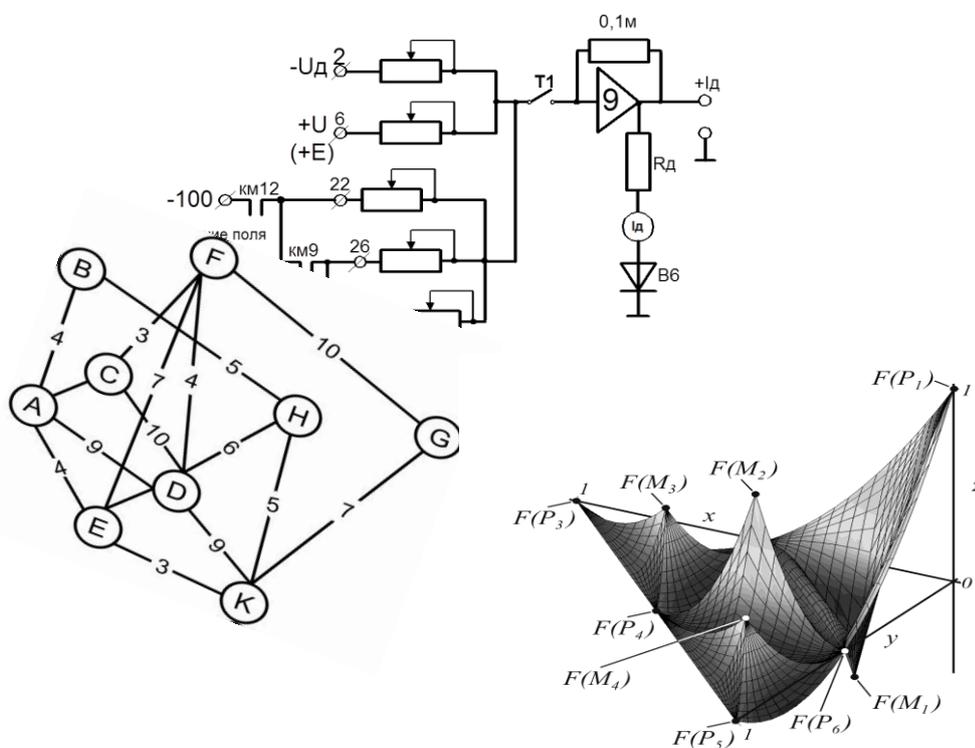


**ОРЕНБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**  
(ОрИПС – филиал СамГУПС)

Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»

Д.В.Левченко

**Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине**  
**«Математическое моделирование систем и процессов»**  
для обучающихся по специальности  
**23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов»**  
очной/заочной формы обучения



Оренбург 2017

УДК 510 (022)

ББК 22.11

Л 38

***Рецензенты:***

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики ФГБОУ ВО Оренбургский государственный педагогический университет

*Н. А. Мунасыпов*

кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Общеобразовательные дисциплины» ОрИПС – филиала СамГУПС

*Ю.А. Генварева*

**Левченко Д.В.**

Л 38      Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине «Математическое моделирование систем и процессов» для обучающихся по специальности 23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов» очной/заочной форм обучения. [Текст] / Д.В. Левченко – Оренбург: ОрИПС, 2017. – 37 с.

Предлагаемые методические указания разработаны на основе требований ФГОС ВО и программы учебной дисциплины «Математическое моделирование систем и процессов» в контексте подготовки специалистов с высшим техническим образованием.

Методические указания могут быть использованы как для аудиторной, так и для самостоятельной работы студентов первого курса очной и заочной форм обучения.

УДК 510 (022)

ББК 22.11

© ОрИПС – филиал СамГУПС, 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1.Задания для контрольной работы № 1 .....	7
Задание № 1. ....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 2. ....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 3. ....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 4. ....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 5. ....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
2. Решение типового варианта контрольной работы № 1 ...	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
3. Задания для контрольной работы № 2 ..	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 6 .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 7 .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 8 .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Задание № 9 .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
4. Решение типового варианта КР № 2 .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Рекомендуемая литература .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
Приложение № 1 .....	27
Приложение № 2 .....	28

## Введение

Контрольные работы посвящены закреплению знаний по математике, охватывают разделы линейная алгебра, аналитическая геометрия, комплексные числа, введение в математический анализ, численные методы решения нелинейных уравнений.

В результате освоения дисциплины «Математическое моделирование систем и процессов» обучающийся должен:

### знать:

- основные определения и понятия математики; основные методы решения типовых задач;
- простейшие математические модели реальных процессов и ситуаций;
- математические методы, применяемые для решения творческих (исследовательских) задач;
- основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей, математической и социально-экономической статистики, применяемые для решения практических и исследовательских задач

### уметь:

- решать задачи предметной области: решать типовые задачи по предложенным методам и алгоритмам, графически иллюстрировать задачу; оценивать достоверность полученного решения
- решать задачи предметной области: выбирать метод и алгоритм для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор ; строить простейшие математические модели реальных процессов и ситуаций
- решать задачи предметной области: оценивать различные методы решения задачи и выбирать оптимальный метод, использовать вычислительные, аналитические и системно- аналитические методы для решения задач
- решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений; использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные

Контрольные работы направлены на частичное освоение следующих компетенций:

	<i>23.05.03 Подвижной состав железных дорог</i>
ОПК-1	способностью применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования
ОПК-3	способностью приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии
ПК-4	способностью использовать математические и

