Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО–СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители М.В. Зголич,
Р.И. Лазарева

Томск 2019

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / Сост. М.В. Зголич, Р.И. Лазарева. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2019. – 38 с.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» при изучении тем «Введение в математический анализ.» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» студентами заочной формы обучения ТГАСУ всех направлений и профилей подготовки бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 7 от 6 апреля 2019 г.

Оригинал-макет подготовлен составителем М.В. Зголич.

Подписано в печать 6.04.19г.
Формат 60×90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1,8.
Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………..…4
I. Краткие теоретические сведения ……..………………………4
1. Понятия функции и её предела...4
2. Производная функции одной переменной и некоторые её приложения………..............................….................11
II. Решение задач………………………………………..........18
III. Правила выполнения и оформления контрольной работы..28
IV. Задания для контрольной работы…………………………..29
V. Вопросы для самопроверки……………………………......34
Список рекомендуемой литературы………………………...38

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения ТГАСУ и дают рекомендации по выполнению контрольной работы по разделам «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Понятие функции возникло в связи с тем, что изучение любого процесса происходит путем изучения характера изменения переменных величин, участвующих в этом процессе. И, как правило, изменение одних величин обусловлены характером изменения других. Таким образом, возникла необходимость описать эту зависимость.

Производная широко применяется при решении целого ряда задач математики, физики, химии и других наук. К понятию производной приводят, например, задачи, связанные с изучением скорости каких-либо процессов.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Понятия функции и её предела.

Математический анализ изучает числовые функции и числовые величины. Все числовые величины могут быть разделены на две большие группы – величины постоянные (принимающие единственное значение) и величины переменные (могут принимать различные значения).

Рассмотрим два непустых множества X и Y.

Определение: Переменная величина y из Y ($y \in Y$) считается ***функцией*** переменной величины $x \in X$, если задан закон, по которому каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно и только одно значение $y \in Y$.

Для функциональной зависимости приняты обозначения $y = f(x)$, $y = y(x)$ ...

Определение: Множество X называется ***областью определения функции,*** обозначается $D\left(f\right)$. Множество Y называется ***областью значений функции***, обозначается $E\left(f\right)$.

Переменная ***x*** называется ***независимой переменной*** или **аргументом** функции**,** переменная ***у* – *зависимой переменной*** или ***значением функции.***

Замечание: Если область определения функции, заданной аналитически (т.е. выражением) не указана, то под ней подразумевается множество тех значений переменной *x*, которые не противоречат алгебраическому смыслу выражения. При нахождении области определения нужно учитывать следующие правила:

1) если в выражении для функции имеется корень четной степени, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно;
2) если в выражении для функции имеется дробь, то ее знаменатель не должен быть равен нулю;
3) остальные ограничения будут зависеть от областей определения основных элементарных функций, входящих в состав функции.

Понятия четной, нечетной, монотонной функций.

Четность функции.

Функция *y=f(x),* определенная на множестве *D,* называется ***четной,*** если для любого *x*, принадлежащего множеству *D*, такого что (-*x*) принадлежит *D*, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. В символьном виде это утверждение примет вид:

$$\forall x \in D : -x \in D,\ f\left(-x\right) = f\left(x\right). \qquad (1)$$

Функция *y=f(x),* определенная на множестве *D,* называется

нечетной, *если* $\forall x \in D: -x \in D,\ f(-x) = -f(x).$ (2)

Особенностью графика <u>*четной*</u> *функции является симметрия* <u>*относительно оси Оу*</u>*,* <u>*нечетной*</u> *–* <u>*относительно начала координат*</u>*.*

Функция *y=f(x),* для которой не выполняются ни (1), ни (2) утверждения называется ***ни четной, ни нечетной***.

Монотонность.

Рассмотрим функцию *y=f*(*x*), определенную на множестве *D*.

Функция называется ***возрастающей*** на множестве $D_1 \subset D$, если $\forall x_1, x_2 \in D_1 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

неубывающей, если $\forall x_1, x_2 \in D_1 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;

убывающей, если $\forall x_1, x_2 \in D_1 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

невозрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in D_1 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

Понятие сложной функции.

Пусть функция *y=f(u)* определена на множестве *D*, а функция *u=φ(x)* на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется **сложной функцией от *x*** (или ***суперпозицией*** данных ***функций***).

Переменная *u=φ(x)* называется ***промежуточным аргументом сложной функции.***

Понятие предела функции.

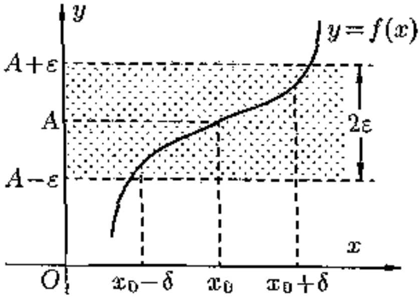
Понятие предела функции относится к так называемым локальным понятиям математики. Такие понятия характеризуют поведение функции в малой области (окрестности) около некоторой точки.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Определение (Коши): Число A называется ***пределом функции в точке x_0***, если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Таким образом, можно записать:

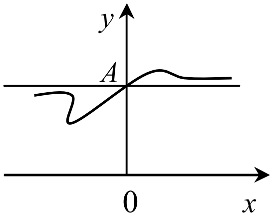
$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \overset{def}{=} (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

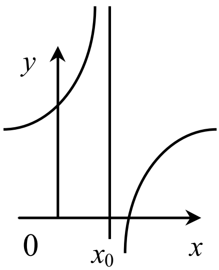


Геометрический смысл предела функции:
Для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A.

