Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический
университет имени В.И. Ленина»

**Кафедра теоретических основ электротехники
и электротехнологий**

А.Н. ГОЛУБЕВ, В.А. МАРТЫНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ

Учебное пособие

Иваново 2013

УДК 621.3
Г 62

Голубев А.Н., Мартынов В.А. Линейные электрические цепи в стационарных режимах: *теория, задание к курсовой работе, методические указания к выполнению курсовой работы*: Учеб. пособие/ ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2013. – 196 с. ISBN

В учебном пособии рассмотрены основные методы расчета и анализа линейных электрических цепей в стационарных режимах. Кроме того, оно включает в себя варианты задания к курсовой работе по указанному разделу курса ТОЭ и методические указания по ее выполнению. Содержание пособия, последовательность изложения материала в нем, а также объем задания к курсовой работе соответствуют программе курса ТОЭ ФГОС по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

Предназначено для студентов всех профилей подготовки по направлению «Электроэнергетика и электротехника».

Табл.: 11. Ил.: 156. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

Научный редактор

кандидат технических наук М.С. САЙКИН (ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»)

Рецензенты:

А.Ф. СОРОКИН (ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»);
Б.С. КУРНЫШЕВ (ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»)

ISBN

© А.Н. ГОЛУБЕВ,
В.А. МАРТЫНОВ, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения основных методов расчета и анализа линейных электрических цепей в стационарных режимах. Оно включает в себя варианты задания к курсовой работе по указанному разделу курса ТОЭ и методические указания по ее выполнению, а также необходимые теоретические сведения. Содержание пособия, последовательность изложения материала в нем, а также объем задания к курсовой работе соответствуют программе курса ТОЭ ФГОС подготовки бакалавров по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

Цель, которая стояла перед авторами при написании данного пособия, заключалась в систематизации основных методов расчета и анализа линейных электрических цепей постоянного и переменного тока как однофазных, так и трехфазных, в стационарных режимах с акцентом на привитие практических навыков их использования. Необходимый теоретический материал изложен сжато, что придает пособию элементы справочной литературы. Каждое контрольное задание курсовой работы сопровождается подробными методическими указаниями к его выполнению и соответствующим примером расчета.

В зависимости от профиля подготовки, степени подготовленности студентов и времени, отводимого для выполнения курсовой работы в общем графике учебного процесса, в пособии предусмотрено два уровня сложности заданий: первый (пороговый) и второй (повышенный). Выбор уровня осуществляется непосредственно студентом или определяется преподавателем.

При изучении дисциплины предполагается, что студент имеет соответствующую математическую подготовку в области линейной алгебры, комплексных чисел и тригонометрических функций, а также знаком с основными понятиями и законами электричества и магнетизма, рассматриваемыми в курсе физики.

Знания и навыки, полученные при прочтении данного учебного пособия, а также при выполнении расчетных заданий, являются базой для освоения таких дисциплин, как теория автоматического управления, переходные процессы в электрических системах, электропривод, промышленная электроника и т.д.

Пособие состоит из четырех разделов. Первый раздел включает в себя задания к курсовой работе двух уровней сложности. Второй раздел посвящен изложению базовых теоретических сведений по расчету и анализу линейных электрических цепей в стационарных режимах. В третьем и четвертом разделах приводятся методические указания к выполнению заданий соответственно первого и второго уровней сложностей и примерами расчета.

Авторы выражают глубокую благодарность программисту Н.Н. Дыдыкиной за активную и добросовестную работу при подготовке рукописи к печати.

1. Задание к курсовой работе

Задание имеет два уровня сложности. ***Первый уровень (пороговый)*** включает в себя четыре задачи. 1.1. Расчет цепи постоянного тока; 1.2. Расчет цепи синусоидального тока; 1.3. Расчет цепи синусоидального тока с индуктивной связью между элементами; 1.4. Расчет симметричной трехфазной цепи. ***Второй уровень*** сложности (повышенный) включает в себя две задачи: 2.1. Расчет разветвленной цепи синусоидального тока различными методами; 2.2. Расчет разветвленной трехфазной цепи в симметричном и несимметричном режимах.

Вариант задания для каждого студента определяется следующим образом:

– номер схемы равен порядковому номеру, под которым студент записан в журнале группы (если в группе более 20 человек, то недостающие варианты указываются преподавателем);

– номер варианта параметров схемы определяется по табл. 1.1.

Таблица 1.1. **Варианты задания параметров схемы**

Номер группы	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Вариант задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Номер группы	31	32	34	35	36	37				
Вариант задания	1	2	3	4	5	6				

1.1. Первый уровень сложности (пороговый)

Задача 1.1. Дана разветвленная цепь постоянного тока рис. 1.1. Для заданных в табл. 1.2 параметров требуется:

1.1.1. Составить в общем виде систему уравнений по законам Кирхгофа для определения токов во всех ветвях.

1.1.2. Составить в общем виде систему уравнений по методу контурных токов и определить токи в ветвях этим методом.

1.1.3. Составить в общем виде систему уравнений по методу узловых потенциалов и определить токи в ветвях этим методом.

1.1.4. Составить баланс мощностей, определив суммарную мощность источников и суммарную мощность приемников энергии.

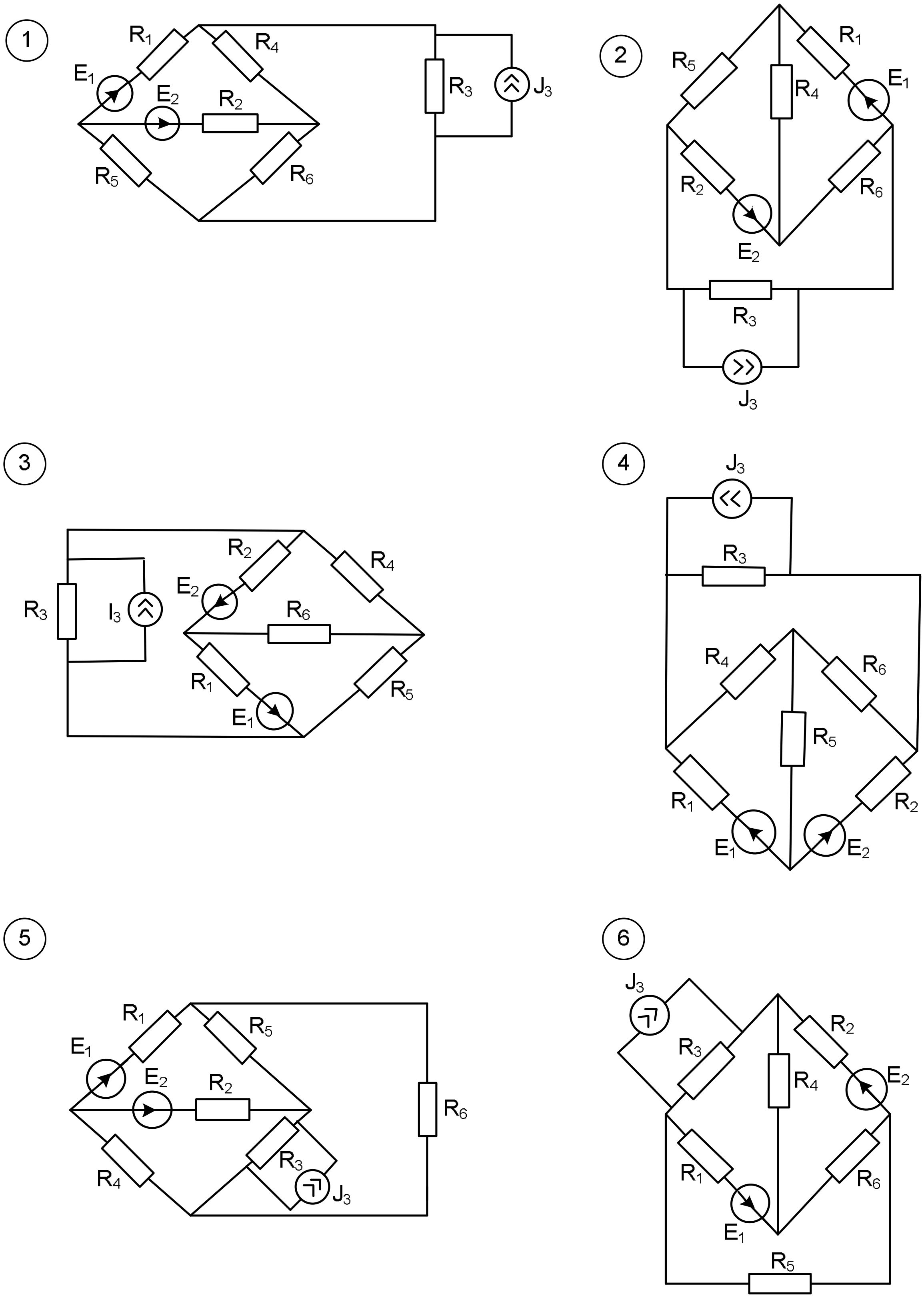
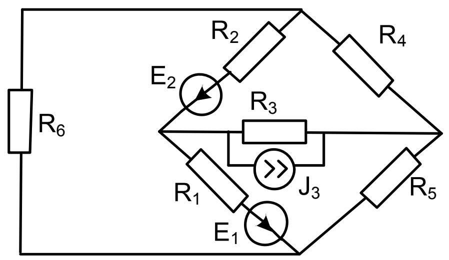
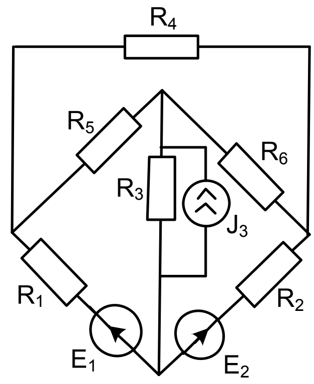

1
R1 R4 E1 E2 R2 R3 J3 R5 R6
2
R5 R1 R4 E1 R2 R6 E2 R3 J3
3
R2 R4 E2 R6 R3 I3 R1 R5 E1
4
J3 R3 R4 R6 R5 R1 R2 E1 E2
5
R1 R5 E1 E2 R2 R6 R3 R4 J3
6
J3 R2 R3 R4 E2 R1 R6 E1 R5

Рис. 1.1

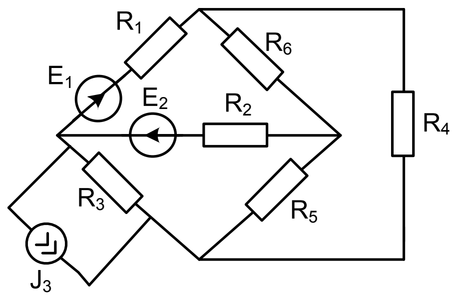
7



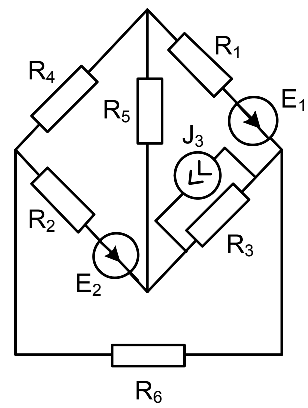
8



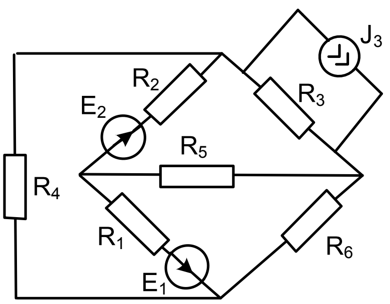
9



10



11



12

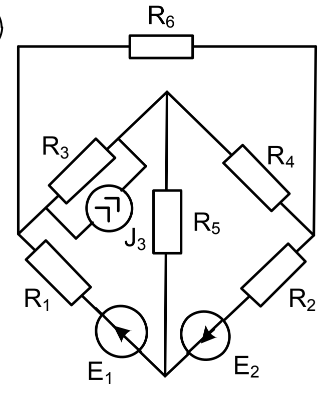
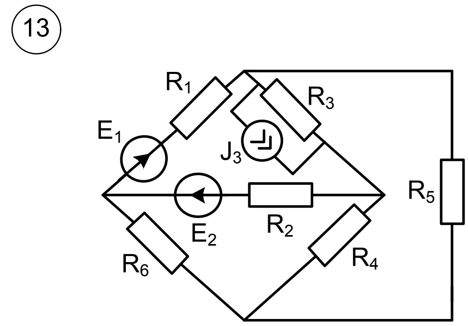
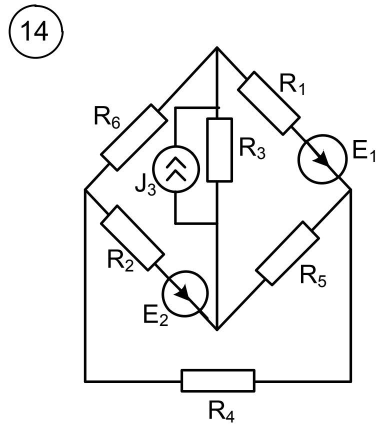
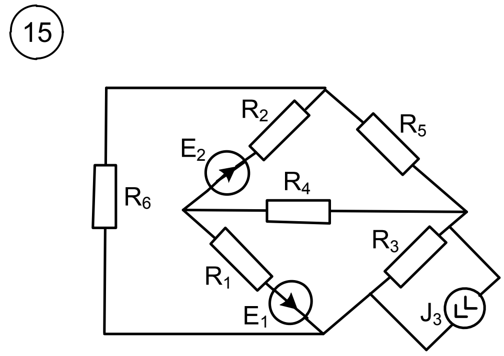
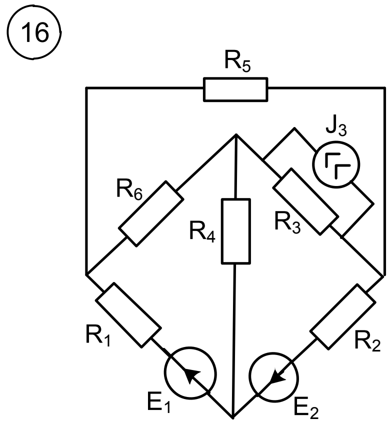


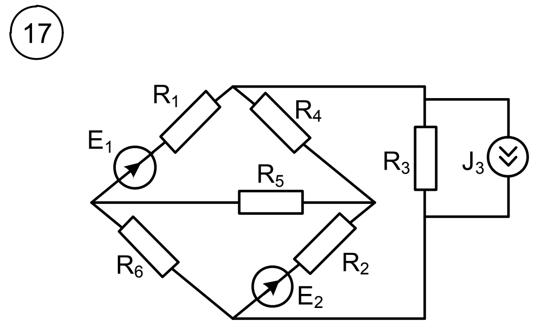
Рис. 1.1 (продолжение)











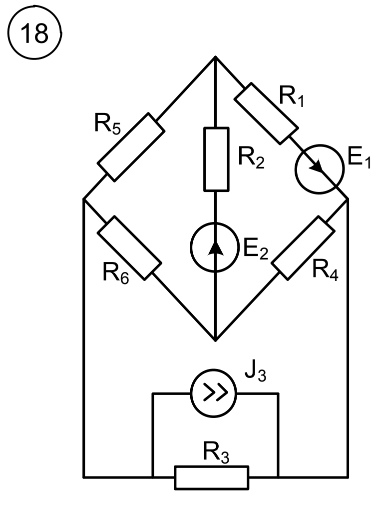


Рис. 1.1 (продолжение)

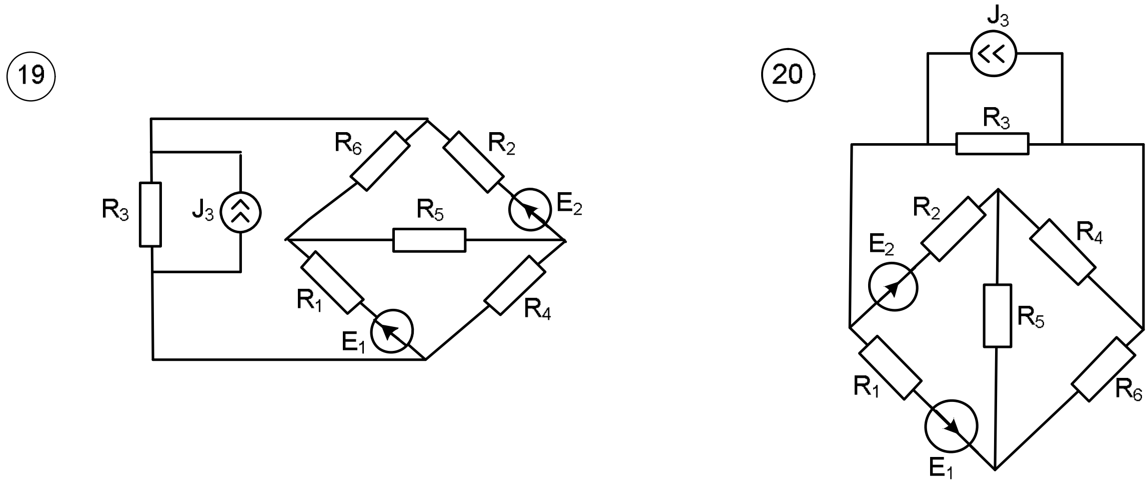


Рис. 1.1 (окончание)

Таблица 1.2. **Исходные данные для расчета к заданию 1.1**

Номер вар.	E_1, В	E_2, В	J_3, А	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	R_4, Ом	R_5, Ом	R_6, Ом
1	100	20	3	20	17	20	33	48	23
2	15	70	5	24	38	24	14	22	33
3	20	60	5	30	30	22	23	9	30
4	80	25	2	33	48	25	42	31	22
5	65	15	4	48	12	26	42	24	38
6	60	30	5	23	31	23	39	48	34
7	80	15	2	33	48	25	42	31	22
8	70	20	4	14	23	29	31	18	31
9	40	80	3	48	20	21	14	38	16
10	30	90	2	17	17	27	22	26	18

Задача 1.2. Дана разветвленная цепь синусоидального тока рис. 1.2. Для заданных в табл. 1.3 параметров требуется:

1.2.1. Упростить схему, заменив параллельно соединенные пассивные элементы последовательным соединением. Рассчитать комплексные сопротивления всех ветвей.

1.2.2. Рассчитать схему и определить комплексные токи во всех ветвях.

1.2.3. Составить баланс мощностей, определив суммарную мощность источников и суммарную мощность приемников.

1.2.4. Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

1.2.5. Построить графики временных зависимостей ЭДС одного из источников и тока в нем.

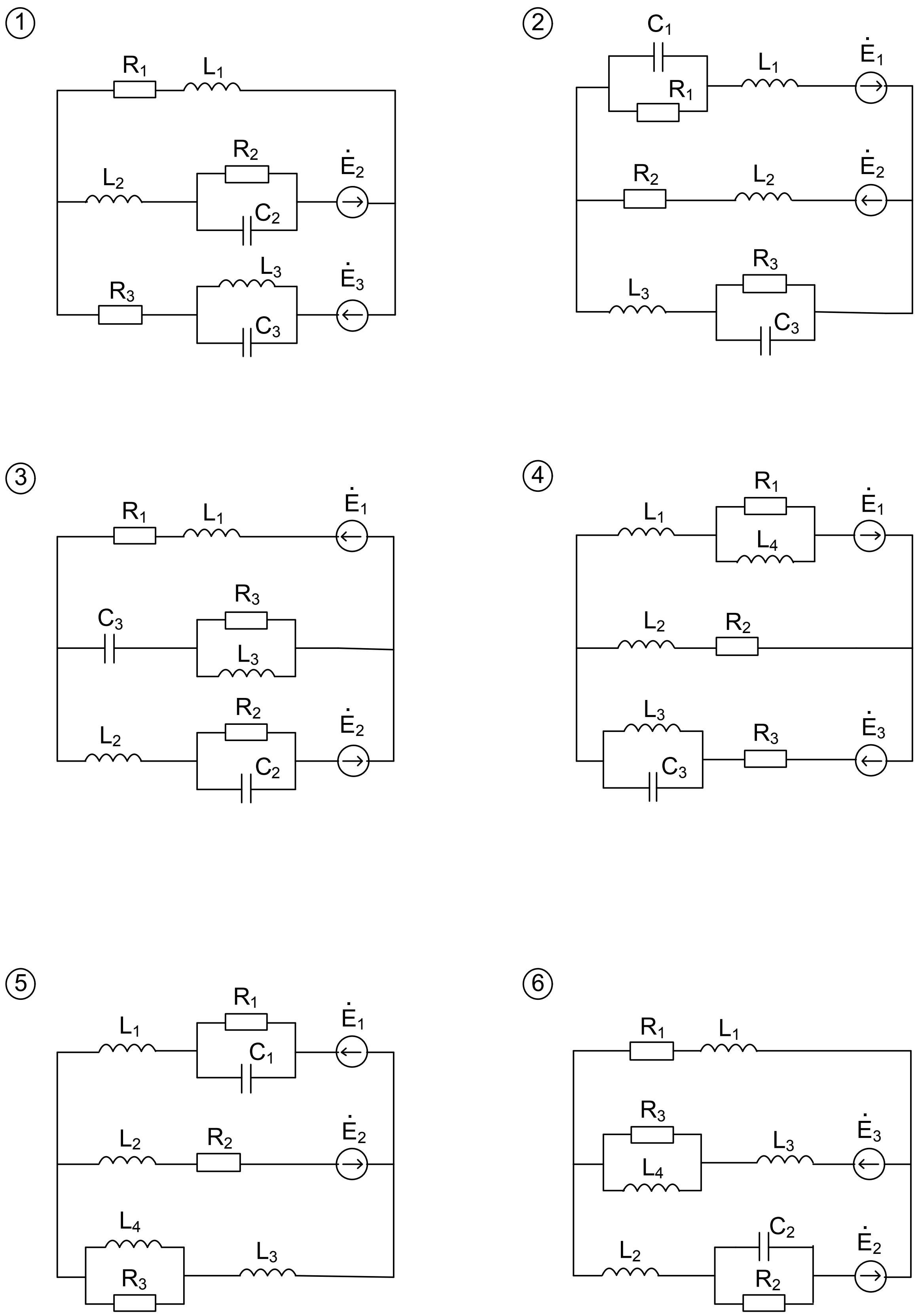

1
R1 L1 L2 R2 C2 Ė2 R3 L3 C3 Ė3
2
C1 R1 L1 Ė1 R2 L2 Ė2 L3 R3 C3
3
R1 L1 Ė1 C3 R3 L3 L2 R2 C2 Ė2
4
L1 R1 L4 Ė1 L2 R2 L3 C3 R3 Ė3
5
L1 R1 C1 Ė1 L2 R2 Ė2 L4 R3 L3
6
R1 L1 R3 L4 L3 Ė3 L2 C2 R2 Ė2

Рис. 1.2

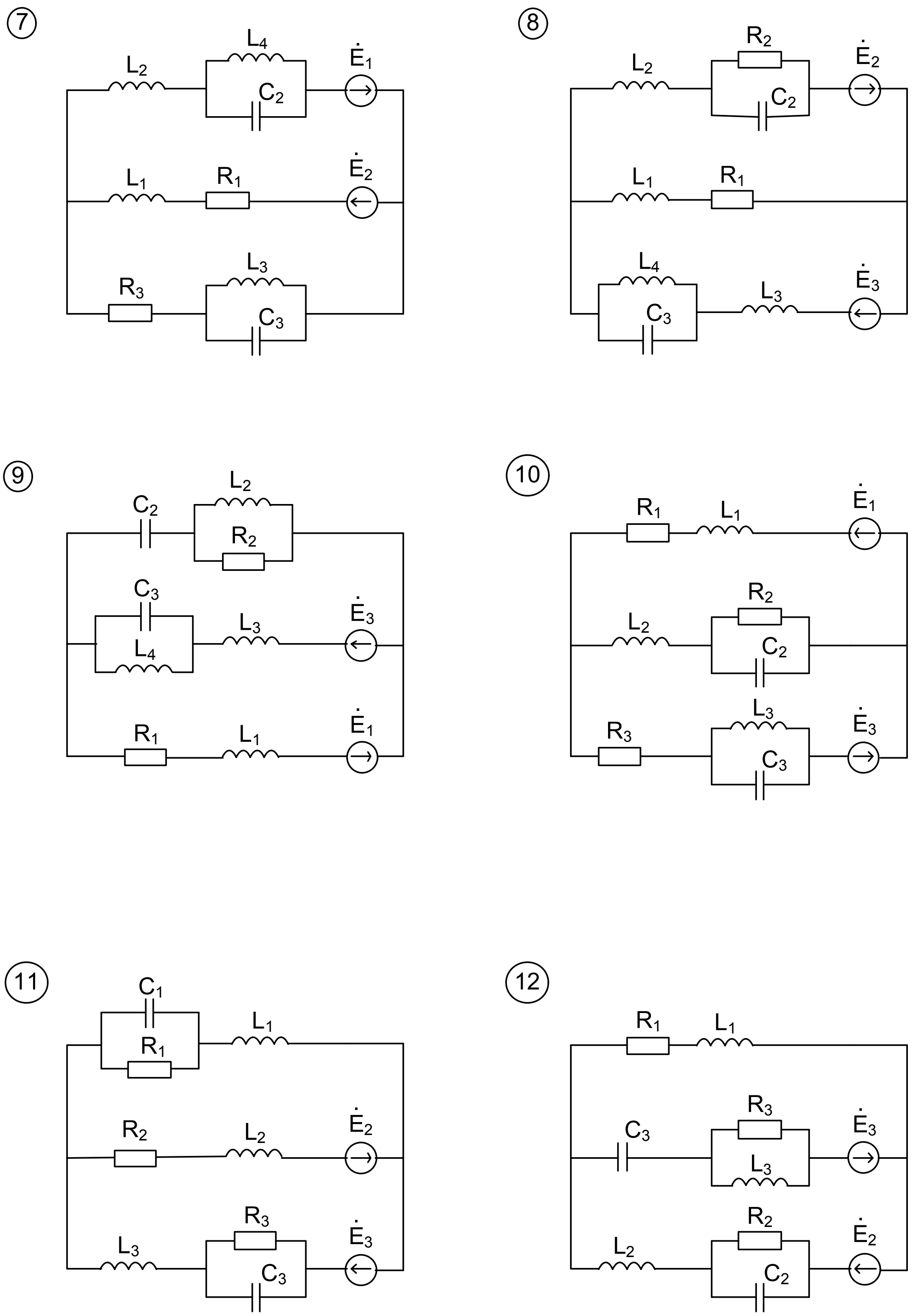


Рис. 1.2 (продолжение)

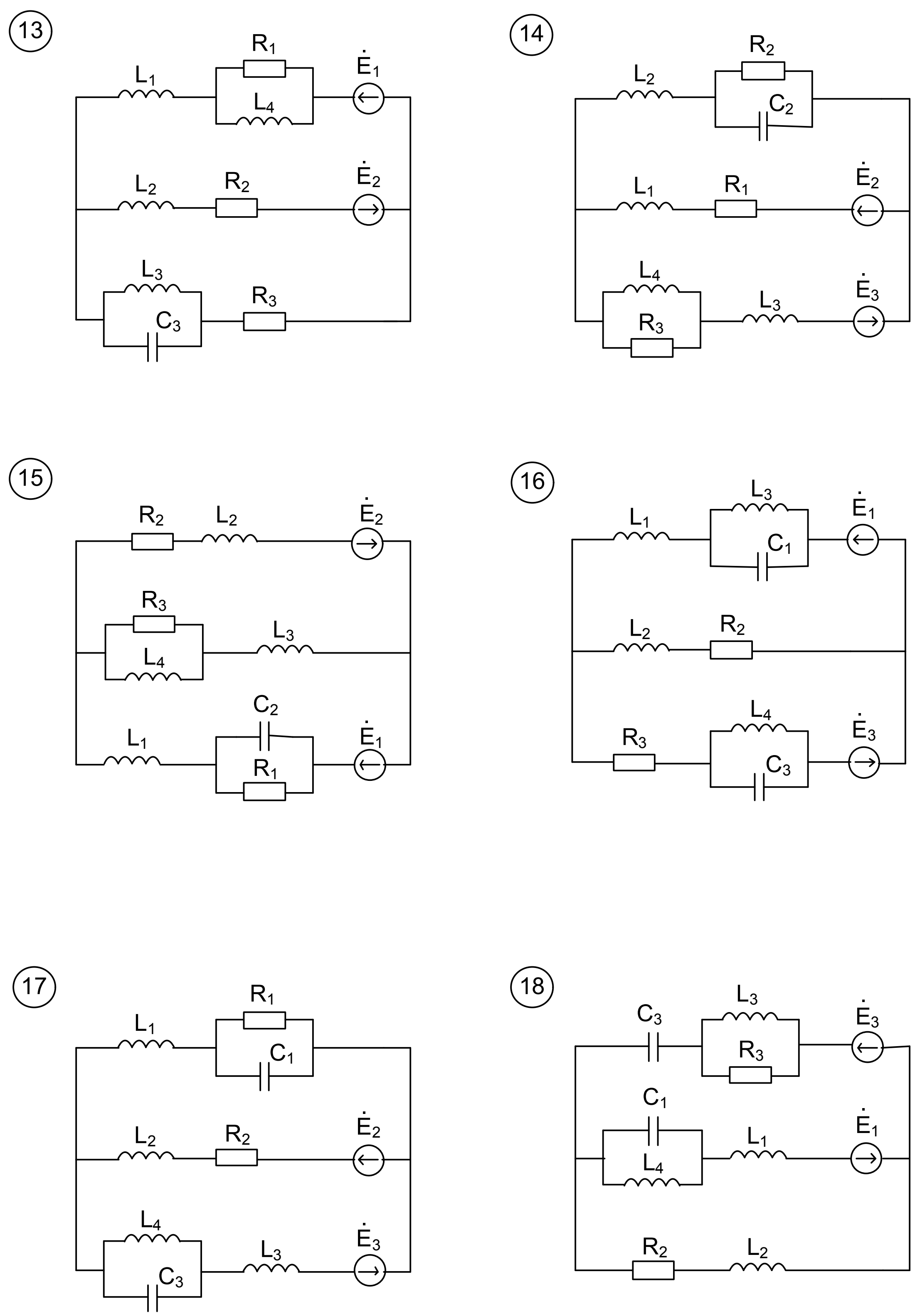
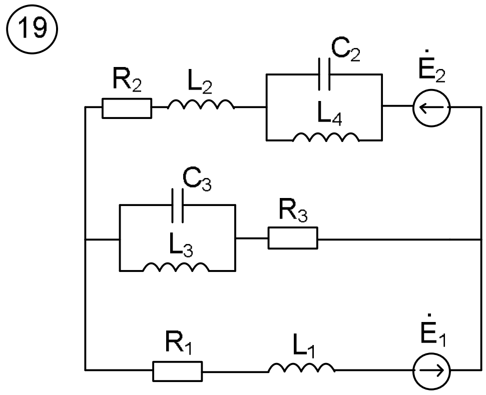


Рис. 1.2 (продолжение)



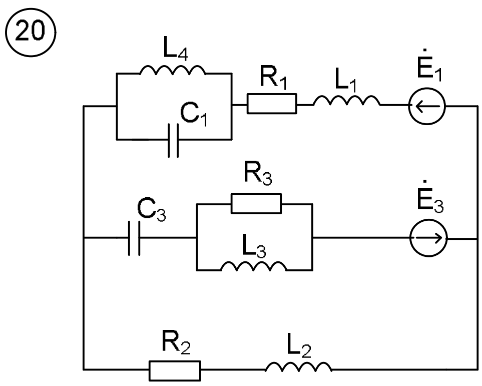


Рис. 1.2 (окончание)

Таблица 1.3. **Исходные данные для расчета к заданию 1.2**

Номер вар.	E_1, В	ψ_1, рад	E_2, В	ψ_2, рад	E_3, В	ψ_3, рад	f, Гц	R_1, Ом
1	100	0	200	$-\frac{\pi}{2}$	150	$\frac{\pi}{6}$	50	10
2	150	$-\frac{\pi}{3}$	350	$\frac{\pi}{2}$	200	$-\frac{\pi}{6}$	60	12
3	200	$\frac{\pi}{3}$	100	$\frac{\pi}{4}$	350	0	50	14
4	220	$\frac{\pi}{4}$	120	$\frac{\pi}{6}$	300	0	60	18
5	350	$-\frac{\pi}{4}$	200	$-\frac{\pi}{6}$	400	$\frac{\pi}{2}$	60	16
6	300	$-\frac{\pi}{6}$	400	$\frac{\pi}{3}$	100	$\frac{\pi}{4}$	50	20
7	120	$\frac{\pi}{6}$	100	0	200	$-\frac{\pi}{4}$	60	15
8	160	0	250	$\frac{\pi}{6}$	100	$-\frac{\pi}{3}$	50	17
9	180	$\frac{\pi}{2}$	200	$-\frac{\pi}{6}$	300	$\frac{\pi}{3}$	50	8
10	400	$-\frac{\pi}{2}$	250	0	100	$\frac{\pi}{4}$	60	20

Окончание табл. 1.3

Номер варианта	R_2, Ом	R_3, Ом	L_1, Гн	L_2, Гн	L_3, Гн	L_4, Гн	C_1, мкФ	C_2, мкФ	C_3, мкФ
1	12	8	0,1	0,16	0,12	0,17	160	180	200
2	15	10	0,08	0,12	0,15	0,11	130	150	170
3	10	9	0,11	0,15	0,1	0,18	220	300	250
4	11	10	0,09	0,11	0,14	0,12	180	200	210
5	14	11	0,1	0,08	0,13	0,15	250	236	180
6	18	14	0,12	0,14	0,1	0,15	240	180	200
7	9	8	0,11	0,09	0,12	0,13	140	180	160
8	15	10	0,13	0,11	0,14	0,17	280	260	180
9	12	9	0,14	0,12	0,18	0,1	300	250	200
10	26	10	0,12	0,15	0,11	0,14	200	250	180

1.2.6. Полагая в качестве нагрузки последовательное соединение двух заданных элементов цепи R и L (табл. 1.4), представить остальную часть схемы эквивалентным активным двухполюсником. Изобразить схему замещения эквивалентного активного двухполюсника и определить его параметры. Вычислить ток в нагрузке по методу эквивалентного активного двухполюсника и сравнить его со значением, найденным в п. 1.2.2.

1.2.7. Определить, какой емкости конденсатор нужно включить параллельно нагрузке, чтобы коэффициент мощности эквивалентной нагрузки был равен единице. Вычислить, с каким $cos\varphi$ будет работать в этом случае источник ЭДС в схеме эквивалентного активного двухполюсника.

Задача 1.3. В схему задачи 1.2 ввести индуктивные связи между двумя заданными катушками (табл. 1.4). Для заданного коэффициента индуктивной связи (табл. 1.4) требуется:

1.3.1. Вывести систему уравнений по методу контурных токов и найти токи ветвей.

1.3.2. Проверить решение по балансам активной и реактивной мощностей.

Таблица 1.4. **Исходные данные для расчета к заданиям 1.2.6 и 1.3**

Номер схемы	Последовательная R-L-нагрузка	Индуктивно связанные элементы	Включение катушек индуктивности	Коэффициент связи $K_{св}$
1	R_1-L_1	L_1-L_2	согласное	0,7
2	R_2-L_2	L_1-L_3	встречное	0,3
3	R_1-L_1	L_1-L_3	согласное	0,12
4	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,21
5	R_2-L_2	L_1-L_2	согласное	0,35
6	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,43
7	R_2-L_2	L_2-L_3	согласное	0,6
8	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,55
9	R_2-L_2	L_1-L_3	согласное	0,17
10	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,38
11	R_1-L_1	L_2-L_3	согласное	0,42
12	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,5
13	R_2-L_2	L_2-L_3	согласное	0,65
14	R_1-L_1	L_1-L_3	встречное	0,4
15	R_2-L_2	L_2-L_3	согласное	0,28
16	R_2-L_2	L_1-L_3	встречное	0,35
17	R_2-L_2	L_1-L_2	согласное	0,36
18	R_1-L_1	L_1-L_2	встречное	0,45
19	R_2-L_2	L_1-L_2	согласное	0,55
20	R_1-L_1	L_1-L_3	встречное	0,5

Задача 1.4. Дана симметричная трехфазная цепь рис. 1.3. Для заданных в табл. 1.5 параметров требуется:

1.4.1. Изобразить расчетную схему фазы А симметричной трехфазной цепи и определить комплексные сопротивления ее ветвей.

1.4.2. Произвести расчет однофазной схемы замещения. Записать значения комплексных токов исходной трехфазной цепи.

1.4.3. Построить векторные диаграммы симметричных трехфазных токов и напряжений ветви в соответствии с вариантом задания (табл. 1.5).

1.4.4. Записать для симметричного режима мгновенные значения токов и напряжений указанной ветви. Построить графики их временных зависимостей.