ПК-24	<p>статистические методы для оценки и анализа показателей безопасности и надежности подвижного состава</p> <p>способностью составлять описания проводимых исследований и разрабатываемых проектов, собирать данные для составления отчетов, обзоров и другой технической документации</p>
ПК-25	<p>способностью применять математические и статистические методы при сборе, систематизации, обобщении и обработке научно-технической информации, подготовке обзоров, аннотаций, составления рефератов, отчетов и библиографий по объектам исследования, наличием опыта участия в научных дискуссиях и процедурах защиты научных работ различного уровня и выступлений с докладами и сообщениями по тематике проводимых исследований, владением способами распространения и популяризации профессиональных знаний, проведения учебно-воспитательной работы с обучающимися</p>

**При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:**

1. Контрольные работы нужно выполнять на листах формата А4, рукописно, подшивать в скоросшиватель. Страницы должны быть пронумерованы. Титульный лист оформлять в соответствии с образцом (см. Приложение 1), к работе прилагается рецензия (см. Приложение 2).

2. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений.

3. Решение задач вести поэтапно, с пояснением каждого хода решения, сделать чертеж, схему, рисунок, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

4. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении математики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

5. Все отмеченные рецензентом ошибки должны быть исправлены, а сделанные указания должны быть выполнены. Исправлять ошибки следует отдельно по каждой задаче на чистой стороне листа.

Работа может быть зачтена только в том случае, если она не содержит принципиальных и грубых арифметических ошибок. Если контрольная работа при рецензировании не допущена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с недопущенной.

К экзамену по дисциплине студента допускают только после получения им зачета по контрольной работе.

# Задания для контрольной работы

## ЗАДАНИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

### Задача 1

Тема: Составление планов формирования поездов на основе вероятностного анализа вагонопотоков.

### Задание

Полигон с четырьмя станциями *A*, *B*, *B*, и *Г* должен пропустить суточные объемы вагонопотоков  $N_1 \div N_6$  по заданным направлениям в соответствии с нормативными показателями работы сортировочных парков на станциях *A*, *B* и *B*.

Требуется:

1. Составить план формирования поездов.
2. Выполнить вероятностный анализ плана и рассмотреть возможные его варианты с учетом случайного характера суточных объемов вагонопотоков  $N_1$  и  $N_4$ .

Варианты исходных данных представлены в таблице 1.

Таблица 1

Наименование исходных данных	Станция (назначение)	Последняя цифра шифра									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вагоно-часы простоя под накоплением, $T=ct$	А	1200	800	1000	900	850	1500	950	1100	1400	1300
	Б	1000	1100	1200	800	1400	1300	900	850	1050	950
	В	1200	800	1000	900	850	1500	950	1100	1400	1300
Экономия от проследования станции без переработки, $t_{эк}$ час/вагон	Б	0,7	1,0	1,8	4,5	0,5	1,5	3,2	2,8	4,2	7,5
	В	6,0	6,0	6,2	3,5	6,5	5,0	4,0	3,0	3,8	2,5
Среднее квадратическое отклонение вагонопотоков, $\sigma$		50	56	66	75	70	82	90	87	97	84
Параметр «а» в равномерном распределении		90	50	30	60	40	95	25	45	55	35
Среднесуточные вагонопотоки	АГ	400	250	180	150	190	300	170	200	220	160
	АБ	20	15	23	28	18	50	25	30	16	40
	АВ	15	38	25	30	40	0	35	20	60	17
	БГ	180	200	250	300	260	300	350	380	430	450
	БВ	0	28	38	50	30	40	0	47	33	60

	<b>ВГ</b>	<b>40</b>	<b>37</b>	<b>25</b>	<b>0</b>	<b>35</b>	<b>30</b>	<b>43</b>	<b>50</b>	<b>0</b>	<b>20</b>
<b>Законы распределения вагонопотоков</b>	<b>АГ</b>	<b>П</b>	<b>Э2</b>	<b>З</b>	<b>П</b>	<b>Э3</b>	<b>Р</b>	<b>Э2</b>	<b>Э4</b>	<b>Э3</b>	<b>Э3</b>
	<b>БГ</b>	<b>Н</b>	<b>Э3</b>	<b>Н</b>	<b>Э4</b>	<b>Н</b>	<b>П</b>	<b>П</b>	<b>П</b>	<b>Э4</b>	<b>П</b>

Варианты исходных данных

*Примечание:* 1.  $\sigma$  - среднее квадратическое отклонение в нормальном законе распределения вагонопотока.

2. Условные обозначения законов распределения: Н – нормального, П – показательного, Р – равномерного, Э2,Э3,Э4--Эрланга 2-го,3-го, 4-го порядк

## Задача 2

Тема: Транспортная задача

### Задание

Имеются три пункта отправления однородного груза и пять пунктов его назначения. На пунктах отправления груз находится в количестве  $a_1, a_2, a_3$ , в пункты назначения требуется доставить соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  груза. Известна стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения (матрица  $D$ ). Составить такой план перевозок, при котором необходимо вывезти все запасы груза, полностью удовлетворить все потребности и обеспечить при этом минимум затрат на перевозку.

