сопротивления отдельных простых фигур?

Тема «Центральное растяжение и сжатие»

1. Какие случаи деформации стержня называют центральным растяжением и сжатием?
2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении стержня?
3. Что такое эпюра продольных сил и как она строится?
4. Какой вид имеет эпюра продольных сил для стержня, нагруженного несколькими осевыми сосредоточенными силами? равномерно распределённой осевой нагрузкой?
5. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально растянутого стержня и чему они равны?
6. Как строится эпюра напряжений?
7. В каких сечениях растянутого стержня возникают наибольшие нормальные напряжения? наименьшие касательные?
8. Что такое полная (абсолютная) продольная деформация. Какова её размерность?
9. Относительная продольная деформация. Её размерность.
10. Что называется жёсткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)?
11. Что происходит с поперечными размерами стержня при его растяжении? сжатии?
12. Сформулируйте закон Гука.
13. Что называют коэффициентом Пуассона?
14. В каких координатах строится диаграмма растяжения?
15. Упругие и пластические деформации.
16. Условие прочности при центральном растяжении-сжатии.
17. Что такое допускаемое напряжение?
18. Как определяется допускаемое напряжение для хрупких и пластичных материалов?
19. Какие три характерные виды задач встречаются при расчете прочности конструкций?
20. Какие системы называют статически определимыми? неопределимыми?
21. Какие уравнения составляют для расчёта статически неопределимых систем?
22. Правило знаков при растяжении-сжатии.

Тема «Кручение»

1. При каком нагружении прямой стержень испытывает деформацию кручения?
2. Что называют кручением?
3. Что называют полным и относительным углом закручивания стержня? Как их вычисляют?
4. Перечислите предпосылки теории кручения стержня круглого поперечного сечения.
5. Какое напряженное состояние возникает в каждой точке стержня круглого сечения при кручении?
6. В каких точках круглого сечения возникают наибольшие напряжения и как они направлены?
7. Что называют жёсткостью поперечного сечения при кручении?
8. Что называют полярным моментом инерции круглого сплошного и кольцевого сечения?
9. Что называют полярным моментом сопротивления?
10. Как объяснить, что стержень кольцевого сечения при кручении экономичнее стержня сплошного сечения?

Тема «Прямой изгиб»

1. Что такое прямой изгиб и кривой изгиб?
2. Что такое чистый и поперечный изгиб?
3. Что называют поперечной силой и изгибающим моментом в сечении?
4. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
5. Как вычисляется изгибающий момент в поперечном сечении стержня?
6. Как вычисляются поперечная сила в поперечном сечении стержня?
7. Какие типы опор применяются для закрепления балок к основанию?
8. Как может быть осуществлено неподвижное и статически определимое закрепление балок к земле?
9. При каком числе связей балка становится статически неопределимой?
10. Какие уравнения используют для определения опорных реакций?
11. В каком порядке строятся эпюры Q и M ?
12. Запишите дифференциальные зависимости Журавского.
13. Приведите основные зависимости между эпюрами Q и M .
14. Как связано изменение величины изгибающего момента M с площадью эпюры Q ?
15. Как определяется экстремальное значение изгибающего момента?

16. Что такое нейтральный слой и нейтральная ось и как они расположены?
17. По какой формуле определяют нормальные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе и как они меняются по высоте балки?
18. Что такое жёсткость сечения при изгибе?
19. Что называют моментом сопротивления при изгибе и какова его размерность?
20. Запишите формулу для определения касательных напряжений при прямом поперечном изгибе. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях прямоугольной и двутавровой формы?
21. Какие формы поперечных сечений являются рациональными для балок из пластичных материалов?
22. Как производятся расчёты на прочность при прямом изгибе балки постоянного сечения из пластичного материала? В каких случаях следует производить проверку балок на прочность при совместном действии нормальных и касательных напряжений? Как производится эта проверка?
23. Как записывается уравнение метода начальных параметров для прогиба и угла поворота в заданном сечении?
24. Как определить начальные параметры в случае различного закрепления левого конца балки?
25. Как учитывается распределенная нагрузка в уравнениях метода начальных параметров?