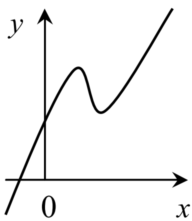
Ниже на рисунках дополнительно представлены иллюстрации возможного поведения функции $y = f(x)$ при условии, что x стремится к конечной или бесконечной величине.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$



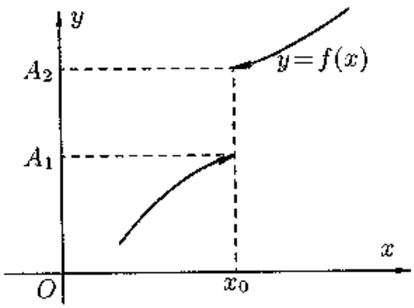
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Понятие односторонних пределов.

В определении предела функции $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\right)$, считается, что $x \to x_0$ любым способом, т.е. оставаясь либо меньше x_o (слева от x_o), либо больше x_o (справа от x_o), или колеблясь около x_o. Однако, есть случаи когда способ приближения $x \to x_0$ существенно влияет на значение предела функции. Учесть способ приближения помогают односторонние пределы.



Пусть x стремится к точке x_0, оставаясь все время меньше x_0, т.е. $x \to x_0 - 0$, ($x < x_0$).

Определение: Предел функции при $x \to (x_0 - 0)$ называется ***пределом функции слева*** или ***левосторонним пределом*** $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1\right)$.

Пусть x стремится к точке x_0, оставаясь все время больше x_0, т.е. $x \to x_0 + 0$, ($x > x_0$).

Определение: Предел функции при $x \to (x_0 + 0)$ называется ***пределом функции справа*** или ***правосторонним пределом***

$$\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A_2\right).$$

Определение: Пределы функции слева и справа называются ***односторонними пределами.***

<u>Замечание</u>: Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то существуют оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: Если существуют оба предела $A_1 = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $A_2 = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = A_1 = A_2$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Техника вычисления пределов.

Вычисление предела всегда следует начинать с подстановки значения x_0, к которому стремится переменная величина x, в выражение, определяющее функцию $f(x)$, стоящую под знаком предела.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это означает, что для нахождения указанного предела достаточно вычислить значение функции в точке x_0.

Однако выражение, стоящее под знаком предела может оказаться неопределенным в точке x_0. В этом случае говорят, что неопределенность надо раскрывать.

К неопределенным выражениям относят выражения вида:

$$\left(\frac{0}{0}\right),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ (0 \cdot \infty),\ (\infty - \infty),$$

$$\left(1^{\infty}\right),\ \left(0^{0}\right),\ \left(\infty^{0}\right).$$

Для раскрытия неопределенности применяют специальные приёмы; так называемые замечательные пределы и таблицу эквивалентных бесконечно малых величин.

Замечательные пределы:

первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1^\infty\right)=e$

Таблица основных эквивалентных бесконечно малых величин:

Пусть $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to x_0$, *тогда:*

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$

$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $\log_a[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\ln a}$.

Замечание: Если бесконечно малые величины эквивалентны, то в выражении стоящем под знаком предела можно заменить одну бесконечно малую величину на другую, эквивалентную ей.

Замечание: Если $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и $u(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то выражения

$$\frac{\alpha(x)}{u(x)}\left(\frac{0}{\infty}\right) \quad \text{и} \quad \frac{u(x)}{\alpha(x)}\left(\frac{\infty}{0}\right)$$

не являются неопределенными. Так как по свойствам бесконечно малых и бесконечно больших величин пределы таких выражений равны:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{u(x)}\left(\frac{0}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\frac{1}{u(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(0\cdot 0\right)=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\alpha(x)}\ \left(\frac{\infty}{0}\right)=\lim_{x\to x_0}u(x)\cdot\frac{1}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}(\infty\cdot\infty)=\infty.$$

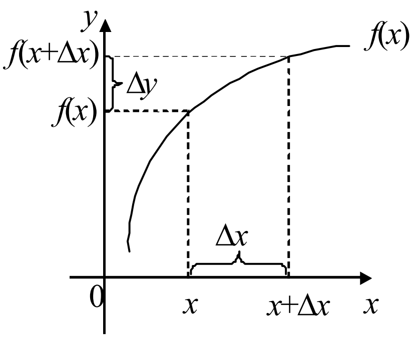
Примеры на раскрытие неопределенных выражений можно найти в разделе II данных методических указаний, в [1, 4] и [8].