Варианты исходных данных

$$\begin{aligned} & a_1 = 50, a_2 = 70, a_3 = 110, \\ 1. & b_1 = 50, b_2 = 50, b_3 = 50, \\ & b_4 = 50, b_5 = 30. \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 4 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 7 & 9 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 = 90, a_2 = 70, a_3 = 110, \\ 2. & b_1 = 70, b_2 = 20, b_3 = 70, \\ & b_4 = 40, b_5 = 70 \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 7 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 5 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 9 & 7 & 9 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 = 60, a_2 = 40, a_3 = 80, \\ 3. & b_1 = 10, b_2 = 50, b_3 = 60, \\ & b_4 = 50, b_5 = 10 \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 = 80, a_2 = 60, a_3 = 100, \\ 4. & b_1 = 40, b_2 = 60, b_3 = 40, \\ & b_4 = 50, b_5 = 50 \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 6 & 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 = 50, a_2 = 30, a_3 = 70, \\ 5. & b_1 = 20, b_2 = 30, b_3 = 50, \\ & b_4 = 30, b_5 = 20 \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 9 & 5 & 7 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 9 & 9 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_1 = 100, a_2 = 70, a_3 = 50, \\ 6. & b_1 = 60, b_2 = 10, b_3 = 30, \\ & b_4 = 70, b_5 = 50 \end{aligned} \quad D = \begin{Bmatrix} 3 & 11 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 1 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 6 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 = 70, a_2 = 50, a_3 = 90, \\
 7. & b_1 = 10, b_2 = 40, b_3 = 70, \\
 & b_4 = 20, b_5 = 70
 \end{aligned}
 \quad D = \begin{Bmatrix} 8 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 9 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 = 90, a_2 = 30, a_3 = 110, \\
 8. & b_1 = 10, b_2 = 60, b_3 = 50, \\
 & b_4 = 40, b_5 = 70
 \end{aligned}
 \quad D = \begin{Bmatrix} 9 & 1 & 1 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 5 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 = 60, a_2 = 40, a_3 = 80, \\
 9. & b_1 = 50, b_2 = 20, b_3 = 30, \\
 & b_4 = 40, b_5 = 40
 \end{aligned}
 \quad D = \begin{Bmatrix} 9 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 12 & 8 & 11 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & a_1 = 70, a_2 = 50, a_3 = 90, \\
 10. & b_1 = 60, b_2 = 10, b_3 = 10, \\
 & b_4 = 60, b_5 = 70
 \end{aligned}
 \quad D = \begin{Bmatrix} 7 & 1 & 7 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 8 & 2 \end{Bmatrix}$$

### ЗАДАЧА 3

В депо по ремонту вагонов работает  $n$  бригад. В среднем в течение дня поступает в ремонт  $\lambda$  вагонов и при семичасовом рабочем дне каждая из бригад ремонтирует  $\mu$  вагонов. Рассматривая депо как систему массового обслуживания, требуется:

1. Проверить исходные данные на адекватность условиям применения математической модели системы массового обслуживания.

2. В случае неадекватности принять решение по управлению параметрами работы депо с целью приведения в соответствие с условиями применения описывающей математической модели, а именно, выбрать необходимый уровень значений  $n, \lambda, \mu$ .

3. Рассчитать характеристики эффективности

1) среднее время ремонта 1-го вагона,

2) среднее время ожидания начала ремонта для каждого вагона,

3) среднюю длину очереди.

### Варианты исходных данных

1.  $n = 3, \lambda = 10, \mu = 2,5$
3.  $n = 5, \lambda = 14, \mu = 2$
5.  $n = 6, \lambda = 12, \mu = 1,5$
7.  $n = 2, \lambda = 10, \mu = 2,5$
9.  $n = 4, \lambda = 14, \mu = 2$
2.  $n = 5, \lambda = 12, \mu = 2$
4.  $n = 3, \lambda = 10, \mu = 2$
6.  $n = 6, \lambda = 14, \mu = 1,5$
9.  $n = 4, \lambda = 12, \mu = 2$
10.  $n = 3, \lambda = 14, \mu = 3$



2. Устанавливаем всевозможные варианты плана формирования поездов, соответствующие следующим случайным событиям

$$A1: N_{AG} > 230, N_{BG} > 260 - \text{вариант 1}$$

$$A2: N_{AG} > 230, N_{BG} < 260 - \text{вариант 2}$$

$$A3: N_{AG} < 230, N_{BG} > 260 - \text{вариант 3}$$

$$A4: N_{AG} < 230, N_{BG} < 260 - \text{вариант 4}$$

3. Каждое из рассмотренных событий равносильно одновременному наблюдению соответствующих двух независимых событий. Поэтому на основании теоремы умножения вероятностей независимых событий получаем

$$P(A1) = P(N_{AG} > 230, N_{BG} > 260) = P(N_{AG} > 230) * P(N_{BG} > 260)$$

$$P(A2) = P(N_{AG} > 230, N_{BG} < 260) = P(N_{AG} > 230) * P(N_{BG} < 260)$$

$$P(A3) = P(N_{AG} < 230, N_{BG} > 260) = P(N_{AG} < 230) * P(N_{BG} > 260)$$

$$P(A4) = P(N_{AG} < 230, N_{BG} < 260) = P(N_{AG} < 230) * P(N_{BG} < 260)$$

4. Определим вероятность реализации вариантов 1, 2, 3, 4 плана формирования поездов как вероятности случайных событий A1, A2, A3, A4 согласно заданным законам распределения вероятностей вагонопотоков  $N_{AG}$  и  $N_{BG}$