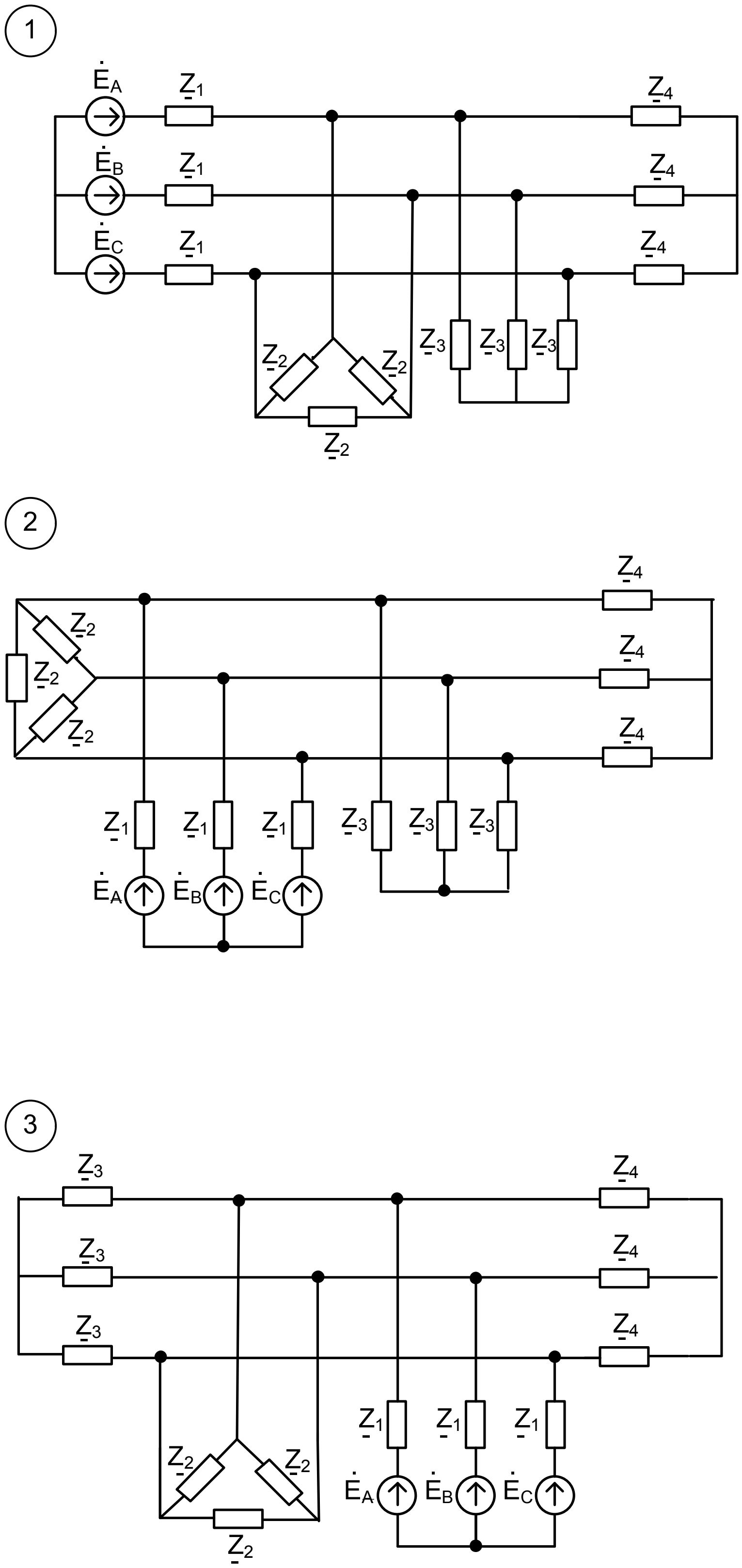
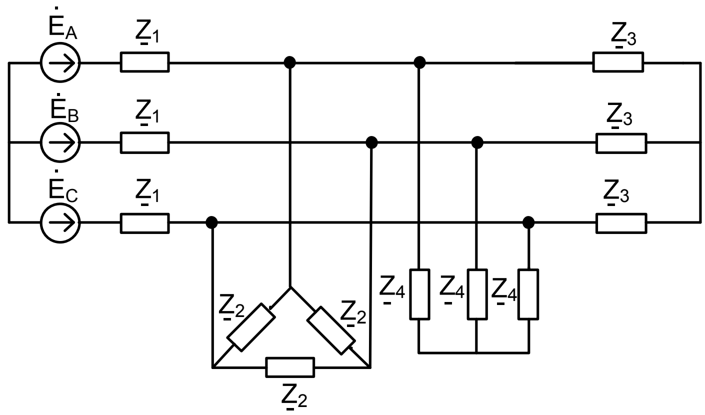
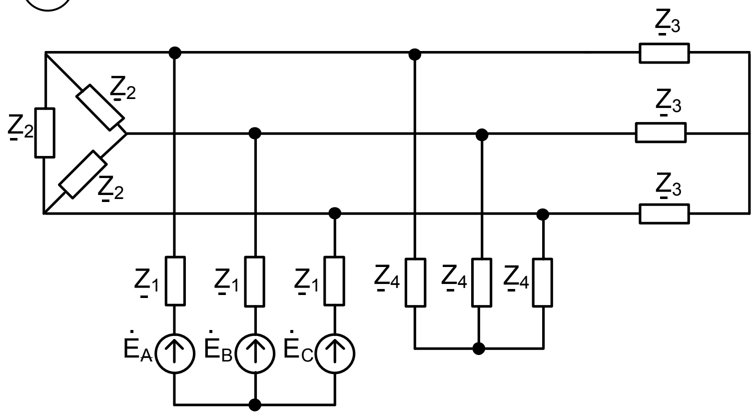


Рис. 1.3

4



5



6

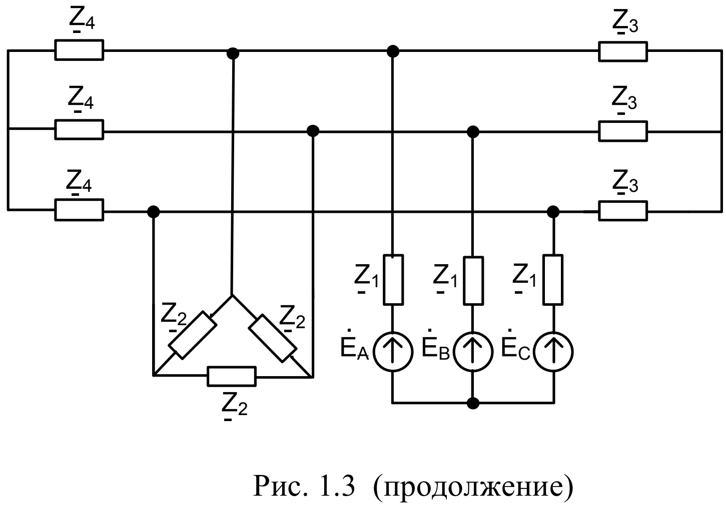
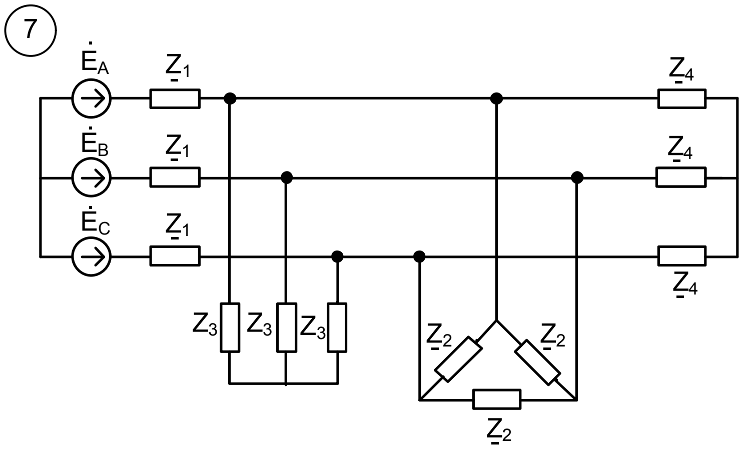
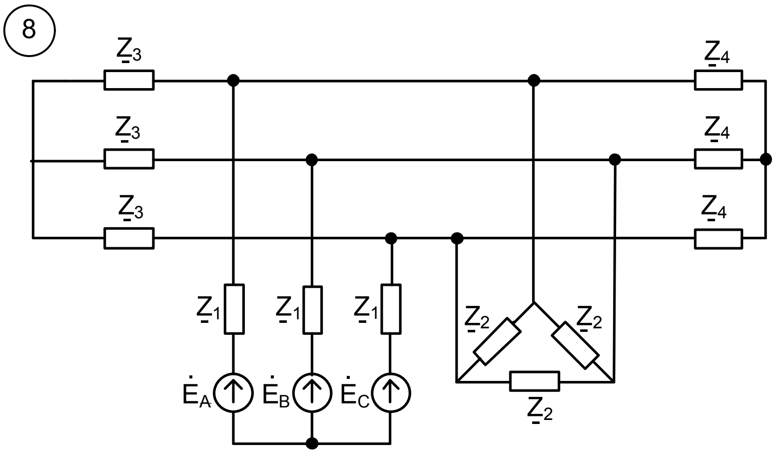


Рис. 1.3 (продолжение)





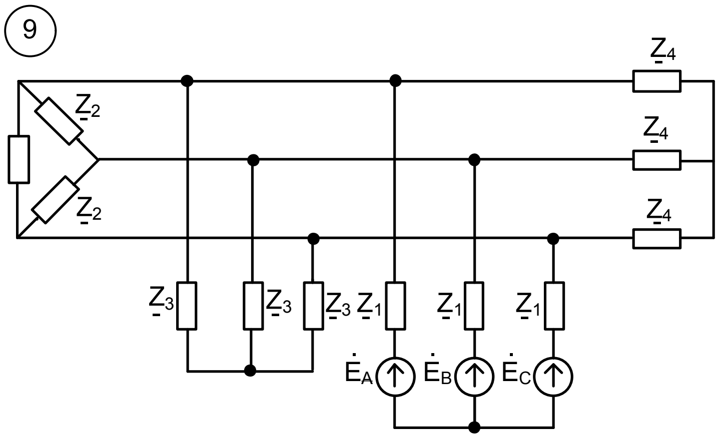
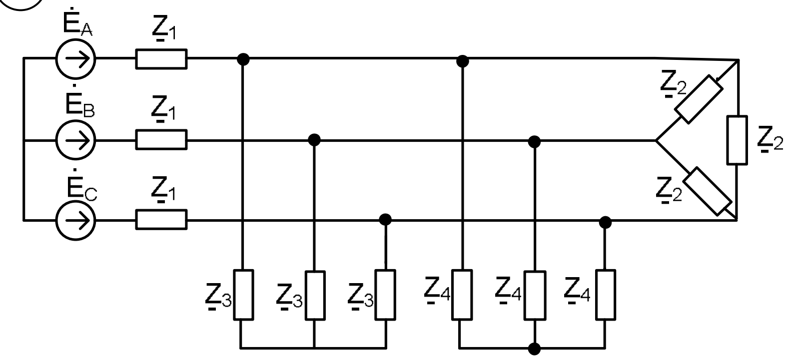
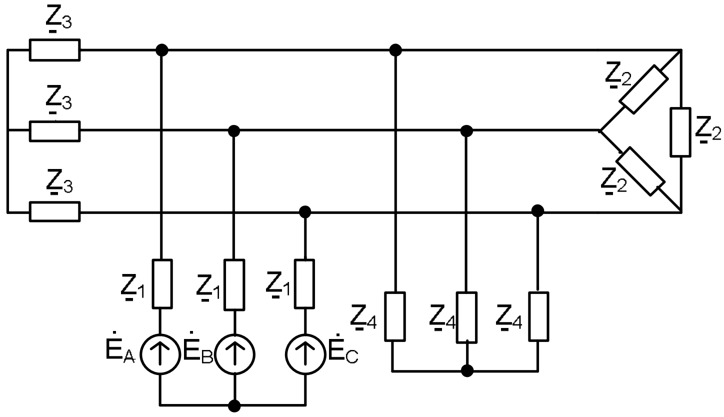


Рис. 1.3 (продолжение)

10



11



12

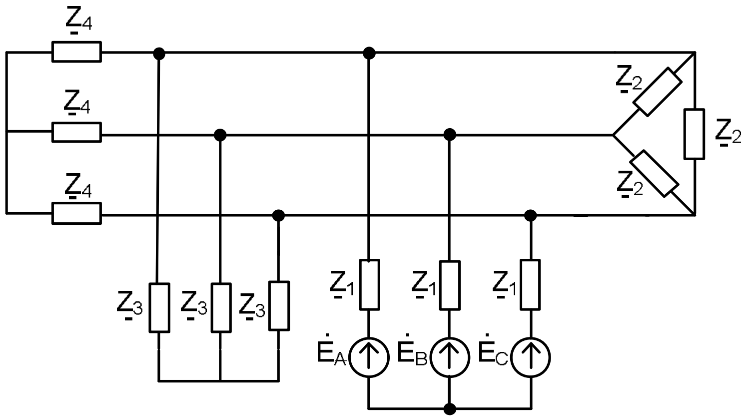
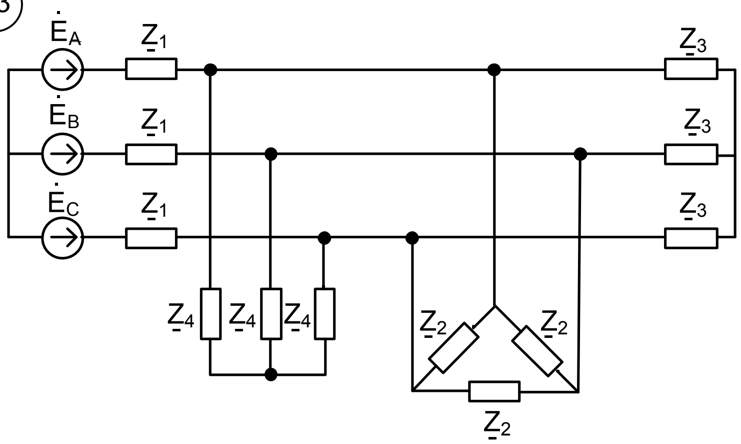
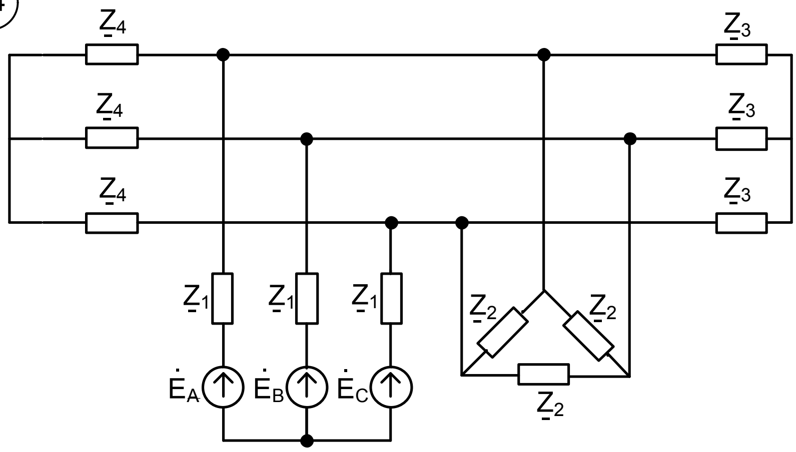


Рис. 1.3 (продолжение)

13



14



15

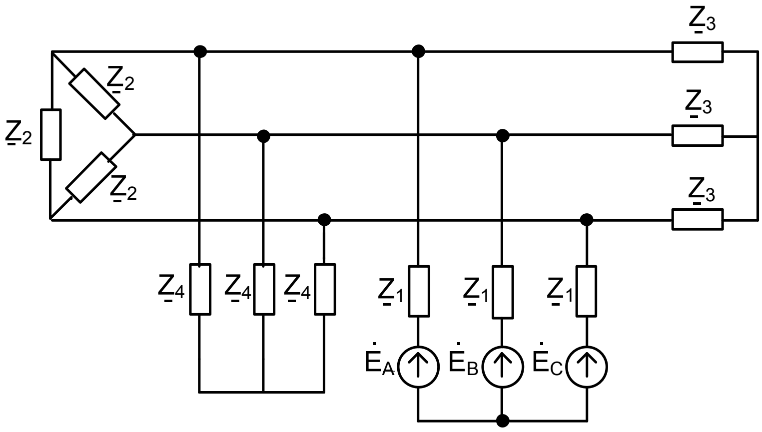
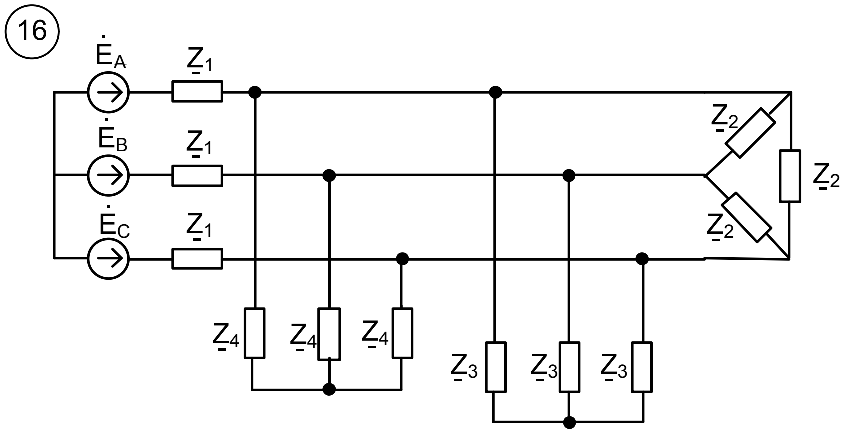
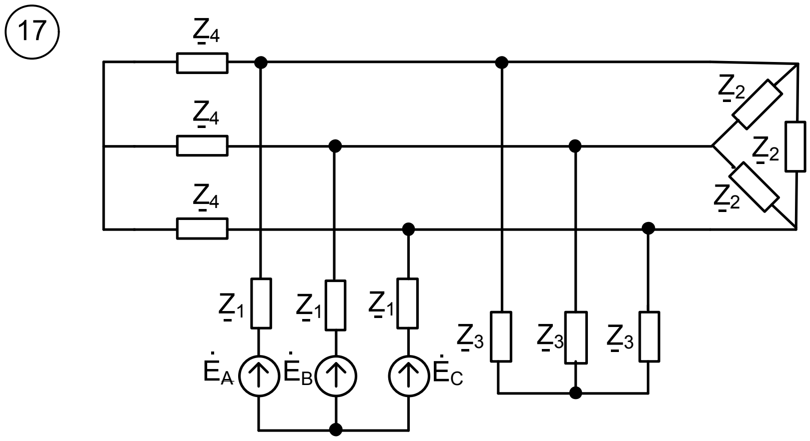


Рис. 1.3 (продолжение)





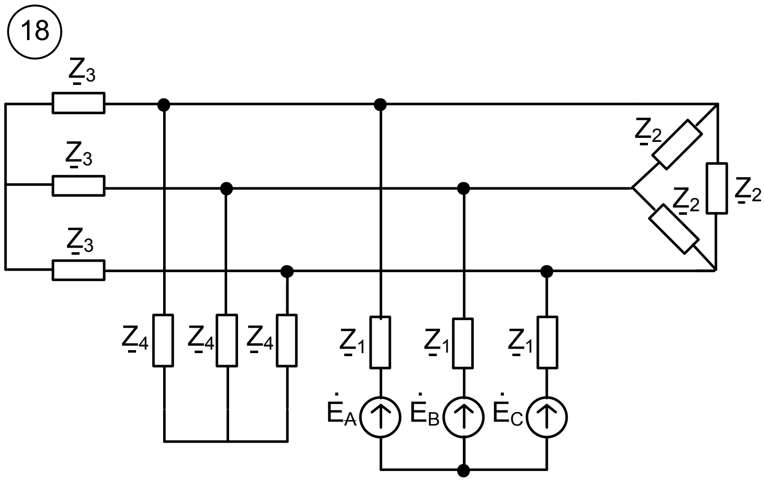
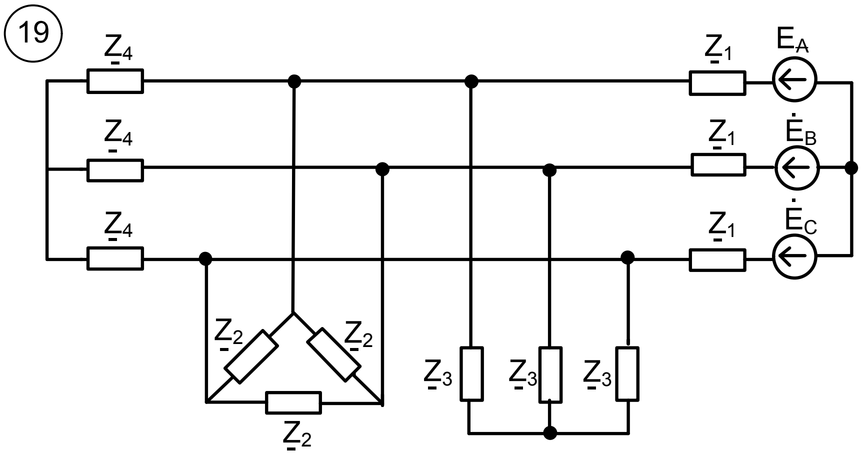


Рис. 1.3 (продолжение)



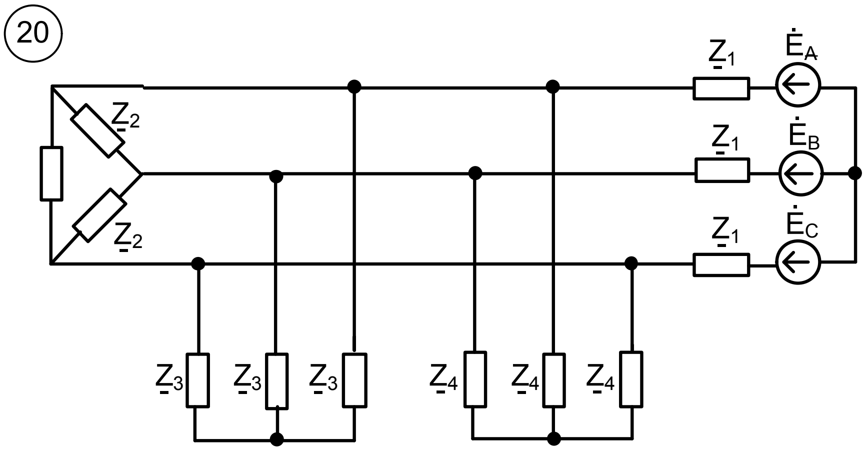


Рис. 1.3 (окончание)

Таблица 1.5. **Исходные данные для расчета к заданию 1.4**

Номер вар.	E	$\underline{Z}_1 = jX_1$	$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$		$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_3$		$\underline{Z}_4 = R_4 + jX_4$		Номер ветви
	кВ	X_1, Ом	R_2, Ом	X_2, Ом	R_3, Ом	X_3, Ом	R_4, Ом	X_4, Ом	
1	63	5	300	150	300	200	500	100	1
2	110	12	350	300	250	400	400	300	2
3	220	20	700	400	600	500	1200	500	3
4	330	15	750	600	1000	800	1250	700	4
5	63	7	200	60	200	100	2000	800	1
6	110	9	500	100	500	300	350	150	2
7	220	16	400	300	800	400	400	300	3
8	330	25	1200	500	800	600	700	500	4
9	500	20	1250	600	1200	1000	800	600	1
10	500	25	2000	500	1000	800	250	100	2

1.2. Второй уровень сложности (повышенный)

Задача 2.1. Дана разветвленная цепь синусоидального тока рис. 1.4. Для заданных в табл. 1.6 параметров требуется:

2.1.1. Упростить схему, заменив параллельно соединенные пассивные элементы последовательным соединением. Определить комплексные сопротивления всех ветвей.

2.1.2. Изобразить направленный граф цепи, выделить дерево графа, произвести сквозную нумерацию узлов и ветвей, пронумеровав сначала ветви дерева, а потом ветви связей. Составить матрицу инциденций (узловую матрицу) и матрицу главных контуров графа. Определить число независимых уравнений, которые можно составить для схемы по законам Кирхгофа, методу контурных токов и узловых потенциалов.

2.1.3. Составить матрицу сопротивлений ветвей схемы, матрицу-столбец источников ЭДС и матрицу-столбец источников тока.

2.1.4. Записать в общем виде систему уравнений по законам Кирхгофа для определения токов во всех ветвях.

2.1.5. Составить в общем виде систему уравнений по методу контурных токов и определить токи в ветвях этим методом.

2.1.6. Составить в общем виде систему уравнений по методу узловых потенциалов и определить токи в ветвях этим методом.

2.1.7. Составить баланс активной, реактивной и комплексной мощностей, определив суммарную мощность источников и суммарную мощность потребителей (сопротивлений).

2.1.8. Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

2.1.9. Построить графики временных зависимостей ЭДС e_1 и тока в ветви с этой ЭДС.

2.1.10. Полагая в качестве нагрузки последовательное соединение двух заданных элементов цепи (табл. 1.7), представить остальную часть схемы эквивалентным активным двухполюсником. Изобразить схему замещения эквивалентного активного двухполюсника и определить его параметры. Вычислить ток в нагрузке по методу эквивалентного активного двухполюсника и сравнить его со значением, найденным в пунктах 2.1.5 и 2.1.6.

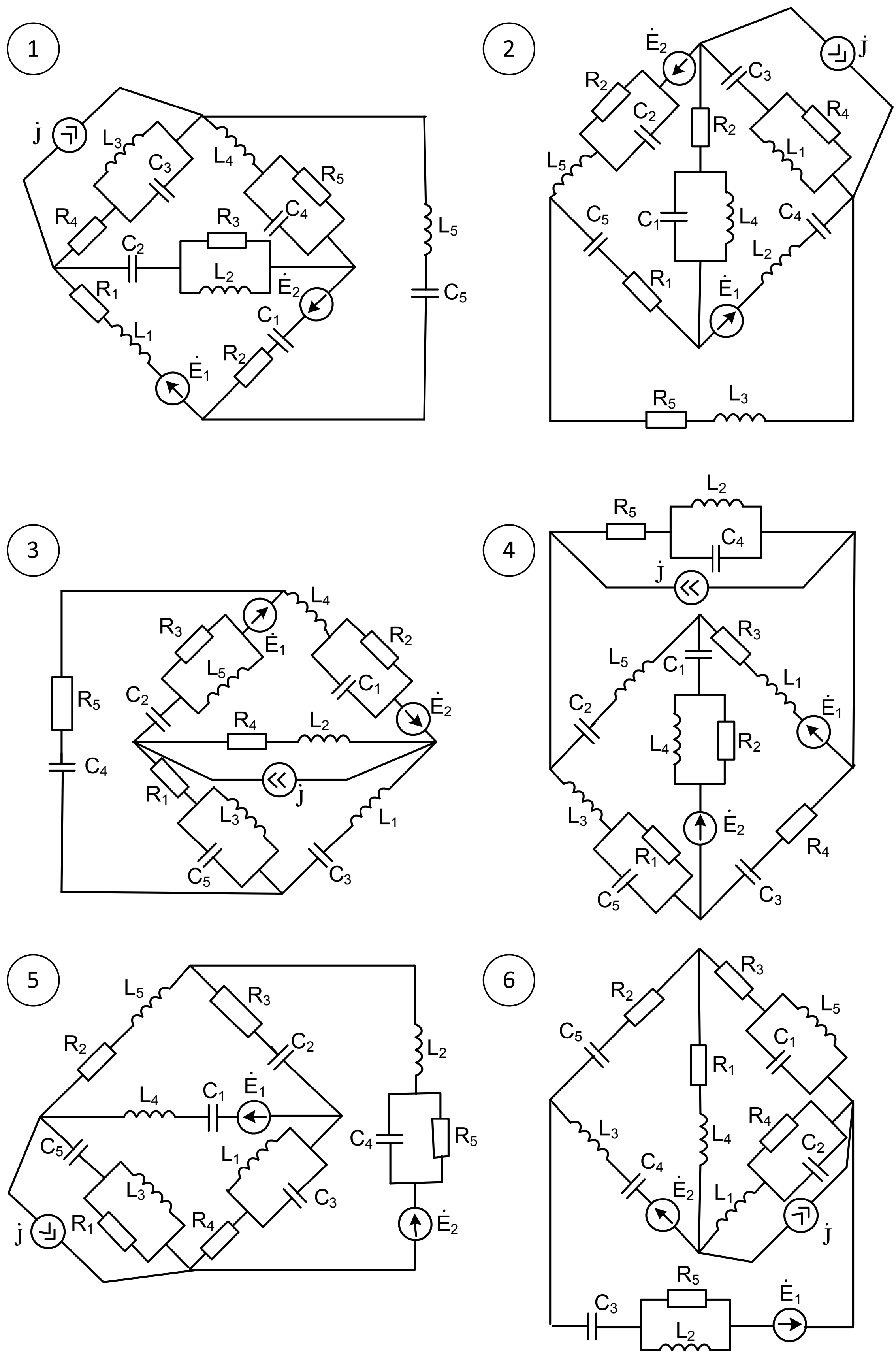

1
$\dot{J}$ L_3 C_3 R_4 L_4 R_5 C_4 R_3 C_2 L_2 $\dot{E}_2$ L_5 C_5 R_1 L_1 C_1 R_2 $\dot{E}_1$
2
$\dot{E}_2$ $\dot{J}$ R_2 C_2 C_3 R_2 R_4 L_1 L_5 C_5 C_1 L_4 C_4 L_2 R_1 $\dot{E}_1$ R_5 L_3
3
L_4 R_3 $\dot{E}_1$ R_2 L_5 R_5 C_2 C_1 $\dot{E}_2$ R_4 L_2 C_4 R_1 $\dot{J}$ L_3 L_1 C_5 C_3
4
L_2 R_5 C_4 $\dot{J}$ R_3 L_5 C_1 L_1 C_2 $\dot{E}_1$ L_4 R_2 L_3 $\dot{E}_2$ R_1 R_4 C_5 C_3
5
L_5 R_3 R_2 C_2 L_2 L_4 C_1 $\dot{E}_1$ C_4 R_5 C_5 L_1 L_3 C_3 $\dot{J}$ R_1 R_4 $\dot{E}_2$
6
R_3 R_2 L_5 C_5 C_1 R_1 R_4 L_3 L_4 C_2 C_4 $\dot{E}_2$ L_1 $\dot{J}$ R_5 $\dot{E}_1$ C_3 L_2

Рис. 1.4

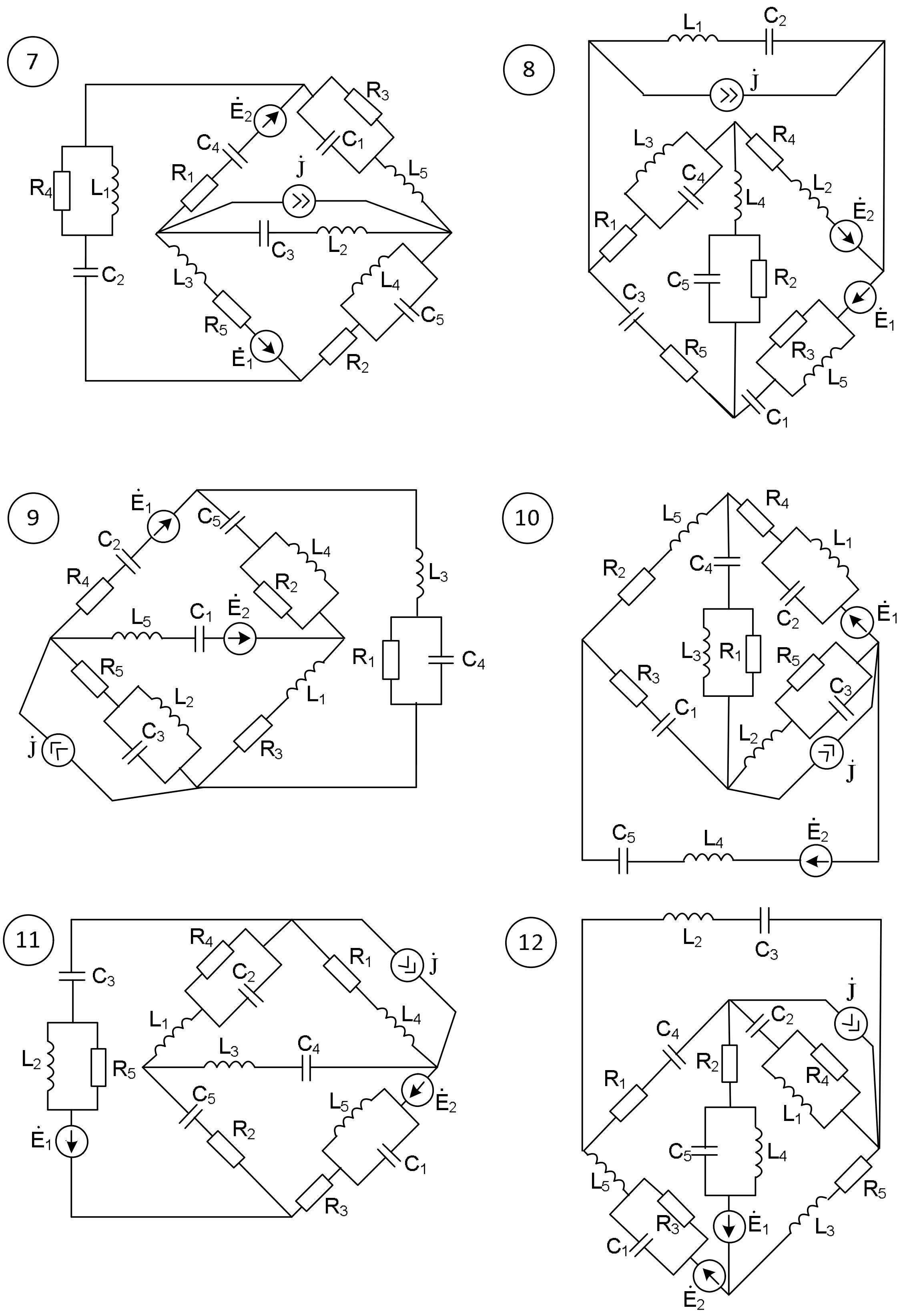


Рис. 1.4 (продолжение)

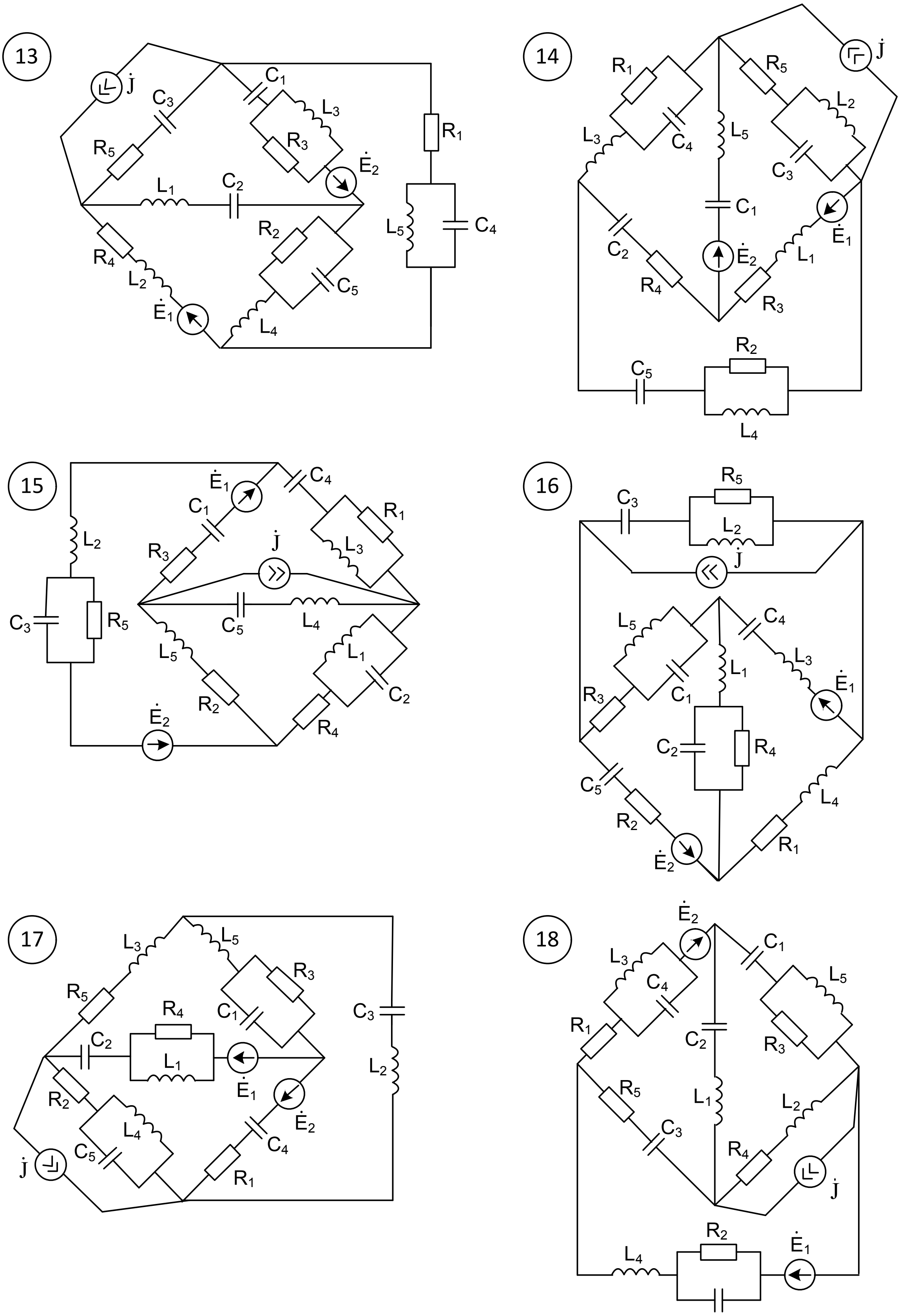


Рис. 1.4 (продолжение)

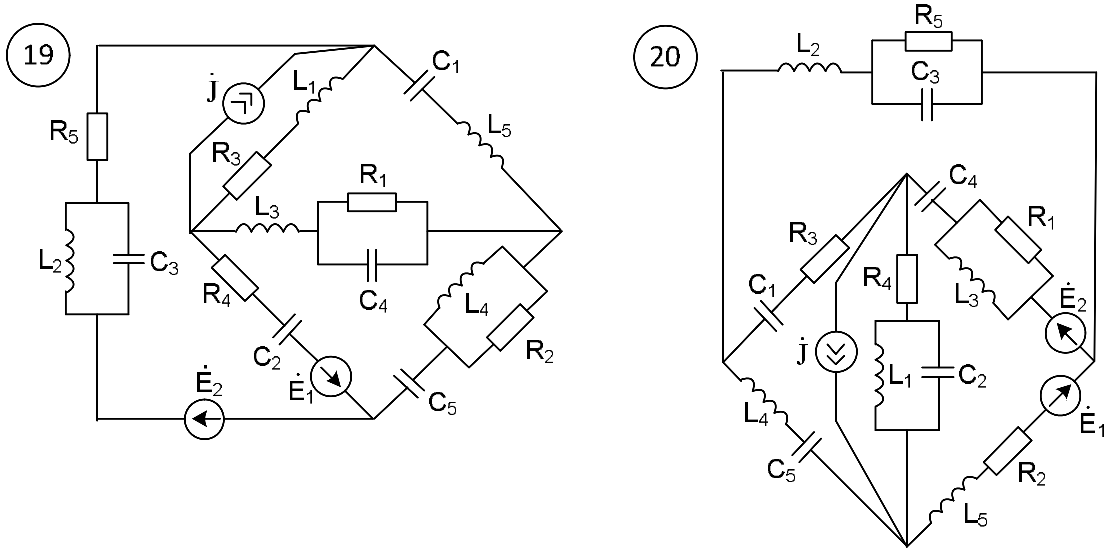


Рис. 1.4 (окончание)

2.1.11. В заданную схему ввести индуктивные связи между двумя катушками в соответствии с табл. 1.8. Для заданного коэффициента индуктивной связи (табл. 1.8) требуется:

- Составить матрицу сопротивлений ветвей схемы при наличии индуктивных связей.
- Записать в общем виде матричные уравнения по методам контурных токов и узловых потенциалов.
- Вывести систему равнений по методу контурных токов и найти токи ветвей.
- Проверить решение по балансам активной и реактивной мощностей.