2. Производная функции одной переменной

Если $y=f(x)$ определенна в точке x_0 и её окрестности,то предел отношения приращения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, называется ***производной функции в точке*** x_0 и обозначается: $f'(x_0)$ или y', или $\frac{dy}{dx}$, или $\frac{df}{dx}$, тогда, согласно определению

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}.$$

Производная существует тогда, когда существует этот предел.



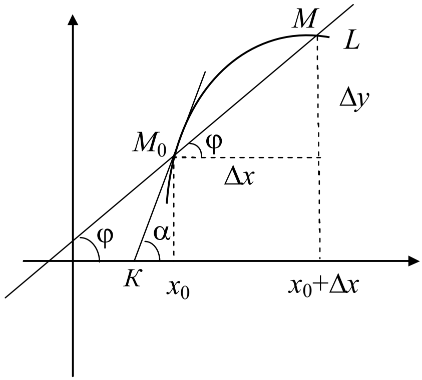
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ - определяет ***среднюю скорость*** изменения функции $f(x)$ на промежутке $[x,\, x+\Delta x]$. Предельный переход при $\Delta x\to 0$ дает скорость изменения функции в самой точке x.

***Механический смысл производной*:**

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - скорость изменения функции в точке x.

Касательной к линии L в точке M_0 называется предельное положение, которое стремиться занять секущая, если точка $M \to M_0$ вдоль L с любой стороны.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$.



Возьмем секущую M_0M она образует с осью OX угол φ из геометрии следует $tg\,\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Устремим $\Delta x \to 0$ $M \to M_0$, а секущая M_0M устремится к своему предельному положению – касательной M_0K. Угол φ устремится к углу α, следовательно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi = tg\,\alpha$.

С другой стороны $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\,\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

Геометрический смысл производной.

Значение производной в заданной точке равно тангенсу угла между положительным направлением оси OX и касательной.

$$y'(x_0) = tg\alpha$$

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, т.е. существует предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ то мы говорим, что функция в точке x_0 ***дифференцируема*** (или, что равносильно, ***имеет производную***).

Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка $[a,b]$ или интервала (a, b) то говорят, что она дифференцируема на промежутке $[a,b]$ или интервале (a,b).

Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, следовательно она непрерывна в этой точке, а, следовательно, в точках разрыва производная не существует.

Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций.

Все основные элементарные функции имеют производную в своей области определения.

Вычисляя производные, первым делом анализируют представленную функцию на необходимость использовать правила дифференцирования и возможность непосредственного использования таблицы производных основных элементарных.

Правила дифференцирования.

Пусть заданы функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ и константа С, тогда:

$$(Cu)' = C \cdot u' \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Следствия: $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c} \cdot u'$,

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}, \qquad \text{где } c = \text{const}.$$

Таблица производных.

1. $C' = 0, \quad C = const$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \forall x$.

Частные случаи: $a)\ (x)' = 1$; $\quad$ $б)\ \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \geq 0$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \ \forall x$ $\quad$ 4. $\left(e^x\right)' = e^x, \ \forall x$
5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$ $\quad$ 6. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$
7. $(\sin x)' = \cos x, \quad \forall x$ $\quad$ 8. $(\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x$
9. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$
10. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi k$
11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$
12. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad |x| < 1$
13. $(arcctgx)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}, \ \forall x$
14. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \ \forall x$

Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y = f(x)$ такая, что ее можно представить в виде: $y = F(u)$; $u = \varphi(x)$ или $y = F(\varphi(x))$ переменную “u” назовем промежуточным аргументом.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке **x** производную $u'_x = \varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении “u” производную $y'_u = F'(u)$ тогда сложная функция $y = F(\varphi(x))$ имеет производную $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $y'_x = F'_u \cdot \varphi'_x$.

Условия возрастания и убывания функции.

Теорема. Для того чтобы, функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ на $[a,b]$.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ была убывающей, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \le 0$ на $[a,b]$.

Понятие локального экстремума.

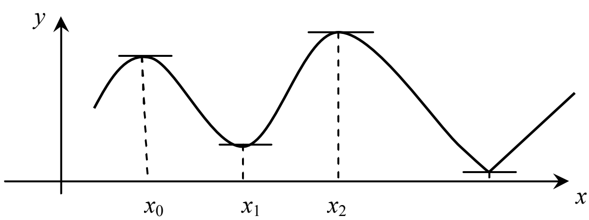
В точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет ***локальный максимум***, если существует такая окрестность O(x_0) точки x_0, что $f(x) \le f(x_0)$ для любого x из этой окрестности ($\forall x \in O(x_0)$).

В точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет ***локальный минимум***, если $\exists O(x_0) : f(x) \ge f(x_0) \forall x \in O(x_0)$.

Точки локального минимума и максимума называются ***точками экстремума*** функции.