Тема «Сложное сопротивление»

1. Какой изгиб называется косым?
2. По какой формуле определяются нормальные напряжения при косом изгибе?
3. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?
4. Как определяют положение опасных точек при косом изгибе?
5. Как определяются перемещения точек оси балки при косом изгибе?
6. Какое сложное сопротивление называют внецентренным растяжением (или сжатием)?
7. По каким формулам определяются нормальные напряжения при внецентренном растяжении и сжатии?
8. Как определяется положение нейтральной линии при внецентренном растяжении и сжатии?
9. Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении и сжатии?

10. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при изгибе с кручением?
11. Какие точки круглого поперечного сечения являются опасными при изгибе с кручением? Какое напряженное состояние возникает в этих точках?
12. Как находится расчетный (приведенный) момент (по различным теориям прочности) при изгибе с кручением бруса круглого сечения?

Тема «Устойчивость сжатых стержней»

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Какие основные методы исследования на устойчивость вы знаете?
4. Какое дифференциальное уравнение из теории изгиба лежит в основе вывода формулы Эйлера?
5. Какой вид имеет формула Эйлера, определяющая значение критической силы?
6. Какой момент инерции обычно входит в формулу Эйлера? Возможны ли здесь исключения?
7. Что представляет собой коэффициент приведения длины и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержней?
8. Как устанавливается предел применимости формулы Эйлера?
9. Что называется гибкостью стержней?
10. Что называется предельной гибкостью?
11. Какой вид имеет формула Ясинского для определения критических напряжений?
12. Какой вид имеет график зависимости критических напряжений от гибкости для стальных стержней?
13. Что представляет собой коэффициент? Как определяется его значение? Как проводится проверка стержней на устойчивость с его помощью?
14. Как подбирается сечение стержня при расчете на устойчивость?

Сталь прокатная – балки двутавровые (по ГОСТ 8239-72)

Размеры и справочные величины для осей

Условные обозначения:

- h – высота полки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина стенки;
 I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

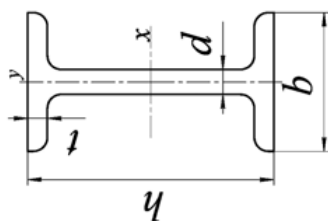


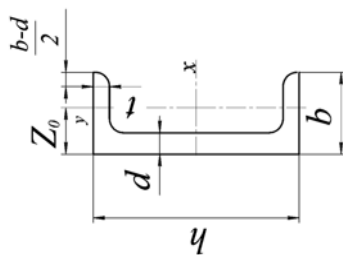
Таблица П.6

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры					Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей					
		h	b	d	t	x – x			y – y				
						I_x см ⁴		W_x см ³	i_x см	S_x см ³	I_y см ⁴	W_y см ³	i_y см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,8

Продолжение Приложения 1А

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры					Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей					
		мм						x - x			y - y		
		h	b	d	t	t		I _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _x см ³	I _y см ⁴	W _y см ³
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Приложение 1Б



Сталь – прокатная – швеллеры (по ГОСТ 8240-72)

Условные обозначения:

h – высота полки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – толщина стенки;

I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

Z_0 - расстояние от оси y - y до наружной грани стенки.

Таблица П.7

Номер профиля	Масса I м, кг	Размеры					Площадь сечения, $см^2$	Справочные величины для осей						Z_0
		мм						$x-x$			$y-y$			
		h	b	d	t			I_x $см^4$	W_x $см^3$	i_x $см$	S_x $см^3$	I_y $см^4$	W_y $см^3$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,0	15,60	491,0	70,2	5,66	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,3	2,07

Продолжение Приложения 1Б

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей						Z ₀ см	
		h	b	d	t		x -x			y -y				
							I _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _x см ³	I _y см ⁴	W _y см ³		i _y см
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Приложение 1В

Сталь прокатная угловая равнополочная ГОСТ 8509 -72

- b - ширина полки;
- d - толщина полки;
- R - радиус внутреннего закругления;
- r - радиус закругления полки;
- I - момент инерции;
- i - радиус инерции;
- z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