Задача 2.2. Дана однолинейная схема симметричной трехфазной цепи (рис. 1.5). Схемы замещения элементов цепи приведены в табл. 1.9. Для заданных в табл. 1.10 параметров требуется:

2.2.1. Начертить схему трехфазной цепи в развернутом виде с отражением в ней режимов работы нейтралей в соответствии с вариантом задания.

2.2.2. Изобразить расчетную схему фазы А симметричной трехфазной цепи.

2.2.3. Произвести расчет симметричной трехфазной цепи и определить токи во всех ветвях.

2.2.4. Проверить решение по балансам активной и реактивной мощностей.

2.2.5. Построить векторную диаграмму симметричной трехфазной системы токов в ветвях с источниками ЭДС $\dot{E}_1$. Для этих же ветвей

Таблица 1.6. **Исходные данные для расчета к задаче 2.1**

Номер вар.	E_1, В	Ψ_{e1}, град	E_2, В	Ψ_{e2}, град	J, А	Ψ_J, град	f, Гц	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	R_4, Ом	R_5, Ом	L_1, Гн	L_2, Гн	L_3, Гн	L_4, Гн	L_5, Гн	C_1, мкФ	C_2, мкФ	C_3, мкФ	C_4, мкФ	C_5, мкФ
1	100	30	80	–20	1	0	50	10	20	30	15	40	0,03	0,04	0,06	0,05	0,1	15	25	30	45	50
2	80	20	120	25	2	15	60	40	30	20	40	50	0,04	0,02	0,05	0,08	0,07	20	30	15	50	25
3	120	–30	90	40	4	20	50	30	40	15	50	20	0,1	0,08	0,06	0,04	0,05	25	35	20	30	50
4	140	60	100	60	3	–30	60	50	15	50	25	35	0,08	0,1	0,05	0,02	0,09	30	40	50	25	15
5	90	–20	150	0	2	60	50	45	25	40	30	50	0,05	0,07	0,1	0,06	0,04	35	45	20	50	25
6	70	40	110	30	4	45	60	25	35	20	10	40	0,06	0,09	0,05	0,1	0,03	40	50	30	15	25
7	150	45	70	–30	1	–45	50	15	40	35	45	50	0,07	0,03	0,09	0,05	0,1	45	20	50	30	35
8	60	0	130	15	3	10	60	20	50	20	15	35	0,09	0,06	0,04	0,1	0,07	50	15	30	25	40
9	50	–45	120	–25	2	–20	50	30	20	40	50	15	0,08	0,05	0,1	0,04	0,06	40	25	35	50	15
10	40	25	80	–10	3	30	60	50	15	30	35	40	0,05	0,1	0,08	0,07	0,04	20	30	40	25	50

Таблица 1.7. **Исходные данные для расчета к п. 2.1.10 задания**

Номер схемы	Элементы цепи	Номер схемы	Элементы цепи	Номер схемы	Элементы цепи	Номер схемы	Элементы цепи	Номер схемы	Элементы цепи
1	R_1-L_1	2	R_5-L_3	3	R_5-C_4	4	R_4-C_3	5	R_2-L_5
6	R_1-L_4	7	R_5-L_3	8	R_5-C_3	9	R_3-L_1	10	R_3-C_1
11	R_2-C_5	12	R_5-L_3	13	R_4-L_2	14	R_4-C_2	15	R_2-L_5
16	R_1-L_4	17	R_5-L_3	18	R_5-C_3	19	R_4-C_2	20	R_3-C_1

Таблица 1.8. **Исходные данные для расчета к п. 2.1.11 задания**

Номер схемы	Номера катушек, имеющих индуктивные связи	Действие токов	Коэффициент индуктивной связи $K_{св}$	Номер схемы	Номера катушек, имеющих индуктивные связи	Действие токов	Коэффициент индуктивной связи $K_{св}$
1	L_1-L_4	встречное	0,3	2	L_2-L_3	согласное	0,8
3	L_1-L_4	встречное	0,8	4	L_3-L_5	согласное	0,75
5	L_4-L_5	встречное	0,6	6	L_1-L_4	согласное	0,6
7	L_3-L_5	встречное	0,4	8	L_2-L_4	согласное	0,65
9	L_1-L_5	встречное	0,5	10	L_4-L_5	согласное	0,5
11	L_1-L_3	встречное	0,7	12	L_3-L_5	согласное	0,55
13	L_2-L_4	встречное	0,35	14	L_1-L_3	согласное	0,4
15	L_2-L_5	встречное	0,45	16	L_1-L_3	согласное	0,35
17	L_3-L_5	встречное	0,55	18	L_1-L_4	согласное	0,45
19	L_3-L_5	встречное	0,65	20	L_2-L_5	согласное	0,85

Таблица 1.9. **Схемы замещения элементов цепи задачи 2.2**

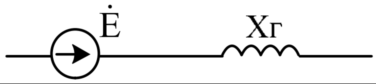
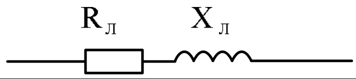
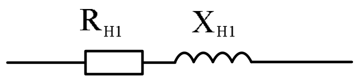
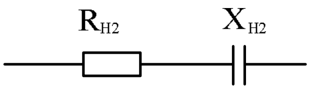
Источник электроэнергии (генераторы Г1 и Г2)	
Линия электропередачи (Л1÷Л5)	
Приемник Н1, фазы соединены по схеме «звезда»	
Приемник Н2, фазы соединены по схеме «треугольник»	
Заземляющая нейтраль генераторов Г1, Г2 (X_{N1}, X_{N2}) и нагрузки Н1 (X_n)	

Таблица 1.10. **Исходные данные для расчета к задаче 2.2**

Номер вар.	E_{1A}, кВ	ψ_{eA1}, град	$\underline{Z}_{1A}=$ $=jX_{1A}$, Ом	E_{2A}, кВ	ψ_{eA2}, град	$\underline{Z}_{2A}=$ $=jX_{2A}$, Ом	$\underline{Z}_{Н1}=$ $=R_{Н1}+jX_{Н1}$, Ом	$\underline{Z}_{Н2}=$ $=R_{Н2}-jX_{Н2}$, Ом	$\underline{Z}_{Л1}=$ $=R_{Л1}+jX_{Л1}$, Ом
1	63	0	5	63	60	10	200+j60	200–j20	5+j10
2	110	10	12	110	45	20	500+j100	250–j400	15+j20
3	220	20	20	220	40	30	400+j300	600–j500	15+j30
4	330	30	15	330	–30	40	1200+j500	1000–j800	20+j40
5	500	40	20	500	20	50	1250+j600	1200–j1000	25+j40
6	110	45	9	110	10	14	350+j300	500–j300	12+j18
7	220	60	16	220	0	28	700+j400	800–j400	20+j40
8	330	–10	25	330	20	30	750+j600	800–j600	20+j40
9	500	–20	25	500	30	40	2000+j500	1000–j800	40+j70
10	63	–30	7	63	50	8	20+j60	200–j100	7+j14

Продолжение табл. 1.10. **Исходные данные для расчета к задаче 2.2**

Номер вар.	$\underline{Z}_{Л2}=$ $=R_{Л2}+jX_{Л2}$, Ом	$\underline{Z}_{Л3}=$ $=R_{Л3}+jX_{Л3}$, Ом	$\underline{Z}_{Л4}=$ $=R_{Л4}+jX_{Л4}$, Ом	$\underline{Z}_{Л5}=$ $=R_{Л5}+jX_{Л5}$, Ом	$\underline{Z}_{N1}=$ $=jX_{N1}$, Ом	$\underline{Z}_{N2}=$ $=jX_{N2}$, Ом	$\underline{Z}_{n}=$ $=jX_{n}$, Ом
1	18+j34	16+j32	25+j40	25+j40	j6	j8	j5
2	26+j42	32+j64	25+j50	25+j50	j4	j12	j2
3	36+j60	30+j70	50+j80	50+j80	j5	j2	j3
4	54+j90	50+j90	70+j100	70+j100	j8	j6	j4
5	60+j72	70+j120	100+j200	100+j200	j12	j5	j5
6	23+j40	38+j64	30+j45	30+j45	j8	j5	j6
7	36+j60	20+j50	45+j70	45+j70	j10	j6	j3
8	54+j90	50+j90	70+j100	70+j100	j5	j8	j5
9	70+j120	90+j160	80+j160	80+j160	j8	j5	j4
10	9+j25	16+j25	12+j20	12+j20	j6	j10	j2

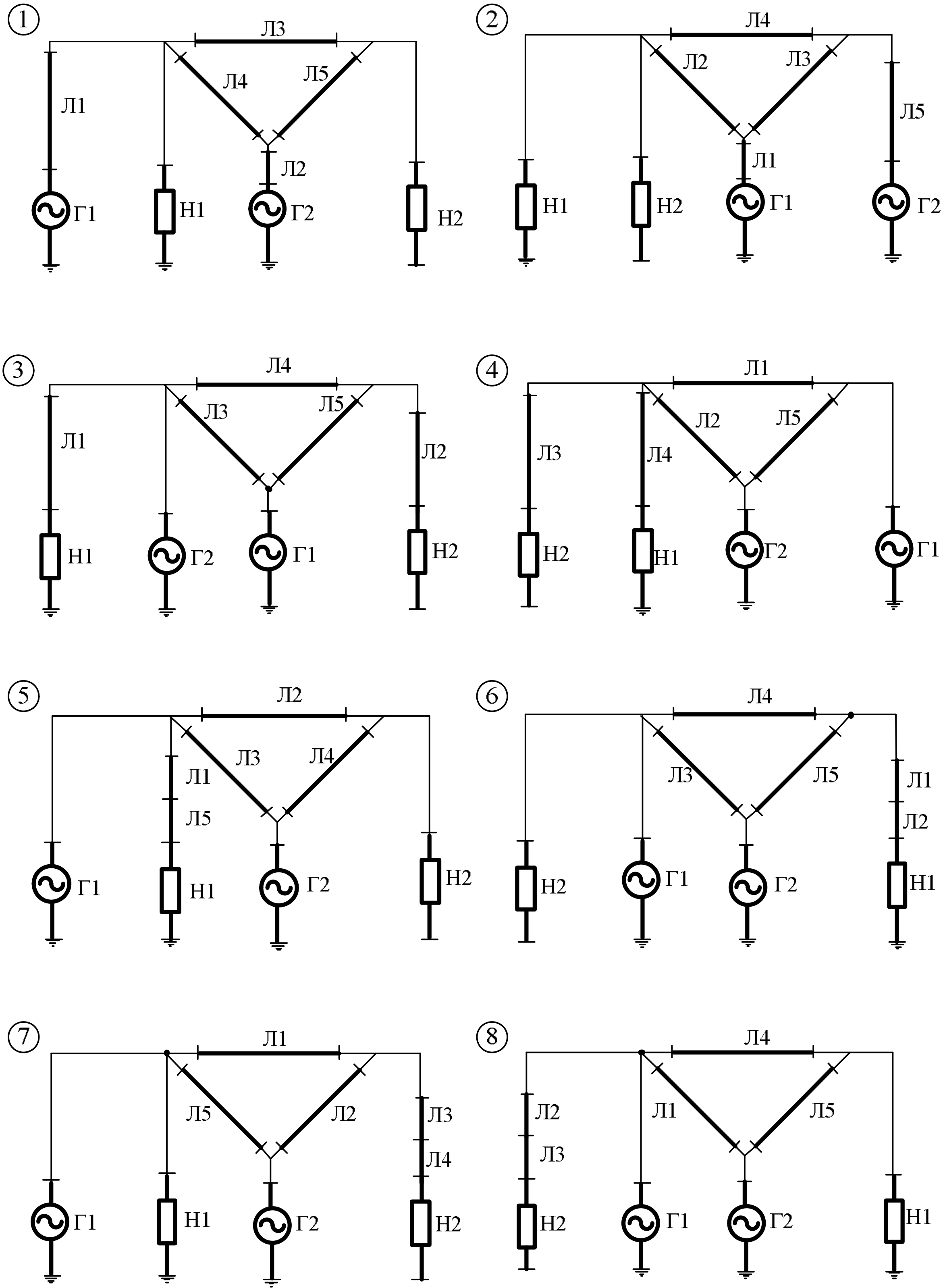

1
Л3
Л1
Л4
Л5
Л2
Г1
Н1
Г2
Н2
2
Л4
Л2
Л3
Л5
Л1
Н1
Н2
Г1
Г2
3
Л4
Л1
Л3
Л5
Л2
Н1
Г2
Г1
Н2
4
Л1
Л3
Л4
Л2
Л5
Н2
Н1
Г2
Г1
5
Л2
Л3
Л4
Л1
Л5
Г1
Н1
Г2
Н2
6
Л4
Л3
Л5
Л1
Л2
Н2
Г1
Г2
Н1
7
Л1
Л5
Л2
Л3
Л4
Г1
Н1
Г2
Н2
8
Л4
Л2
Л1
Л5
Л3
Н2
Г1
Г2
Н1

Рис. 1.5

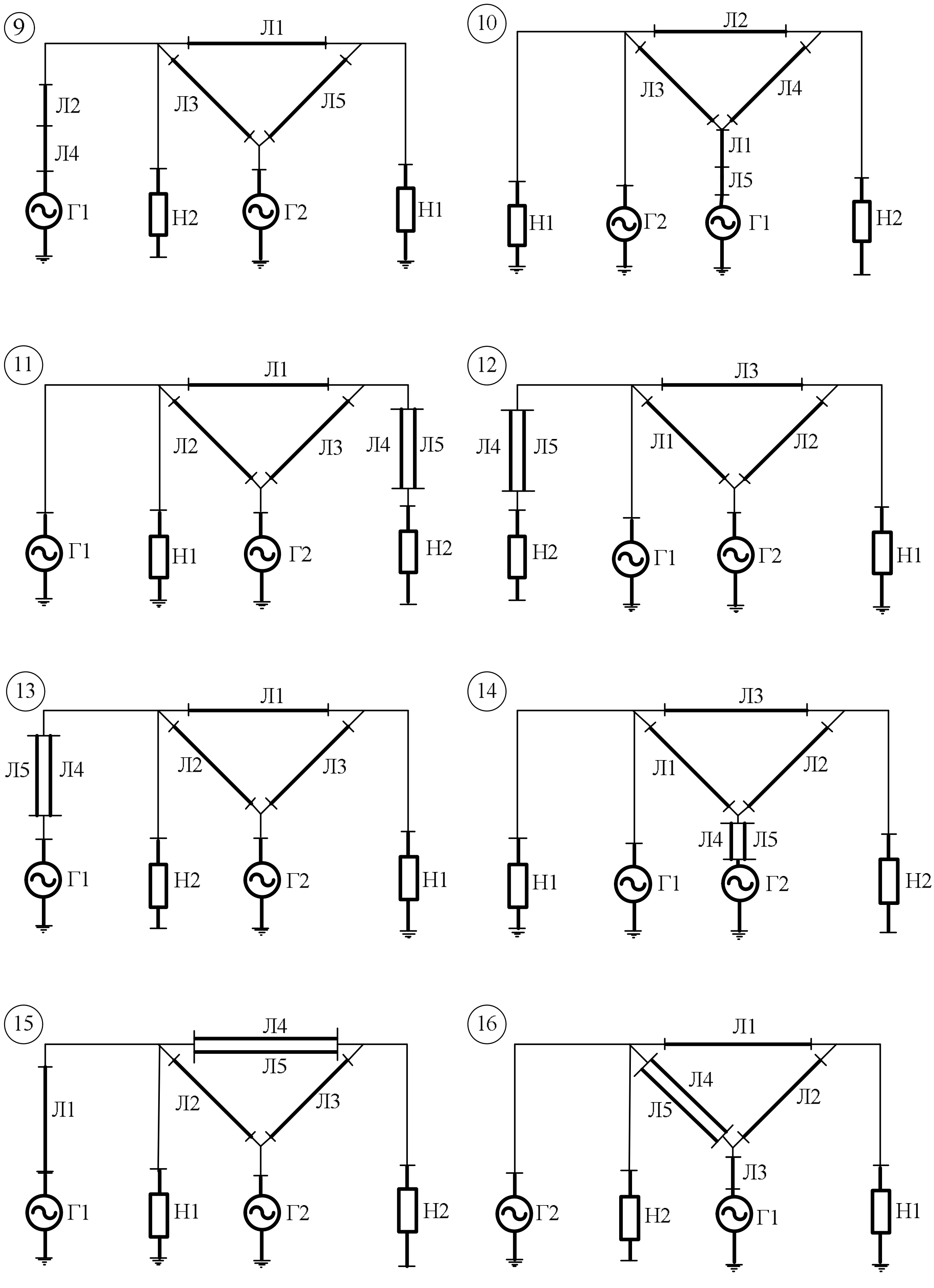


Рис. 1.5 (продолжение)

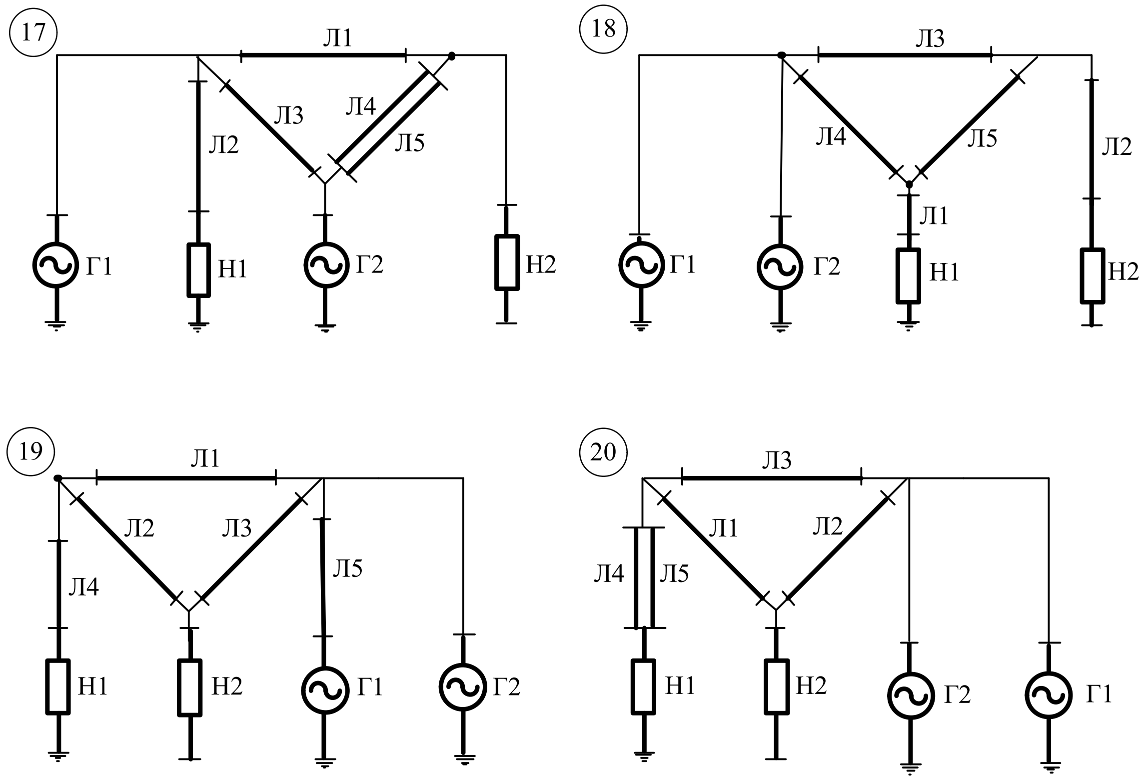


Рис. 1.5 (окончание)

определить комплексные напряжения на их зажимах, а также линейные напряжения между узлами и построить топографическую диаграмму напряжений.

2.2.6. Записать для симметричного режима мгновенные значения токов и напряжений ветвей с источниками ЭДС $\dot{E}_1$. Построить графики их временных зависимостей.

2.2.7. В заданной схеме рассмотреть режим несимметричного короткого замыкания в узле, соединяющим ветвь, содержащую источник ЭДС Е, с землей. Начертить схему трехфазной цепи в развернутом виде с отражением в ней места и вида поперечной несимметрии в соответствии с табл. 1.11. Используя метод симметричных составляющих, а также принцип компенсации и суперпозиции, изобразить отдельно схемы трехфазной цепи в развернутом виде для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей.

2.2.8. Используя теорему об активном двухполюснике, преобразовать схемы прямой, обратной и нулевой последовательностей относительно участка поперечной несимметрии. Определить параметры двухполюсников для всех последовательностей.

2.2.9. Составить систему уравнений для расчета симметричных составляющих токов и напряжений несимметричного участка с учетом заданного вида несимметрии. Определить симметричные составляющие токов и напряжений несимметричного участка трехфазной цепи и построить их на комплексной плоскости. Найти результирующие токи и напряжения несимметричного участка и также изобразить их на комплексной плоскости.

2.2.10. Найти токи в ветвях с ЭДС E_1 в несимметричном режиме и изобразить их на комплексной плоскости.

Таблица 1.11. **Исходные данные для расчета к пункту 2.2.7 задания**

Номер схемы	Вид несимметрии	Номер схемы	Вид несимметрии
1	Однофазное КЗ фазы С	2	Однофазное КЗ фазы А
3	Однофазное КЗ фазы В	4	Замыкание на землю фаз А и С
5	Замыкание на землю фаз А и В	6	Замыкание на землю фаз В и С
7	Замыкание между фазами А и С (без касания земли)	8	Замыкание между фазами А и В (без касания земли)
9	Замыкание между фазами В и С (без касания земли)	10	Однофазное КЗ фазы С
11	Однофазное КЗ фазы А	12	Однофазное КЗ фазы В
13	Замыкание на землю фаз А и С	14	Замыкание на землю фаз А и В
15	Замыкание на землю фаз В и С	16	Замыкание между фазами А и С (без касания земли)
17	Замыкание между фазами А и В (без касания земли)	18	Замыкание между фазами В и С (без касания земли)
19	Однофазное КЗ фазы А	20	Однофазное КЗ фазы В

Примечания. 1. Реактивные сопротивления генераторов и приемника Н1 для токов обратной последовательности уменьшить в 5 раз, нулевой – в 10 раз.

2. Сопротивления линий электропередачи для токов обратной последовательности оставить равными сопротивлениям прямой последовательности, а для нулевой последовательности увеличить в 3,5 раза реактивную составляющую.

2. Теоретические сведения

2.1. ТОПОЛОГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения. Соединение элементов электрической цепи наглядно отображается ее схемой. Рассмотрим для примера две электрические схемы (рис. 2.1.1, 2.1.2), введя понятия *ветви* и *узла*.

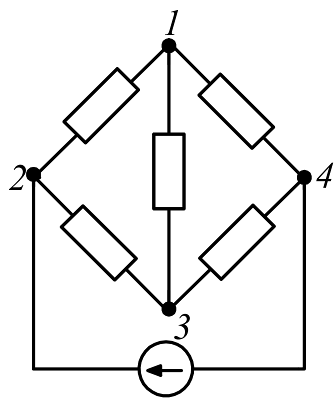


Рис. 2.1.1

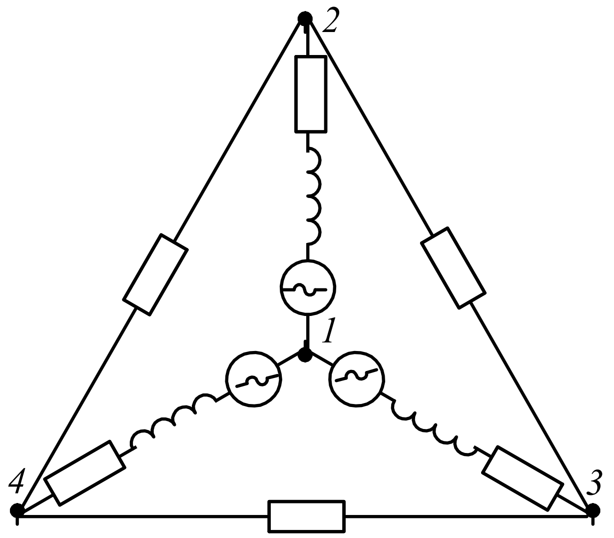


Рис. 2.1.2

Ветвью называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током**.**

Узел – место соединения трех и более ветвей.

Представленные схемы различны и по форме, и по назначению, но каждая из указанных цепей содержит по 6 ветвей и 4 узла, одинаково соединенных. Таким образом, по определению геометрии (топологии) соединений ветвей, данные схемы идентичны.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Если каждую ветвь схем на рис. 2.1.1 и 2.1.2 заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рис. 2.1.3.

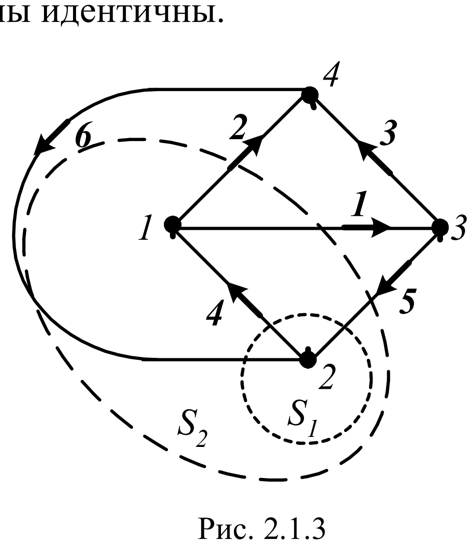


Рис. 2.1.3

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется **графом электрической цепи.** При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь, соединенных различным образом.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется **ветвью графа.** Граничные точки ветви графа называют **узлами графа.** Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется **ориентированным.**

Подграфом графа называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

В теории электрических цепей важное значение имеют следующие подграфы:

1. **Путь –** это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рис. 2.1.3 ветви ***2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1*** образуют пути между одной и той же парой узлов *1* и *3*. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

2. **Контур** – замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа по рис. 2.1.3 можно определить контуры, образованные ветвями ***2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4***.

Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют связным.

3. **Дерево** – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа на рис. 2.1.3 могут служить фигуры на рис. 2.1.4.

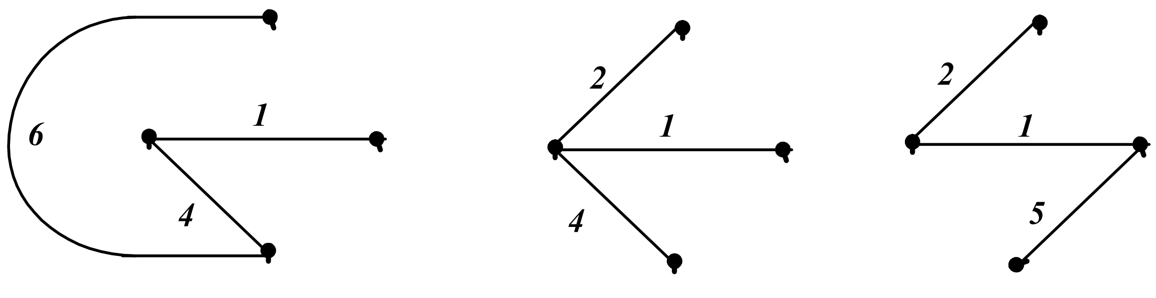


Рис. 2.1.4

4. **Ветви связи (дополнения дерева)** – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.

Если граф содержит m узлов и n ветвей, то число ветвей любого дерева $\partial = m - 1$, а числа ветвей связи графа $c = n - (m - 1) = n - m + 1$.

5. **Сечение графа –** множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются для нашего графа на рис. 2.1.3 S_1 и S_2. При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями ***6-4-5*** и ***6-2-1-5***.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

– **главный контур –** контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;

– **главное сечение** – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.

Топологические матрицы

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют **топологическими матрицами.** Выделяют три таких матрицы: узловую матрицу, контурную матрицу и матрицу сечений.

1. **Узловая матрица (матрица соединений)** – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа на рис. 2.1.3 имеем число узлов $m=4$ и число ветвей $n=6$. Тогда запишем матрицу $\boldsymbol{A_H}$, принимая, что элемент матрицы a_{ij} (i – номер строки; j – номер столбца) равен 1, если ветвь j соединена с узлом i и ориентирована от него, -1, если ориентирована к нему, и 0, если ветвь j не соединена с узлом i. Сориентировав ветви графа на рис. 2.1.3, получим

$$\boldsymbol{A_H} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Данная матрица $\boldsymbol{A_H}$ записана для всех четырех узлов и называется неопределенной. Следует указать, что сумма элементов столбцов матрицы $\boldsymbol{A_H}$ всегда равна нулю, так как каждый столбец содержит один элемент $+1$ и один элемент -1, остальные нули.

Обычно при расчетах один (любой) заземляют. Тогда приходим к узловой матрице $\boldsymbol{A}$ (редуцированной матрице), которая может быть получена из матрицы $\boldsymbol{A_H}$ путем вычеркивания любой ее строки. Например, при вычеркивании строки “4” получим

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Число строк матрицы $\boldsymbol{A}$ равно числу независимых уравнений для узлов $\partial = m - 1$, т.е. числу уравнений, записываемых для электрической схемы по первому закону Кирхгофа. Итак, введя понятие узловой матрицы $\boldsymbol{A}$, перейдем к первому закону Кирхгофа.

Обычно первый закон Кирхгофа записывается для узлов схемы, но, строго говоря, он справедлив не только для узлов, но и для любой замкнутой поверхности, т.е. справедливо соотношение

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0, \tag{2.1.1}$$

где $\bar{\delta}$ – вектор плотности тока; $d\bar{S}$ – нормаль к участку dS замкнутой поверхности S.

Первый закон Кирхгофа справедлив и для любого сечения. В частности, для сечения S_2 графа на рис. 2.1.3, считая, что нумерация и направления токов в ветвях соответствуют нумерации и выбранной ориентации ветвей графа, можно записать

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0.$$

Поскольку в частном случае ветви сечения сходятся в узле, то первый закон Кирхгофа справедлив и для него. Пока будем применять первый закон Кирхгофа для узлов, что математически можно записать как

$$\sum_k I_k = 0, \tag{2.1.2}$$

т.е. алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узел, равна нулю.

При этом при расчетах уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m\text{-}1)$ узлов, так как при записи уравнений для всех m узлов одно (любое) из них будет линейно зависимым от других, т.е. не дает дополнительной информации.

Введем столбцовую матрицу токов ветвей

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Тогда первый закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$\boldsymbol{AI = 0}, \qquad (2.1.3)$$

где $\boldsymbol{0}$ – нулевая матрица-столбец. Как видим, в качестве узловой взята матрица $\boldsymbol{A}$, а не $\boldsymbol{A_H}$, т.к. с учетом вышесказанного уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для *(m-1)* узлов.

В качестве примера запишем для схемы на рис. 2.1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда для первого узла получаем

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0,$$

что и должно иметь место.

2. **Контурная матрица (матрица контуров)** – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы $\boldsymbol{B}$ соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент b_{ij} матрицы $\boldsymbol{B}$ равен *1*, если ветвь *j* входит в контур *i* и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, *-1*, если не совпадает с направлением обхода контура, и *0*, если ветвь *j* не входит в контур *i*.

Матрицу ***B,*** записанную для главных контуров, называют **матрицей главных контуров**. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура. Выделив в данном примере (рис. 2.1.5) дерево, образуемое ветвями ***2-1-4***, запишем коэффициенты для матрицы ***B***.

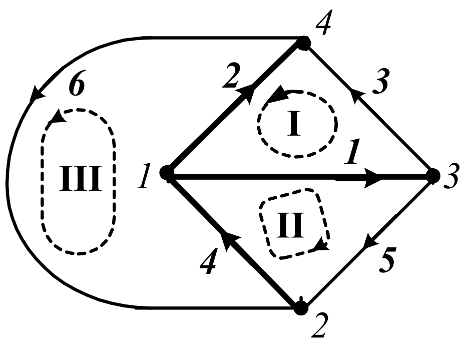


Рис. 2.1.5

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & \mathit{5} & \mathit{6} \end{matrix} \\
\boldsymbol{B} = \begin{matrix} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathit{1} & -\mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{1} \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Перейдем теперь ко второму закону Кирхгофа.

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, т.е.

$$U_{ke} = \varphi_k - \varphi_e = -(\varphi_e - \varphi_k) = -U_{ek}. \quad (2.1.4)$$

Просуммируем напряжения на ветвях некоторого контура:

$$
\begin{array}{l}
\quad U_{\mathit{12}} = \varphi_{\mathit{1}} - \varphi_{\mathit{2}} \\
+ \\
\quad U_{\mathit{23}} = \varphi_{\mathit{2}} - \varphi_{\mathit{3}} \\
+ \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \\
\quad U_{k\mathit{1}} = \varphi_k - \varphi_{\mathit{1}} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad = \mathit{0}.
\end{array}
$$

Поскольку при обходе контура потенциал каждой i-й точки встречается два раза, причем один раз с “+”, а второй – с “-”, то в целом сумма равна нулю.

Таким образом, второй закон Кирхгофа математически представляется как

$$\sum_k U_k = 0 \quad (2.1.5)$$

и имеет следующую формулировку: алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю. При этом при расчете цепей с использованием законов Кирхгофа записывается $c = (n - m + \mathit{1})$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. уравнений, записываемых для контуров, каждый из которых отличается от других хотя бы одной ветвью. Значение топологического понятия “дерева”: дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа. Таким образом, с учетом *(m-1)* уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, получаем систему из $(m-1)+(n-m+1)=n$ уравнений, что равно числу ветвей схемы и, следовательно, токи в них находятся однозначно.

Введем столбцовую матрицу напряжений ветвей

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}.$$

Тогда второй закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$\boldsymbol{BU=0}. \qquad (2.1.6)$$

В качестве примера для схемы на рис. 2.1.5 имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0],$$

откуда, например, для первого контура получаем

$$1\cdot U_1 - 1\cdot U_2 + 1\cdot U_3 + 0\cdot U_4 + 0\cdot U_5 + 0\cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

что и должно иметь место.

Если ввести столбцовую матрицу узловых потенциалов

$$\boldsymbol{\varphi}=\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix},$$

причем потенциал последнего узла $\varphi_m=0$, то матрицы напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны соотношением

$$\boldsymbol{U=A^T\varphi}, \qquad (2.1.7)$$

где $\boldsymbol{A^T}$ – транспонированная узловая матрица.

Для определения матрицы $\boldsymbol{B}$ по известной матрице $\boldsymbol{A=A_Д A_C}$**,** где $\boldsymbol{A_Д}$ – подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева, $\boldsymbol{A_C}$ – подматрица, соответствующая ветвям связи, может быть использовано соотношение $\boldsymbol{B= =(-A^T{}_C A^{-1T}{}_Д 1)}$**.**

3. **Матрица сечений** – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы – ветвям графа.

Матрица $\boldsymbol{Q}$, составленная для главных сечений, называется **матрицей главных сечений.** Число строк матрицы $\boldsymbol{Q}$ равно числу независимых сечений.

Элемент q_{ij} матрицы $\boldsymbol{Q}$ равен *1*, если ветвь *j* входит в *i*-е сечение и ориентирована согласно направлению сечения (за положительное направление сечения принимают направление ветви дерева, входящей в него), *-1*, если ориентирована противоположно направлению сечения, и *0*, если ветвь *j* не входит в *i*-е сечение.

В качестве примера составим матрицу $\boldsymbol{Q}$ главных сечений для графа на рис. 2.1.5. При указанной на рис. 2.1.5 ориентации ветвей имеем

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В заключение отметим, что для топологических матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{Q}$, составленных для одного и того же графа, выполняются соотношения

$$\boldsymbol{AB^T = 0;} \qquad (2.1.8)$$

$$\boldsymbol{QB^T = 0}, \qquad (2.1.9)$$

которые, в частности, можно использовать для проверки правильности составления этих матриц. Здесь $\boldsymbol{0}$ – нулевая матрица порядка ∂ .

Приведенные уравнения позволяют сделать важное заключение: зная одну из топологических матриц, по ее структуре можно восстановить остальные.

2.2. ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Переменный ток. Представление синусоидальных величин с помощью векторов и комплексных чисел

Переменный ток долгое время не находил практического применения. Это было связано с тем, что первые генераторы электрической энергии вырабатывали постоянный ток, который вполне удовлетворял технологическим процессам электрохимии, а двигатели постоянного тока обладают хорошими регулировочными характеристиками. Однако по мере развития производства постоянный ток все менее стал удовлетворять возрастающим требованиям экономичного электроснабжения. Переменный ток дал возможность эффективного дробления электрической энергии и изменения величины напряжения с помощью трансформаторов. Появилась возможность производства электроэнергии на крупных электростанциях с последующим экономичным ее распределением потребителям, увеличился радиус электроснабжения.

В настоящее время центральное производство и распределение электрической энергии осуществляется в основном на переменном токе. Цепи с изменяющимися, переменными, токами по сравнению с цепями постоянного тока имеют ряд особенностей. Переменные токи и напряжения вызывают переменные электрические и магнитные поля. В результате изменения этих полей в цепях возникают явления самоиндукции и взаимной индукции, которые оказывают самое существенное влияние на процессы, протекающие в цепях, усложняя их анализ.

Переменным током (напряжением, ЭДС и т.д.) называется ток (напряжение, ЭДС и т.д.), изменяющийся во времени. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени в одной и той же последовательности, называются **периодическими,** а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, – **периодом T.** Для периодического тока имеем

$$i = F(t) = F(t + T). \tag{2.2.1}$$

Величина, обратная периоду, есть **частота,** измеряемая в герцах (Гц):

$$f = 1/T . \tag{2.2.2}$$

Диапазон частот, применяемых в технике: от сверхнизких частот (0.01÷10 Гц – в системах автоматического регулирования, в аналоговой вычислительной технике) до сверхвысоких (3000 ÷ 300000 МГц – миллиметровые волны: радиолокация, радиоастрономия). В РФ промышленная частота $f = 50$ *Гц*.