Согласно равномерному закону распределения

$$P(N_{AG} < 230) = \frac{(N_{AG} - a)}{(b - a)}$$

где разность границ  $(b - a) = 2\sqrt{3}\sigma = 2 \times \sqrt{3} \times 82 = 284$

$$P(N_{AG} < 230) = \frac{(230 - 95)}{284} = 0,4754$$

Согласно теореме сложения вероятностей противоположных событий

$$P(N_{AG} > 230) = 1 - P(N_{AG} < 230) = 1 - 0,4754 = 0,5246$$

Согласно показательному закону распределения

$$P(N_{BG} < 260) = 1 - e^{-N_{BG}/\sigma} = 1 - e^{-260/82} = 0,9580$$

Согласно теореме сложения вероятностей противоположных событий

$$P(N_{BG} > 260) = 1 - P(N_{BG} < 260) = 1 - 0,9580 = 0,0420$$

$$P(A1) = 0,5246 * 0,0420 = 0,0220$$

$$P(A2) = 0,5246 * 0,9580 = 0,5026$$

$$P(A3) = 0,4754 * 0,0420 = 0,0200$$

$$P(A4) = 0,4754 * 0,9580 = 0,4554$$

5. Проверим правильность расчетов учитывая, что события A1, A2, A3, A4 несовместимы и составляют полную систему событий

$$P(A1) + P(A2) + P(A3) + P(A4) = 0,0220 + 0,5026 + 0,0200 + 0,4554 = 1$$

6. Проверим вариант 4 на существование двух подвариантов 4а и 4б

$$4а - N_{AG} + N_{BG} < N_{BGкр}, N_{AG} < N_{AGкр}, N_{BG} < N_{BGкр}$$

$$4б - N_{AG} + N_{BG} > N_{BGкр}, N_{AG} < N_{AGкр}, N_{BG} < N_{BGкр}$$

7. Определим вероятности P(4а) и P(4б). Проведем анализ событий A4 графически (Рис.1.1)

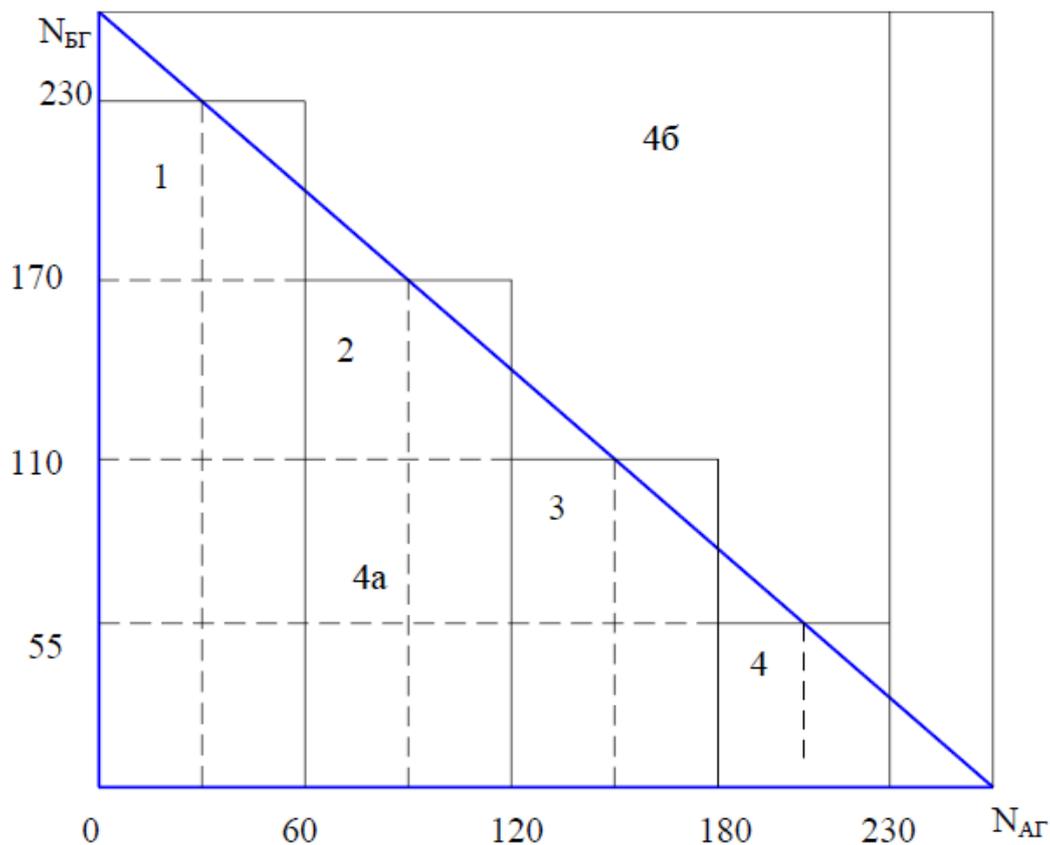


Рис.1.1 – Графическое изображение варианта 4

Разобьем треугольник события 4а на 4 трапеции, которые заменим равными по площади прямоугольниками 1, 2, 3, 4.