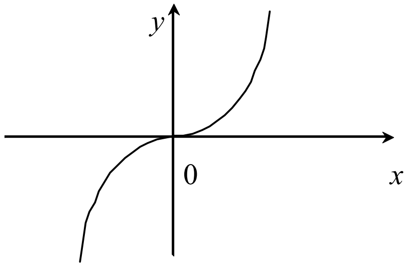
Теорема. (Необходимое условие экстремума). Если функция $y=f(x)$ имеет в т. x_0 локальный экстремум, тогда $f'(x_0) = 0$, либо не существует.

Точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками 1-го рода,*** или ***точками подозреваемыми на экстремум.***



x_0, x_1, x_2 - max, min;
x_3 – не существует.

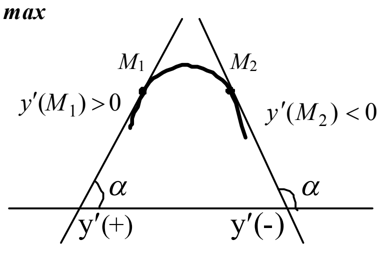
Замечание: В критических точках экстремума может и не быть. Например: $y = x^3$; $y' = 3x^2 = 0$, точка x=0 - критическая точка 1-го ряда.

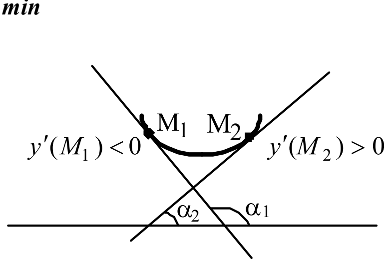


Замечание приводит к выводу, что помимо необходимого условия экстремума функции существует достаточное условие экстремума.

Достаточные условия экстремума.

Теорема. (1-е достаточное условие экстремума). Если при переходе через критическую точку $f'(x)$ меняет свой знак, то в критической точке функция имеет экстремум: если слева направо знак производной меняется с "+" на "–" то, это точка *максимума*, с "–" на "+" то, точка *минимума*.





Теорема. (2-е достаточное условие экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности. При этом она дважды дифференцируема и $f'(x_0)=0$. Тогда если $f''(x_0)>0$, то в этой точке *минимум*, если $f''(x_0)<0$ то – *максимум*.

Производные высших порядков.

Пусть $y=f(x)$ имеет производную на отрезке $[a,b]$. Значение $f'(x)$ зависят от переменной x, т.е. производная тоже представляет собой функцию от x, поэтому можно говорить о производной этой функции.

Опр. Производная от производной $f'(x)$ называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)=\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

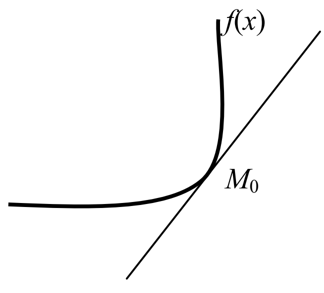
Аналогично вводятся понятия производных более высоких порядков.

Механический смысл второй производной.

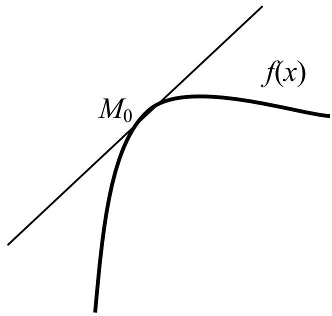
Пусть функция $s=s(t)$ задает закон прямолинейного движения материальной точки, тогда $s''(t)=\upsilon'(t)=a(t)$ определяет ускорение точки в момент времени t:

Понятия выпуклости и вогнутости функции.

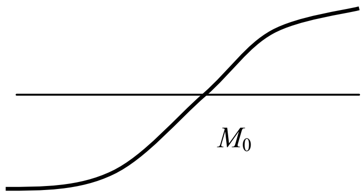
Опр. Кривая называется ***вогнутой*** в точке Мо, если в некоторой окрестности этой точки все точки кривой расположены над касательной, проведенной в точке Мо.



Опр. Кривая называется ***выпуклой*** в Mо, если в окрестности точки Mо все точки кривой расположены под касательной, проведенной в точке Mо



Опр. ***Точкой перегиба кривой*** называют точку Mо, если в окрестности этой точки кривая расположена по разные стороны от касательной.



Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и в ее окрестности. Тогда, если $f''(x_0) > 0$ то $y=f(x)$ в точке Mо *вогнута*, если $f''(x_0) < 0$ - *выпукла*.

II. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ [4]

Задача 1. Изобразить схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям:

$$D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty),$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

$$f(-3) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f(3) = 0.$$

Решение.

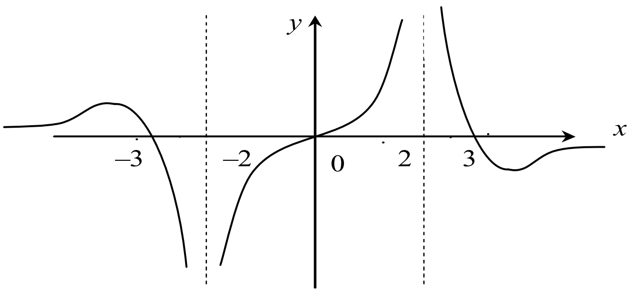
$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = -2$ прижимается к прямой $x = -2$, устремляясь вниз.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = 2$ прижимается к прямой $x = 2$, устремляясь вверх.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ график функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ прижимается к оси *Ox*.