Мгновенное значение переменной величины есть функция времени. Ее принято обозначать строчной буквой:

i – мгновенное значение тока $i(t)$;

u – мгновенное значение напряжения $u(t)$;

e – мгновенное значение ЭДС $e(t)$;

p – мгновенное значение мощности $p(t)$.

Наибольшее мгновенное значение переменной величины за период называется амплитудой (ее принято обозначать заглавной буквой с индексом m).

I_m – амплитуда тока;

U_m – амплитуда напряжения;

E_m – амплитуда ЭДС.

Действующее значение переменного тока

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведет тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют **действующим значением** периодического тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \, . \qquad (2.2.3)$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения.

Синусоидально изменяющийся ток

Из всех возможных форм периодических токов наибольшее распространение получил синусоидальный ток. По сравнению с другими видами тока синусоидальный ток имеет то преимущество, что позволяет в общем случае наиболее экономично осуществлять производство, передачу, распределение и использование электрической энергии. Только при использовании синусоидального тока удается сохранить неизменными формы кривых напряжений и токов на всех участках сложной линейной цепи. Теория синусоидального тока является ключом к пониманию теории других цепей.

Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат

Синусоидальные токи и напряжения можно изобразить графически, записать при помощи уравнений с тригонометрическими функциями, представить в виде векторов на декартовой плоскости или комплексными числами.

Приведенным на рис. 2.2.1, 2.2.2 графикам двух синусоидальных ЭДС e_1 и e_2 соответствуют уравнения

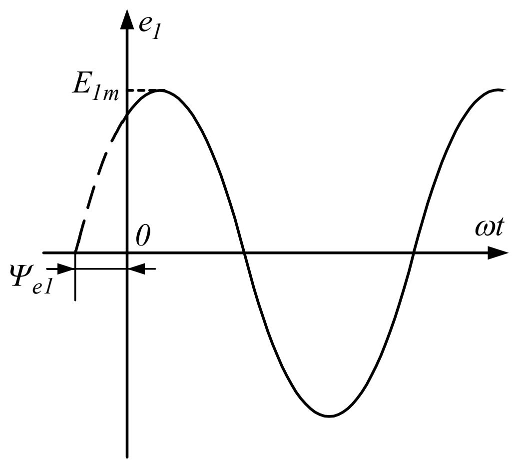


Рис. 2.2.1

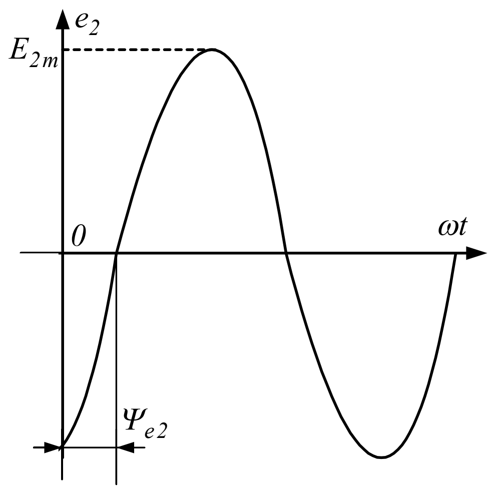


Рис. 2.2.2

$$e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + \Psi_{e1}); \quad e_2 = E_{2m}\sin(\omega t + \Psi_{e2}).$$

Значения аргументов синусоидальных функций $(\omega t + \Psi_{e1})$ и $(\omega t + \Psi_{e2})$ называются **фазами** синусоид, а значение фазы в начальный момент времени *(t=0)*: Ψ_{e1} и Ψ_{e2} – **начальной фазой** ($\Psi_{e1} > 0$; $\Psi_{e2} < 0$).

Величину ω, характеризующую скорость изменения фазового угла, называют **угловой частотой.** Так как фазовый угол синусоиды за время одного периода *T* изменяется на 2π рад, то угловая частота есть $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$, где *f* – частота.

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их фазовых углов, равную разности начальных фаз, называют **углом сдвига фаз**.

Для синусоидальных ЭДС e_1 и e_2 угол сдвига фаз

$$\alpha = (\omega t + \Psi_{e1}) - (\omega t + \Psi_{e2}) = \Psi_{e1} - \Psi_{e2}.$$

Векторное изображение синусоидально изменяющихся величин

На декартовой плоскости из начала координат проводят векторы, равные по модулю амплитудным значениям синусоидальных величин, и вращают эти векторы против часовой стрелки (**в ТОЭ данное направление принято за положительное**) с угловой частотой, равной ω. Фазовый угол при вращении отсчитывается от положительной полуоси абсцисс. Проекции вращающихся векторов на ось ординат равны мгновенным значениям ЭДС e_1 и e_2 (рис. 2.2.3). Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют **векторными диаграммами.** При построении векторных диаграмм векторы удобно располагать для начального момента времени *(t=0),* что следует из равенства угловых частот синусоидальных величин и эквивалентно тому, что система декартовых координат сама вращается против часовой стрелки со скоростью ω. Таким образом, в этой системе координат векторы неподвижны (рис. 2.2.4). Векторные диаграммы нашли широкое применение при анализе цепей синусоидального тока. Их применение

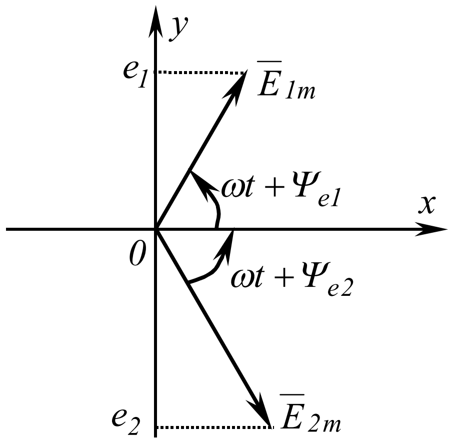


Рис. 2.2.3

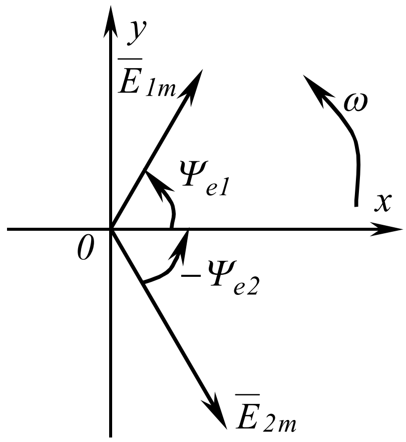


Рис. 2.2.4

делает расчет цепи более наглядным и простым. Это упрощение заключается в том, что сложение и вычитание мгновенных значений величин можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов.

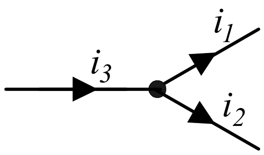


Рис. 2.2.5

Пусть, например, в точке разветвления цепи (рис. 2.2.5) общий ток i_3 равен сумме токов i_1 и i_2 двух ветвей:

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

Каждый из этих токов синусоидален и может быть представлен уравнением

$i_1 = I_{1m}\sin(\omega t+\Psi_1)$ и $i_2 = I_{2m}\sin(\omega t+\Psi_2)$.

Результирующий ток также будет синусоидален:

$$i_3 = I_{1m}\sin(\omega t+\Psi_1)+I_{2m}\sin(\omega t+\Psi_2)=I_{3m}\sin(\omega t+\Psi_3).$$

Определение амплитуды I_{3m} и начальной фазы Ψ_3 этого тока путем соответствующих тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и мало наглядным, особенно, если суммируется большое число синусоидальных величин. Значительно проще это осуществляется с помощью векторной диаграммы. На рис. 2.2.6 изображены начальные положения векторов токов, проекции которых на ось ординат дают мгновенные значения токов для $t=0$. При вращении этих векторов с одинаковой угловой скоростью ω их взаимное расположение не меняется и угол сдвига фаз между ними остается равным $\alpha = \Psi_1 - \Psi_2$.

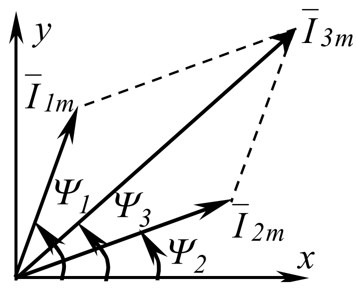


Рис. 2.2.6

Так как алгебраическая сумма проекций векторов на ось ординат равна мгновенному значению общего тока, вектор общего тока равен геометрической сумме векторов токов:

$$\vec{I}_{3m} = \vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}.$$

Построение векторной диаграммы в масштабе позволяет определить значения I_{3m} и Ψ_3 из диаграммы, после чего может быть записано решение для мгновенного значения i_3 путем формального учета угловой частоты: $i_3 = I_{3m}\,sin(\omega t + \Psi_3)$.

Представление синусоидальных ЭДС, напряжений и токов комплексными числами

Геометрические операции с векторами можно заменить алгебраическими операциями с комплексными числами, что существенно повышает точность получаемых результатов.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое может быть записано в

показательной $\dot{a} = ae^{j\Psi}$,
тригонометрической $\dot{a} = a\,cos\Psi + ja\,sin\Psi$ или
алгебраической $\dot{a} = b + jc$ **формах.**

Например, ЭДС $e = E_m\,sin(\omega t + \Psi_e)$, изображенной на рис. 2.2.7 вращающимся вектором, соответствует комплексное число

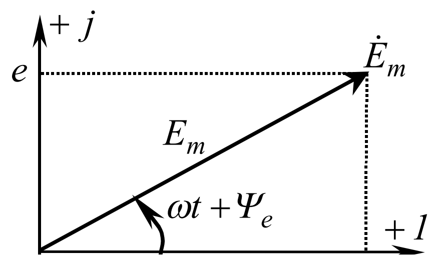


Рис. 2.2.7

$$E_m e^{j(\omega t + \psi_e)} = E_m\,cos(\omega t + \Psi_e) + jE_m\,sin(\omega t + \psi_e) = e' + je.$$

Фазовый угол $(\omega t+\Psi_e)$ определяется по проекциям вектора на оси “+1” и “+j” системы координат как

$$tg(\omega t+\Psi_e)=\frac{e}{e'} .$$

В соответствии с тригонометрической формой записи мнимая составляющая комплексного числа определяет мгновенное значение синусоидально изменяющейся ЭДС:

$$e=E_m\,sin(\omega t+\Psi_e)=Im\left\{E_m e^{j(\omega t+\Psi_e)}\right\}. \qquad (2.2.4)$$

Комплексное число $E_m e^{j(\omega t+\psi_e)}$ удобно представить в виде произведения двух комплексных чисел:

$$E_m e^{j(\omega t+\psi_e)}=\underbrace{E_m e^{j\Psi_e}}_{\dot{E}_m}\cdot e^{j\omega t}=\dot{E}_m e^{j\omega t} . \qquad (2.2.5)$$

Параметр $\dot{E}_m$, соответствующий положению вектора для *t=0* (или на вращающейся со скоростью ω комплексной плоскости), называют **комплексной амплитудой:** $\dot{E}_m=E_m e^{j\Psi_e}$, а параметр $\dot{E}_m{}^{j(\omega t+\Psi_e)}$ – **комплексом мгновенного значения.**

Параметр $e^{j\omega t}$ является **оператором поворота** вектора на угол ωt относительно начального положения вектора.

Вообще говоря, умножение вектора на оператор поворота $e^{\pm j\alpha}$ есть его поворот относительно первоначального положения на угол $\pm\alpha$.

Следовательно, мгновенное значение синусоидальной величины равно мнимой части без знака “*j”* произведения комплекса амплитуды $\dot{E}_m$ и оператора поворота $e^{j\omega t}$:

$$e=E_m\,sin(\omega t+\Psi_e)=Im\left\{\dot{E}_m e^{j\omega t}\right\}.$$

Переход от одной формы записи синусоидальной величины к другой осуществляется с помощью формулы Эйлера

$$e^{j\alpha}=cos\,\alpha+j\,sin\,\alpha . \qquad (2.2.6)$$

Если, например, комплексная амплитуда напряжения задана в виде комплексного числа в алгебраической форме

$$\dot{U}_m=U'_m+jU''_m ,$$

то для записи ее в показательной форме необходимо найти начальную фазу Ψ_U, т.е. угол, который образует вектор $\overline{U}_m$ с положительной полуосью +1:

$$tg\,\Psi_U=\frac{U''_m}{U'_m} .$$

Тогда мгновенное значение напряжения

$$U = Im\left\{\dot{U}_m e^{j\omega t}\right\} = Im\left\{\sqrt{U'^2_m + U''^2_m}\, e^{jarctg\frac{U''_m}{U'_m}} e^{j\omega t}\right\} = U_m\, sin\left(\omega t + \Psi_U\right),$$

где $\Psi_U = arctg\left(U''_m / U'_m\right)$.

При записи выражения для определенности было принято, что $U'_m > 0$, т.е. что изображающий вектор находится в первом или четвертом квадрантах. Если $U'_m < 0$, то при $U''_m > 0$ (второй квадрант)

$$\Psi_U = \pi - arctg\left|\frac{U''_m}{U'_m}\right|, \tag{2.2.7}$$

а при $U''_m < 0$ (третий квадрант)

$$\Psi_U = \pi + arctg\left|\frac{U''_m}{U'_m}\right| \tag{2.2.8}$$

или

$$\Psi_U = -\pi + arctg\left|\frac{U''_m}{U'_m}\right|. \tag{2.2.9}$$

Если задано мгновенное значение тока в виде $i = I_m\, sin\left(\omega t + \Psi_i\right)$, то комплексную амплитуду записывают сначала в показательной форме, а затем (при необходимости) по формуле Эйлера переходят к алгебраической форме:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\Psi_i} = I_m\, cos\Psi_i + jI_m\, sin\Psi_i = I'_m + jI''_m.$$

Следует указать, что при сложении и вычитании комплексов следует пользоваться алгебраической формой их записи, а при умножении и делении удобна показательная форма.

Итак, применение комплексных чисел позволяет перейти от геометрических операций над векторами к алгебраическим над комплексами. Так, при определении комплексной амплитуды результирующего тока i_3 по рис. 2.2.5 получим

$$\dot{I}_{3m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = I_{1m} e^{j\Psi_1} + I_{2m} e^{j\Psi_2} = I_{1m}\left(cos\Psi_1 + j\, sin\Psi_1\right) + I_{2m} \times$$
$$\times\left(cos\Psi_2 + j\, sin\Psi_2\right) = \left(I_{1m}\, cos\Psi_1 + I_{2m}\, cos\Psi_2\right) + j\left(I_{1m}\, sin\Psi_1 + I_{2m}\, sin\Psi_2\right) =$$
$$= I_{3m}\, cos\Psi_3 + jI_{3m}\, sin\Psi_3 = I_{3m} e^{j\Psi_3},$$

где $I_{3m} = \sqrt{\left(I_{1m}\, cos\Psi_1 + I_{2m}\, cos\Psi_2\right)^2 + \left(I_{1m}\, sin\Psi_1 + I_{2m}\, sin\Psi_2\right)^2}$;

$$tg\Psi_3 = \frac{I_{1m}\, sin\Psi_1 + I_{2m}\, sin\Psi_2}{I_{1m}\, cos\Psi_1 + I_{2m}\, cos\Psi_2}.$$

Действующее значение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов

В соответствии с выражением (2.2.3) для действующего значения синусоидального тока запишем

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{I_m^2 \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{I_m^2 \cdot T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогичный результат можно получить для синусоидальных ЭДС и напряжений. Таким образом, действующие значения синусоидальных тока, ЭДС и напряжения меньше своих амплитудных значений в $\sqrt{2}$ раз:

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.2.10}$$

Поскольку, как будет показано далее, энергетический расчет цепей переменного тока обычно проводится с использованием действующих значений величин, по аналогии с предыдущим введем понятие **комплекса действующего значения**

$$\dot{E} = Ee^{j\Psi_e} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_e}.$$

Элементы цепи синусоидального тока. Векторные диаграммы и комплексные соотношения для них

1. Резистор

Идеальный резистивный элемент не обладает ни индуктивностью, ни емкостью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (рис. 2.2.8), то ток i через него

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \Psi) = I_m \sin(\omega t + \Psi). \tag{2.2.11}$$

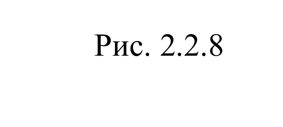


Рис. 2.2.8

Соотношение (2.2.11) показывает, что ток имеет ту же начальную фазу, что и напряжение. Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы *u* и *i,* то соответствующие им синусоиды на его экране будут проходить (рис. 2.2.9) через нуль одновременно, т.е. **на резисторе напряжение и ток совпадают по фазе.**

Из выражения (2.2.11) следует:

$$U_m = RI_m;$$
$$U = RI.$$

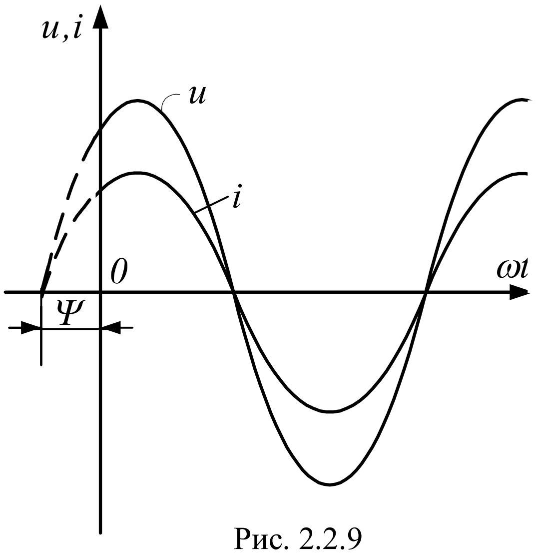


Рис. 2.2.9

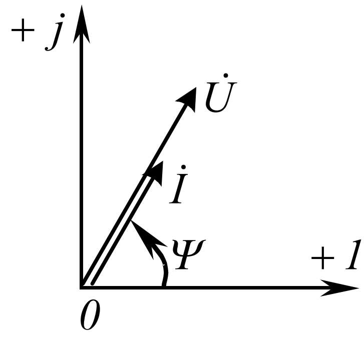


Рис. 2.2.10

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j\Psi};$$
$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j\Psi},$$

разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\Psi}}{Ie^{j\Psi}} = \frac{U}{I} = R$$

или

$$\dot{U} = R\dot{I}. \qquad (2.2.12)$$

Полученный результат показывает, что отношение двух комплексов есть вещественная константа. Следовательно, соответствующие им векторы напряжения и тока (рис. 2.2.10) совпадают по направлению.

2. Конденсатор

Идеальный емкостный элемент не обладает ни активным сопротивлением (проводимостью), ни индуктивностью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$ (рис. 2.2.11), то ток i через него

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) = C\frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.2.13)$$

Полученный результат показывает, что **напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на** $\pi/2$. Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы u и i, то на его экране будет иметь место картинка, соответствующая рис. 2.2.12.

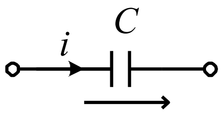


Рис. 2.2.11

Из выражения (2.2.13) следует:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m;$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I .$$

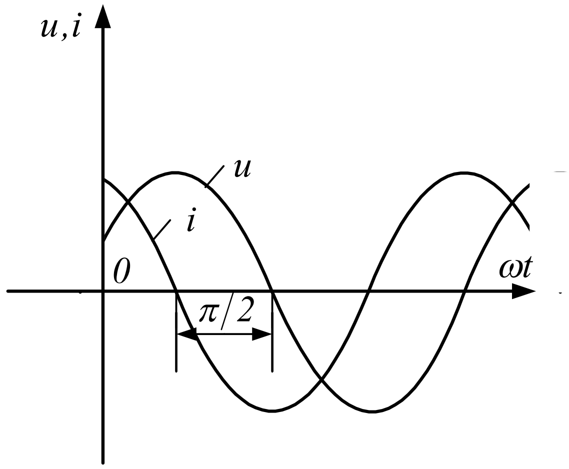


Рис. 2.2.12

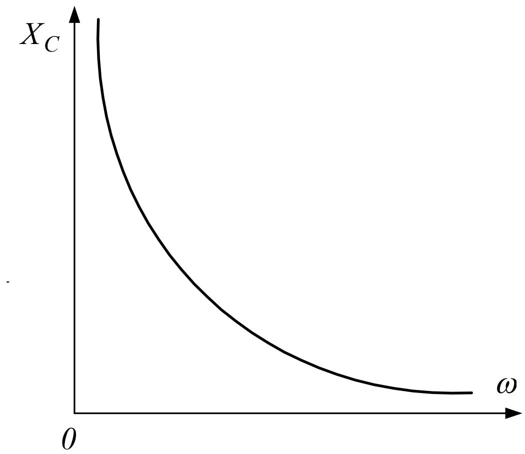


Рис. 2.2.13

Введенный параметр $X_C = 1/(\omega C)$ называют **реактивным емкостным сопротивлением конденсатора.** Как и резистивное сопротивление, X_C имеет единицу измерения **Ом.** Однако в отличие от R, данный параметр является функцией частоты, что и показывает рис. 2.2.13. На рис. 2.2.13 мы видим, что при $f = 0$ конденсатор представляет разрыв для тока, а при $f \to \infty$ $X_C = 0$.

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \;\Rightarrow\; \dot{U} = U e^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \dot{I} = I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{Ue^{j\Psi}}{Ie^{j\left(\Psi+\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{Ue^{j\Psi}}{Ie^{j\Psi}e^{j\frac{\pi}{2}}}=X_Ce^{-j\frac{\pi}{2}}=-jX_C=\underline{Z}_C$$

или

$$\dot{U}=-jX_C\dot{I}=\underline{Z}_C\dot{I}\,. \qquad (2.2.14)$$

В последнем соотношении $\underline{Z}_C=-jX_C$ – комплексное сопротивление конденсатора.

Умножение на $-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Следовательно, уравнению (2.2.14) соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 2.2.14.

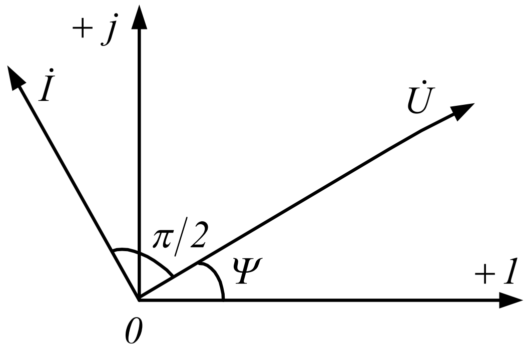


Рис. 2.2.14

3. Катушка индуктивности

Идеальный индуктивный элемент не обладает ни активным сопротивлением, ни емкостью. Пусть протекающий через него ток (рис. 2.2.15) определяется выражением $i=I_m\,sin(\omega t+\Psi)$. Тогда для напряжения на зажимах катушки индуктивности можно записать

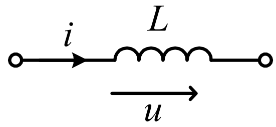


Рис. 2.2.15

$$u=-e=\frac{d\Psi}{dt}=\frac{d}{dt}(Li)=\omega LI_m\,sin\left(\omega t+\Psi+\frac{\pi}{2}\right)=U_m\,sin\left(\omega t+\Psi+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.2.15)$$

Полученный результат показывает, что **напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на $\pi/2$.** Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы u и i, то на его экране (идеальный индуктивный элемент) будет иметь место картинка, соответствующая рис. 2.2.16.

Из выражения (2.2.15) следует:

$$U_m=\omega LI_m=X_LI_m;$$

$$U=\omega LI=X_LI\,.$$

Введенный параметр $X_L = \omega L$ называют **реактивным индуктивным сопротивлением катушки;** его единица измерения – **Ом**. Как и у емкостного элемента, этот параметр является функцией частоты.

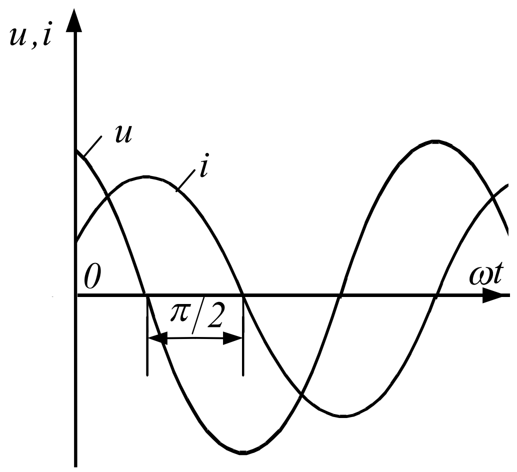


Рис. 2.2.16

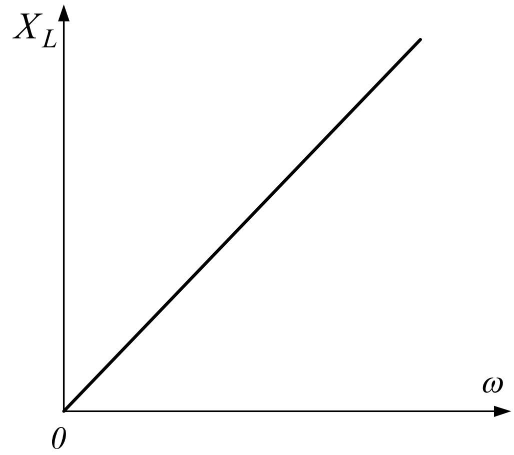


Рис. 2.2.17

Однако в данном случае эта зависимость имеет линейный характер, что показано на рис. 2.2.17. Из рис. 2.2.17 следует, что при $f = 0$ катушка индуктивности не оказывает сопротивления протекающему через него току, а при $f \to \infty$ $X_L \to \infty$.

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим комплексам

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{U} = Ue^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = Ie^{j\Psi},$$

разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}}{Ie^{j\Psi}} = \frac{Ue^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}}{Ie^{j\Psi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = \underline{Z}_L$$

или

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = \underline{Z}_L \dot{I}. \qquad (2.2.16)$$

В полученном соотношении $\underline{Z}_L = jX_L$ – комплексное сопротивление катушки индуктивности. Умножение на $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Следовательно, уравнению (2.2.16) соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 2.2.18.

4. Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Пусть в ветви на рис. 2.2.19 $i = I_m\, sin(\omega t + \varphi)$. Тогда

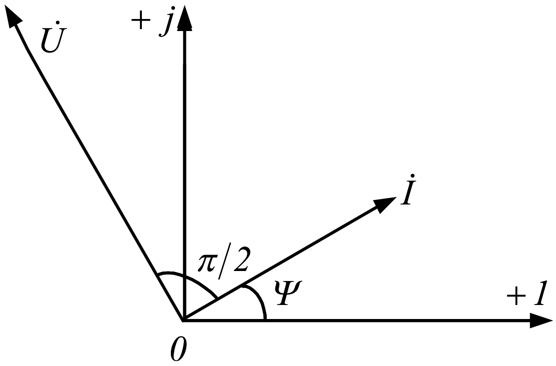


Рис. 2.2.18

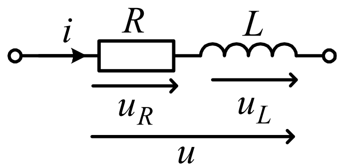


Рис. 2.2.19

$$u = u_R + u_L = RI_m\, sin(\omega t + \phi) + \omega L I_m\, sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_m\, sin\left(\omega t + \phi + arctg\frac{\omega L}{R}\right) = U_m\, sin(\omega t + \phi + \Psi), \qquad (2.2.17)$$

где

$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I_m = Z I_m;$ $\quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2};$ $\quad \Psi = arctg\frac{\omega L}{R}$, причем пределы изменения Ψ : $\quad 0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$.

Уравнению (2.2.17) можно поставить в соответствие соотношение

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + jX_L\dot{I} = (R + jX_L)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

которому, в свою очередь, соответствует векторная диаграмма на рис. 2.2.20.

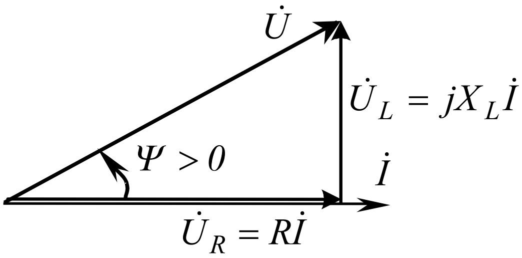


Рис. 2.2.20

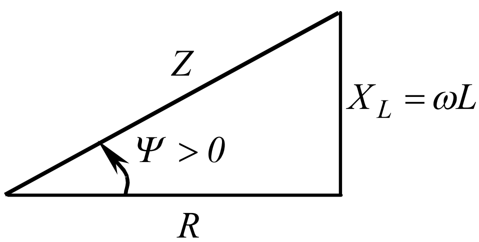


Рис. 2.2.21

Векторы на рис. 2.2.20 образуют фигуру, называемую **треугольником напряжений**. Аналогично выражение

$$\underline{Z} = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}\, e^{j\Psi} = Ze^{j\Psi}$$

графически может быть представлено **треугольником сопротивлений** (рис. 2.2.21), который подобен треугольнику напряжений.

5. Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Опуская промежуточные выкладки, с использованием соотношений (2.2.12) и (2.2.14) для ветви на рис. 2.2.22 можно записать

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = R\dot{I} - jX_C\dot{I} = (R - jX_C)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I}, \qquad (2.2.18)$$

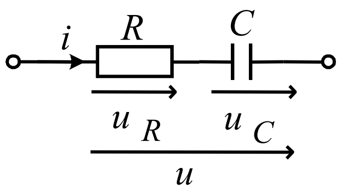


Рис. 2.2.22

где $\underline{Z} = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2}\, e^{j\Psi} = \underline{Z}e^{j\Psi}$;

$\Psi = -arctg\dfrac{X_C}{R} = -arctg\dfrac{1}{\omega CR}$, причем пределы изменения Ψ : $-\dfrac{\pi}{2} < \Psi < 0$.

На основании уравнения (2.2.17) могут быть построены подобные треугольники напряжений (рис. 2.2.23) и сопротивлений (рис. 2.2.24).

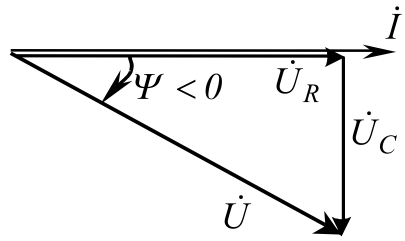


Рис. 2.2.23

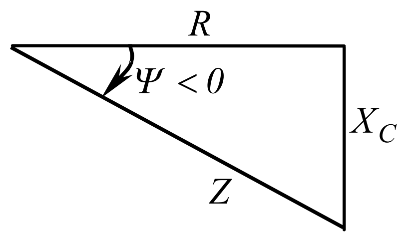


Рис. 2.2.24

6. Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

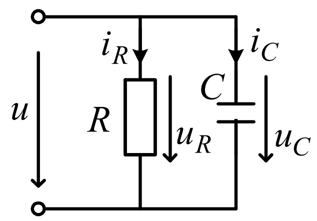


Рис.2.2.25

Для цепи на рис. 2.2.25 имеют место соотношения

$$U = U_R = U_C;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU,$$

где $g = \dfrac{1}{R}$ – активная проводимость, См;

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = b_C U,$$

где $b_C = \dfrac{1}{X_C}$ – реактивная проводимость конденсатора, См.

Векторная диаграмма токов для данной цепи, называемая

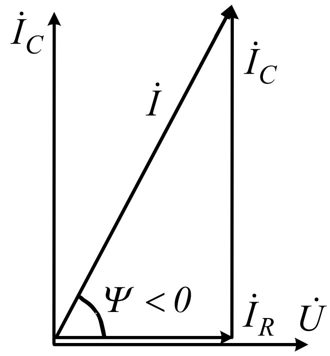


Рис. 2.2.26

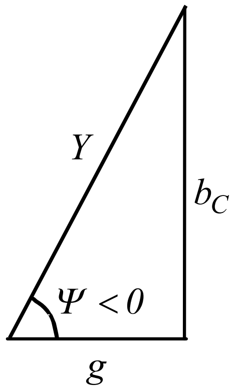


Рис. 2.2.27

треугольником токов, приведена на рис. 2.2.26. Ей соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = g\dot{U} + jb_C\dot{U} = (g + jb_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

где $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$;

$\underline{Y} = g + jb_C = \dfrac{1}{R} + j\omega C = Ye^{-j\Psi}$ – комплексная проводимость;

$\Psi = -arctg\dfrac{b_C}{g} = -arctg\omega CR$.

Треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов, приведен на рис. 2.2.27.

Для комплексного сопротивления цепи на рис. 2.2.25 можно записать

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + jb_C} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{-jX_C}} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}.$$

Необходимо отметить, что полученный результат аналогичен известному из курса физики выражению для эквивалентного сопротивления двух параллельно соединенных резисторов.

7. Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Для цепи на рис. 2.2.28 можно записать

$U = U_R = U_L$;

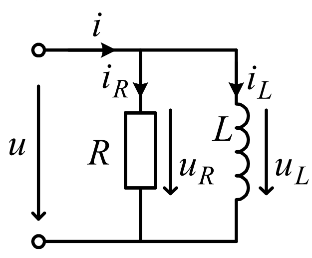


Рис. 2.2.28

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU \text{, где } g = \frac{1}{R} \text{ – активная проводимость, См;}$$

$I_L = \dfrac{U_L}{X_L} = b_L U$, где $b_L = \dfrac{1}{X_L} = \dfrac{1}{\omega L}$ – реактивная проводимость катушки индуктивности, См.

Векторной диаграмме токов (рис. 2.2.29) для данной цепи соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = g\dot{U} - jb_L\dot{U} = \left(g - jb_L\right)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

где $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$;

$\underline{Y} = g - jb_L = \dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{\omega L} = Ye^{-j\Psi}$ – комплексная проводимость;

$\Psi = arctg\dfrac{b_L}{g} = arctg\dfrac{R}{\omega L}$.

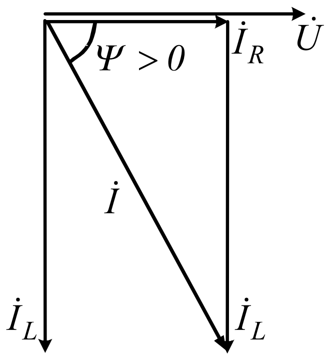


Рис. 2.2.29

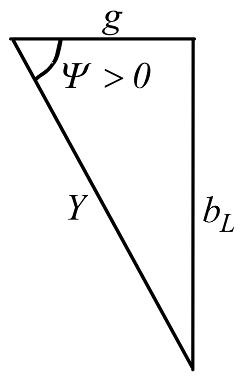


Рис. 2.2.30

Треугольник проводимостей, подобный треугольнику токов, приведен на рис. 2.2.30.

Выражение комплексного сопротивления цепи на рис. 2.2.28 имеет вид

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb_L} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L}} = \frac{RjX_L}{R + jX_L}.$$

Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС

Возьмем два участка цепи *a-b* и *c-d* (рис. 2.2.31) и составим для них уравнения в комплексной форме с учетом указанных на рис. 2.2.31 положительных направлений напряжений и токов.

Рис. 2.2.31

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \qquad \dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_d + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2;$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \qquad \dot{U}_{cd} = \dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_d = \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_1}. \qquad \dot{I}_2 = \frac{-\dot{E}_2 + \dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2}.$$

Объединяя оба случая, получим

$$\dot{I} = \frac{\pm \dot{E} \mp \dot{U}}{\underline{Z}} \tag{2.2.19}$$

или для постоянного тока

$$I = \frac{\pm E \mp U}{R}. \tag{2.2.20}$$

Формулы (2.2.19) и (2.2.20) являются **аналитическим выражением закона Ома для участка цепи с источником ЭДС**, согласно которому ток на участке цепи с источником ЭДС равен алгебраической сумме напряжения на зажимах участка цепи и ЭДС, деленной на сопротивление участка. В случае переменного тока все указанные величины суть комплексы. При этом ЭДС и напряжение берут со знаком “+”, если их направление совпадает с выбранным направлением тока, и со знаком “-”, если их направление противоположно направлению тока.

Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Расчет цепей переменного синусоидального тока может производиться не только путем построения векторных диаграмм, но и аналитически – путем операций с комплексами, **символически изображающими** синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Достоинством векторных диаграмм является их наглядность, недостатком – малая точность графических построений. Применение символического метода позволяет производить расчеты цепей с большой степенью точности.

Символический метод расчета цепей синусоидального тока основан на законах Кирхгофа и законе Ома в комплексной форме.

Уравнения, выражающие законы Кирхгофа в комплексной форме, имеют совершенно такой же вид, как и соответствующие уравнения для цепей постоянного тока. Только токи, ЭДС, напряжения и сопротивления входят в уравнение в виде комплексных величин.

1. Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{I} = 0. \tag{2.2.21}$$

2. Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{U} = 0 \tag{2.2.22}$$

или применительно к схемам замещения с источниками ЭДС

$$\sum \underline{Z}\dot{I} = \sum \dot{E}. \tag{2.2.23}$$

3. Соответственно матричная запись законов Кирхгофа в комплексной форме имеет вид

- первый закон Кирхгофа:

$$\boldsymbol{A\dot{I} = 0}; \tag{2.2.24}$$

- второй закон Кирхгофа

$$\boldsymbol{B\dot{U} = 0}. \tag{2.2.25}$$

Пример.

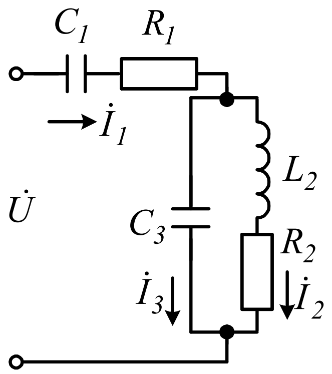


Рис. 2.2.32

Дано: $U = 120\ В;\quad X_{C1} = \dfrac{1}{\omega C_1} = 100\ Ом;$

$X_{L2} = \omega L_2 = 50\ Ом;\qquad X_{C3} = \dfrac{1}{\omega C_3} = 50\ Ом;$

$R_1 = 25\ Ом;\ \ R_2 = 20\ Ом.$

Определить: 1) полное комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}$;

2) токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$.