Используя заданные в условии задачи законы распределения определим вероятности событий, которые являются площадями соответствующих прямоугольников

$$P(1) = P(0 < N_{БГ} < 230) * P(0 < N_{АГ} < 60)$$

$$P(2) = P(0 < N_{БГ} < 170) * P(60 < N_{АГ} < 120)$$

$$P(3) = P(0 < N_{БГ} < 110) * P(120 < N_{АГ} < 180)$$

$$P(4) = P(0 < N_{БГ} < 55) * P(180 < N_{АГ} < 230)$$

Вероятности, соответствующие основаниям прямоугольникам определяются по равномерному закону распределения

$$F(N) = \begin{cases} 0, & 0 < N < a \\ \frac{(N - a)}{(b - a)}, & a < N < b \\ 1, & N > b \end{cases}$$

тогда

$$P(0 < N_{АГ} < 60) = 0$$

$$P(60 < N_{АГ} < 120) = P(60 < N_{АГ} < 95) + P(95 < N_{АГ} < 120) = 0 + \frac{120 - 95}{284} = 0,0880$$

$$P(120 < N_{АГ} < 180) = P(0 < N_{АГ} < 180) - P(0 < N_{АГ} < 120) = \frac{180 - 95}{284} - \frac{120 - 95}{284} = 0,2113$$

$$P(180 < N_{АГ} < 230) = P(0 < N_{АГ} < 230) - P(0 < N_{АГ} < 180) = \frac{230 - 95}{284} - \frac{180 - 95}{284} = 0,1761$$

Вероятности, соответствующие высотам прямоугольников рассчитываются по показательному закону распределения

$$P(0 < N_{БГ} < 230) = 1 - e^{-230/82} = 0,9395$$

$$P(0 < N_{БГ} < 170) = 1 - e^{-170/82} = 0,8742$$

$$P(0 < N_{БГ} < 110) = 1 - e^{-110/82} = 0,7385$$

$$P(0 < N_{БГ} < 55) = 1 - e^{-55/82} = 0,4887$$

$$P(1) = 0,9395 * 0 = 0;$$

$$P(2) = 0,8742 * 0,0880 = 0,0769$$

$$P(3) = 0,7385 * 0,2113 = 0,1560$$

$$P(4) = 0,4887 * 0,1761 = 0,0861$$

$$\text{Вероятность подварианта 4а } P(4a) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0 + 0,0769 + 0,1560 + 0,0861 = 0,3190$$

$$\text{Вероятность подварианта 4б } P(4б) = P(A4) - P(4a) = 0,4554 - 0,3190 = 0,1364$$