$f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0 \Rightarrow$ график функции пересекает ось *Ox* в точках $x = 0$, $x = \pm 3$.

На рисунке ниже представлен график функции (один из возможных).



Задача 2. Найдите указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 4x - 4} \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Для раскрытия неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-2)(x+2/3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{3(x+2/3)}=-\frac{1}{8}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$

Числитель и знаменатель дроби разделим почленно на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-3}{x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{2}{1}=2.$$

$\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{3}{x^3}$ – бесконечно малые величины при $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{7x}=\dfrac{5}{7}.$

Здесь учли, что при $x\to 0$ $\sin 5x\sim 5x$, $\operatorname{tg} 7x\sim 7x$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{3}{x}\cdot 2x}=e^{-6}.$

Показатель степени умножили и разделили на $-3/x$.

Задача 3. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производную первого порядка от функции $y=f(x)$.

1. $\boldsymbol{y=7x^2+3x-2}$**.**

Применяя правило дифференцирования (3), получим:

$$y' = \left(7x^2 + 3x - 2\right)' = \left(7x^2\right)' + \left(3x\right)' - \left(2\right)' =$$

$$= 7\cdot\left(x^2\right)' + 3\cdot\left(x\right)' - \left(2\right)' = 14x + 3\cdot 1 = 14x + 3.$$

2. $\boldsymbol{y = x^3 \cdot \mathrm{ctg}x}$ **.**

Применяя правило дифференцирования (4) получим:

$$y' = \left(x^3 \cdot \mathrm{ctg}x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{ctg}x + \left(\mathrm{ctg}x\right)' \cdot x^3 =$$

$$= 3x^2 \cdot \mathrm{ctg}x + \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot x^3 = 3x^2 \cdot \mathrm{ctg}x - \frac{x^3}{\sin^2 x}.$$

3. $\boldsymbol{y = \dfrac{-7x^2}{x^2 + 7}}$**.**

Предварительно вынесем постоянный множитель -7 за знак производной (правило дифференцирования (2)), и применим правило дифференцирования (5). Получим:

$$y' = \left(\frac{-7x^2}{x^2 + 7}\right)' = -7\cdot\left(\frac{x^2}{x^2 + 7}\right)' =$$

$$= -7\cdot\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2 + 7\right) - \left(x^2 + 7\right)'\cdot\left(x^2\right)}{\left(x^2 + 7\right)^2} =$$

$$= -7\cdot\frac{2x\cdot\left(x^2 + 7\right) - 2x^3}{\left(x^2 + 7\right)^2} = -7\cdot\frac{14x}{\left(x^2 + 7\right)^2}.$$

4. $\boldsymbol{y = \left(2x + 7\right)^9}$ **.**

Данная функция является сложной функцией. По правилу нахождения производной сложной функции имеем: производная сложной функции $y = \left(2x + 7\right)^9$ по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу $u = 2x + 7$, умноженной на производную промежуточного аргумента $u = 2x + 7$ по x:

$$y' = \left[(2x+7)^9 \right]' = 9(2x+7)^8 \cdot (2x+7)' =$$
$$= 9(2x+7)^8 \cdot (2 \cdot 1 + 0) = 18(2x+7)^8.$$

5. $\boldsymbol{y = \sin^4 (3x+1)}$**.**

Здесь функция $\sin(3x+1)$ возводится в четвертую степень. Полагая (мысленно) $u = \sin(3x+1)$, найдем:

$$y' = \left[\sin^4 (3x+1) \right]' = 4 \cdot \sin^3 (3x+1) \cdot \left[\sin(3x+1) \right]' =$$
$$= 4 \cdot \sin^3 (3x+1) \cdot \cos(3x+1) \cdot (3x+1)' =$$
$$= 12 \cdot \sin^3 (3x+1) \cdot \cos(3x+1).$$

Задача 4. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 2t^2 + 4t - 1$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найти скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения.

Решение. Скорость движения тела равна производной от пути s по времени t: $\upsilon(t) = s'(t)$. Ускорение движения равно второй производной от пути s по времени t: $a(t) = s''(t)$. Найдем скорость и ускорение движения тела через три секунды после начала движения (в момент времени $t_0 = 3$ с):

$$\upsilon(t) = s'(t) = \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 1 \right)' = 3t^2 - 4t + 4,$$
$$\upsilon(t_0) = \upsilon(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 19 \text{ (м/с)}.$$

$$a(t) = s''(t) = \left[\upsilon(t) \right]' = \left(3t^2 - 4t + 4 \right)' = 6t - 4,$$
$$a(t_0) = a(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: $\upsilon(t_0) = 19$ (м/с), $a(t_0) = 14$ (м/с^2).