Решение:

1. $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 20 + j50\ Ом.$

2. $\underline{Z}_{23} = \dfrac{-jX_{C3} \cdot \underline{Z}_2}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = \dfrac{-j50(20 + j50)}{-j50 + 20 + j50} = 125 - j50\ Ом.$

3. $\underline{Z} = -jX_{C1} + R_1 + Z_{23} = -j100 + 25 + 125 - j50 =$

$= 150 - j150 = \sqrt{2} \cdot 150 e^{-j45^0} = 211{,}5 e^{-j45^0}\ Ом.$

4. Принимая начальную фазу напряжения за нуль, запишем

$$\dot{U} = Ue^{j0} = 120\ В.$$

Тогда

$$\dot I_1 = \frac{\dot U}{\underline{Z}} = \frac{120}{211{,}5e^{-j45^0}} = 0{,}57e^{j45^0} = 0{,}4 + j0{,}4\ A.$$

5. Поскольку ток распределяется обратно пропорционально сопротивлению ветвей (это вытекает из закона Ома), то

$$\dot I_2 = \dot I_1 \frac{-jX_{C3}}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = 0{,}57e^{j45^0}\,\frac{-j50}{-j50 + 20 + j50} = 0{,}57e^{j45^0}\left(-2{,}5j\right) =$$

$$= 0{,}57e^{j45^0} \cdot 2{,}5e^{-j90^0} = 1{,}43e^{-j45^0} = 1 - j\ A.$$

6. $\dot I_3 = \dot I_1 - \dot I_2 = 0{,}4 + j0{,}4 - 1 + j = -0{,}6 + j1{,}4\ A.$

7. Аналогичный результат можно получить, составив для данной схемы уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot I_1 - \dot I_2 - \dot I_3 = 0;$$
$$\dot I_1\left(-jX_{C1} + R_1\right) + \dot I_3\left(-jX_{C3}\right) = \dot U;$$
$$\dot I_3\left(-jX_{C3}\right) - \dot I_2\left(R_2 + jX_{L2}\right) = 0$$

или после подстановки численных значений параметров схемы

$$\dot I_1 - \dot I_2 - \dot I_3 = 0;$$
$$\left(25 - j100\right)\dot I_1 - j50\dot I_3 = 120;$$
$$-j50\dot I_3 - \left(20 + j50\right)\dot I_2 = 0.$$

Резонансы в цепях синусоидального тока

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающей в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление (входная проводимость) вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

Резонанс в цепи с последовательно соединенными элементами (резонанс напряжений)

Для цепи на рис. 2.2.33 имеет место

$$\dot U = \dot U_R + \dot U_L + \dot U_C = \dot I\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \dot I\underline{Z},$$

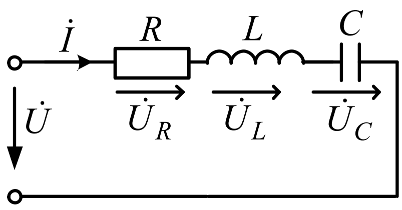


Рис. 2.2.33

где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,e^{j\varphi}; \quad (2.2.26)$$

$$\varphi = arctg\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \qquad (2.2.27)$$

В зависимости от соотношения величин ωL и $1/(\omega C)$ возможны три различных случая.

1. В цепи преобладает индуктивность, т.е. $\omega L > 1/(\omega C)$, а следовательно, $\dot{U}_L > \dot{U}_C$. Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рис. 2.2.34,а.

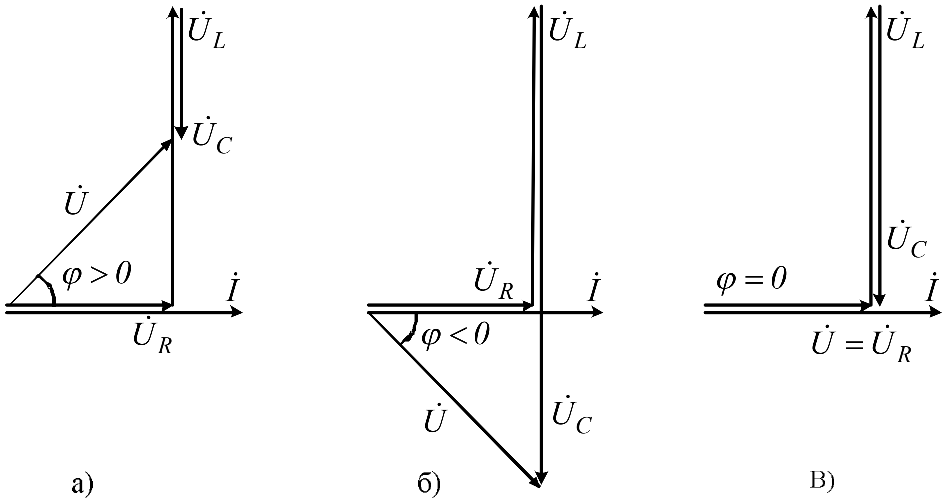


Рис. 2.2.34

2. В цепи преобладает емкость, т.е. $\omega L < 1/(\omega C)$, а значит, $\dot{U}_L < \dot{U}_C$. Этот случай отражает векторная диаграмма на рис. 2.2.34,б.

3. $\dot{U}_L = \dot{U}_C$ – случай резонанса напряжений (рис. 2.2.34,в).

Условие резонанса напряжений

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (2.2.28)$$

При этом, как следует из (2.2.26) и (2.2.27), $\underline{Z} = R; \quad \varphi = 0$.

При резонансе напряжений или режимах, близких к нему, ток в цепи резко возрастает. В теоретическом случае при $R=0$ его величина стремится к бесконечности. Соответственно возрастанию тока увеличиваются напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превысить величину напряжения источника питания.

Пусть, например, в цепи на рис. 2.2.33 $U = 10\ В; \quad R = 1\ Ом;$ $X_L = X_C = 1000\ Ом$. Тогда $I = U/Z = U/R = 10\ А$ и соответственно $U_L = U_C = IX_L = IX_C = 10^4\ В$.

Явление резонанса находит полезное применение на практике, в частности в радиотехнике. Однако если он возникает стихийно, то может привести к аварийным режимам вследствие появления больших перенапряжений и сверхтоков.

Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Суть дела не меняется, если в цепи имеется несколько индуктивных и емкостных элементов. Действительно, в этом случае $L_э = \sum_{k=1}^{n} L_k; \;\; 1/C_э = \sum_{k=1}^{n} 1/C_k$ и соотношение (2.2.28) выполняется для эквивалентных значений $L_Э$ и $C_Э$.

Как показывает анализ уравнения (2.2.28), режима резонанса можно добиться путем изменения параметров L и C, а также частоты. На основании (2.2.28) для резонансной частоты можно записать

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \qquad (2.2.29)$$

Резонанс в цепи с параллельно соединенными элементами (резонанс токов)

Для цепи рис. 2.2.35 имеем

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) = \dot{U}\left[g + j\left(b_C - b_L\right)\right] = \dot{U}\underline{Y},$$

где

$$\underline{Y} = \sqrt{g^2 + \left(b_C - b_L\right)^2}\, e^{-j\varphi}; \qquad (2.2.30)$$

$$\varphi = arctg\frac{b_L - b_C}{g}. \qquad (2.2.31)$$

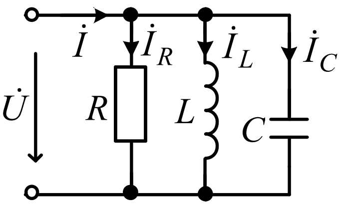


Рис. 2.2.35

В зависимости от соотношения величин b_L и b_C, как и в рассмотренном выше случае последовательного соединения элементов, возможны три различных случая.

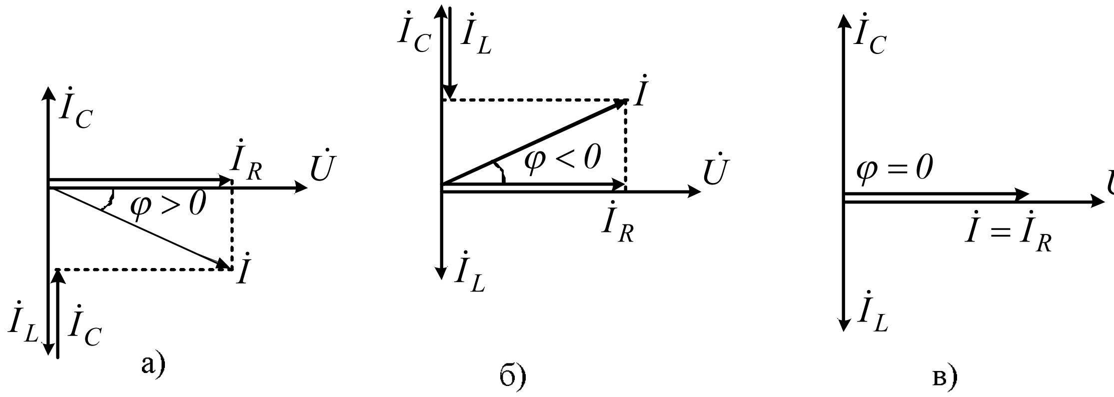


Рис. 2.2.36

1. В цепи преобладает индуктивность, т.е. $b_L > b_C$, а следовательно, $I_L > I_C$. Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рис. 2.2.36,а.

2. В цепи преобладает емкость, т.е. $b_L < b_C$, а значит, $I_L < I_C$. Этот случай иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 2.2.36,б.

3. $I_L = I_C$ – случай резонанса токов (рис. 2.2.36,в).

Условие резонанса токов $b_L = b_C$ или

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C. \tag{2.2.32}$$

При этом, как следует из (2.2.30) и (2.2.31), $\underline{Y} = g = 1/R;\ \varphi = 0$. Таким образом, при резонансе токов входная проводимость цепи минимальна, а входное сопротивление, наоборот, максимально. В частности, при отсутствии в цепи на рис. 2.2.35 резистора R ее входное сопротивление в режиме резонанса стремится к бесконечности, т.е. при резонансе токов ток на входе цепи минимален.

Идентичность соотношений (2.2.28) и (2.2.32) указывает, что в обоих случаях резонансная частота определяется соотношением (2.2.29). Однако не следует использовать выражение (2.2.29) для любой резонансной цепи. Оно справедливо только для простейших схем с последовательным или параллельным соединением индуктивного и емкостного элементов.

При определении резонансной частоты в цепи произвольной конфигурации или в общем случае соотношения параметров схемы в режиме резонанса следует исходить из условия вещественности входного сопротивления (входной проводимости) цепи.

Например, для цепи на рис. 2.2.37 имеем

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right).$$

Поскольку в режиме резонанса мнимая часть $\underline{Y}$ должна быть равна нулю, то условие резонанса имеет вид

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_p^2 L^2},$$

откуда, в частности, находится резонансная частота.

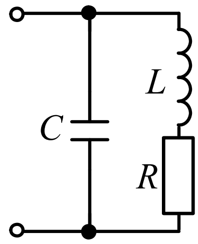


Рис. 2.2.37

2.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Режим работы любой цепи полностью характеризуется уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа. При этом необходимо составить и решить систему с n неизвестными, что может оказаться весьма трудоемкой задачей при большом числе n ветвей схемы. Однако число уравнений, подлежащих решению, может быть сокращено, если воспользоваться **специальными методами расчета**, к которым относятся методы контурных токов и узловых потенциалов.

Метод контурных токов

Идея метода контурных токов: уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа, но не для действительных, а для воображаемых токов, циркулирующих по замкнутым контурам, т.е. в случае выбора главных контуров равных токам ветвей связи. Число уравнений равно числу независимых контуров, т.е. числу ветвей связи графа $c = n - m + 1$. Первый закон Кирхгофа выполняется автоматически. Контуры можно выбирать произвольно, лишь бы их число было равно c и чтобы каждый новый контур содержал хотя бы одну ветвь, не входящую в предыдущие. Такие контуры называются **независимыми**. Их выбор облегчает использование топологических понятий дерева и ветвей связи.

Направления истинных и контурных токов выбираются произвольно. Выбор положительных направлений перед началом расчета может не определять действительные направления токов в цепи. Если в результате расчета какой-либо из токов, как и при использовании уравнений по законам Кирхгофа, получится со знаком “-”, это означает, что его истинное направление противоположно.

Пусть имеем схему по рис. 2.3.1.

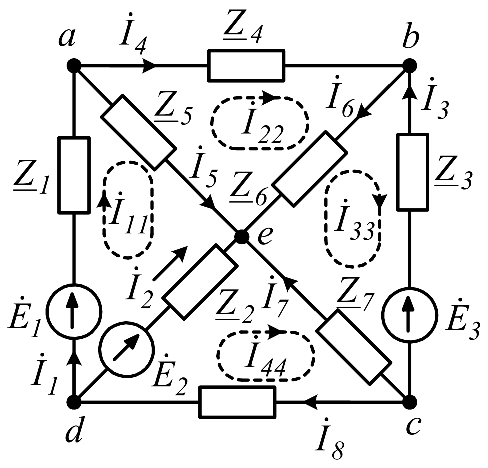


Рис. 2.3.1

Выразим токи ветвей через контурные токи:

$$\dot I_1 = \dot I_{11}; \quad \dot I_2 = \dot I_{44} - \dot I_{11}; \quad \dot I_3 = -\dot I_{33};$$

$$\dot I_4 = \dot I_{22}; \quad \dot I_5 = \dot I_{11} - \dot I_{22}; \dot I_6 = \dot I_{22} - \dot I_{33};$$

$$\dot I_7 = \dot I_{33} - \dot I_{44}; \ \dot I_8 = \dot I_{44}.$$

Обойдя контур *aeda,* по второму закону Кирхгофа имеем

$$\underline{Z}_1\dot I_1 + \underline{Z}_5\dot I_5 - \underline{Z}_2\dot I_2 = \dot E_1 - \dot E_2.$$

Поскольку

$$\dot I_1 = \dot I_{11}; \quad \dot I_5 = \dot I_{11} - \dot I_{22}; \quad \dot I_2 = \dot I_{44} - \dot I_{11},$$

то $\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5\right)\dot I_{11} - \underline{Z}_5\dot I_{22} + 0\cdot\dot I_{33} - \underline{Z}_2\dot I_{44} = \dot E_1 - \dot E_2$.

Таким образом, получили уравнение для первого контура относительно контурных токов. Аналогично можно составить уравнения для второго, третьего и четвертого контуров:

$$-\underline{Z}_5\dot I_{11} + \left(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6\right)\dot I_{22} - \underline{Z}_6\dot I_{33} - 0\cdot\dot I_{44} = 0;$$

$$0\cdot\dot I_{11} - \underline{Z}_6\dot I_{22} + \left(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7\right)\dot I_{33} - \underline{Z}_7\dot I_{44} = -\dot E_3;$$

$$-\underline{Z}_2\dot I_{11} + 0\cdot\dot I_{22} - \underline{Z}_7\dot I_{33} + \left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_7 + \underline{Z}_8\right)\dot I_{44} = \dot E_2,$$

совместно с первым решить их относительно контурных токов и затем по уравнениям, связывающим контурные токи и токи ветвей, найти последние.

Однако данная система уравнений может быть составлена формальным путем:

$$\underline{Z}_{11}\dot I_{11} - \underline{Z}_{12}\dot I_{22} - \underline{Z}_{13}\dot I_{33} - \underline{Z}_{14}\dot I_{44} = \dot E_{11}$$

$$-\underline{Z}_{21}\dot I_{11} + \underline{Z}_{22}\dot I_{22} - \underline{Z}_{23}\dot I_{33} - \underline{Z}_{24}\dot I_{44} = \dot E_{22};$$

$$-\underline{Z}_{31}\dot I_{11} - \underline{Z}_{32}\dot I_{22} + \underline{Z}_{33}\dot I_{33} - \underline{Z}_{34}\dot I_{44} = \dot E_{33};$$

$$-\underline{Z}_{41}\dot I_{11} - \underline{Z}_{42}\dot I_{22} - \underline{Z}_{43}\dot I_{33} + \underline{Z}_{44}\dot I_{44} = \dot E_{44}.$$

При составлении уравнений необходимо помнить следующее:

- $\underline{Z}_{ii}$ – сумма сопротивлений, входящих в i-й контур;
- $\underline{Z}_{ik}$ – сумма сопротивлений, общих для i-го и k-го контуров, причем $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$;
- члены на главной диагонали всегда пишутся со знаком “+”;
- знак “+” перед остальными членами ставится в случае, если через общее сопротивление $\underline{Z}_{ik}$ i-й и k-й контурные токи проходят в одном направлении, в противном случае ставится знак “-”;
- если i-й и k- й контуры не имеют общих сопротивлений, то $\underline{Z}_{ik} = 0$;

- в правой части уравнений записывается алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур: со знаком “+”, если направление ЭДС совпадает с выбранным направлением контурного тока, и “-”, если не совпадает.

В данном случае для первого уравнения системы имеем

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_5; \quad \underline{Z}_{13} = 0; \quad \underline{Z}_{14} = \underline{Z}_2; \; \dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Следует обратить внимание на то, что поскольку $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$, коэффициенты контурных уравнений всегда симметричны относительно главной диагонали.

Если в цепи содержатся помимо источников ЭДС источники тока, то они учитываются в левых частях уравнений как известные контурные токи: k- й контурный ток, проходящий через ветвь с k- м источником тока равен этому току $\left(\dot{I}_{kk} = \dot{J}_k\right)$.

Метод узловых потенциалов

Данный метод следует из первого закона Кирхгофа. В качестве неизвестных принимаются потенциалы узлов, по найденным значениям которых с помощью закона Ома для участка цепи с источником ЭДС затем находят токи в ветвях. Поскольку потенциал – величина относительная, потенциал одного из узлов (любого) принимается равным нулю. Таким образом, число неизвестных потенциалов, а следовательно, и число уравнений равно $(m - 1)$, т.е. числу ветвей дерева ∂.

Пусть имеем схему по рис. 2.3.2, в которой примем $\dot{\varphi}_C = 0$.

Допустим, что $\dot{\varphi}_a$ и $\dot{\varphi}_b$ известны. Тогда значения токов на основании закона Ома для участка цепи с источником ЭДС

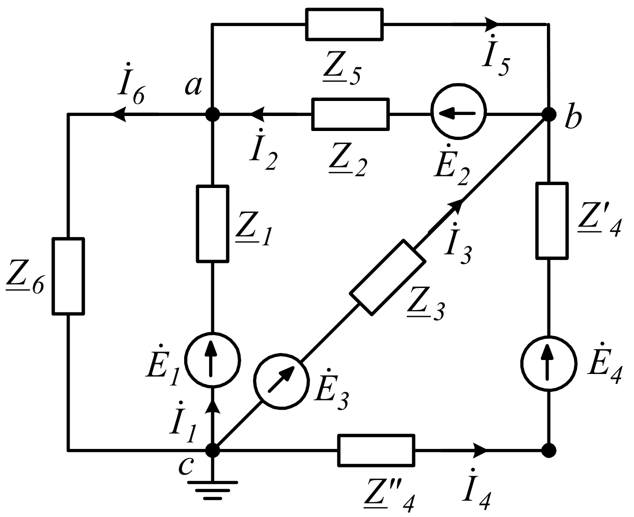


Рис. 2.3.2

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot I_1 = \frac{\dot E_1 - \dot\varphi_a}{\underline{Z}_1} = \left(\dot E_1 - \dot\varphi_a\right)\underline{Y}_1,\\
&\dot I_2 = \left(\dot\varphi_b - \dot\varphi_a + \dot E_2\right)\underline{Y}_2,\\
&\dot I_3 = \left(\dot E_3 - \dot\varphi_b\right)\underline{Y}_3,\\
&\dot I_4 = \left(\dot E_4 - \dot\varphi_b\right)\underline{Y}_4,\\
&\dot I_5 = \left(\dot\varphi_a - \dot\varphi_b\right)\underline{Y}_5,\\
&\dot I_6 = \dot\varphi_a \underline{Y}_6.
\end{aligned}
\right\}
$$

где $\underline{Y}_4 = \dfrac{1}{\underline{Z}'_4 + \underline{Z}''_4}$.

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла a:

$$\dot I_1 + \dot I_2 - \dot I_5 - \dot I_6 = 0$$

и подставим значения входящих в него токов, определенных выше:

$$\left(\dot E_1 - \dot\varphi_a\right)\underline{Y}_1 + \left(\dot\varphi_b - \dot\varphi_a + \dot E_2\right)\underline{Y}_2 - \left(\dot\varphi_a - \dot\varphi_b\right)\underline{Y}_5 - \dot\varphi_a \underline{Y}_6 = 0\,.$$

Сгруппировав соответствующие члены, получим:

$$\left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6\right)\dot\varphi_a - \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5\right)\dot\varphi_b = \dot E_1 \underline{Y}_1 + \dot E_2 \underline{Y}_2\,.$$

Аналогично можно записать для узла b:

$$-\left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5\right)\dot\varphi_a + \left(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5\right)\dot\varphi_b = \dot E_3 \underline{Y}_3 + \dot E_4 \underline{Y}_4 - \dot E_2 \underline{Y}_2\,.$$

Как и по методу контурных токов, система уравнений по методу узловых потенциалов может быть составлена формальным путем. При этом необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. В левой части i-го уравнения записывается со знаком “+”потенциал $\dot\varphi_i$ i-го узла, для которого составляется данное i-е уравнение, умноженный на сумму проводимостей $\underline{Y}_{ii}$ ветвей, присоединенных к данному i-му узлу, и со знаком “-” – потенциалы $\dot\varphi_k$ соседних узлов, каждый из которых умножен на сумму проводимостей $\underline{Y}_{ik}$ ветвей, присоединенных к i-му и k-му узлам.

Следовательно, все члены $\dot\varphi_i \underline{Y}_{ii}$, стоящие на главной диагонали в левой части системы уравнений, записываются со знаком “+”, а все остальные – со знаком “-”, причем $\underline{Y}_{ik} = \underline{Y}_{ki}$. Последнее равенство по аналогии с методом контурных токов обеспечивает симметрию коэффициентов уравнений относительно главной диагонали.

2. В правой части i-го уравнения записывается так называемый узловой ток $\dot J_i$, равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к i-му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком “+”, если соответствующая ЭДС

направлена к i-му узлу, в противном случае ставится знак "-". Если в подходящих к i-му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловой ток простыми слагаемыми, определяются аналогично.

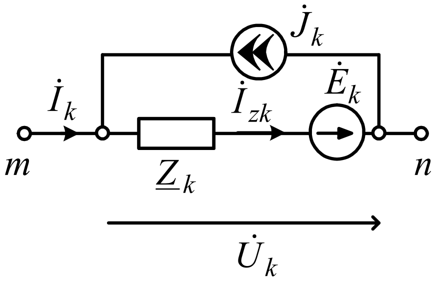


Рис. 2.3.3

В заключение отметим, что выбор того или иного из рассмотренных методов определяется тем, что следует найти, а также тем, какой из них обеспечивает меньший порядок системы уравнений. При расчете токов при одинаковом числе уравнений предпочтительнее использовать метод контурных токов, так как он не требует дополнительных вычислений с использованием закона Ома. Метод узловых потенциалов очень удобен при расчетах многофазных цепей, но не удобен при расчете цепей со взаимной индуктивностью.

Основы матричных методов расчета электрических цепей

Рассмотренные методы расчета электрических цепей – непосредственно по законам Кирхгофа, методы контурных токов и узловых потенциалов – позволяют принципиально рассчитать любую схему. Однако их применение без использования введенных ранее топологических матриц рационально для относительно простых схем. Использование матричных методов расчета позволяет формализовать процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в ЭВМ, что особенно существенно при расчете сложных разветвленных схем.

Переходя к матричным методам расчета цепей, запишем закон Ома в матричной форме.

Пусть имеем схему (рис. 2.3.3), где $\dot{J}_k$ – источник тока. В соответствии с рассмотренным нами ранее законом Ома для участка цепи с ЭДС для данной схемы можно записать:

$$\dot{U}_{mn} = \dot{U}_k = \dot{I}_{zk}\underline{Z}_k - \dot{E}_k . \qquad (2.3.1)$$

Однако для дальнейших выкладок будет удобнее представить ток $\dot{I}_{zk}$ как сумму токов k-й ветви и источника тока, т.е.

$$\dot{I}_{zk} = \dot{I}_k + \dot{J}_k . \qquad (2.3.2)$$

Подставив (2.3.2) в (2.3.1), получим

$$\dot{U}_k = Z_k\left(\dot{I}_k + \dot{J}_k\right) - \dot{E}_k . \qquad (2.3.3)$$

Формула (2.3.3) представляет собой аналитическое выражение закона Ома для участка цепи с источниками ЭДС и тока (обобщенной ветви).

Соотношение (2.3.3) запишем для всех n ветвей схемы в виде матричного равенства

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & \\ & \underline{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 + \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n + \dot{J}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \underline{\boldsymbol{Z}}\left(\dot{\boldsymbol{I}} + \dot{\boldsymbol{J}}\right) - \dot{\boldsymbol{E}}, \qquad (2.3.4)$$

где $\underline{\boldsymbol{Z}}$ – диагональная квадратная (размерностью $n \times n$) матрица сопротивлений ветвей, все элементы которой (взаимную индуктивность не учитываем), за исключением элементов главной диагонали, равны нулю.

Соотношение (2.3.4) представляет собой матричную запись закона Ома.

Если обе части равенства (2.3.4) умножить слева на контурную матрицу $\boldsymbol{B}$ и учесть второй закон Кирхгофа, согласно которому

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{0}, \qquad 2.3.5)$$

то

$$\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\left(\dot{\boldsymbol{I}} + \dot{\boldsymbol{J}}\right) = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}}, \qquad (2.3.6)$$

т. е. получили новую запись в матричной форме второго закона Кирхгофа.

Метод контурных токов в матричной форме

В соответствии с введенным ранее понятием матрицы главных контуров ***B*,** записываемой для главных контуров, в качестве независимых переменных примем токи ветвей связи, которые и будут равны искомым контурным токам.

Уравнения с контурными токами получаются на основании второго закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений, составляемых для контуров, т.е. числу ветвей связи $c=n-m+1$. Выражение (2.3.6) запишем следующим образом:

$$\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{J}}. \qquad (2.3.7)$$

В соответствии с методом контурных токов токи всех ветвей могут быть выражены как линейные комбинации контурных токов или в рассматриваемом случае токов ветвей связи. Если элементы j–го столбца матрицы $\boldsymbol{B}$ умножить соответствующим образом на контурные токи, то сумма таких произведений и будет выражением тока *j*–й ветви через контурные токи (через токи ветвей связи). Сказанное может быть записано в виде матричного соотношения

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}}, \tag{2.3.8}$$

где $\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}}$ – столбцовая матрица контурных токов; $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}$ – транспонированная контурная матрица.

С учетом (2.3.8) соотношение (2.3.7) можно записать как

$$\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{J}}. \tag{2.3.9}$$

Полученное уравнение представляет собой контурные уравнения в матричной форме. Если обозначить

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}; \tag{2.3.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{J}}, \tag{2.3.11}$$

то получим матричную форму записи уравнений, составленных по методу контурных токов:

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{k}} \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}} = \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}, \tag{2.3.12}$$

где $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{k}}$ – матрица контурных сопротивлений; $\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}$ – матрица контурных ЭДС.

В развернутой форме (2.3.12) можно записать как

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1c} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{c1} & \underline{Z}_{c2} & \cdots & \underline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{k1} \\ \dot{I}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{kc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{kc} \end{bmatrix}, \tag{2.3.13}$$

то есть получим известный из метода контурных токов результат.

Рассмотрим пример составления контурных уравнений.

Пусть имеем схему на рис. 2.3.4. У данной схемы четыре узла *(m=4)* и шесть обобщенных ветвей *(n=6)*. Число независимых контуров, равное числу ветвей связи,

$$c=n-m+1=6-4+1=3.$$

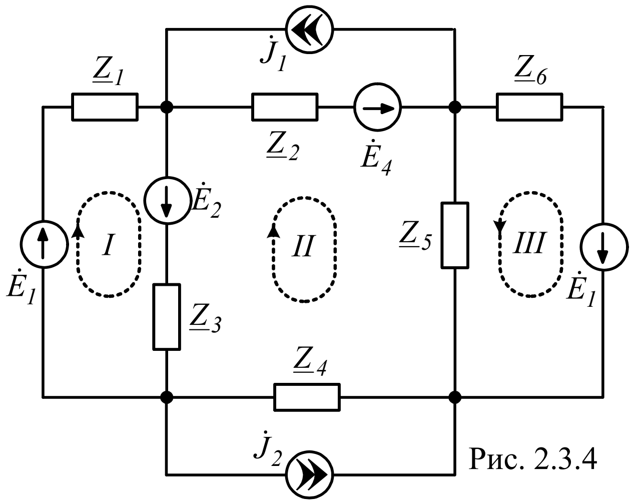


Рис. 2.3.4

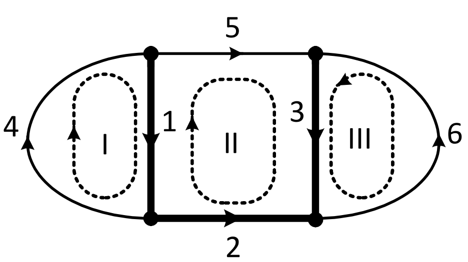


Рис. 2.3.5

Граф схемы с выбранным деревом (ветви 1, 2, 3) имеет вид, изображенный на рис. 2.3.5.

Запишем матрицу контуров, которая будет являться матрицей главных контуров, поскольку каждая ветвь связи входит только в один контур. Принимая за направление обхода контуров направления ветвей связи, получим

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица сопротивлений ветвей

$$\underline{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (\underline{Z}_3+\underline{Z}_1) & -\underline{Z}_3 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & (\underline{Z}_3+\underline{Z}_4+\underline{Z}_5+\underline{Z}_2) & \underline{Z}_5 \\ 0 & \underline{Z}_5 & (\underline{Z}_5+\underline{Z}_6) \end{bmatrix}.$$

Матрицы ЭДС и токов источников

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \begin{bmatrix} \dot{E}_2 & 0 & 0 & \dot{E}_1 & \dot{E}_4 & -\dot{E}_3 \end{bmatrix}^T ;$$

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{J}_2 & 0 & 0 & \dot{J}_1 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

Тогда матрица контурных ЭДС

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{B}\underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{B}\left(\dot{\boldsymbol{E}} - \underline{\boldsymbol{Z}}\dot{\boldsymbol{J}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_2 - 0 \\ 0 + \dot{J}_2 \underline{Z}_4 \\ 0 - 0 \\ \dot{E}_1 - 0 \\ \dot{E}_4 - \dot{J}_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{E}_2 + \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 - \dot{J}_2 \underline{Z}_4 + \dot{E}_4 - \dot{J}_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 \end{bmatrix} .$$

Матрица контурных токов

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{k1} & \dot{I}_{k2} & \dot{I}_{k3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 & \dot{I}_5 & \dot{I}_6 \end{bmatrix}^T .$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \dot{E}_{k3} \end{bmatrix} ,$$

где $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$; $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_3$; $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5$; $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_5$; $\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6$; $\dot{E}_{k1} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2$; $\dot{E}_{k2} = \dot{E}_4 - \dot{E}_2 - \dot{J}_2 \underline{Z}_4 - \dot{J}_1 \underline{Z}_2$; $\dot{E}_{k3} = -\dot{E}_3$.

Анализ результатов показывает, что полученные три уравнения идентичны тем, которые можно записать непосредственно из рассмотрения схемы по известным правилам составления уравнений по методу контурных токов.

Метод узловых потенциалов в матричной форме

На основании полученного выше соотношения (2.3.4), представляющего собой, как было указано, матричную запись закона Ома, запишем матричное выражение:

$$\dot{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{Y}}\left(\dot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{E}}\right) - \dot{\boldsymbol{J}} , \qquad (2.3.14)$$

где $\underline{\boldsymbol{Y}} = \underline{\boldsymbol{Z}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Y}}_1 & & & \\ & \underline{\boldsymbol{Y}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\boldsymbol{Y}}_n \end{bmatrix}$ – диагональная матрица проводимостей ветвей, все члены которой, за исключением элементов главной диагонали, равны нулю.

Матрицы $\underline{\boldsymbol{Z}}$ и $\underline{\boldsymbol{Y}}$ взаимно обратны.

Умножив обе части равенства (2.3.14) на узловую матрицу $\boldsymbol{A}$ и учитывая первый закон Кирхгофа, согласно которому

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{0}, \tag{2.3.15}$$

получим

$$\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\left(\dot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{E}}\right) = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{J}}. \tag{2.3.16}$$

Выражение (2.3.16) перепишем как

$$\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{J}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\dot{\boldsymbol{E}}. \tag{2.3.17}$$

Принимая потенциал узла, для которого отсутствует строка в матрице $\boldsymbol{A}$, равным нулю, определим напряжения на зажимах ветвей:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{2.3.18}$$

Тогда получаем матричное уравнение вида

$$\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{J}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\dot{\boldsymbol{E}}. \tag{2.3.19}$$

Данное уравнение представляет собой узловые уравнения в матричной форме. Если обозначить

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}; \tag{2.3.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{J}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\dot{\boldsymbol{E}}, \tag{2.3.21}$$

то получим матричную форму записи уравнений, составленных по методу узловых потенциалов:

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{y}}, \tag{2.3.22}$$

где $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{y}}$ – матрица узловых проводимостей; $\dot{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{y}}$ – матрица узловых токов.

В развернутом виде соотношение (22) можно записать как

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \cdots & \underline{Y}_{1,(m-1)} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \cdots & \underline{Y}_{2,(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{(m-1),1} & \underline{Y}_{(m-1),2} & \cdots & \underline{Y}_{(m-1),(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{y1} \\ \dot{J}_{y2} \\ \vdots \\ \dot{J}_{y(m-1)} \end{bmatrix}, \tag{2.3.23}$$

то есть получим известный из метода узловых потенциалов результат.

Рассмотрим составление узловых уравнений на примере схемы на рис. 2.3.6.

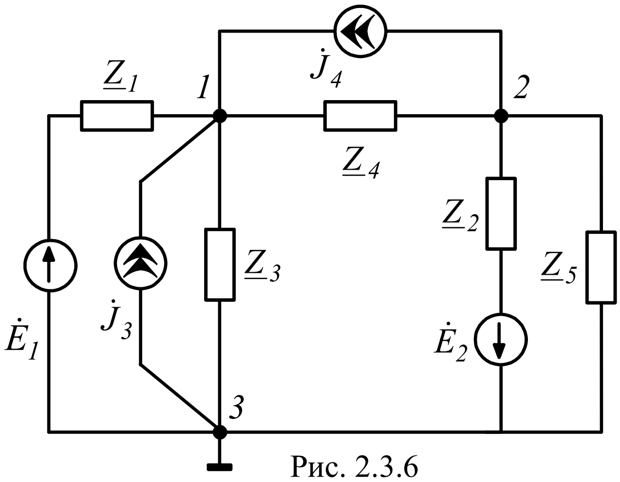


Рис. 2.3.6

Данная схема имеет 3 узла ($m=3$) и 5 ветвей ($n=5$). Граф схемы с выбранной ориентацией ветвей представлен на рис. 2.3.7.

Узловая матрица (примем $\dot{\varphi}_3 = 0$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица проводимостей ветвей

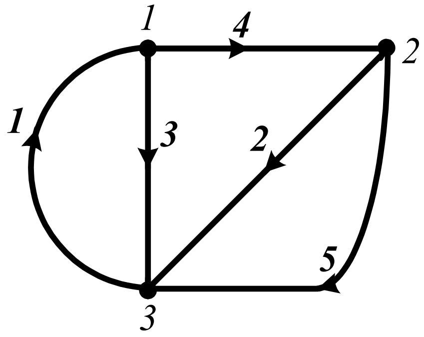


Рис. 2.3.7

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Y}}_1 & & & & \\ & \underline{\boldsymbol{Y}}_2 & & & \\ & & \underline{\boldsymbol{Y}}_3 & & \\ & & & \underline{\boldsymbol{Y}}_4 & \\ & & & & \underline{\boldsymbol{Y}}_5 \end{bmatrix},$$

где $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$.

Матрица узловых проводимостей

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_y = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & & & & \\ & \underline{Y}_2 & & & \\ & & \underline{Y}_3 & & \\ & & & \underline{Y}_4 & \\ & & & & \underline{Y}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$
=\begin{bmatrix} -\underline{Y}_1 & 0 & \underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & -\underline{Y}_4 & \underline{Y}_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\underline{Y}_1+\underline{Y}_3+\underline{Y}_4) & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_4 & (\underline{Y}_2+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5) \end{bmatrix}.
$$

Матрицы токов и ЭДС источников

$$
\dot{\boldsymbol{J}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dot{J}_3 & \dot{J}_4 & 0\end{bmatrix}^T;
$$

$$
\dot{\boldsymbol{E}}=.\begin{bmatrix}\dot{E}_1 & \dot{E}_2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T.
$$

Следовательно, матрица узловых токов будет иметь вид

$$
\dot{\boldsymbol{J}}_y=\boldsymbol{A}\left(\dot{\boldsymbol{J}}-\underline{\boldsymbol{Y}}\dot{\boldsymbol{E}}\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0-\underline{Y}_1\dot{E}_1 \\ 0-\underline{Y}_2\dot{E}_2 \\ \dot{J}_3-0 \\ \dot{J}_4-0 \\ 0-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_1\dot{E}_1+\dot{J}_3+\dot{J}_4 \\ -\underline{Y}_2\dot{E}_2-\dot{J}_4 \end{bmatrix}.
$$

Таким образом, окончательно получаем

$$
\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{J}_{y1} \\ \dot{J}_{y2} \end{bmatrix},
$$

где $\underline{Y}_{11}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_3+\underline{Y}_4$; $\underline{Y}_{12}=\underline{Y}_{21}=-\underline{Y}_4$; $\underline{Y}_{22}=\underline{Y}_2+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5$; $\dot{J}_{y1}=\underline{Y}_1\dot{E}_1+\dot{J}_3+\dot{J}_4$; $\dot{J}_{y2}=-\dot{J}_4-\underline{Y}_2\dot{E}_2$.