### 8. Строим схему полигона и варианты плана формирования поездов

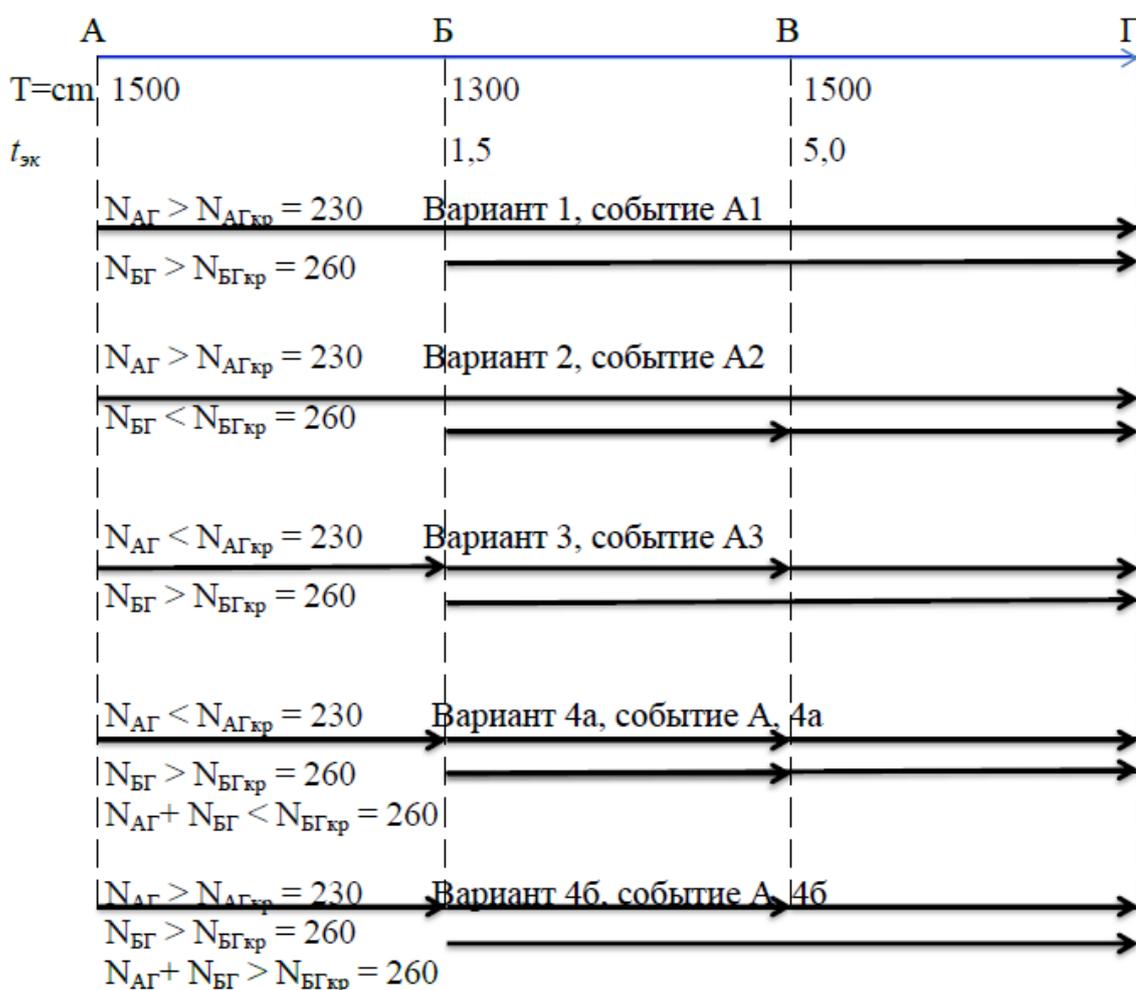


Рис. 1.2. Схема полигона

### Задача №2.

Имеются три пункта отправления однородного груза и пять пунктов его назначения. На пунктах отправления груз находится в количестве  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , в пункты назначения требуется доставить соответственно  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  груза. Известна стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения (матрица  $D$ ). Найти такой план перевозок, при котором необходимо вывезти все запасы груза, полностью удовлетворить все потребности и обеспечить при этом минимум общих затрат на перевозку. Задачу решить методом потенциалов.

#### Исходные данные:

$$a_1 = 50 \quad a_2 = 30 \quad a_3 = 70$$

$$b_1 = 20 \quad b_2 = 30 \quad b_3 = 50 \quad b_4 = 30 \quad b_5 = 20$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

#### Решение.

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 50 + 30 + 70 = 150$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 20 + 30 + 50 + 30 + 20 = 150$$

Условия баланса соблюдены

Составим распределительную таблицу (Таблица 2.1)

Таблица 2.1. Распределительная таблица

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	запасы
$a_1$	9	5	7	1	9	50
$a_2$	7	6	4	8	4	30
$a_3$	5	3	4	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Методом северо-западного угла построим опорный план транспортной задачи (Таблица 2.2)

Таблица 2.2. Первый опорный план

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9(20)	5(30)	7	1	9	50
a2	7	6	4(30)	8	4	30
a3	5	3	4(20)	9(30)	9(20)	70
потребности	20	30	50	30	20	

Количество занятых клеток  $6 < j+i-1=3+5-1=7$ , значит опорный план вырожденный. Строим новый план (Таблица 2.3)

Таблица 2.3 Второй опорный план

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9(20)	5(10)	7	1(20)	9	50
a2	7	6	4	8(10)	4(20)	30
a3	5	3(20)	4(50)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Количество занятых клеток  $7=j+i-1$ . План является допустимым.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы  $u_i$  и  $v_j$  по занятым клеткам таблицы 2.3, в которых  $u_i + v_j = c_{ij}$ , полагая, что  $u_1=0$

$$u_1 + v_1 = 9; 0 + v_1 = 9; v_1 = 9$$

$$u_1 + v_2 = 5; 0 + v_2 = 5; v_2 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 3; u_3 + 5 = 3; u_3 = -2$$

$$u_3 + v_3 = 4; -2 + v_3 = 4; v_3 = 6$$

$$u_1 + v_4 = 1; 0 + v_4 = 1; v_4 = 1$$

$$u_2 + v_4 = 8; u_2 + 1 = 8; u_2 = 7$$

$$u_2 + v_5 = 4; 7 + v_5 = 4; v_5 = -3$$

Проверим опорный план на оптимальность

Таблица 2.4

	$v_1=9$	$v_2=5$	$v_3=6$	$v_4=1$	$v_5=-3$
$u_1=0$	9(20)	5(10)	7	1(20)	9
$u_2=7$	7	6	4	8(10)	4(20)
$u_3=-2$	5	3(20)	4(50)	9	9

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых  $u_i + v_j > c_{ij}$

$$(2;1): 7+9=16>7; \Delta(21)=16-7=9$$

$$(3;1): 2+9=11>5; \Delta(31)=11-5=6$$

$$(2;2): 7+5=12>6; \Delta(22)=12-6=6$$

$$(2;3): 7+6=13>4; \Delta(23)=13-4=9$$

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (21):7

Расставляем знаки

Таблица 2.5

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9(20)(-)	5(10)	7	1(20)(+)	9	50
a2	7(+)	6	4	8(10)(-)	4(20)	30
a3	5	3(20)	4(50)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Наименьший из грузов в минусовых клетках  $\min(2;4)=10$

Преобразуем таблицу 2.5 прибавив 10 где «+» и отняв, где «-»

Таблица 2.6

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9(10)	5(10)	7	1(30)	9	50
a2	7(10)	6	4	8	4(20)	30
a3	5	3(20)	4(50)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Проверим оптимальность опорного плана при  $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 9; 0 + v_1 = 9; v_1 = 9$$

$$u_2 + v_1 = 7; u_2 + 9 = 7; u_2 = -2$$

$$u_1 + v_2 = 5; 0 + v_2 = 5; v_2 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 3; u_3 + 5 = 3; u_3 = -2$$

$$u_3 + v_3 = 4; -2 + v_3 = 4; v_3 = 6$$

$$u_1 + v_4 = 1; 0 + v_4 = 1; v_4 = 1$$

$$u_2 + v_5 = 4; -2 + v_5 = 4; v_5 = 6$$

Таблица 2.7

	$v_1=9$	$v_2=5$	$v_3=6$	$v_4=1$	$v_5=6$
$u_1=0$	9(10)	5(10)	7	1(30)	9
$u_2=-2$	7(10)	6	4	8	4(20)
$u_3=-2$	5	3(20)	4(50)	9	9