Задача 5. Исследуйте функцию и постройте ее график

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

Решение. При решении задачи используем *общую схему полного исследования функции.*

Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1. Найти область определения функции и исследовать поведение функции на границах промежутков непрерывности.
2. Исследовать функцию на четность.
3. Найти асимптоты.

   Наклонной асимптотой *будет являться прямая* $y = kx + b$*, где*

   $$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

   Если хотя бы один из пределов равен ∞ *или не существует, следовательно асимптоты нет.*

   Если $k = 0$, $b = const$*, то получим прямую* $y = b$*, которая будет являться* ***горизонтальной*** *асимптотой.*

4. Определить интервалы возрастания, убывания, точки экстремума; найти значение функции в точках экстремума.
5. Определить интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба; найти значение функции в точках перегиба
6. Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно (при пересечении с OY x = 0, при пересечении с OX y = 0) и дополнительные точки, если это необходимо.
7. Построить график функции.

Исследуем представленную функцию согласно общей схеме.

$$y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$$

1. Область определения функции: $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Исследуем поведение функции в граничных точках области определения:

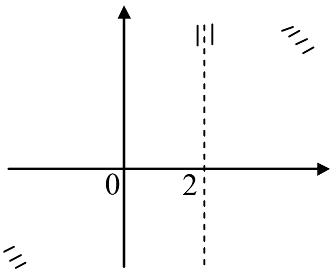
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2}=\lim_{x\to+\infty}3x=-\infty$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{(x-2)^2}=\infty;\qquad \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{(x-2)^2}=\infty$$

$x=2$ - *вертикальная асимптота.*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2}=\lim_{x\to+\infty}3x=\infty$$

По результатам полученных данных представим схематично возможное поведение графика функции.



На данном этапе исследования невозможно однозначно определить, как выглядит график функции. Черточками отмечены возможные варианты.

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-2)^2}=\frac{-x^3}{(-(x+2))^2}=\frac{-x^3}{(x+2)^2}\neq f(x),\ \neq -f(x)$$

$\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная $\Rightarrow$ график функции симметрии не имеет

3. Определим наклонные асимптоты, если они существуют:

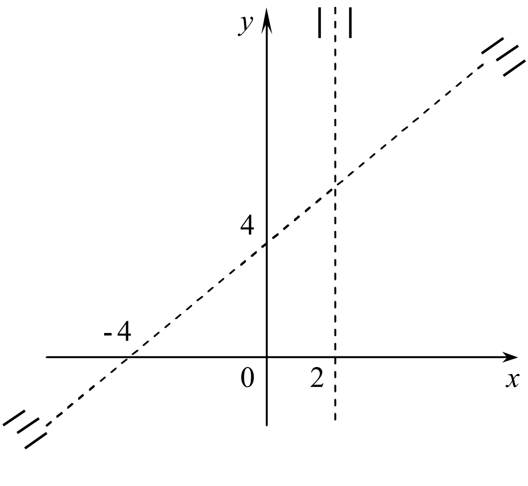
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x^2 + 4x} = 1$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)}{x^2 - 4x + 4} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\overset{4}{\frac{4x^2}{x^2}} - \overset{0}{\frac{4x}{x^2}}}{\underset{1}{\frac{x^2}{x^2}} - \underset{0}{\frac{4x}{x^2}} + \underset{0}{\frac{4}{x^2}}} \right) \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{1} = 4;$$

Получили: $y = x + 4$ - *уравнение наклонной асимптоты*.

Дополним график наклонной асимптотой.



4. Определим интервалы возрастания и убывания функции, а также точки экстремума.

Найдем производную.

$$y' = \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} \right)' = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2 \cancel{(x-2)}(3(x-2)-2x)}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

Найдем подозреваемые на экстремум точки, т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует.

При $x = 0$ и $x = 6$ производная равна 0.

При $x = 2$ - производная не существует, но $x = 2$ это точка разрыва.

5. Найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \right)' = \left(\frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3} \right)' =$$

$$= \frac{(3x^2 - 12x)(x-2)^3 - (x^3 - 6x^2)3(x-2)^2}{(x-2)^6} =$$

$$= \frac{x\cancel{(x-2)^2}((3x-12)(x-2) - 3(x^2 - 6x))}{(x-2)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{x((3x-12)(x-2) - 3(x^2 - 6x))}{(x-2)^4} =$$