Анализ результатов показывает, что полученные уравнения идентичны тем, которые можно записать непосредственно из рассмотрения схемы по известным правилам составления уравнений по методу узловых потенциалов.

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора, основанный на **теореме об активном двухполюснике** (называемой также теоремой Гельмгольца-Тевенена), позволяет достаточно просто определить ток в одной (представляющей интерес при анализе) ветви сложной линейной схемы, не находя токи в остальных ветвях. Применение данного метода особенно эффективно, когда требуется определить значения тока в некоторой ветви для различных значений сопротивления в этой ветви, в то время как в остальной схеме сопротивления, а также ЭДС и токи источников постоянны.

Теорема об активном двухполюснике формулируется следующим образом: если активную цепь, к которой присоединена некоторая ветвь, заменить источником с ЭДС, равной напряжению на зажимах разомкнутой ветви, и сопротивлением, равным входному сопротивлению активной цепи, то ток в этой ветви не изменится (рис. 2.3.8).

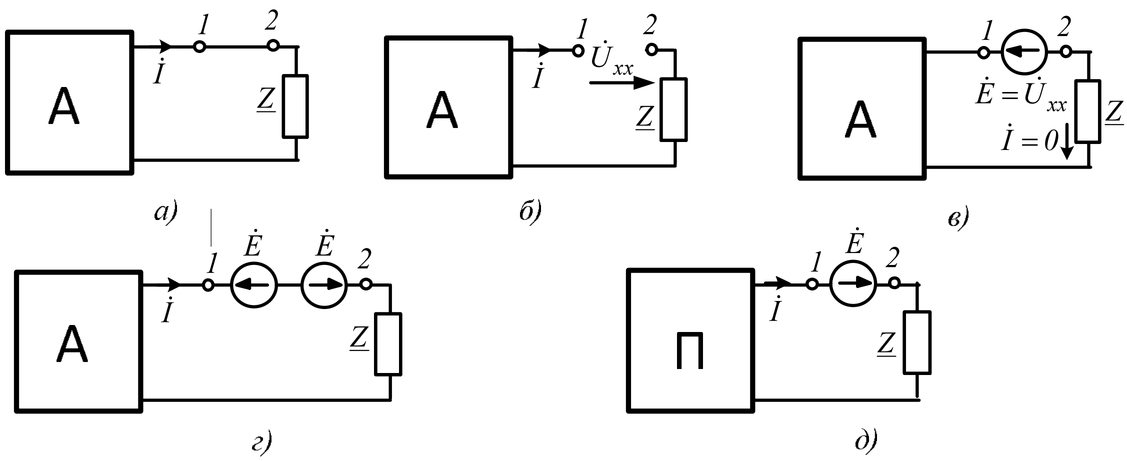
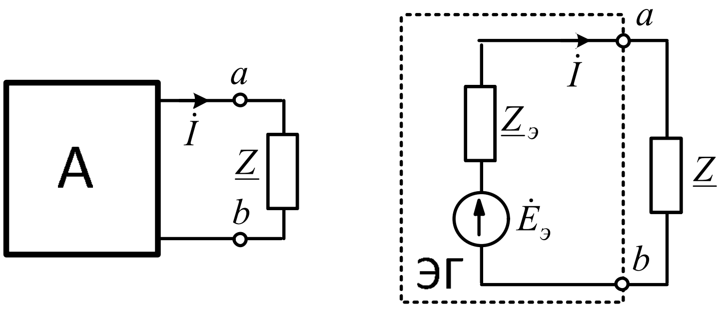


Рис. 2.3.8

Пусть в схеме выделена некоторая ветвь с сопротивлением $\underline{Z}$, а вся оставшаяся цепь обозначена как активный двухполюсник *А* (рис. 2.3.8,а). Разомкнем эту ветвь между точками *1* и *2* (рис. 2.3.8,б). На зажимах этой ветви имеет место напряжение $\dot{U}_{xx}$. Если теперь между зажимами *1* и *2* включить источник ЭДС $\dot{E}=\dot{U}_{xx}$ с направлением, указанным на рис. 1,в, то, как и в цепи на рис. 2.3.8,б, ток в ней будет равен нулю. Чтобы схему на рис. 2.3.8,в сделать эквивалентной цепи на рис. 2.3.8,а, в рассматриваемую ветвь нужно включить еще один источник ЭДС $\dot{E}$, компенсирующий действие первого (рис. 2.3.8,г). Будем теперь искать ток $\dot{I}$ по принципу наложения, т.е. как сумму двух составляющих, одна из которых вызывается источниками, входящими в структуру активного двухполюсника, и источником ЭДС $\dot{E}$, расположенным между зажимами *1* и *2* слева, а другая – источником ЭДС $\dot{E}$, расположенным между зажимами *1* и *2* справа. Но первая из этих составляющих в соответствии с рис. 1,в равна нулю, а значит, ток $\dot{I}$ определяется второй составляющей, т.е. по схеме на рис. 2.3.8,д, в которой активный двухполюсник *А* заменен пассивным двухполюсником *П*. Таким образом, теорема доказана.

Указанные в теореме ЭДС и сопротивление можно интерпретировать как соответствующие параметры некоторого эквивалентного исходному активному двухполюснику генератора, откуда и произошло название этого метода.

Таким образом, в соответствии с данной теоремой схему на рис. 2.3.9,а, где относительно ветви, ток в которой требуется определить, выделен активный двухполюсник *A* со структурой любой степени сложности, можно трансформировать в схему на рис. 2.3.9,б.



а) Рис. 2.3.9 б)

Отсюда ток $\dot{I}$ находится как

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_э}{\underline{Z}_э + \underline{Z}} = \frac{\dot{U}_{xx\ ab}}{\underline{Z}_э + \underline{Z}}, \qquad (2.3.24)$$

где $\dot{U}_{xx\ ab}$ – напряжение на разомкнутых зажимах *a-b*.

Уравнение (2.3.24) представляет собой аналитическое выражение метода эквивалентного генератора.

Параметры эквивалентного генератора (активного двухполюсника) могут быть определены экспериментальным или теоретическим путем.

В первом случае, в частности на постоянном токе, в режиме холостого хода активного двухполюсника замеряют напряжение $U_{xx\ ab}$ на его зажимах с помощью вольтметра, которое и равно $E_э$. Затем закорачивают зажимы *a* и *b* активного двухполюсника с помощью амперметра, который показывает ток $I_{кз} = E_э / R_э$ (рис. 2.3.9,б). Тогда на основании результатов измерений $R_э = U_{xx\ ab} / I_{кз}$.

В принципе, аналогично находятся параметры активного двухполюсника и при синусоидальном токе; только в этом случае необходимо определить комплексные значения $\dot{E}_э$ и $\underline{Z}_э$.

При теоретическом определении параметров эквивалентного генератора их расчет осуществляется в два этапа:

1. Любым из известных методов расчета линейных электрических цепей определяют напряжение на зажимах *a–b* активного двухполюсника при разомкнутой исследуемой ветви.

2. При разомкнутой исследуемой ветви определяется входное сопротивление активного двухполюсника, **заменяемого при этом**

пассивным. Данная замена осуществляется путем устранения из структуры активного двухполюсника всех источников энергии, но при сохранении на их месте их собственных (внутренних) сопротивлений. В случае идеальных источников это соответствует закорачиванию всех источников ЭДС и размыканию всех ветвей с источниками тока.

Сказанное иллюстрируют схемы на рис. 2.3.10, где для расчета входного (эквивалентного) сопротивления активного двухполюсника на рис. 2.3.10,а последний преобразован в пассивный двухполюсник со структурой на рис. 2.3.10,б. Тогда согласно схеме на рис. 2.3.10,б

$$\underline{Z}_{э} = \underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{5} + \frac{\left(\underline{Z}_{1} + \underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3}\right)\left(\underline{Z}_{вн2} + \underline{Z}_{4}\right)}{\underline{Z}_{1} + \underline{Z}_{2} + \underline{Z}_{3} + \underline{Z}_{вн2} + \underline{Z}_{4}}.$$

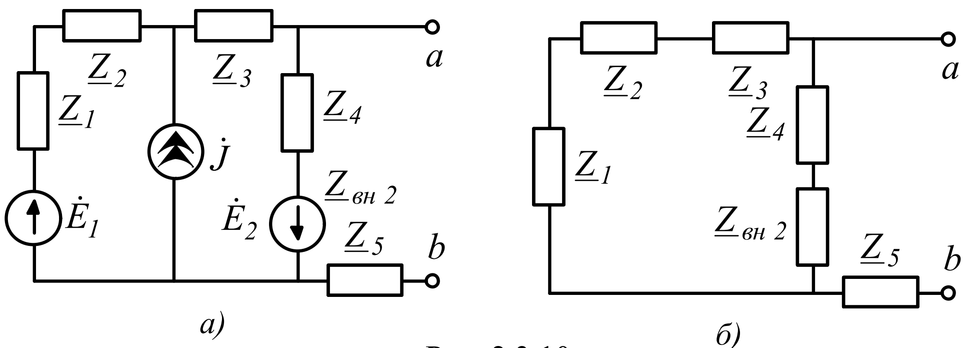


Рис. 2.3.10

В качестве примера использования метода эквивалентного генератора для анализа определим зависимость показаний амперметра в схеме на рис. 2.3.11 при изменении сопротивления *R* переменного резистора в диагонали моста в пределах $0 \le R \le 50\ Ом$. Параметры цепи *E=100 В*; *R_1=R_4=40 Ом; R_2=R_3=60 Ом.*

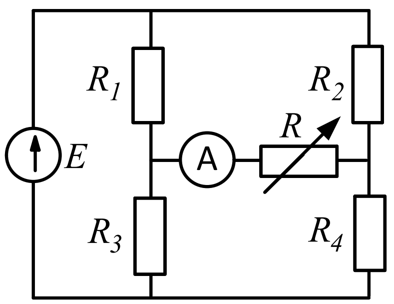


Рис. 2.3.11

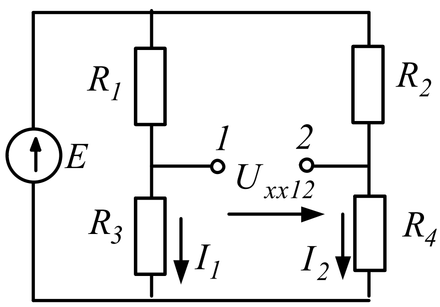


Рис. 2.3.12

В соответствии с изложенной выше методикой определения параметров активного двухполюсника для нахождения значения $E_{э}$ перейдем к схеме на рис. 2.3.12, где напряжение $U_{xx\,12}$ на разомкнутых зажимах *1* и *2* определяет искомую ЭДС $E_{э}$. В данной цепи

$$U_{xx\,12} = R_3 I_1 - R_4 I_2 = R_3 \frac{E}{R_1 + R_3} - R_4 \frac{E}{R_2 + R_4} = 20\ В\,.$$

Для определения входного сопротивления активного двухполюсника трансформируем его в схему на рис. 2.3.13.

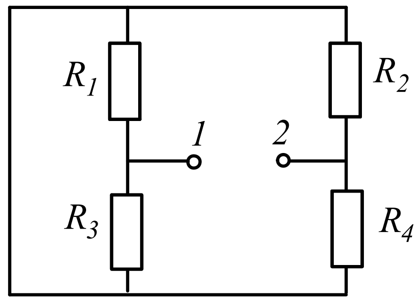


Рис. 2.3.13

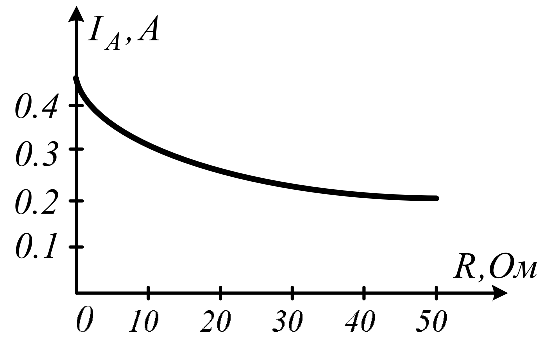


Рис. 2.3.14

Со стороны зажимов *1-2* данного пассивного двухполюсника его сопротивление

$$R_{вх} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 48\ Ом\,.$$

Таким образом, для показания амперметра в схеме на рис. 2.3.11 в соответствии с (2.3.24) можно записать

$$I_A = \frac{U_{xx\,12}}{R_{вх} + R} = \frac{20}{48 + R}\ A\,. \qquad (2.3.25)$$

Задаваясь значениями *R* в пределах его изменения, на основании (2.3.25) получаем кривую на рис. 2.3.14.

В качестве примера использования метода эквивалентного генератора для анализа цепи при синусоидальном питании определим, при каком значении нагрузочного сопротивления $\underline{Z}_H$ в цепи на рис. 2.3.15 в нем будет выделяться максимальная мощность и чему она будет равна.

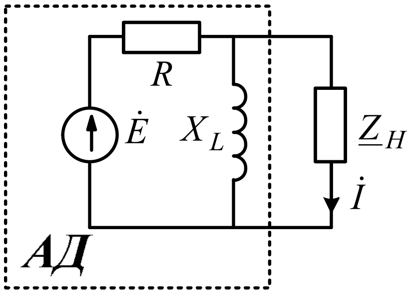


Рис. 2.3.15

Параметры цепи: $E = 100\ В$; $R = X_L = 10\ Ом$.

В соответствии с теоремой об активном двухполюснике обведенная пунктиром на рис. 2.3.15 часть схемы заменяется эквивалентным генератором с параметрами

$$\dot{E}_э = \frac{\dot{E}}{R + jX_L} jX_L = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^0} \; В;$$

$$\underline{Z}_э = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^0} = 5 + j5 \; Ом.$$

В соответствии с (2.3.24) для тока $\dot{I}$ через $\underline{Z}_H$ можно записать

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_э}{\underline{Z}_э + \underline{Z}_H} = \frac{\dot{E}_э}{(R_э + jX_э) + (R_H + jX_H)} = \frac{\dot{E}_э}{(R_э + R_H) + j(X_э + X_H)} =$$

$$= \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^0}}{(5 + R_H) + j(5 + X_H)} \; A,$$

откуда для модуля этого тока имеем

$$I = \frac{E_э}{\sqrt{(R_э + R_H)^2 + (X_э + X_H)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2}\sqrt{(5 + R_H)^2 + (5 + X_H)^2}} \; A. \quad (2.3.26)$$

Анализ полученного выражения (2.3.26) показывает, что ток *I,* а следовательно, и мощность будут максимальны, если $X_э + X_H = 0$; откуда $X_H = -5 \; Ом$, причем знак “-” показывает, что нагрузка $\underline{Z}_H$ имеет емкостный характер.

Таким образом,

$$I = \frac{E_э}{R_э + R_H} \quad \text{и} \quad P_H = I^2 R_H = \frac{E_э^2 R_H}{(R_э + R_H)^2}.$$

Данные соотношения аналогичны соответствующим выражениям в цепи постоянного тока, для которой, как известно, максимальная мощность на нагрузке выделяется в режиме согласованной нагрузки, условие которого $R_э = R_H$.

Таким образом, искомые значения $\underline{Z}_H$ и максимальной мощности: $\underline{Z}_H = 5 - j5 \; Ом; \quad P_{max} = 250 \; Вт$.

2.4. МОЩНОСТЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Преобразование энергии в электрической цепи. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности синусоидального тока

Передача энергии *w* по электрической цепи (например, по линии электропередачи), рассеяние энергии, то есть переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс, то есть тем, сколько энергии передается по линии в единицу времени, сколько энергии рассеивается в единицу времени. Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мощностью *p*. Сказанному соответствует математическое определение

$$p=\frac{dw}{dt}. \tag{2.4.1}$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид

$$p=ui. \tag{2.4.2}$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за $-\varphi$, получим

$$\begin{aligned} p=ui=U_m\, sin\,\omega t\cdot I_m\, sin(\omega t-\varphi)=U_m I_m\, sin\,\omega t\, sin(\omega t-\varphi)= \\ =\frac{U_m I_m}{2}\left[cos\,\varphi-cos(2\omega t-\varphi)\right]=UI\,cos\,\varphi-UI\,cos(2\omega t-\varphi) \end{aligned}. \tag{2.4.3}$$

Итак, мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и гармоническую составляющую, угловая частота которой в 2 раза больше угловой частоты напряжения и тока.

Когда мгновенная мощность отрицательна, а это имеет место (см. рис. 2.4.1), когда *u* и *i* разных знаков, т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия возвращается из двухполюсника источнику питания.

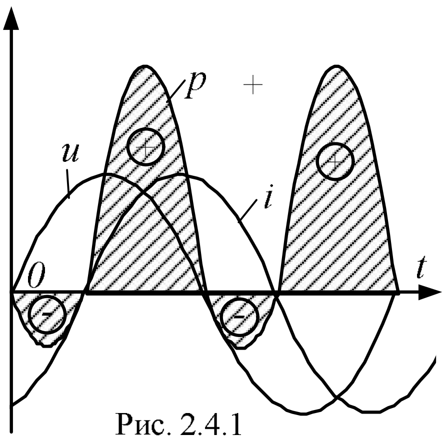


Рис. 2.4.1

Такой возврат энергии источнику происходит за счет того, что энергия периодически запасается в магнитных и электрических полях соответственно индуктивных и емкостных элементов, входящих в состав двухполюсника.

Энергия, отдаваемая источником двухполюснику в течение времени *t*, равна $\int\limits_0^t pdt$.

Среднее за период значение мгновенной мощности называется **активной мощностью** $P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt \,(Вт)$.

Принимая во внимание, что $\int_0^T cos(2\omega t - \varphi)dt = 0$, из соотношения выражения (2.4.3) получим

$$P = UI\cos\varphi. \qquad (2.4.4)$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию), поэтому $\cos\varphi \geq 0$, т.е. на входе пассивного двухполюсника $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Случай $P=0$, $\varphi = \left|\frac{\pi}{2}\right|$ теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

Резистор (идеальное активное сопротивление)

Здесь напряжение и ток (см. рис. 2.4.2) совпадают по фазе $(\varphi = 0)$, поэтому мощность $p = ui$ всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность $P = UI\cos\phi = |\cos 0 = 1| = UI = = RI^2 = \frac{U^2}{R}$.

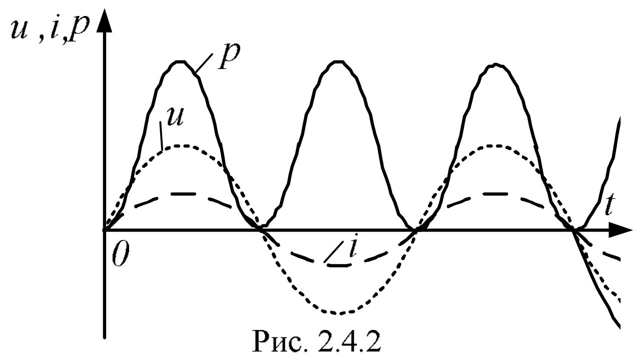


Рис. 2.4.2

Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)

При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому в

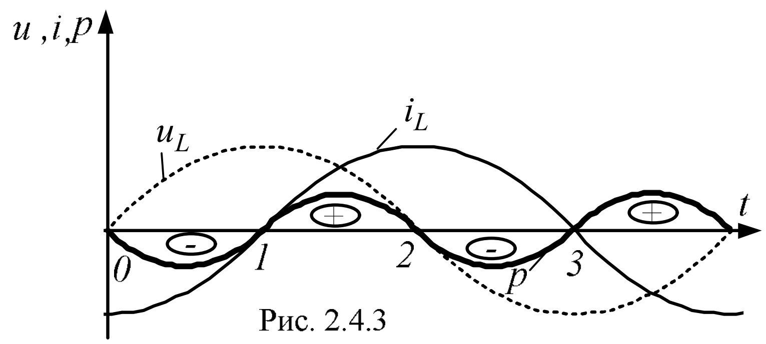


Рис. 2.4.3

соответствии с (2.4.3) можно записать

$$p = U_L I_L \cos\frac{\pi}{2} - U_L I_L \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_L I_L \sin 2\omega t.$$

Участок *1-2:* (рис. 2.4.3) энергия $\frac{Li^2}{2}$, запасаемая в магнитном поле катушки, нарастает.

Участок *2-3:* энергия магнитного поля убывает, возвращаясь в источник.

Конденсатор (идеальная емкость)

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости. Здесь $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Поэтому из (2.4.3) вытекает, что $p = U_C I_C \sin 2\omega t$.

Таким образом, в катушке индуктивности и конденсаторе активная мощность не потребляется ($P=0$), так как в них не происходит необратимого преобразования энергии в другие виды энергии. Здесь происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в магнитном поле катушки или электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода, а на протяжении следующей четверти периода энергия вновь возвращается в сеть. В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления X_L и X_C, в отличие от активного сопротивления R резистора, – реактивными.

Интенсивность обмена энергии принято характеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в магнитное поле катушки или электрическое поле конденсатора, которое называется **реактивной мощностью**.

В общем случае выражение для реактивной мощности имеет вид

$$Q = UI \sin\varphi. \qquad (2.4.5)$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка – $\varphi > 0$) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка – $\varphi < 0$). Единицу мощности в применении к измерению реактивной мощности называют **вольт-ампер реактивный** *(ВАр)*.

В частности, для катушки индуктивности имеем

$$Q_L = UI \sin\varphi = UI, \text{ так как } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_L = UI = \omega L I^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega\left[\frac{L I_m^2}{2}\right].$$

Из последнего видно, что реактивная мощность для идеальной катушки индуктивности пропорциональна частоте и максимальному запасу энергии в катушке. Аналогично можно получить для идеального конденсатора

$$|Q_C| = \omega\left[\frac{CI_m^2}{2}\right].$$

Полная мощность

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие **полной мощности,** *ВА*:

$$S = UI. \qquad (2.4.6)$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \qquad (2.4.7)$$

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности. Из приведенных выше соотношений видно, что **коэффициент мощности** $cos\varphi$ равен косинусу угла сдвига между током и напряжением. Итак,

$$cos\varphi = \frac{P}{S}. \qquad (2.4.8)$$

Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$, а $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$. Тогда комплекс полной мощности

$$\underline{S} = \dot{U}\overset{\times}{I}, \qquad (2.4.9)$$

где $\overset{\times}{I}$ – комплекс, сопряженный с комплексом $\dot{I}$.

$$\underline{S} = \dot{U}\overset{\times}{I} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\phi} = |\phi = \psi_u - \psi_i| =$$
$$= UI\,cos\phi + jUI\,sin\phi = P + jQ.$$

Комплексной мощности можно поставить в соответствие **треугольник мощностей** (см. рис. 2.4.4). Рис. 2.4.4 соответствует $cos\varphi > 0$ (активно-индуктивная нагрузка), для которого имеем

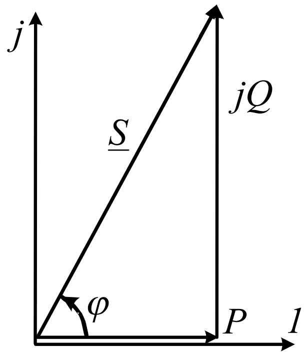


Рис 2.4.4

$$\underline{Z} = R + jX;\ \dot{U} = \underline{Z}I;\quad \underline{S} = \dot{U}\overset{\times}{I} = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2.$$

Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии и может служить критерием правильности расчета электрической цепи.

а) Постоянный ток.

Для любой цепи постоянного тока выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} E_k I_k \ . \qquad (2.4.10)$$

Это уравнение представляет собой математическую форму записи баланса мощностей: суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи.

Следует указать, что в левой части (2.4.10) слагаемые имеют знак “+”, поскольку активная мощность рассеивается на резисторах. В правой части (2.4.10) сумма слагаемых больше нуля, но отдельные члены здесь могут иметь знак “-”, что говорит о том, что соответствующие источники работают в режиме потребителей энергии (например, заряд аккумулятора).

б) Переменный ток.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма всех отдаваемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых активных мощностей, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} E_k I_k \cos\varphi_{kг(\,генератора\,)} \ . \qquad (2.4.11)$$

В ТОЭ доказывается (вследствие достаточной громоздкости вывода это доказательство опустим), что баланс соблюдается и для реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^{n} \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} E_k I_k \sin\varphi_{kг} \ , \qquad (2.4.12)$$

где знак “+” относится к индуктивным элементам $\left(X = \omega L\right)$, “-” – к емкостным $\left(X_c = 1/(\omega C)\right)$.

Умножив уравнение (2.4.12) на “*j*” и сложив полученный результат с (2.4.11), придем к аналитическому выражению баланса мощностей в цепях синусоидального тока (без учета взаимной индуктивности):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(R_k \pm jX_k\right)I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} E_k I_k\left(\cos\varphi_{kг} + j\sin\varphi_{kг}\right) = \sum_{k=1}^{n} E_k I_k e^{j\varphi_{kг}}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k \overset{\times}{I}_k \ .$$

2.5. ВЕКТОРНЫЕ И ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

Совокупность радиус-векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения, токи и т. д., называется **векторной диаграммой.** Векторные диаграммы наглядно иллюстрируют ход решения задачи. При точном построении векторов можно непосредственно из диаграммы определить амплитуды и фазы искомых величин. Приближенное (качественное) построение диаграмм при аналитическом решении служит надежным контролем корректности хода решения и позволяет легко определить квадрант, в котором находятся определяемые векторы.

При построении векторных диаграмм для цепей с последовательным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принимать вектор тока, а к нему под соответствующими углами подстраивать векторы напряжений на отдельных элементах. Для цепей с параллельным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принять вектор напряжения, ориентируя относительно него векторы токов в параллельных ветвях.

Для наглядного определения величины и фазы напряжения между различными точками электрической цепи удобно использовать **топографические диаграммы.** Они представляют собой соединенные соответственно схеме электрической цепи точки на комплексной плоскости, отображающие их потенциалы. На топографической диаграмме, представляющей собой, в принципе, векторную диаграмму, порядок расположения векторов напряжений строго соответствует порядку расположения элементов в схеме, а вектор падения напряжения на каждом последующем элементе примыкает к концу вектора напряжения на каждом предыдущем элементе.

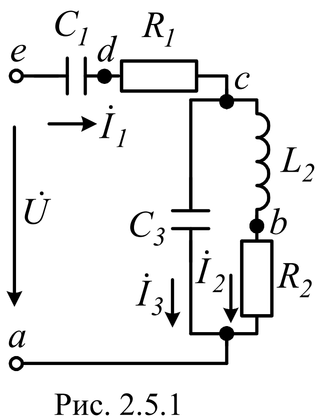


Рис. 2.5.1

В качестве примера построим векторную диаграмму токов, а также топографическую диаграмму потенциалов для схемы на рис. 2.2.32.

Параметры схемы: $X_{C1} = 100$ Ом; $X_{L2} = X_{c3} = 50$ Ом; $R_1 = 25$ Ом; $R_2 = 20$ Ом.

При данных параметрах и заданном напряжении на входе схемы $\dot{U} = 120e^{j0}\ B$ найденные значения токов (см. расчет цепи на рис. 2.2.32) равны: $\dot{I}_1 = 0{,}4 + j0{,}4\ (A)$; $\dot{I}_2 = 1 - j\ (A)$; $\dot{I}_3 = -0{,}6 + j1{,}4\ (A)$.

При построении векторной диаграммы зададимся масштабами токов и напряжений (рис. 2.5.2). Векторную диаграмму можно строить, имея запись комплекса в показательной форме, т.е. по значениям модуля и фазы. Однако на практике удобнее проводить построения, используя алгебраическую форму записи, поскольку при этом вещественная и мнимая составляющие комплексной величины непосредственно откладываются на соответствующих осях комплексной плоскости, определяя положение точки на ней.

Построение векторной диаграммы токов осуществляется непосредственно на основании известных значений их комплексов. Для построения топографической диаграммы предварительно осуществим расчет комплексных потенциалов (другой вариант построения топографической диаграммы предполагает расчет комплексов напряжений на элементах цепи с последующим суммированием векторов напряжений вдоль контура непосредственно на комплексной плоскости).

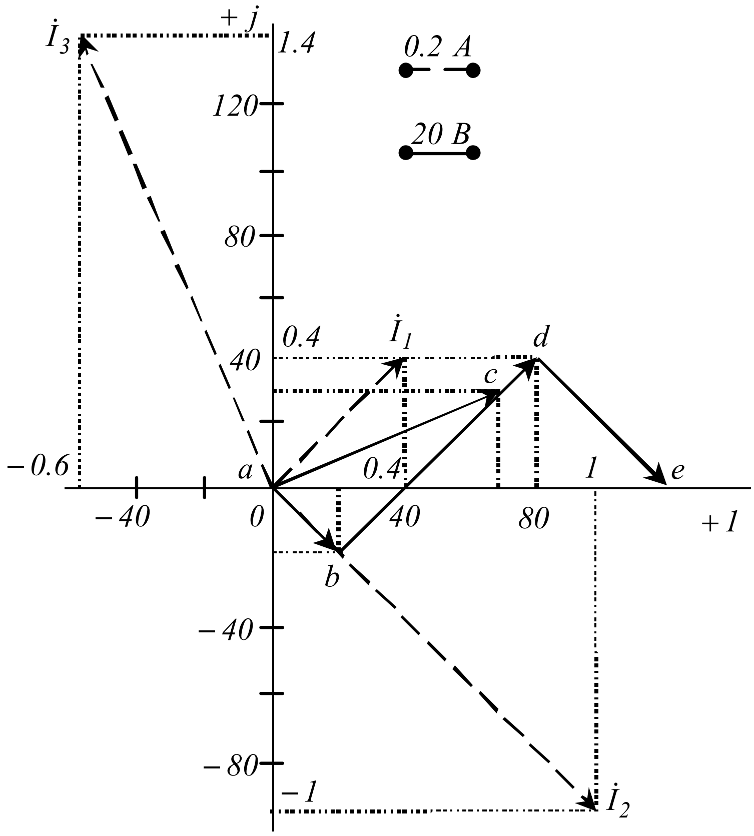


Рис. 2.5.2

При построении топографической диаграммы обход контуров можно производить по направлению тока или против. Чаще используют второй вариант. В этом случае с учетом того, что в электротехнике принято, что ток течет от большего потенциала к меньшему, потенциал искомой точки равен потенциалу предыдущей плюс падение напряжения на элементе между этими точками. Если на пути обхода встречается источник ЭДС, то потенциал искомой точки будет равен потенциалу предыдущей плюс величина этой ЭДС, если направление обхода совпадает с направлением ЭДС, и минус величина ЭДС, если не совпадает. Это следует из того, что напряжение на источнике ЭДС имеет направление, противоположное ЭДС.

Обозначив на схеме по рис. 2.5.1 точки между элементами цепи $a...e$ и приняв потенциал точки a за нуль ($\dot{\varphi}_a = 0$), определим потенциалы этих точек:

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a + \dot{I}_2 R_2 = 0 + (1 - j) \cdot 20 = 20 - j20\,(B);$$

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_b + jX_{L2}\dot{I}_2 = 20 - j20 + (1 - j) \cdot j50 = 70 + j30\,(B)$$

или

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_a - jX_{C3}\dot{I}_3 = 0 - j50(-0{,}6 + j1{,}4) = 70 + j30\,(B);$$

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_1 R_1 = 70 + j30 + (0{,}4 + j0{,}4) \cdot 25 = 80 + j40\,(B);$$

$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_d - jX_{C1}\dot{I}_1 = 80 + j40 - j40(0{,}4 + j0{,}4) = 120\,(B).$$

Таким образом, в результате проведенных вычислений получено, что $\dot{\varphi}_e - \dot{\varphi}_a = 120\ B$. Но разность потенциалов точек e и a равна напряжению U, приложенному к цепи, а оно равно $120\ B$. Таким образом, второй закон Кирхгофа выполняется, а следовательно, вычисления выполнены верно. В соответствии с полученными результатами строится топографическая диаграмма на рис. 2.5.2. Следует обратить внимание на ориентацию векторов, составляющих топографическую диаграмму, относительно векторов тока: для резистивных элементов соответствующие векторы параллельны, для индуктивного и емкостных – ортогональны.

В заключение заметим, что векторы напряжений ориентированы относительно точек топографической диаграммы противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек электрической цепи. В этой связи допускается не указывать на топографической диаграмме направления векторов напряжений.

2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Для упрощения расчета и повышения наглядности анализа сложных электрических цепей во многих случаях рационально подвергнуть их предварительному преобразованию. Очевидно, что преобразование должно приводить к упрощению исходной схемы за счет уменьшения числа ее ветвей и (или) узлов. Такое преобразование называется **целесообразным.** При этом при любых способах преобразований должно выполняться условие неизменности токов в ветвях участков схемы, не затронутых этими преобразованиями. Значит, если преобразованию подвергаются участки цепи, не содержащие источников энергии, то мощности в исходной и эквивалентной схемах одинаковы. Если в преобразуемые участки входят источники энергии, то в общем случае мощности в исходной и преобразованной цепях будут различны.

Рассмотрим наиболее важные случаи преобразования электрических цепей.

Преобразование последовательно соединенных элементов.

Рассмотрим участок цепи на рис. 2.6.1,а. При расчете внешней по отношению к этому участку цепи данную ветвь можно свести к виду на рис. 2.6.1,б, где

$$\underline{Z}_э = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \tag{2.6.1}$$

и

$$\dot{E} = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k . \tag{2.6.2}$$

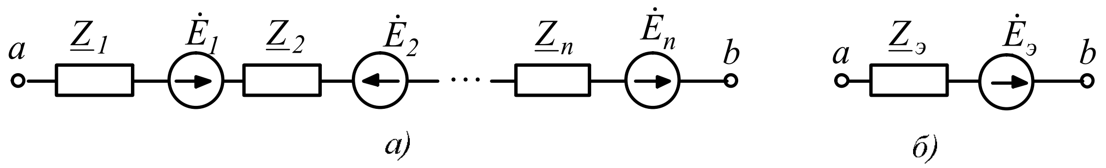


Рис. 2.6.1

При этом при вычислении эквивалентной ЭДС $\dot{E}_k$ k-я ЭДС берется со знаком “+”, если ее направление совпадает с направлением эквивалентной ЭДС, и “-”, если не совпадает.

Преобразование параллельно соединенных ветвей.

Пусть имеем схему на рис. 2.6.2,а.

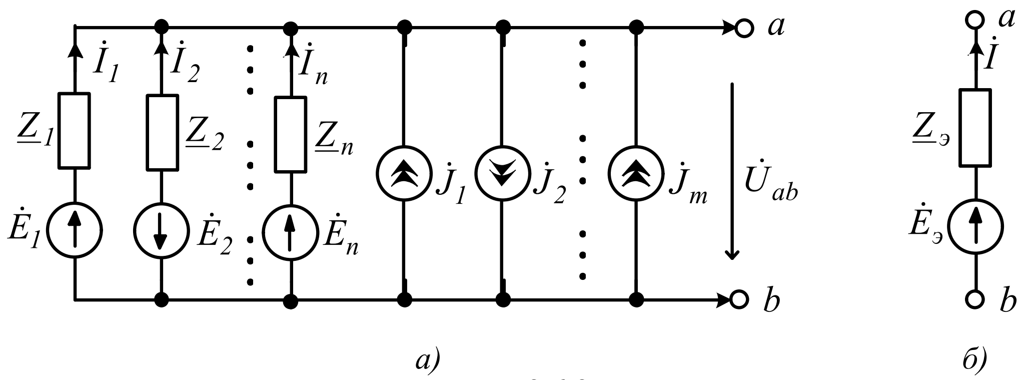


Рис. 2.6.2

Согласно закону Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\dot{I}_k = \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_k ,$$

где $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$.

Тогда

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^{m} \dot{J}_i = \dot{E}_э \underline{Y}_э - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_э ,$$

где $\quad \underline{Y}_э = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_э\,;$ (2.6.3)

$$\dot{E}_э = \frac{\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^{m} \dot{J}_i}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}, \tag{2.6.4}$$

причем со знаком “+” в (2.6.4) записываются ЭДС $\dot{E}_k$ и ток $\dot{J}_i$, если они направлены к тому же узлу, что и ЭДС $\dot{E}_э$; в противном случае они записываются со знаком “-”.

Взаимные преобразования “треугольник-звезда”.

В ряде случаев могут встретиться схемы, соединения в которых нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному типу (см. рис. 2.6.3). В таких случаях преобразования носят более сложный характер: преобразование треугольника в звезду и наоборот.

Преобразовать треугольник в звезду – значит заменить три сопротивления, соединенных в треугольник между какими-то тремя узлами, другими тремя сопротивлениями, соединенными в звезду между теми же точками. При этом на участках схемы, не затронутых этими преобразованиями, токи должны остаться неизменными.

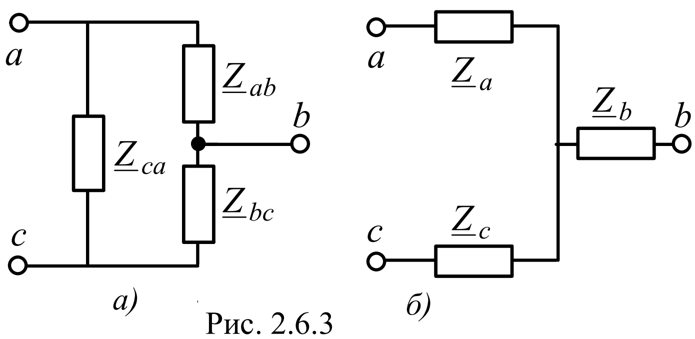


Рис. 2.6.3

Без вывода запишем формулы эквивалентных преобразований:

Треугольник → звезда

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$
$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \tag{2.6.5}$$
$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

Звезда → треугольник

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c};$$
$$\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b\underline{Z}_c}{\underline{Z}_a}; \tag{2.6.6}$$
$$\underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_c + \underline{Z}_a + \frac{\underline{Z}_c\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}.$$

2.7. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Электрические цепи могут содержать элементы, индуктивно связанные друг с другом. Такие элементы могут связывать цепи, электрически (гальванически) разделенные друг от друга.

В том случае, когда изменение тока в одном из элементов цепи приводит к появлению ЭДС в другом элементе цепи, говорят, что эти два элемента **индуктивно связаны**, а возникающую ЭДС называют **ЭДС взаимной индукции**. Степень индуктивной связи элементов характеризуется коэффициентом связи

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \qquad (2.7.1)$$

где M – взаимная индуктивность элементов цепи (размерность – Гн); L_1 и L_2 –собственные индуктивности этих элементов.