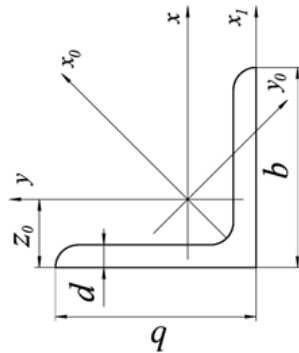


Таблица П.8

№ профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей										Z ₀ , см	Масса 1 м длины профиля, кг
						X-X		X ₀ -X ₀		-		X _J -X _J					
						I _{x0} , см ⁴	i _{x0} , см	I _{x0max} , см ⁴	i _{x0max} , см	I _{y0 min} , см ⁴	i _{y0 min} , см	I _{xJ} , см ⁴	i _{xJ} , см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89			
		4			1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15			
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12			
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46			
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27			
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46			
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,49			
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65			
		4			2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16			

Продолжение Приложения 1В

№ профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей										Z _Ф см	Масса 1 м профиля, кг
						X-X		X ₀ -X ₀		-		X ₁ -X ₁		Z _Ф см	Масса 1 м профиля, кг		
						I _x см ⁴	i _x см	I _{x0max} см ⁴	i _{xmax} см	I _{x0 min} см ⁴	i _{x0} см	I _{x1} см ⁴	i _{x1} см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
4	40	3	5,0	1,7	2,35 3,08 3,79	3,55 4,58 5,53	1,23 1,22 1,20	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,54	1,47 1,90 2,30	0,79 0,78 0,79	6,35 8,53 10,73	1,09 1,13 1,17	1,85 2,42 2,97			
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65 3,48 4,20	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,50 12,70	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,10 15,30	1,21 1,26 1,30	2,08 2,73 3,37			
5	50	3	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	7,11 9,21 11,20	1,55 1,54 1,53	11,30 14,60 17,80	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1,00 0,99 0,98	12,40 16,60 20,90	1,33 1,38 1,42	2,32 3,05 3,77			
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38 5,41	13,10 16,00	1,73 1,72	20,80 25,40	2,18 2,16	5,41 6,59	1,11 1,10	23,30 29,20	1,52 1,57	3,44 4,25			
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96 6,13 7,28	18,90 23,10 27,10	1,95 1,94 1,93	29,90 36,60 42,90	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,20	1,25 1,25 1,24	33,10 41,50 50,00	1,69 1,74 1,78	3,90 4,81 5,72			
7	70	4,5	8	2,7	6,20 6,86 8,15 9,42 10,70	29,0 31,9 37,6 43,0 48,2	2,16 2,16 2,15 2,14 2,13	46,0 50,7 59,6 68,2 76,4	2,72 2,72 2,71 2,69 2,68	12,0 13,2 15,5 17,8 20,0	1,39 1,39 1,38 1,37 1,37	51,0 56,7 68,4 80,1 91,9	1,88 1,90 1,94 1,99 2,02	4,87 5,38 6,39 7,39 8,37			

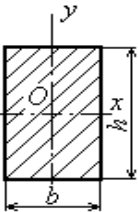
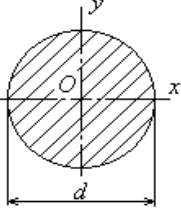
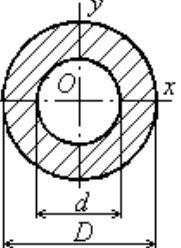
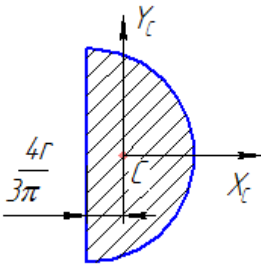
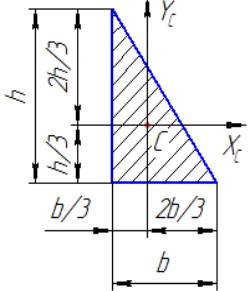
Продолжение Приложения 1В

№ профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей											Z ₀ , см	Масса 1 м профиля, кг
						X-X		X ₀ -X ₀		-		Y-Y		Z ₀ , см				
						I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x0max} , см ⁴	i _{x0max} , см	I _{y0 min} , см ⁴	i _{y0} , см	I _{x1} , см ⁴						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
7,5	75	5			7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,9	2,02	5,80				
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89				
		7	9	3,0	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96				
		8			11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02				
		9			12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10				
8	80	5,5			8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78				
		6	9	3,0	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36				
		7			10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51				
		8			12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65				
9	90	6			10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33				
		7			12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64				
		8	10	3,3	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90				
		9			15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20				
10	100	6,5			12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10				
		7			13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80				
		8			15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20				
		10	12	4,0	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	33,0	2,83	15,10				
		12			22,80	209,0	3,03	31,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90				
		14			26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60				
		16			29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30				

Продолжение Приложения 1В

№ профиля	b	d	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей										Z _{об} см	Масса 1 м дуги профиля, кг
						X-X		X ₀ -X ₀		-		X ₁ -X ₁					
						I _{x0} см ⁴	i _{x0} см	I _{x0max} см ⁴	i _{xmax} см	I _{y0 min} см ⁴	i _{y0} см	I _{x1} см ⁴	i _{x1} см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
11	110	7	12	4,0	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90			
		8			17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50			
12,5	125	8			19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5			
		9			22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3			
		10	14	4,6	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1			
		12			28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7			
		14			33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2			
		16			37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6			
14	140	9			24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4			
		10	14	4,6	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5			
		12			32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5			
16	160	10			31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7			
		11	16	5,3	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0			
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4			
		14			43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0			
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5			
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0			
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4			
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5			
		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1			

Площади, координаты центров тяжести, осевые моменты инерции, моменты сопротивления некоторых плоских фигур

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, $см^2$	Осевой момент инерции, $см^4$	Момент сопротивления, $см^3$
<p>Прямоугольник</p> 	bh	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{b^2h}{6}$
<p>Круг</p> 	$\frac{\pi d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64},$ $I_x = I_y \approx 0,05d^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32},$ $W_x = W_y \approx 0,1d^3$
<p>Кольцо</p> 	$\frac{\pi D^2(1-c^2)}{2},$ <p>где</p> $c = \frac{d}{D}$	$I_x = I_y = \frac{\pi D^4(1-c^4)}{64},$ $I_x = I_y \approx 0,02D^4(1-c^4)$	$W_x = W_y = \frac{\pi D^3(1-c^4)}{32},$ $W_x = W_y \approx 0,1D^3(1-c^4)$
<p>Полукруг</p> 	$\frac{\pi d^2}{8}$	$I_x = \frac{\pi d^4}{128}$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128} \cdot \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right)$	$W_x = \frac{J_x}{ y_{max} },$ $W_y = \frac{J_y}{ x_{max} }$
<p>Треугольник</p> 	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{36},$ $I_y = \frac{b^3h}{36}$	$W_x = \frac{J_x}{ y_{max} },$ $W_y = \frac{J_y}{ x_{max} }$

Зависимость коэффициента продольного изгиба φ
от гибкости стержня для некоторых материалов

Гибкость	Сталь		Чугун	Дерево
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5		
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,37	—	0,22
130	0,40	0,36	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

Характеристики устойчивости некоторых материалов

Материал	a , МПа	b , МПа	λ_0	$\lambda_{\text{пред}}$
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1,15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1,83	30	53

Список литературы

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов, - М.: Высшая школа, 2001 г.
2. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности - М.:1995 г.
3. Завьялова О.Б., Синельщикова О.Н. Техническая механика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ для студентов заочного обучения всех специальностей. – Астрахань, АИСИ: 2014. – 63 с.
4. Юзиков В.П., Завьялова О.Б. Лабораторные работы по сопротивлению материалов. Учебно-методическое пособие на основе рекомендаций к программному комплексу COLUMBUS. – Астрахань, 2009. – 38 с.
5. Юзиков В.П., Завьялова О.Б. Расчёт пространственной статически определимой стержневой системы при сложном сопротивлении, Астрахань, АИСИ: 1999 г.