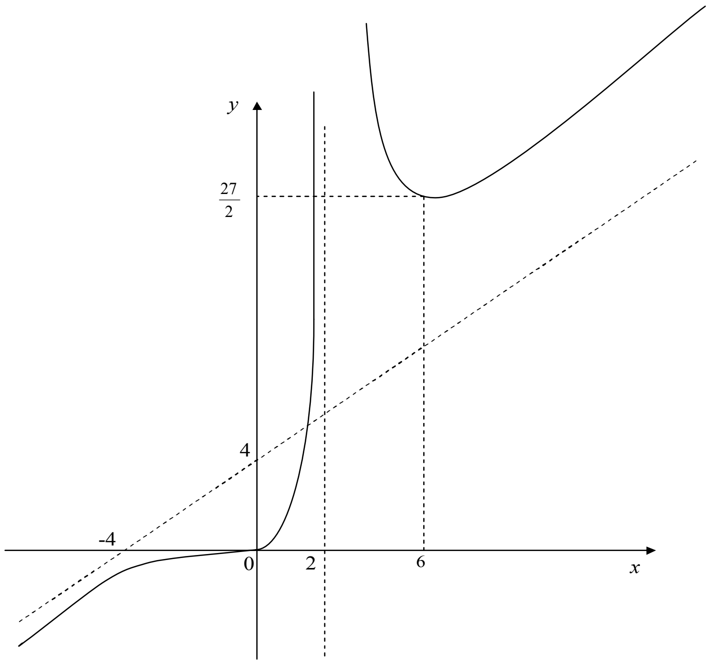
$$= \frac{x((3x^2 - 12x - 6x + 24) - 3x^2 + 18x)}{(x-2)^4} = \frac{24x}{(x-2)^4}$$

Вторая производная равна нулю при $x = 0$ и не существует при $x = 2$, но это точка разрыва. Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	(0;1)	1	(1;6)	6	$(6;+\infty)$
y'	+	0	+		-	0	+
y	↑		↑		↓	min 27/2	↑
y''	-	0	+		+		+
y	*вып.*	0 *перег.*	*вогн.*		*вогн.*		*вогн.*

6. Точка пересечения с осями определена в ходе исследования функции: $f(0)=0$, т.е. точка (0;0).

7. Построим график исследуемой функции.



III. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа оформляется в тетради, в рукописном виде. На обложке разборчиво выписываются фамилия студента, его инициалы, шифр (номер зачетной книжки), название контрольной работы.

2. Работа должна включать все задачи варианта в указанном порядке. Номер варианта определяется по последней цифре номера шифра. Например, если Ваш шифр 431–007, тогда, номер Вашего варианта 7, соответственно номера заданий, которые необходимо выполнить: 7, 17, 27, 37, 47. В таблице приведены номера контрольных заданий в соответствии с вариантами.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
Номера контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

3. Решение задач излагаются подробно и сопровождаются необходимыми чертежами и пояснениями.

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ [4]

1–10. Изобразите схематично график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей указанным условиям.

1.

$D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$,

$f(0) = 4, \quad f(3) = 0.$

2.

$D(y) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$,

$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$,

$f(0) = 1.$

3.

$D(y) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = -\infty$,

$f(0) = 2, \quad f(5) = 0.$

4.

$D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$,

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$,

$f(0) = 0.$

5.

$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$,

$f(0) = -2.$

6.

$D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$,

$f(0) = 3.$

7.

$D(y)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$,

$f(0)=0, \quad f(4)=0.$

8.

$D(y)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$,

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=+\infty$,

$f(0)=3.$

9.

$D(y)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$,

$f(0)=0.$

10.

$D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$,

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-\infty$,

$f(0)=5, \quad f(2)=0.$

11–20. Найдите указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

11. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-4}$, *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

12. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

13. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

14. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x-2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x-2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

15. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{2x^2}$.

16. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-14}{4-x^2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-14}{4-x^2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4x}$.

17. *а*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+2x^2}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+2x^2}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$.

18. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2-4x-6}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2}{2x^2-4x-6}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1}{2x}}$..

19. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^x$.

20. *а*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg}3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-1}$, *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{5}{x}}$.

21–30. Найдите производную функции $y=f(x)$ [4].

21. *а*) $y=-2x^3+6x^7\cdot 7^x-5$, *б*) $y=\ln^3(5-3x)$.

22. *а*) $y=\dfrac{1}{3}x^3-e^x\cdot x^4+11$, *б*) $y=\lg^3(4-5x)$.

23. *а*) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^{10}\cdot\lg x+1$, *б*) $y=(5+2x)^5$.

24. *а*) $y=4+4x^5\cdot\log_5 x-4x^3$, *б*) $y=\cos^3(3-2x)$.

25. *а*) $y=-4x^3+\dfrac{1}{5}x^2\cdot\arccos x-\dfrac{1}{5}$, *б*) $y=\arcsin^3(1-4x)$.

26. *а*) $y=-1+\frac{1}{2}x^4\cdot\ln x-\frac{1}{3}x^3$, *б*) $y=\mathrm{ctg}^3(2-2x)$.

27. *а*) $y=10x^3-3^x\cdot x^3+10$, *б*) $y=\mathrm{arcctg}^3(1-6x)$.

28. *а*) $y=\frac{1}{3}x^3-4x\cdot\arcsin x+1$, *б*) $y=\sin^3(4-3x)$.

29. *а*) $y=2x^3+\frac{1}{4}x^2\cdot e^x-7$, *б*) $y=\arccos^3(3-5x)$.

30. *а*) $y=\frac{1}{4}+3\,\mathrm{arctg}\,x\cdot x^6-x^3$, *б*) $y=\mathrm{arctg}^3(5-6x)$.