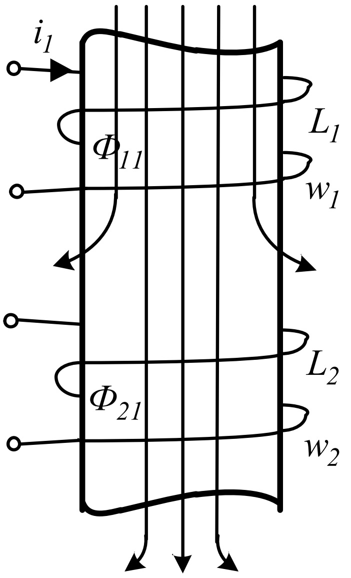


Рис. 2.7.1

Следует отметить, что всегда $\kappa<1$.

Пусть имеем две соосные катушки в общем случае с ферромагнитным сердечником (см. рис. 2.7.1). На рис. 2.7.1 схематично показана картина магнитного поля при наличии тока i_1 в первой катушке (направление силовых линий магнитного потока определяется по правилу правого буравчика). Витки первой катушки сцеплены с **магнитным потоком самоиндукции** Φ_{11} , а витки второй катушки – с **магнитным потоком взаимной индукции** Φ_{21}, который отличается от Φ_{11} ($\Phi_{21}< \Phi_{11}$) за счет потоков рассеяния.

По определению

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1}; \qquad (2.7.2)$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1}. \qquad (2.7.3)$$

Если теперь, наоборот, пропустить ток i_2 по второй катушке, то соответственно получим

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2}; \qquad (2.7.4)$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2}. \qquad (2.7.5)$$

При этом

$$M_{12} = M_{21} = M. \qquad (2.7.6)$$

Следует отметить, что коэффициент связи мог бы быть равным 1, если бы $\Phi_{11} = \Phi_{21}$ и $\Phi_{22} = \Phi_{12}$, то есть когда весь поток, создаваемый одной катушкой, полностью пронизывал бы витки другой катушки. Практически даже различные витки одной и той же катушки пронизываются разными потоками. Поэтому с учетом рассеяния $\Phi_{11} > \Phi_{21}$ и $\Phi_{22} > \Phi_{12}$. В этой связи

$$\kappa^2 = \frac{\dfrac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} \cdot \dfrac{w_1 \Phi_{12}}{i_2}}{\dfrac{w_1 \Phi_{11}}{i_1} \cdot \dfrac{w_2 \Phi_{22}}{i_2}} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}} < 1.$$

Рассмотрим цепь переменного тока на рис. 2.7.2, в которую последовательно включены две катушки индуктивности L_1 и L_2, индуктивно связанные друг с другом, и резистор R.

При изменении тока i в цепи в катушках индуцируются ЭДС само- и взаимоиндукции. При этом ЭДС взаимной индукции должна по закону Ленца иметь такое направление, чтобы препятствовать изменению потока взаимной индукции.

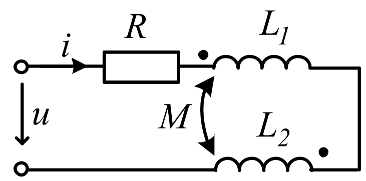


Рис. 2.7.2

Тогда, если в цепи протекает гармонически изменяющийся ток $i = I_m \sin \omega t$, то в первой катушке индуцируется ЭДС

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -(\omega L_1 + \omega M) I_m \cos \omega t, \qquad (2.7.7)$$

а во второй –

$$e_2 = -L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -(\omega L_2 + \omega M) I_m \cos \omega t. \qquad (2.7.8)$$

Катушки можно включить так, что ЭДС самоиндукции будет суммироваться с ЭДС взаимоиндукции; при переключении одной из катушек ЭДС взаимоиндукции будет вычитаться из ЭДС самоиндукции. Один из зажимов каждой катушки на схеме помечают, например, точкой или звездочкой. Этот знак означает, что при увеличении, например, тока в первой катушке, протекающего от точки, во второй катушке индуцируется ЭДС взаимоиндукции, действующая от другого конца к точке. Различают **согласное** и **встречное включения** катушек. При согласном включении токи в катушках одинаково ориентированы по отношению к их одноименным зажимам. При этом ЭДС само- и взаимоиндукции складываются – случай, показанный на рис. 2.7.2. При встречном включении катушек токи ориентированы относительно одноименных зажимов различно. В этом случае ЭДС само- и взаимоиндукции вычитаются. Таким образом, тип включения катушек (согласное или встречное) определяются совместно способом намотки катушек и направлением токов в них.

Перейдя к комплексной форме записи (2.7.7) и (2.7.8), получим

$$\dot{E}_1 = -j\omega L_1\dot{I} - j\omega M\dot{I} = -jX_{L1}\dot{I} - jX_M\dot{I} = \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{1M}; \qquad (2.7.9)$$

$$\dot{E}_2 = -j\omega L_2\dot{I} - j\omega M\dot{I} = -jX_{L2}\dot{I} - jX_M\dot{I} = \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{2M}, \qquad (2.7.10)$$

где $X_M = \omega M$ – сопротивление взаимоиндукции, Ом.

Для определения тока в цепи на рис. 2.7.2 запишем

$$\dot{U} + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{U} + \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{1M} + \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{2M} = \dot{U} - j\omega\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\dot{I} = R\dot{I},$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega\left(L_1 + L_2 + 2M\right)}.$$

Баланс мощностей в цепях с индуктивно связанными элементами

Пусть имеем схему на рис. 2.7.3, где A – некоторый активный четырехполюсник. Для данной цепи можно записать:

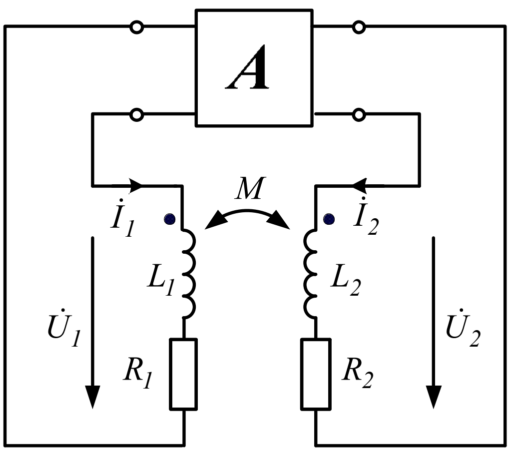


Рис. 2.7.3

$$\dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2;$$
$$\dot{U}_2 = R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + jX_M\dot{I}_1.$$

Обозначим токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ как $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$; $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$.

Тогда для комплексов полных мощностей первой и второй ветвей соответственно можно записать:

$$\underline{S}_1 = \dot{U}_1 \overset{\times}{I}_1 = R_1 \dot{I}_1 \overset{\times}{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \overset{\times}{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \overset{\times}{I}_1 = R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot{I}_2 \overset{\times}{I}_1 ;$$

$$\underline{S}_2 = \dot{U}_2 \overset{\times}{I}_2 = R_2 \dot{I}_2 \overset{\times}{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \overset{\times}{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \overset{\times}{I}_2 = R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot{I}_1 \overset{\times}{I}_2 .$$

Рассмотрим в этих уравнениях члены со взаимной индуктивностью:

$$\Delta\underline{S}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2 \overset{\times}{I}_1 = \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 + \psi_2\right)} = \omega M I_1 I_2 \left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right) + \right.$$

$$\left. + j\,sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right)\right] = \omega M I_1 I_2 \,sin\psi_{12} + j\omega M I_1 I_2 \,cos\psi_{12} = \Delta P_{1M} + j\Delta Q_{1M} ;$$

(2.7.11)

$$\Delta\underline{S}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1 \overset{\times}{I}_2 = \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right)} = \omega M I_1 I_2 \left[cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{12}\right) + \right.$$

$$\left. + j\,sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{12}\right)\right] = -\omega M I_1 I_2 \,sin\psi_{12} + j\omega M I_1 I_2 \,cos\psi_{12} = -\Delta P_{2M} + j\Delta Q_{2M} ,$$

(2.7.12)

где $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$.

Из (2.7.11) и (2.7.12) вытекает, что

$$\Delta P_{1M} = -\Delta P_{2M} ; \qquad (2.7.13)$$

$$\Delta Q_{1M} = \Delta Q_{2M} . \qquad (2.7.14)$$

Соотношение (2.7.13) показывает, что активная мощность передается от второй катушки к первой. При этом суммарная активная мощность, обусловленная взаимной индукцией, равна нулю, т.к. $\Delta P_{1M} + \Delta P_{2M} = 0$. Это означает, что на общий баланс активной мощности цепи индуктивно связанные элементы не влияют.

Суммарная реактивная мощность, обусловленная взаимоиндукцией,

$$\Delta Q_{12M} = \Delta Q_{1M} + \Delta Q_{2M} = 2\omega M I_1 I_2 \,cos\psi_{12} .$$

Таким образом, общее уравнение баланса мощностей с учетом индуктивно связанных элементов имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k \overset{\times}{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k I_k^2 \pm j2\omega \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij} I_i I_j \,cos\left(\dot{I}_i \widehat{\ } \dot{I}_j\right), \qquad (2.7.15)$$

где знак “+” ставится при согласном включении катушек, а “-” – при встречном.

Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности может быть осуществлен путем составления уравнений по законам Кирхгофа или методом контурных токов. Непосредственное применение метода узловых потенциалов для расчета таких цепей неприемлемо, поскольку в этом случае ток в ветви зависит также от токов других ветвей, которые наводят ЭДС взаимной индукции.

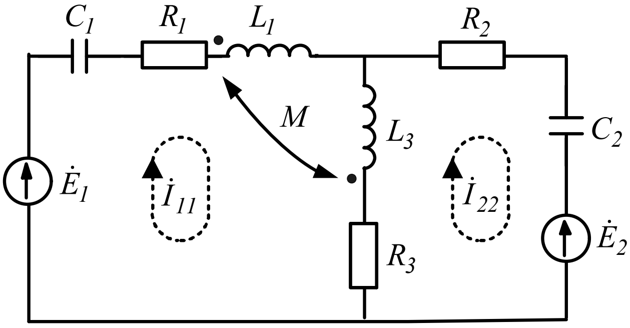


Рис. 2.7.4

В качестве примера расчета цепей с индуктивно связанными элементами составим контурные уравнения для цепи на рис. 2.7.4:

$$\dot{I}_{11}\left(R_1 - j\frac{1}{\omega C} + j\omega L_1 + j\omega L_3 + R_3 - j2\omega M\right) - \dot{I}_{22}\left(j\omega L_3 + R_3 - j\omega M\right) =$$

$$= \dot{E}_1;$$

$$-\dot{I}_{11}\left(j\omega L_3 + R_3 - j\omega M\right) + \dot{I}_{22}\left(j\omega L_3 + R_3 - j\frac{1}{\omega C} + R_2\right) = -\dot{E}_2.$$

Чтобы обойти указанное выше ограничение в отношении применения метода узловых потенциалов для расчета рассматриваемых схем можно использовать эквивалентные преобразования, которые иллюстрируют схемы на рис. 2.7.5, где цепь на рис. 2.7.5,б эквивалентна цепи на рис. 2.7.5,а. При этом верхние знаки ставятся при согласном включении катушек, а нижние – при встречном.

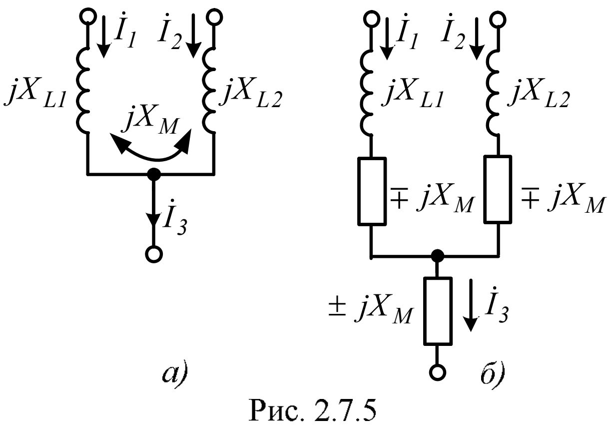


Рис. 2.7.5

Матрицы сопротивлений и проводимостей для цепей со взаимной индукцией

Как было показано ранее, для схем, не содержащих индуктивно связанные элементы, матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей являются диагональными, т.е. все их элементы, за исключением стоящих на главной диагонали, равны нулю.

В общем случае разветвленной цепи со взаимной индукцией матрица сопротивлений ветвей имеет вид

$$\underline{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 & \cdots & \underline{Z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} & \cdots & \underline{Z}_n \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы главной диагонали $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2, \ldots \underline{Z}_n$ – комплексные сопротивления ветвей схемы; элементы вне главной диагонали $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki} = \pm j\omega M_{ik}$ – комплексные сопротивления индуктивной связи i- й и k – й ветвей (знак “+” ставится при одинаковой ориентации ветвей относительно одноименных зажимов, в противном случае ставится знак “-”).

Матрица проводимостей ветвей в цепях со взаимной индукцией определяется согласно

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}.$$

Зная матрицы $\underline{\boldsymbol{Z}}$ и $\underline{\boldsymbol{Y}}$, можно составить контурные уравнения, а также узловые, т.е. в матричной форме метод узловых потенциалов распространяется на анализ цепей с индуктивно связанными элементами.

Следует отметить, что обычно не все ветви схемы индуктивно связаны между собой. В этом случае с помощью соответствующей нумерации ветвей графа матрице $\underline{\boldsymbol{Z}}$ целесообразно придать квазидиагональную форму

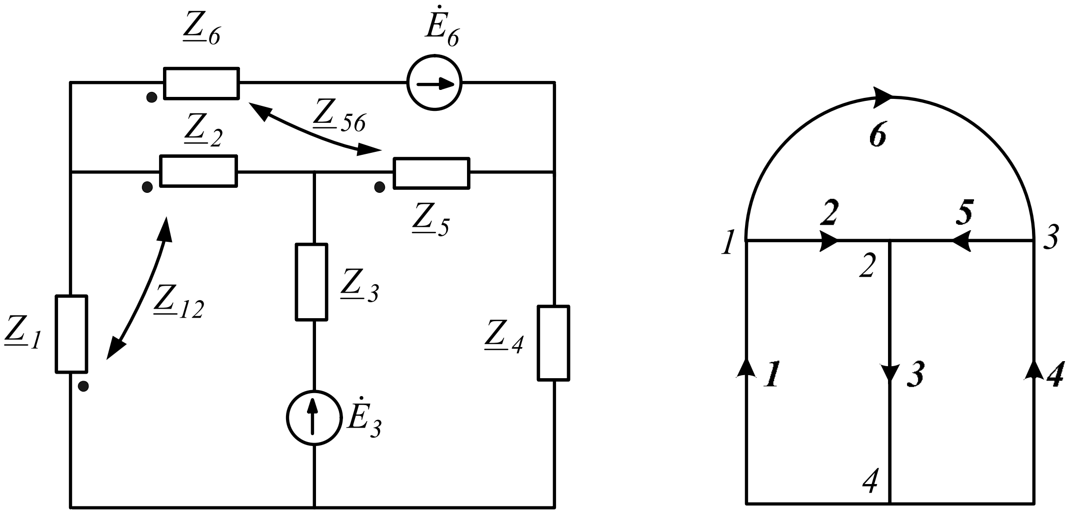
$$\underline{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Z}}_{11} & & & \\ & \underline{\boldsymbol{Z}}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\boldsymbol{Z}}_{nn} \end{bmatrix},$$

что облегчает ее обращение, поскольку

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Z}}_{11} & & & \\ & \underline{\boldsymbol{Z}}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\boldsymbol{Z}}_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{Z}}_{11}^{-1} & & & \\ & \underline{\boldsymbol{Z}}_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\boldsymbol{Z}}_{nn}^{-1} \end{bmatrix},$$

где подматрицы $\underline{\boldsymbol{Z}}_{11}, \underline{\boldsymbol{Z}}_{22}, \ldots, \underline{\boldsymbol{Z}}_{nn}$ могут быть квадратными диагональными или недиагональными.

В качестве примера составим матрицы $\underline{\boldsymbol{Z}}$ и $\underline{\boldsymbol{Y}}$ для схемы на рис. 2.7.6,а, граф которой приведен на рис. 2.7.6,б.



а) Рис. 2.7.6 б)

Для принятой нумерации ветвей матрица сопротивлений ветвей

$$\underline{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & & & & \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 & & & & \\ & & \underline{Z}_3 & & & \\ & & & \underline{Z}_4 & & \\ & & & & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_{56} \\ & & & & \underline{Z}_{65} & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

В этой матрице можно выделить три подматрицы, обращая которые, получим

$$\underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}{}_{11}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2-\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}\begin{bmatrix} \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_2 \end{bmatrix};$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}{}_{22}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & \\ & \underline{Z}_4 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_3 & \\ & \underline{Y}_4 \end{bmatrix};$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}^{-1}{}_{33}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_5 & \underline{Z}_{56} \\ \underline{Z}_{65} & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\underline{Z}_5\underline{Z}_6-\underline{Z}_{56}\underline{Z}_{65}}\begin{bmatrix} \underline{Z}_6 & -\underline{Z}_{56} \\ -\underline{Z}_{65} & \underline{Z}_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_5 & \underline{Y}_{56} \\ \underline{Y}_{65} & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица проводимостей ветвей

$$\underline{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_{12} & & & & \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_2 & & & & \\ & & \underline{Y}_3 & & & \\ & & & \underline{Y}_4 & & \\ & & & & \underline{Y}_5 & \underline{Y}_{56} \\ & & & & \underline{Y}_{65} & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при принятой ориентации ветвей $\underline{Z}_{12} = j\omega M_{12}$ и $\underline{Z}_{56} = -j\omega M_{56}$.

В качестве примера матричного расчета цепей с индуктивными связями запишем контурные уравнения в матричной форме для цепи на рис. 2.7.7,а.

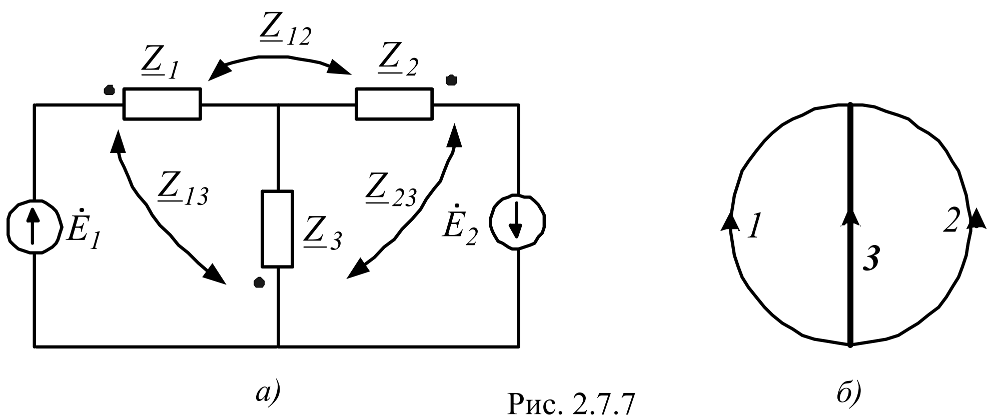


Рис. 2.7.7

Решение

1) Для заданной цепи составим граф (рис. 2.7.7,б), выделив в нем дерево, образованное ветвью *3*.

Тогда матрица главных контуров имеет вид

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2) Запишем матрицу сопротивлений ветвей с учетом их принятой ориентации

$$\underline{\boldsymbol{Z}}=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_3 \end{bmatrix}.$$

3) Определим матрицу контурных сопротивлений

$$\underline{Z}_k = B\underline{Z}B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 - \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{23} - \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{13} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{23} \end{bmatrix}.$$

4) Запишем столбцовую матрицу контурных ЭДС:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 & -\dot{E}_2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 \end{bmatrix}.$$

5) Подставив найденные выражения в $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{k}} \dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{k}} = \dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}$, окончательно получим

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{13} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 \end{bmatrix}.$$

2.8. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Отметим, что обычно эти ЭДС, в первую очередь в силовой энергетике, синусоидальны. Однако в современных электромеханических системах, где для управления исполнительными двигателями используются преобразователи частоты, система напряжений в общем случае является несинусоидальной. Каждую из частей многофазной системы, характеризующуюся одинаковым током, называют **фазой**, т.е. фаза – это участок цепи, относящийся к соответствующей обмотке генератора или трансформатора, линии и нагрузке.

Таким образом, понятие «фаза» имеет в электротехнике два различных значения:

- фаза как аргумент синусоидально изменяющейся величины;
- фаза как составная часть многофазной электрической системы.

Источником трехфазного напряжения является трехфазный генератор, на статоре которого (рис. 2.8.1) размещена трехфазная обмотка. Фазы этой обмотки располагаются таким образом, чтобы их магнитные оси были сдвинуты в пространстве друг относительно друга на $2\pi/3$ эл. рад. На рис. 2.8.1 каждая фаза статора условно показана в виде одного витка. Начала обмоток принято обозначать заглавными буквами *A,B,C*, а концы – соответственно строчными *x,y,z*. ЭДС в неподвижных обмотках статора индуцируются в результате пересечения их витков магнитным полем, создаваемым током обмотки

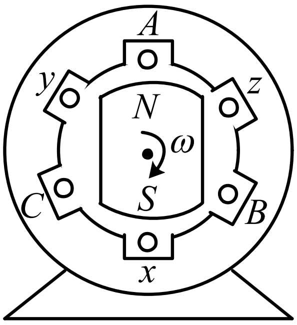


Рис. 2.8.1

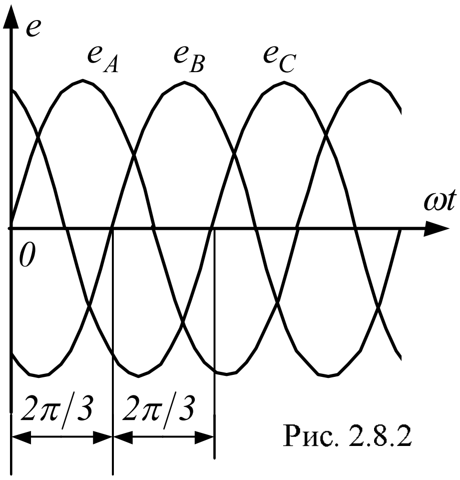


Рис. 2.8.2

возбуждения вращающегося ротора (на рис. 2.8.1 ротор условно изображен в виде постоянного магнита, что используется на практике при относительно небольших мощностях). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся вследствие пространственного сдвига друг от друга по фазе на $2\pi/3$ рад (рис. 2.8.2).

Система ЭДС (напряжений, токов и т.д.) называется **симметричной,** если она состоит из m одинаковых по модулю векторов ЭДС (напряжений, токов и т.д.), сдвинутых по фазе друг относительно друга на одинаковый угол $\alpha = 2\pi/m$. В частности, векторная диаграмма для симметричной системы ЭДС, соответствующей трехфазной системе синусоид на рис. 2.8.2, представлена на рис. 2.8.3.

Из несимметричных систем наибольший практический интерес представляет двухфазная система с 90-градусным сдвигом фаз (см. рис. 2.8.4).

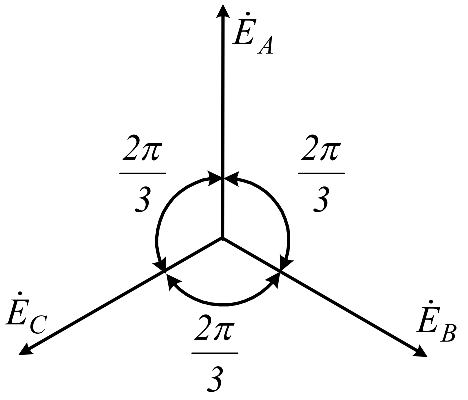


Рис. 2.8.3

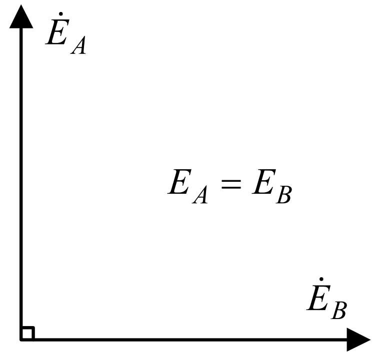


Рис. 2.8.4

Схемы соединения трехфазных систем

Трехфазный генератор (трансформатор) имеет три выходные обмотки, одинаковые по числу витков, но развивающие ЭДС, сдвинутые по фазе на 120^0. Можно было бы использовать систему, в которой фазы обмотки генератора не были бы гальванически соединены друг с другом. Это так называемая **несвязная система.** В этом случае каждую фазу генератора необходимо соединять с приемником двумя проводами, т.е. будет иметь место шестипроводная линия, что неэкономично. В этой связи подобные системы не получили широкого применения на практике.

Для уменьшения количества проводов в линии фазы генератора гальванически связывают между собой. Различают два вида соединений: **в звезду** и **в треугольник.** В свою очередь, при соединении в звезду система может быть **трех**- и **четырехпроводной**.

Соединение в звезду

На рис. 2.8.5 приведена трехфазная система при соединении фаз генератора и нагрузки в звезду. Здесь провода AA', BB' и CC' – линейные провода.

Линейным называется провод, соединяющий начала фаз обмотки генератора и приемника. Точка, в которой концы фаз соединяются в общий узел, называется **нейтральной** (на рис. 2.8.5 N и N' – соответственно нейтральные точки генератора и нагрузки).

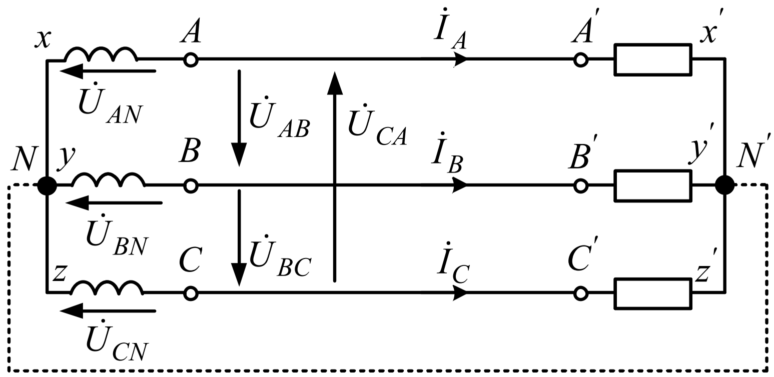


Рис. 2.8.5

Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется **нейтральным** (на рис. 2.8.5 показан пунктиром). Трехфазная система при соединении в звезду без нейтрального провода называется **трехпроводной,** с нейтральным проводом – **четырехпроводной.**

Все величины, относящиеся к фазам, носят название **фазных переменных,** к линии – **линейных.** Как видно из схемы на рис. 2.8.5, при соединении в звезду линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ равны соответствующим фазным токам. При наличии нейтрального провода ток в нейтральном проводе $\dot{I}_{N'N} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$. Если система фазных токов симметрична, то $\dot{I}_{N'N} = 0$. Следовательно, если бы симметрия токов была гарантирована, то нейтральный провод был бы не нужен. Как будет показано далее, нейтральный провод обеспечивает поддержание симметрии напряжений на нагрузке при несимметрии самой нагрузки.

Поскольку напряжение на источнике противоположно направлению его ЭДС, фазные напряжения генератора (рис. 2.8.5) действуют от точек *A,B* и *C* к нейтральной точке *N*; $U_{A'N'}, U_{B'N'}, U_{C'N'}$ – фазные напряжения нагрузки.

Линейные напряжения действуют между линейными проводами. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для линейных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN};$$
$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN};$$
$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN}.$$

Отметим, что всегда $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ – как сумма напряжений по замкнутому контуру.

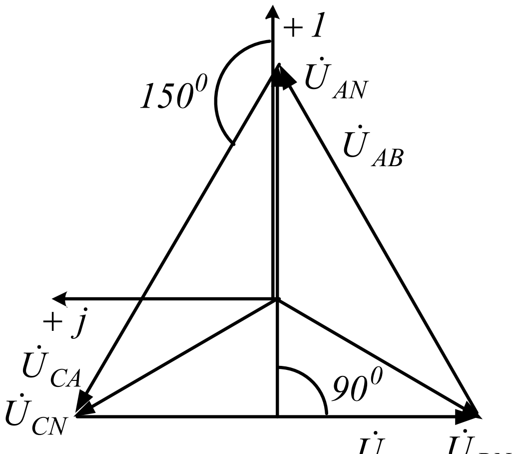


Рис. 2.8.6

На рис. 2.8.6 представлена векторная диаграмма для симметричной системы напряжений. Как показывает ее анализ (лучи фазных напряжений образуют стороны равнобедренных треугольников с углами при основании, равными 30^0), в этом случае

$$U_л = \sqrt{3} U_ф .$$

Обычно при расчетах принимается $\dot U_{AN} = U_ф e^{j0} = U_ф$. Тогда для случая **прямого чередования фаз** $\dot U_{BN} = U_ф e^{-j120^0}$, $\dot U_{CN} = U_ф e^{-j240^0} = U_ф e^{j120^0}$ (при **обратном чередовании фаз** фазовые сдвиги у $\dot U_{BN}$ и $\dot U_{CN}$ меняются местами). С учетом этого на основании приведенных выше соотношений могут быть определены комплексы линейных напряжений. Однако при симметрии напряжений эти величины легко определяются непосредственно из векторной диаграммы на рис. 2.8.6. Направляя вещественную ось системы координат по вектору $\dot U_{AN}$ (его начальная фаза равна нулю), отсчитываем фазовые сдвиги линейных напряжений по отношению к этой оси. Так, для линейных напряжений $\dot U_{BC}$ и $\dot U_{CA}$ получаем $\dot U_{BC} = \sqrt{3} U_ф e^{-j90^0}$; $\dot U_{CA} = \sqrt{3} U_ф e^{j150^0}$.

Соединение в треугольник

В связи с тем, что значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывает несимметричной, очень важно на практике, например в схемах с осветительными приборами, обеспечивать независимость режимов работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной, подобными свойствами обладают и трехпроводные цепи при соединении фаз приемника в треугольник. Но в треугольник также можно соединить и фазы генератора (рис. 2.8.7).

Для симметричной системы ЭДС имеем

$$\dot E_A + \dot E_B + \dot E_C = 0 .$$

Таким образом, при отсутствии нагрузки в фазах генератора в схеме на рис. 2.8.7 токи будут равны нулю. Однако если поменять местами начало и конец любой из фаз, то $\sum \dot E \neq 0$ и в треугольнике будет протекать ток короткого замыкания. Следовательно, для треугольника нужно строго соблюдать порядок соединения фаз: начало одной фазы соединяется с концом другой.

Схема соединения фаз генератора и приемника в треугольник представлена на рис. 2.8.8.

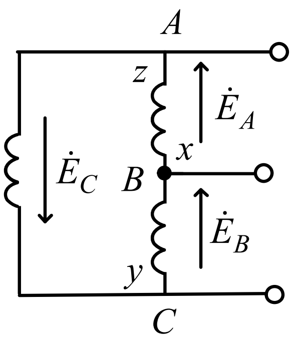


Рис. 2.8.7

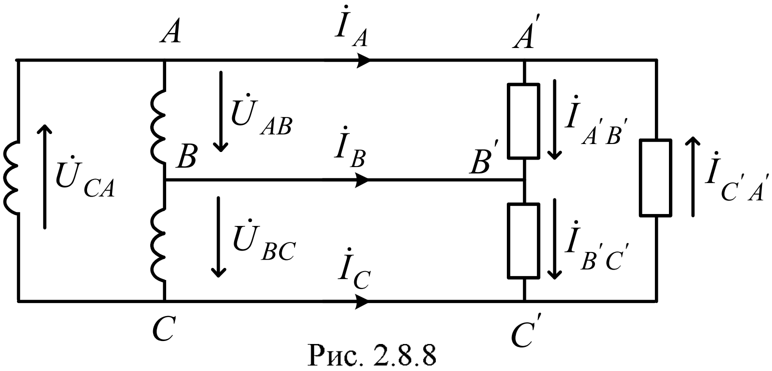


Рис. 2.8.8

Очевидно, что при соединении в треугольник линейные напряжения равны соответствующим фазным. По первому закону Кирхгофа связь между линейными и фазными токами приемника определяется соотношениями

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'}.$$

Аналогично можно выразить линейные токи через фазные токи генератора.

На рис. 2.8.9 представлена векторная диаграмма симметричной системы линейных и фазных токов.

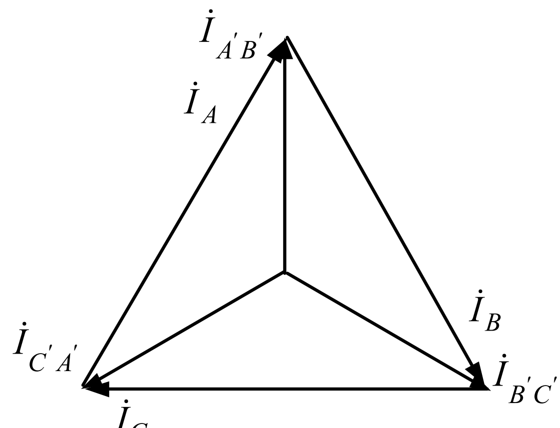


Рис. 2.8.9

Ее анализ показывает, что при симметрии токов

$$I_л = \sqrt{3} I_ф.$$

В заключение отметим, что помимо рассмотренных соединений «звезда – звезда» и «треугольник – треугольник» на практике также применяются схемы «звезда – треугольник» и «треугольник – звезда».

Расчет трехфазных цепей

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и, следовательно, все рассмотренные ранее методы расчета и анализа в символической форме в полной мере распространяются на них. Анализ трехфазных систем удобно осуществлять с использованием векторных диаграмм, позволяющих достаточно просто определять фазовые сдвиги между переменными. Однако определенная специфика многофазных цепей вносит характерные особенности в их расчет, что, в первую очередь, касается анализа их работы в симметричных режимах.

Расчет симметричных режимов работы трехфазных систем

Многофазный приемник и вообще многофазная цепь называются **симметричными,** если в них комплексные сопротивления соответствующих фаз одинаковы, т.е. если $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$. В противном случае они являются **несимметричными**. Равенство модулей указанных сопротивлений не является достаточным условием симметрии цепи. Так, например, трехфазный приемник на рис. 2.8.10,а является симметричным, а на рис. 2.8.10,б – нет даже при условии $R = X_L = X_C$.

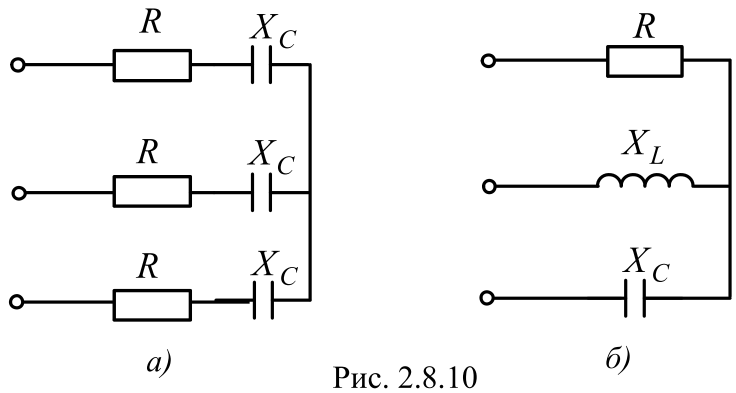


Рис. 2.8.10

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная трехфазная система напряжений генератора, то в ней будет иметь место симметричная система токов. Такой режим работы трехфазной цепи называется **симметричным**. В этом режиме токи и напряжения соответствующих фаз равны по модулю и сдвинуты по фазе друг по отношению к другу на угол $\pm 2\pi/3$. Вследствие указанного расчет таких цепей проводится для одной – **базовой** – фазы, в качестве которой обычно принимают фазу A. При этом соответствующие величины в других фазах получают формальным добавлением к аргументу переменной фазы A фазового сдвига $\pm 2\pi/3$ при сохранении неизменным ее модуля.

Так, для симметричного режима работы цепи на рис. 2.8.11,а при известных линейном напряжении и сопротивлениях фаз $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}$ можно записать

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = Ie^{j\varphi},$$

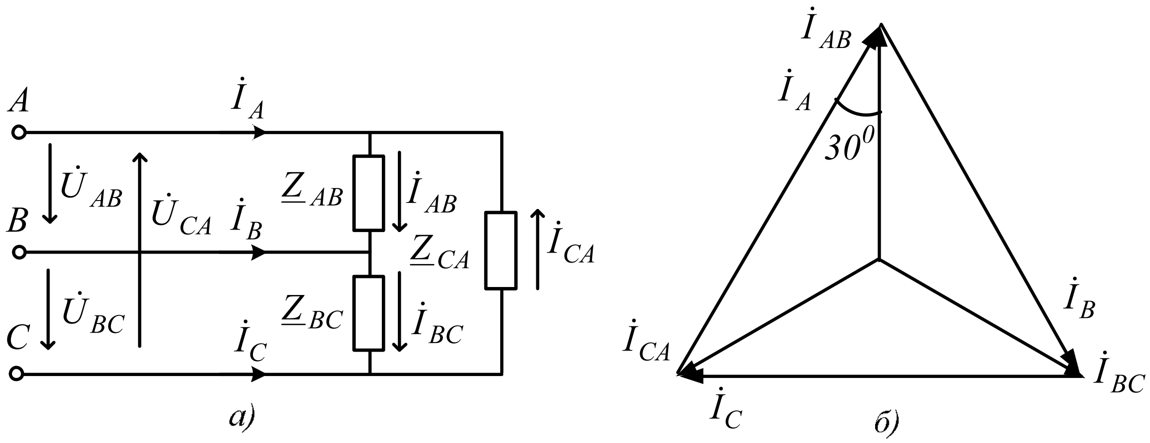


Рис. 2.8.11

где φ определяется характером нагрузки $\underline{Z}$.