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых  $u_i + v_j > c_{ij}$

$$(3;1): -2+9=7>5; \Delta(31)=7-5=2$$

Максимальная оценка свободной клетки (31):5

Расставляем знаки

Таблица 2.8

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9(10)(-)	5(10)(+)	7	1(30)	9	50
a2	7(10)	6	4	8	4(20)	30
a3	5(+)	3(20)(-)	4(50)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Наименьший из грузов в минусовых клетках  $\min(1;1)=10$

Преобразуем таблицу 2.8 прибавив 10 где «+» и отняв, где «-»

Таблица 2.9

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9	5(20)	7	1(30)	9	50
a2	7(10)	6	4	8	4(20)	30
a3	5(10)	3(10)	4(50)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Проверим оптимальность опорного плана при  $u_1 = 0$

$$u_2 + v_1 = 7; u_2 + 7 = 7; u_2 = 0$$

$$u_3 + v_1 = 5; -2 + v_1 = 5; v_1 = 7$$

$$u_1 + v_2 = 5; 0 + v_2 = 5; v_2 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 3; u_3 + 5 = 3; u_3 = -2$$

$$u_3 + v_3 = 4; -2 + v_3 = 4; v_3 = 6$$

$$u_1 + v_4 = 1; 0 + v_4 = 1; v_4 = 1$$

$$u_2 + v_5 = 4; 0 + v_5 = 4; v_5 = 4$$

Таблица 2.10

	$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=6$	$v_4=1$	$v_5=4$
$u_1=0$	9	5(20)	7	1(30)	9
$u_2=0$	7(10)	6	4	8	4(20)
$u_3=-2$	5(10)	3(10)	4(50)	9	9

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых  $u_i + v_j > c_{ij}$

$$(2;3): 0+6=6>4; \Delta(23)=6-4=2$$

Максимальная оценка свободной клетки (23):4

Расставляем знаки

Таблица 2.11

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9	5(20)	7	1(30)	9	50
a2	7(10)(-)	6	4(+)	8	4(20)	30
a3	5(10)(+)	3(10)	4(50)(-)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Наименьший из грузов в минусовых клетках  $\min(2;1)=10$

Преобразуем таблицу 2.8 прибавив 10 где «+» и отняв, где «-»

Таблица 2.12

	b1	b2	b3	b4	b5	запасы
a1	9	5(20)	7	1(30)	9	50
a2	7	6	4(10)	8	4(20)	30
a3	5(20)	3(10)	4(40)	9	9	70
потребности	20	30	50	30	20	

Проверим оптимальность опорного плана при  $u_1 = 0$

$$u_3 + v_1 = 5; -2 + v_1 = 5; v_1 = 7$$

$$u_1 + v_2 = 5; 0 + v_2 = 5; v_2 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 3; u_3 + 5 = 3; u_3 = -2$$

$$u_2 + v_3 = 4; u_2 + 6 = 4; u_2 = -2$$

$$u_3 + v_3 = 4; -2 + v_3 = 4; v_3 = 6$$

$$u_1 + v_4 = 1; 0 + v_4 = 1; v_4 = 1$$

$$u_2 + v_5 = 4; -2 + v_5 = 4; v_5 = 6$$

Таблица 2.13

	$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=6$	$v_4=1$	$v_5=6$
$u_1=0$	9	5(20)	7	1(30)	9
$u_2=-2$	7(10)	6	4	8	4(20)
$u_3=-2$	5(10)	3(10)	4(50)	9	9

Опорный план (Таблица 2.12) является оптимальным.

Затраты составят

$$F(x) = 5 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 50 = 560 \text{ денежных единиц.}$$

### **Задача №3.**

В депо по ремонту вагонов работает  $n$  бригад. В среднем в течение дня поступает в ремонт  $\lambda$  вагонов и при семичасовом рабочем дне каждая из бригад ремонтирует  $\mu$  вагонов. Рассматривая депо как систему массового обслуживания, **требуется:**

1. Проверить исходные данные на адекватность условиям применения математической модели системы массового обслуживания.

2. В случае неадекватности принять решение по управлению параметрами работы депо с целью приведения в соответствие с условиями применения описывающей математической модели, а именно, выбрать необходимый уровень значений  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

3. Рассчитать характеристики эффективности 1) среднее время ремонта 1-го вагона, 2) среднее время ожидания начала ремонта для каждого вагона, 3) среднюю длину очереди.

#### **Исходные данные:**

$$n = 6, \lambda = 12, \mu = 1,5$$

#### **Решение.**

1. Введем параметр  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{1,5} = 8$  – среднее число каналов обслуживания, которое необходимо иметь для обслуживания все поступающие требования в единицы времени

$$\alpha = \frac{12}{1,5} = 8$$

Так как  $\alpha=8 > n=6$ , то исходные данные не соответствуют условиям применения используемой математической модели, описывающую систему массового обслуживания.

Для приведения исходных данных в соответствии с условиями применения описывающей математическую модель допускаем, что условия работы улучшились и повысилась квалификация мастеров, что позволит одной бригаде за смену делать  $\mu = 2$  вагонов за смену. Также повышаем количество бригад до  $n = 7$ .