31–40. Тело движется прямолинейно по закону $s=s(t)$, где s – путь, измеряемый в метрах, t – время, измеряемое в секундах. Найдите скорость и ускорение движения тела через две секунды после начала движения [4].

31. $s=\frac{4}{3}t^3-t+5$.

32. $s=2t^3-t^2+1$.

33. $s=\frac{2}{3}t^3+3t^2-5$.

34. $s=4t^3-2t^2+t$.

35. $s=3t^3-t+1$.

36. $s=2t^3-\frac{1}{2}t^2+t$.

37. $s=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$.

38. $s=4t^3+t-1$.

39. $s=\frac{5}{3}t^3-2t^2-1$.

40. $s=5t^3-\frac{3}{2}t^2+1$.

41–50. Исследуйте функцию и постройте ее график [4].

41. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

42. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

43. $y = -\dfrac{x^2}{(x + 2)^2}$.

44. $y = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

45. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$.

46. $y = \dfrac{(x - 3)^2}{(x - 1)^2}$.

47. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{(x + 1)^2}$.

48. $y = \dfrac{4x}{(x + 1)^2}$.

49. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2}$.

50. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

V. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ [4].

Функции одной переменной. Предел и непрерывность

1. Дать определение функции одной независимой переменной? Что является ее областью определения и областью значений?

2. Что значит задать функцию? Перечислить способы задания функции. Укажите особенности, достоинства и недостатки каждого из способов.

3. Перечислите основные элементарные функции.

4. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.

5. Какую функцию называют неявной? Приведите примеры неявных функций.

6. Дайте определение четной (нечетной) функции. Укажите особенности графиков четных и нечетных функций.

7. Перечислите монотонные на интервале функции и дайте их определение.

8. Какие функции называют взаимно обратными? Как построить график обратной функции по графику данной функции в системе декартовых координат?

9. Дайте определение ограниченной функции. Какие из простейших элементарных функций ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены и сверху, и снизу?

10. Дайте определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

11. Дайте определение односторонних пределов функции: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

12. Дайте определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Приведите геометрическую иллюстрацию.

13. Какую функцию называют бесконечно большой величиной при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Приведите геометрические иллюстрации для случаев, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

14. Какую функцию называют бесконечно малой величиной при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Приведите геометрические иллюстрации.

15. Какая функция, имеющей предел, называется бесконечно бесконечно большой. Какая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?

16. Какая функция, имеющей предел, называется бесконечно малой величиной?

17. Выведите первый замечательный предел.

18. Выведите второй замечательный предел.

19. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 функции. Приведите геометрические иллюстрации.

20. Что называют точкой разрыва функции? Классифицируйте точки разрыва.

21. В чем состоит правило предельного перехода для непрерывной функции? Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной, составленной непрерывных функций.

22. Перечислите свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке.

23. Сформулируйте правило сравнения бесконечно малых величин.

24. Перечислите эквивалентные бесконечно малые величины.

Производная функции одной переменной

1. Дайте определение производной. В чем заключается механический смысл производной.

2. Определение касательной. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

3. Получить производные для функций $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = a^x$, $y = iog_a x$.

4. Как вычислить производную сложной функции? Приведите примеры.

5. Сформулируйте правило логарифмического дифференцирования.

6. Сформулируйте определение дифференциала функции.

7. Выпишите формулу приближенного вычисления. На чем она основана?

8. Какие производные и дифференциалы называются производными и дифференциалами высших порядков.

9. В чем заключается механический смысл второй производной.

10. Запишите формулы нахождения первой и второй производных функции, заданной параметрически?

11. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

12. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенного выражения вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Перечислите различные типы неопределенных выражений, для раскрытия которых может быть применено правило Лопиталя.

13. Какие функции называются возрастающими и убывающими на отрезке? Выведите достаточный признак возрастания функции.

14. Сформулируйте определение точки экстремума в любом промежутке. Покажите, что функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в любом промежутке.

15. Назовите первое и второе достаточные условия экстремума функции.

16. Какая функция называется выпуклой (вогнутой) на промежутке? Какие точки называются точками перегиба кривой? Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

17. Сформулируйте определение асимптоты кривой. Как находят вертикальные и наклонные асимптоты линии, заданной уравнением $y = f(x)$? Приведите примеры.

18. Изложите схему общего исследования функции и построения ее графика.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Лесняк, Л.И. / Производная и ее приложения : учебное пособие / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск : Изд-во НТЛ, 2005. – 312 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс. – 2014. – 415 с.

3. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М. : Наука, 2014. – 736 с.

Дополнительная литература

4. Элементы математического анализа: методические указания / составители М.В. Зголич, О.Д. Пантюхова, Т.А. Шалыгина. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. – 42 с.

5. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2015. – 460 с.

6. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко [и др.]. – М. : ОНИКС, 2014. – 816 с.

7. Письменный, Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Г. Письменный. – М. : Айрис-пресс. – 2009. – 288 с.

8. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: ПРОФЕССИЯ, 2008. – 432 с.