Получим новые исходные данные

$$n = 7, \lambda = 12, \mu = 2$$

$$\text{тогда } \alpha = \frac{12}{2} = 6 < n = 7$$

2. Вероятность, что в мастерскую депо поступило 0 вагонов

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \right]^{-1} = \left[ \sum_{k=0}^6 \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^7}{6!} \right]^{-1} = [1 + 6 + 18 + 36 + 54 + 64.8 + 64.8 + 388.8]^{-1} = \frac{1}{580} = 0.0018$$

3. Вероятность того, что все бригады заняты ( $k=n=6$ )

$$P_n = \frac{\alpha^k}{(n-1)!(n-\alpha)} \times P_0 = \frac{6^6}{(7-1)!(7-6)} \times 0.0018 = 0.1166$$

4. Среднее время ремонта вагона

$$\bar{t}_p = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ рабочего дня}$$

$$\text{или } \bar{t}_p = 0,5 \times 60 \times 7 = 210 \text{ мин} = 3 \text{ часа } 30 \text{ мин}$$

5. В среднем время ожидания начала ремонта для каждого вагона

$$t_{\alpha 1} = \frac{1}{\mu} \times \frac{P_n}{n-\alpha} = \frac{1}{2} \times \frac{0.1166}{7-6} = 0.0583 \text{ рабочего времени}$$

$$\text{или } t_{\alpha 1} = 0,0583 \times 60 \times 7 = 24,5 \text{ мин}$$

6. Средняя длина очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\alpha P_n}{n-\alpha} = \frac{6 \times 0.1166}{7-6} = 0.7 \text{ вагона}$$

7. Среднее число бригад, свободных от работы

$$\bar{N}_o = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k = 0.0018 \times \sum_{k=0}^6 \frac{7-k}{k!} \alpha^k = 0.0018(7 + 36 + 900 + 144 + 162 + 130 + 64.8) = 2.6 \approx 3$$

Ответ: Вероятность того, что все бригады свободны от работы

$$P_0 = 0.0018$$

Вероятность того, что все бригады заняты  $P_n = 0.1166$

Среднее время ремонта одного вагона 3 часа 30 минут

Средняя длина очереди 0,7 вагона

Среднее число свободных от работы бригад – 3

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Основная литература

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: «Академия», 2008.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. М.: Финансы и статистика, 2007.
3. Вероятностные разделы математики / Под ред. Максимова Ю.Д. СПб.: «Иван Федоров», 2004.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2008.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2008.
6. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. СПб.: БХВ – Петербург, 2005.
7. Даньшин С.Т., Кляус К.М., Филимонов Г.Д. Что такое исследование операций? Элементы математических методов. СПб: Сократ, 2005.
8. Математические методы и модели исследования операций /Под ред. Колемаева В.А. М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2008.
9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 2004.
10. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями. М.: Издательская торговая корпорация «Дашков и К<sup>о</sup>», 2006.
11. Костевич Л.С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений. Мн.: Новое знание, 2003.
12. Введение в математическое моделирование / Под ред. Трусова П.В. М.: Логос, 2005.

### Дополнительная литература

1. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергия, 1980.
2. Мартынов И.М., Сотников Е.А. и др. Эксплуатационные расчеты с применением теории вероятностей. М.: Транспорт, 1970.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. Радио, 1972.
4. Акулиничев В.М., Кудрявцев В.А., Корешков А.Н. Математические методы в эксплуатации железных дорог. М.: Транспорт, 1981.
5. Исследование операций. Т 1. Методологические основы и математические методы. Т 2. Модели и применения / Под ред. Дж. Моудера и С.Элмаграби. М.: Мир, 1981.
6. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Вища школа, 1979.
7. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002
8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. М.: Высшая школа, 2001.
9. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
10. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001.
11. Математическое моделирование экономических процессов на железнодорожном транспорте / Под ред. Каплана А.Б. М.: Транспорт, 1984.
12. Малышева И.А. Теория массового обслуживания: Уч.пос.-М.: МИИТ, 2010.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение № 1

### Оформление титульного листа (образец)



**ОРЕНБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**

(ОрИПС – филиал СамГУПС)

Кафедра «.....»

**Контрольная работа по дисциплине «...»**

на тему: «...»

Выполнил:

Студент группы:

Петров Александр Сергеевич  
(Фамилия, имя, отчество)

Проверил:

Иванов Иван Иванович  
(Фамилия, инициалы, степень,  
звание)

Оренбург 20...

РЕЦЕНЗИЯ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О. студента)

\_\_\_\_\_  
(специальность)

\_\_\_\_\_  
(курс, № группы)

\_\_\_\_\_  
(дисциплина)

\_\_\_\_\_  
(тема контрольной работы)

*Соответствие структуры (план, введение, содержание, список используемых источников) контрольной работы теме.*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Не соответствует

*Уровень работы с источниками информации достигнут.*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Не осуществлен

*Ссылки на литературу в тексте контрольной работы приведены:*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Не осуществлен

*Приведенные схемы, рисунки, таблицы, диаграммы соответствуют требованиям оформления:*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Отсутствует

*Аргументация и обоснованность выводов выражены:*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Отсутствует

*Цель работы достигнута.*

Да  Нет  Не полностью

*Стиль и логика изложения соответствуют требованиям.*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Не соответствует

*Работа в целом соответствует требованиям оформления.*

Полностью  Достаточно  Недостаточно  Не соответствует

*Количество правильно решенных заданий.*

90-100 %  75-89 %  50-74 %  %

*Недостатки работы:*

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Контрольная работа может быть оценена:

Допустить к защите  Допустить с доработкой  Не допустить к защите

Рецензент \_\_\_\_\_

(Ф.И.О.) (ученая степень, звание, должность)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

(подпись рецензента)

Учебное издание

**Левченко** Дмитрий Валерьевич

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

Подписано в печать . Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. . Тираж 500 экз. Заказ

Издательство