Тогда на основании вышесказанного

$$\dot I_{BC} = \dot I_{AB} e^{-j120^0} = Ie^{j\left(\varphi - 120^0\right)};$$
$$\dot I_{CA} = \dot I_{AB} e^{j120^0} = Ie^{j\left(\varphi + 120^0\right)}.$$

Комплексы линейных токов можно найти с использованием векторной диаграммы на рис. 2.8.11,б, из которой вытекает:

$$\dot I_A = \sqrt{3}\dot I_{AB} e^{-j30^0} = \sqrt{3} Ie^{j\left(\varphi - 30^0\right)};$$
$$\dot I_B = \dot I_A e^{-j120^0} = \sqrt{3} Ie^{j\left(\varphi - 150^0\right)};$$
$$\dot I_C = \dot I_A e^{j120^0} = \sqrt{3} Ie^{j\left(\varphi + 90^0\right)}.$$

При анализе сложных схем, работающих в симметричном режиме, расчет осуществляется с помощью двух основных приемов:

1. Все треугольники заменяются эквивалентными звездами. Поскольку треугольники симметричны, то в соответствии с формулами преобразования «треугольник-звезда» $\underline{Z}_{\perp} = Z_{\Delta}/3$.

2. Так как все исходные и вновь полученные звезды нагрузки симметричны, то потенциалы их нейтральных точек одинаковы. Следовательно, без изменения режима работы цепи их можно (мысленно) соединить нейтральным проводом. После этого из схемы выделяется базовая фаза (обычно фаза *A*), для которой и осуществляется расчет, по результатам которого определяются соответствующие величины в других фазах.

Пусть, например, при заданном фазном напряжении $U_ф$ необходимо определить линейные токи $\dot I_A, \dot I_B$ и $\dot I_C$ в схеме на рис. 2.8.12, все сопротивления в которой известны.

В соответствии с указанной методикой выделим расчетную фазу A, которая представлена на рис. 2.8.13. Здесь $\dot{E}_A = U_ф$, $\underline{Z}'_4 = \underline{Z}_4/3$; $\underline{Z}'_6 = \underline{Z}_6/3$.

Тогда для тока $\dot{I}_A$ можно записать

$$\dot{I}_A = \frac{U_ф}{\underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3(\underline{Z}_4/3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3) + \underline{Z}_2\underline{Z}_4(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3)/3}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_4/3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3) + \underline{Z}_4(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3)/3}},$$

и соответственно $\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^0}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^0}$.

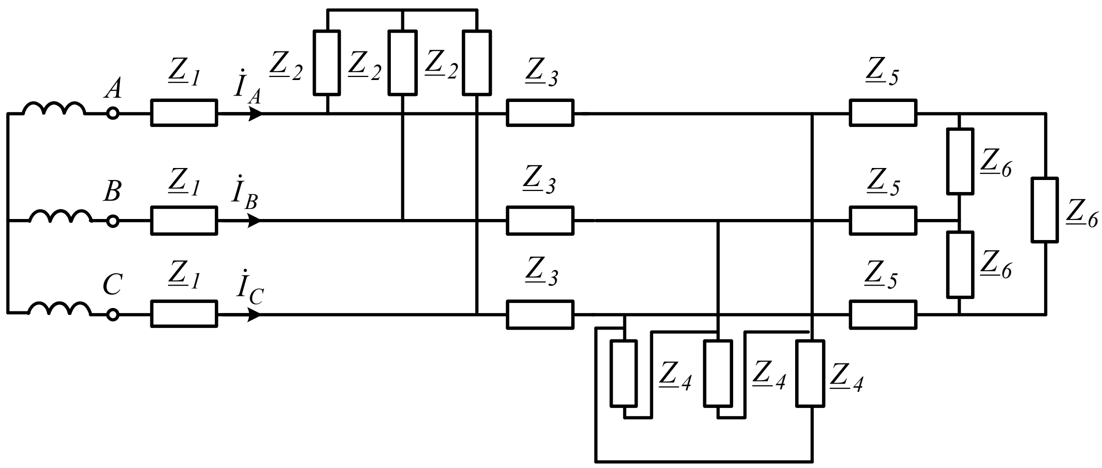


Рис. 2.8.12

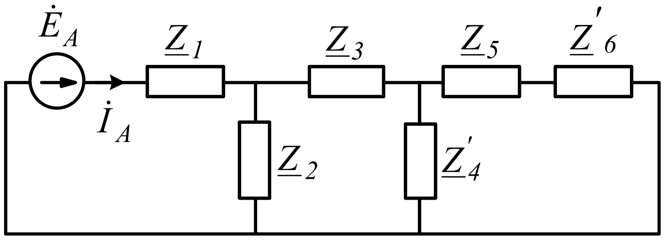


Рис. 2.8.13

Расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем

Если хотя бы одно из условий симметрии не выполняется, в трехфазной цепи имеет место несимметричный режим работы. Такие режимы при наличии в цепи только статической нагрузки и пренебрежении падением напряжения в генераторе рассчитываются для всей цепи в целом любым из рассмотренных ранее методов расчета. При этом фазные напряжения генератора заменяются соответствующими источниками ЭДС. Можно отметить, что, поскольку в многофазных цепях помимо токов обычно представляют интерес также потенциалы узлов, чаще других для расчета сложных схем применяется метод узловых потенциалов. Для анализа несимметричных режимов работы трехфазных цепей с электрическими машинами в основном применяется метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен далее.

При заданных линейных напряжениях наиболее просто рассчитываются трехфазные цепи при соединении в треугольник. Пусть в схеме на рис. 2.8.11,а $\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA}$. Тогда при известных комплексах линейных напряжений в соответствии с законом Ома

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \;\; \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \;\; \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}.$$

По найденным фазным токам приемника на основании первого закона Кирхгофа определяются линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \;\; \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \;\; \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Обычно на практике известны не комплексы линейных напряжений, а их модули. В этом случае необходимо предварительное определение начальных фаз этих напряжений, что можно осуществить, например, графически. Для этого, приняв $\dot{U}_{AB} = U_{AB} e^{j0}$, по заданным модулям напряжений строим треугольник (рис. 2.8.14), из которого (путем замера) определяем значения углов α и β.

Тогда

$$\dot{U}_{BC} = U_{BC} e^{-j(\pi-\beta)};$$

$$\dot{U}_{CA} = U_{CA} e^{j(\pi-\alpha)}.$$

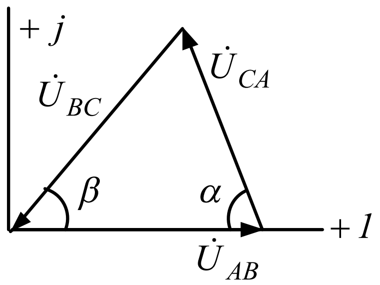


Рис. 2.8.14

Искомые углы α и β могут быть также найдены аналитически на основании теоремы косинусов:

$$U_{BC}^2 = U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - 2U_{AB}U_{CA} \cos\alpha;$$

$$U_{CA}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - 2U_{AB}U_{BC} \cos\beta.$$

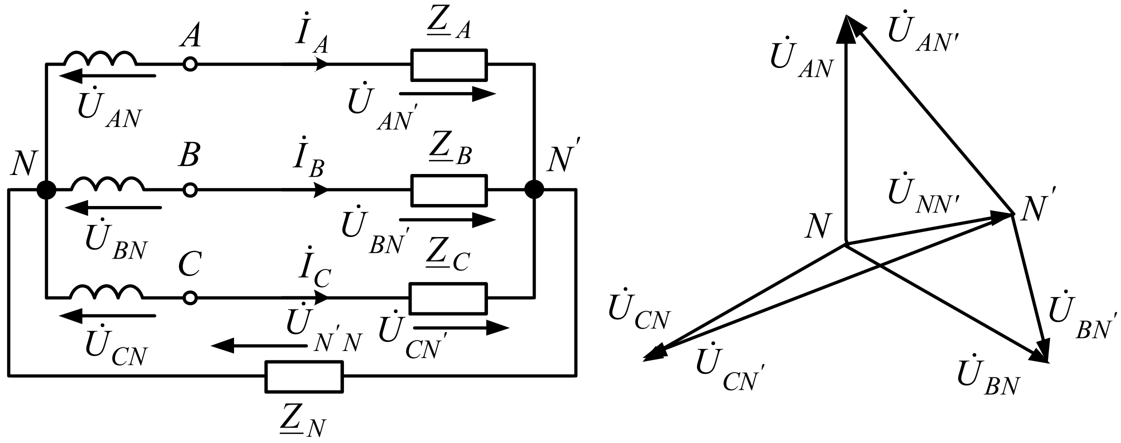
При соединении фаз генератора и нагрузки в звезду и наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением фазные напряжения нагрузки равны соответствующим напряжениям на фазах источника. В этом случае фазные токи легко определяются по закону Ома, т.е. путем деления известных напряжений на фазах потребителя на соответствующие сопротивления. Однако если сопротивление нейтрального провода велико или он отсутствует, требуется более сложный расчет.

Рассмотрим трехфазную цепь на рис. 2.8.15,а. При симметричном питании и несимметричной нагрузке $(\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C)$ ей в общем случае будет соответствовать векторная диаграмма напряжений (рис. 2.8.15,б), на которой нейтральные точки источника и приемника занимают разные положения, т.е. $\dot{\varphi}_N \neq \dot{\varphi}_N'$.

Разность потенциалов нейтральных точек генератора и нагрузки называется **напряжением смещения нейтральной точки** (обычно принимается, что $\dot{\varphi}_N = 0$) или просто **напряжением смещения нейтрали.** Чем оно больше, тем сильнее несимметрия фазных напряжений на нагрузке, что наглядно иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 2.8.15,б.

Для расчета токов в цепи на рис. 2.8.15,а необходимо знать напряжение смещения нейтрали. Если оно известно, то напряжения на фазах нагрузки равны:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{BN'} = \dot{U}B_{AN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}.$$



а) Рис. 2.8.15 *б)*

Тогда для искомых токов можно записать:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AN'}\underline{Y}_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{BN'}\underline{Y}_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{CN'}\underline{Y}_C.$$

Соотношение для напряжения смещения нейтрали, записанное на основании метода узловых потенциалов, имеет вид

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AN}\underline{Y}_A + \dot{U}_{BN}\underline{Y}_B + \dot{U}_{CN}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \qquad (2.8.1)$$

При наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением $\underline{Y}_N \to \infty$, и из уравнения (2.8.1) $\dot{U}_{N'N} = 0$. В случае отсутствия нейтрального провода $\underline{Y}_N = 0$. При симметричной нагрузке $\left(\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C\right)$ с учетом того, что $\dot{U}_{AN} + \dot{U}_{BN} + \dot{U}_{CN} = 0$, из (2.8.1) следует $\dot{U}_{N'N} = 0$.

В качестве примера анализа несимметричного режима работы цепи с использованием соотношения (2.8.1) определим, какая из ламп в схеме на рис. 2.8.16 с прямым чередованием фаз источника будет гореть ярче, если $R = X_L = X_C$.

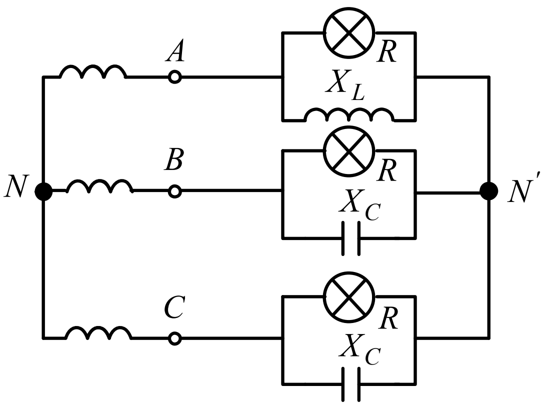


Рис. 2.8.16

Запишем выражения комплексных сопротивлений фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_A = \frac{RjX_L}{R + jX_L} = \frac{jR}{1 + j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{j45^0};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-jR}{1 - j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{-j45^0}.$$

Тогда для напряжения смещения нейтрали будем иметь

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dfrac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} + \dfrac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} + \dfrac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_A} + \dfrac{1}{\underline{Z}_B} + \dfrac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{\dfrac{U_ф \sqrt{2}}{R}\left(\dfrac{1}{e^{j45^0}} + \dfrac{e^{-j120^0}}{e^{-j45^0}} + \dfrac{e^{j120^0}}{e^{-j45^0}}\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{R}\left(\dfrac{1}{e^{j45^0}} + \dfrac{2}{e^{-j45^0}}\right)} =$$

$$= U_ф \frac{e^{-j45^0} + e^{-j75^0} + e^{j165^0}}{e^{-j45^0} + 2e^{j45^0}} = 0{,}632 U_ф e^{-j108{,}43^0}.$$

Напряжения на фазах нагрузки (здесь и далее индекс N у фазных напряжений источника опускается):

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} = U_ф - 0{,}632 U_ф e^{-j108{,}43^0} = 1{,}34 U_ф e^{j26{,}6^0};$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = U_ф e^{-j120^0} - 0{,}632 U_ф e^{-j108{,}43^0} = 0{,}4 U_ф e^{j221{,}6^0};$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = U_ф e^{j120^0} - 0{,}632 U_ф e^{-j108{,}43^0} = 1{,}5 U_ф e^{j101{,}6^0}.$$

Таким образом, наиболее ярко будет гореть лампочка в фазе C.

В заключение отметим, что если при соединении в звезду задаются линейные напряжения (что обычно имеет место на практике), то с учетом того, что сумма последних равна нулю, их можно однозначно задать с помощью двух источников ЭДС, например $\dot{E}_A = \dot{U}_{AC}$ и $\dot{E}_B = \dot{U}_{BC}$. Тогда, поскольку при этом $\dot{E}_C = 0$, соотношение (2.8.1) трансформируется в формулу

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AC}\underline{Y}_A + \dot{U}_{BC}\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \qquad (2.8.2)$$

Мощность в трехфазных цепях

Мгновенная мощность трехфазного источника энергии равна сумме мгновенных мощностей его фаз:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Активная мощность генератора, определяемая как среднее за период значение мгновенной мощности, равна

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C.$$

Соответственно активная мощность трехфазного приемника с учетом потерь в сопротивлении нейтрального провода

$$P = P_a + P_b + P_c + P_N,$$

реактивная

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_N$$

и полная

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Суммарная активная мощность симметричной трехфазной системы

$$P = 3U_ф I_ф \cos\varphi. \qquad (2.8.3)$$

Учитывая, что в симметричном режиме для звезды имеют место соотношения

$$U_л = \sqrt{3}U_ф; \quad \dot{I}_л = \dot{I}_ф$$

и для треугольника –

$$\dot{U}_л = \dot{U}_ф; \quad I_л = \sqrt{3}I_ф$$

на основании уравнения (2.8.3) для обоих способов соединения фаз получаем

$$P = \sqrt{3}U_л I_л \cos\varphi,$$

где φ – угол сдвига между фазными напряжением и током.

Аналогично

$$Q = \sqrt{3}U_л I_л \sin\varphi;$$

$$S = \sqrt{3}U_л I_л.$$

Измерение мощности в трехфазных цепях

Ниже рассмотрены практические схемы включения ваттметров для измерения мощности в трехфазных цепях.

1. Четырехпроводная система, несимметричный режим.

Представленная на рис. 2.8.17 схема называется **схемой трех ваттметров.**

Суммарная активная мощность цепи определяется как сумма показаний трех ваттметров

$$P = P_A + P_B + P_C .$$

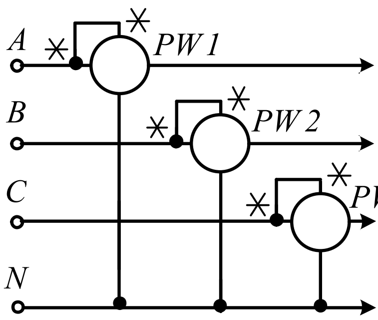


Рис. 2.8.17

2. Четырехпроводная система, симметричный режим.

Если режим работы цепи симметричный, то для определения суммарной активной мощности достаточно ограничиться одним ваттметром (любым), включаемым по схеме на рис. 2.8.17. Тогда, например, при включении прибора в фазу *A*

$$P = 3P_A . \qquad (2.8.4)$$

3. Трехпроводная система, симметричный режим.

При отсутствии доступа к нейтральной точке последняя создается искусственно с помощью включения трех дополнительных резисторов по схеме «звезда», как показано на рис. 2.8.18 – **схема ваттметра с искусственной нейтральной точкой.** При этом необходимо выполнение условия $R = R_1 + R_V$, где R_V – собственное сопротивление обмотки ваттметра. Тогда суммарная активная мощность трехфазной системы определяется согласно уравнению (2.8.4).

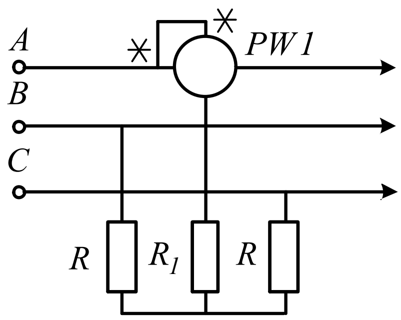


Рис. 2.8.18

4. Трехпроводная система, симметричный режим; измерение реактивной мощности.

С помощью одного ваттметра при симметричном режиме работы цепи можно измерить ее реактивную мощность. В этом случае схема включения ваттметра будет иметь вид рис. 2.8.19,а. Согласно векторной диаграмме на рис. 2.8.19,б измеряемая прибором мощность

$$P_1 = U_л I_л \cos\left(90^0 - \varphi\right) = U_л I_л \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} .$$

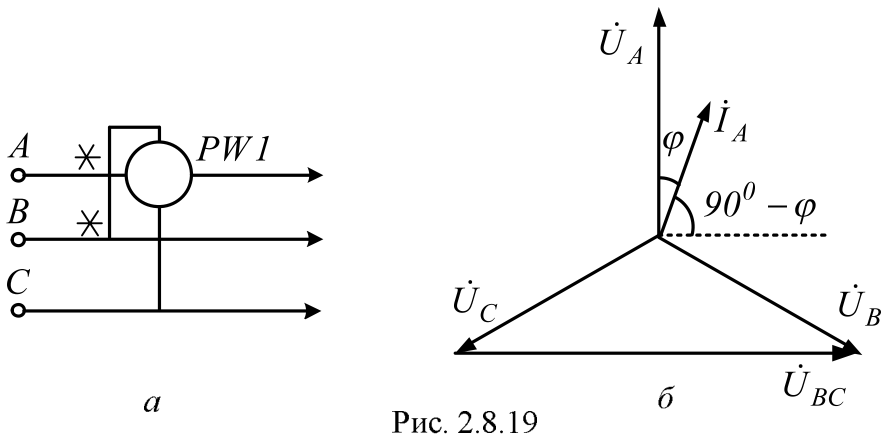


Рис. 2.8.19

Таким образом, суммарная реактивная мощность

$$Q=\sqrt{3}P_1.$$

5. Трехпроводная система, несимметричный режим.

Представленная на рис. 2.8.20 схема называется **схемой двух ваттметров**. В ней сумма показаний приборов равна суммарной активной мощности цепи.

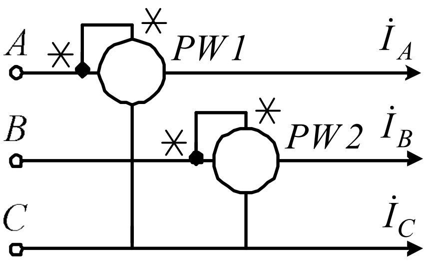


Рис. 2.8.20

Действительно, показания приборов в данной схеме

$$P_1=Re\left(\dot U_{AC}\overset{*}{I}_A\right);\quad P_2=Re\left(\dot U_{BC}\overset{*}{I}_B\right).$$

Тогда

$$P=P_1+P_2=Re\left(\dot U_{AC}\overset{*}{I}_A+\dot U_{BC}\overset{*}{I}_B\right)=Re\left(\left(\dot U_A-\dot U_C\right)\overset{*}{I}_A+\left(\dot U_B-\dot U_C\right)\overset{*}{I}_B\right)=$$

$$=Re\left(\dot U_A\overset{*}{I}_A+\dot U_B\overset{*}{I}_B-\dot U_C\left(\overset{*}{I}_A+\overset{*}{I}_B\right)\right)=Re\left(\dot U_A\overset{*}{I}_A+\dot U_B\overset{*}{I}_B+\dot U_C\overset{*}{I}_C\right)=$$

$$=P_A+P_B+P_C.$$

В заключение отметим, что если в схеме на рис. 2.8.20 имеет место симметричный режим работы, то на основании показаний приборов можно определить суммарную реактивную мощность цепи

$$Q=\sqrt{3}\left(P_1-P_2\right).$$

Метод симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих относится к специальным методам расчета трехфазных цепей и широко применяется для анализа несимметричных режимов их работы, в том числе с нестатической нагрузкой. В основе метода лежит представление несимметричной трехфазной системы переменных (ЭДС, токов, напряжений и т.п.) в виде суммы трех симметричных систем, которые называют **симметричными составляющими.** Различают симметричные составляющие **прямой, обратной** и **нулевой** последовательностей, которые различаются порядком чередования фаз.

Симметричную систему прямой последовательности образуют (см. рис. 2.8.21,а) три одинаковых по модулю вектора $\dot{A}_1, \dot{B}_1$ и $\dot{C}_1$ со сдвигом друг по отношению к другу на $2\pi/3$ рад, причем $\dot{B}_1$ отстает от $\dot{A}_1$, а $\dot{C}_1$ – от $\dot{B}_1$.

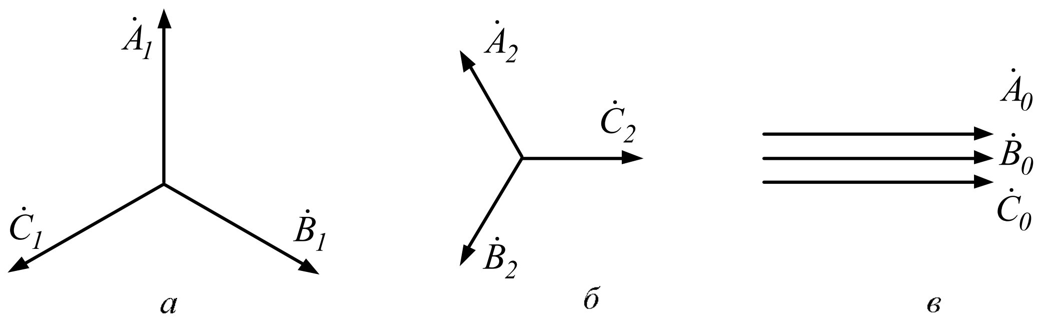


Рис. 2.8.21

Введя оператор поворота $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, для симметричной системы прямой последовательности можно записать

$$\dot{B}_1 = \underline{a}^2 \dot{A}_1; \quad \dot{C}_1 = \underline{a}\dot{A}_1.$$

Симметричная система обратной последовательности образована равными по модулю векторами $\dot{A}_2, \dot{B}_2$ и $\dot{C}_2$ с относительным сдвигом по фазе на $2\pi/3$ рад, причем теперь $\dot{C}_2$ отстает от $\dot{A}_2$, а $\dot{B}_2$ – от $\dot{C}_2$ (см. рис. 2.8.21,б). Для этой системы имеем

$$\dot{B}_2 = \underline{a}\dot{A}_2; \quad \dot{C}_2 = \underline{a}^2 \dot{A}_2.$$

Система нулевой последовательности состоит из трех векторов, одинаковых по модулю и фазе (см. рис. 2.8.21,в):

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0.$$

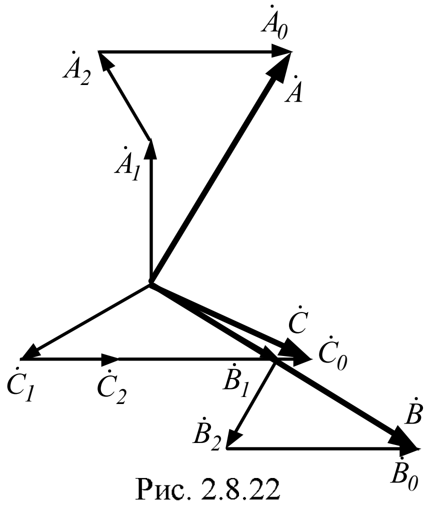


Рис. 2.8.22

При сложении трех указанных систем векторов получается несимметричная система векторов (см. рис. 2.8.22).

Любая несимметричная система однозначно раскладывается на симметричные составляющие. Действительно,

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \tag{2.8.5}$$

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 = \underline{a}^2 \dot{A}_1 + \underline{a}\dot{A}_2 + \dot{A}_0; \tag{2.8.6}$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 = \underline{a}\dot{A}_1 + \underline{a}^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0. \tag{2.8.7}$$

Таким образом, получена система из трех уравнений относительно трех неизвестных $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$, которые, следовательно, определяются однозначно. Для нахождения $\dot{A}_0$ сложим уравнения (2.8.5)…(2.8.7). Тогда, учитывая, что $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, получим

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}\left(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}\right). \tag{2.8.8}$$

Для нахождения $\dot{A}_1$ умножим (2.8.6) на $\underline{a}$, а (3) – на $\underline{a}^2$, после чего полученные выражения сложим с (2.8.5). В результате приходим к соотношению

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}\left(\dot{A} + \underline{a}\dot{B} + \underline{a}^2\dot{C}\right). \tag{2.8.9}$$

Для определения $\dot{A}_2$ с соотношением (2.8.5) складываем уравнения (2.8.6) и (2.8.7), предварительно умноженные соответственно на $\underline{a}^2$ и $\underline{a}$. В результате имеем

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}\left(\dot{A} + \underline{a}^2\dot{B} + \underline{a}\dot{C}\right). \tag{2.8.10}$$

Формулы (2.8.5)…(2.8.10) справедливы для любой системы векторов $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$, в том числе и для симметричной. В последнем случае $\dot{A} = \dot{A}_1; \quad \dot{A}_2 = \dot{A}_0 = 0$.

В заключение отметим, что помимо вычисления симметричные составляющие могут быть измерены с помощью специальных фильтров симметричных составляющих, используемых в устройствах релейной защиты и автоматики.

Свойства симметричных составляющих токов
и напряжений различных последовательностей

1. Рассмотрим четырехпроводную систему на рис. 2.8.23. Для тока в нейтральном проводе имеем

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C .$$

Тогда с учетом (2.8.8)

$$\dot{I}_N = 3\dot{I}_0 , \qquad (2.8.11)$$

т.е. ток в нейтральном проводе равен утроенному току нулевой последовательности.

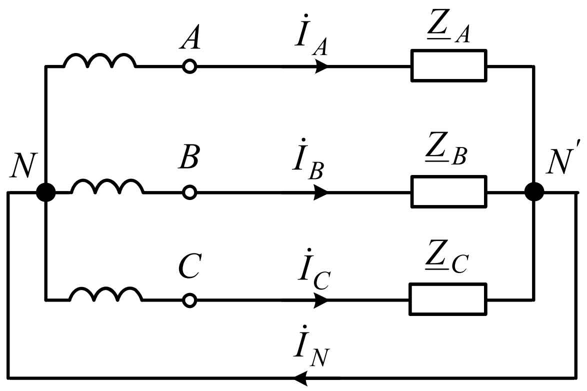


Рис. 2.8.23

Если нейтрального провода нет, то $\dot{I}_N = 0$ и соответственно нет составляющих тока нулевой последовательности.

2. Поскольку сумма линейных напряжений равна нулю, то в соответствии с (2.8.8) линейные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности.

3. Рассмотрим трехпроводную несимметричную систему на рис. 2.8.24.

Здесь

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{E}_A - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{E}_B - \dot{U}_{N'N};$$

$$\dot{U}_{CN'} = \dot{E}_C - \dot{U}_{N'N}.$$

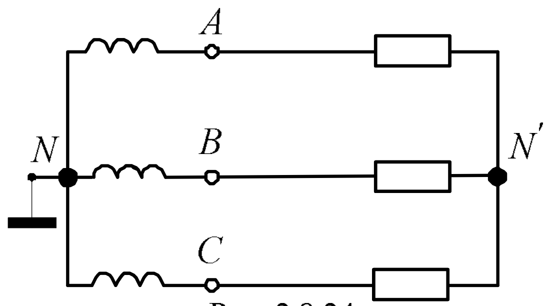


Рис. 2.8.24

Тогда, просуммировав эти соотношения, для симметричных составляющих нулевой последовательности фазных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{ф0} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3} - \dot{U}_{N'N}.$$

Если система ЭДС генератора симметрична, то из последнего получаем

$$\dot{U}_{ф0} = -\dot{U}_{N'N}. \qquad (2.8.12)$$

Из (2.8.12) вытекает:

- в фазных напряжениях симметричного приемника отсутствуют симметричные составляющие нулевой последовательности;

- симметричные составляющие нулевой последовательности фазных напряжений несимметричного приемника определяются величиной напряжения смещения нейтрали;
- фазные напряжения несимметричных приемников, соединенных звездой, при питании от одного источника различаются только за счет симметричных составляющих нулевой последовательности; симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей у них одинаковы, поскольку однозначно связаны с соответствующими симметричными составляющими линейных напряжений.

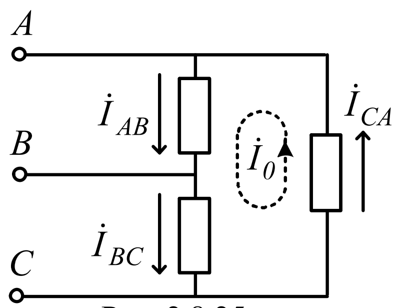


Рис. 2.8.25

4. При соединении нагрузки в треугольник фазные токи $\dot I_{AB}, \dot I_{BC}$ и $\dot I_{CA}$ могут содержать симметричные составляющие нулевой последовательности $\dot I_0$. При этом $\dot I_0$ (см. рис. 2.8.25) циркулирует по контуру, образованному фазами нагрузки.

Сопротивления симметричной трехфазной цепи для токов различных последовательностей

Если к симметричной цепи приложена симметричная система фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательности, то в ней возникает симметричная система токов прямой (обратной или нулевой) последовательности. При использовании метода симметричных составляющих на практике симметричные составляющие напряжений связаны с симметричными составляющими токов той же последовательности. Отношение симметричных составляющих фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательности к соответствующим симметричным составляющим токов называется **комплексным сопротивлением прямой**

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot U_{A1}}{\dot I_{A1}} = \frac{\dot U_{B1}}{\dot I_{B1}} = \frac{\dot U_{C1}}{\dot I_{C1}},$$

обратной

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot U_{A2}}{\dot I_{A2}} = \frac{\dot U_{B2}}{\dot I_{B2}} = \frac{\dot U_{C2}}{\dot I_{C2}}$$

и **нулевой**

$$\underline{Z}_0 = \frac{\dot{U}_{A0}}{\dot{I}_{A0}} = \frac{\dot{U}_{B0}}{\dot{I}_{B0}} = \frac{\dot{U}_{C0}}{\dot{I}_{C0}}$$

последовательностей.

Пусть имеем участок цепи на рис. 2.8.26. Для фазы A этого участка можно записать

$$\dot{U}_A = (R + j\omega L)\dot{I}_A + j\omega M(\dot{I}_B + \dot{I}_C). \qquad (2.8.13)$$

Тогда для симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей с учетом того, что $\dot{I}_{A1(2)} + \dot{I}_{B1(2)} + \dot{I}_{C1(2)} = 0$, на основании (2.8.13) имеем

$$\dot{U}_{A1(2)} = (R + j\omega L - j\omega M)\dot{I}_{A1(2)}.$$

Отсюда комплексные сопротивления прямой и обратной последовательностей одинаковы и равны

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R + j(\omega L - \omega M).$$

Для симметричных составляющих нулевой последовательности с учетом равенства $\dot{I}_{A0} = \dot{I}_{B0} = \dot{I}_{C0}$ соотношение (2.8.13) трансформируется в уравнение

$$\dot{U}_{A0} = (R + j\omega L + 2j\omega M)\dot{I}_{A0},$$

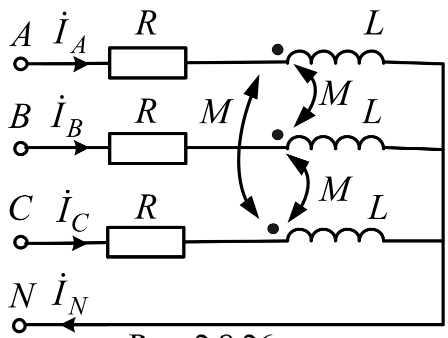


Рис. 2.8.26

откуда комплексное сопротивление нулевой последовательности

$$\underline{Z} = R + j(\omega L + 2\omega M).$$

В рассмотренном примере получено равенство сопротивлений прямой и обратной последовательностей. В общем случае эти сопротивления могут отличаться друг от друга. Наиболее типичный пример – различие сопротивлений вращающейся машины для токов прямой и обратной последовательностей за счет многократной разницы в скольжении ротора относительно вращающегося магнитного поля для этих последовательностей.

Применение метода симметричных составляющих для симметричных цепей

Расчет цепей методом симметричных составляющих основывается на принципе наложения, в виду чего метод применим только к линейным цепям. Согласно данному методу расчет осуществляется в отдельности для составляющих напряжений и токов различных последовательностей, причем в силу симметрии режимов работы цепи для них он проводится для одной фазы (фазы A). После этого в соответствии с (2.8.5)…(2.8.7) определяются реальные искомые величины. При расчете следует помнить, что поскольку в симметричном режиме ток в нейтральном проводе равен нулю, сопротивление нейтрального провода никак ни влияет на симметричные составляющие токов прямой и обратной последовательностей. Наоборот, в схему замещения для нулевой последовательности на основании (2.8.11) вводится утроенное значение сопротивления в нейтральном проводе. С учетом вышесказанного исходной схеме на рис. 2.8.27,а соответствуют расчетные однофазные цепи для прямой и обратной последовательностей (рис. 2.8.27,б) и нулевой последовательности (рис. 2.8.27,в).

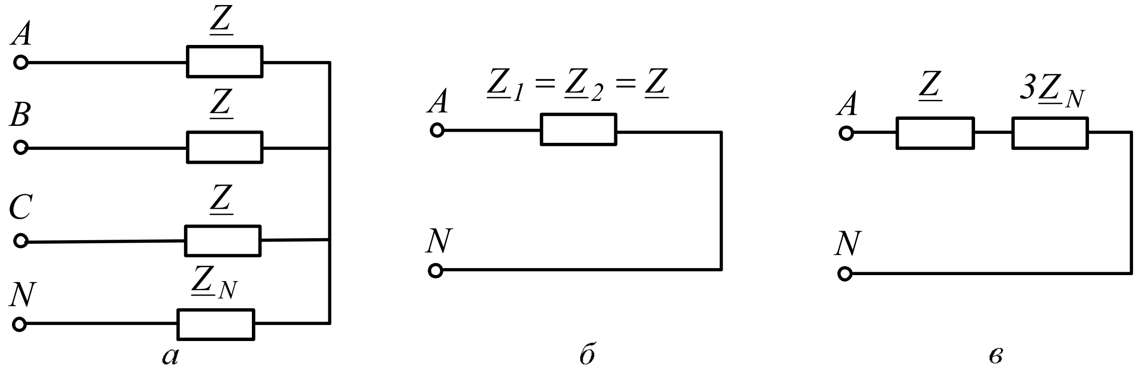


Рис. 2.8.27

Существенно сложнее обстоит дело при несимметрии сопротивлений по фазам. Пусть в цепи на рис. 2.8.23 $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$. Разложив токи на симметричные составляющие, для данной цепи можно записать

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \underline{Z}_A\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0\right);\\ \dot{U}_B &= \underline{Z}_B\left(\underline{a}^2\dot{I}_1 + \underline{a}\dot{I}_2 + \dot{I}_0\right);\\ \dot{U}_C &= \underline{Z}_C\left(\underline{a}\dot{I}_1 + \underline{a}^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0\right).\end{aligned} \tag{2.8.14}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{1}{3}\left(\dot{U}_A + \underline{a}\dot{U}_B + \underline{a}^2\dot{U}_C\right);\\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3}\left(\dot{U}_A + \underline{a}^2\dot{U}_B + \underline{a}\dot{U}_C\right);\\ \dot{U}_0 &= \frac{1}{3}\left(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C\right).\end{aligned} \tag{2.8.15}$$

Подставив в (2.8.15) значения соответствующих параметров из (10) после группировки членов получим

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{10}\dot{I}_0;$$
$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{20}\dot{I}_0; \qquad (2.8.16)$$
$$\dot{U}_0 = \underline{Z}_{01}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{02}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{00}\dot{I}_0,$$

где $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{00} = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C\right);$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{20} = \underline{Z}_{01} = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_A + \underline{a}^2\underline{Z}_B + \underline{a}\underline{Z}_C\right);$$

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{02} = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_A + \underline{a}\underline{Z}_B + \underline{a}^2\underline{Z}_C\right).$$

Из полученных соотношений видно, что если к несимметричной цепи приложена несимметричная система напряжений, то каждая из симметричных составляющих токов зависит от симметричных составляющих напряжений всех последовательностей. Поэтому, если бы трехфазная цепь на всех участках была несимметрична, рассматриваемый метод расчета не давал бы преимуществ. На практике система в основном является симметричной, а несимметрия обычно носит локальный характер. Это обстоятельство, как будет показано в следующей лекции, значительно упрощает анализ.

На всех участках цепи, где сопротивления по фазам одинаковы, $\underline{Z}_{ik} = 0$ для $i \neq k$. Тогда из (2.8.16) получаем

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{22}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_0 = \underline{Z}_{00}\dot{I}_0.$$

Теорема об активном двухполюснике для симметричных составляющих

В тех случаях, когда трехфазная цепь в целом симметрична, а несимметрия носит локальный характер (местное короткое замыкание или обрыв фазы, подключение несимметричной нагрузки), для расчета удобно применять теорему об активном двухполюснике.

При мысленном устранении несимметрии (несимметричного участка) для оставшейся цепи имеет место симметричный режим холостого хода. В соответствии с методом эквивалентного генератора теперь необходимо определить эквивалентные ЭДС и входные сопротивления симметричной цепи. В общем случае – при несимметрии в системе фазных напряжений источника – помимо эквивалентной ЭДС прямой последовательности $\dot{E}_1$ будут также иметь место эквивалентные ЭДС обратной $\dot{E}_2$ и нулевой $\dot{E}_0$ последовательностей. Однако обычно напряжения генераторов симметричны, – тогда $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$. Величина $\dot{E}_1$, соответствующая напряжению холостого хода $\dot{U}_{фXX}$ на зажимах подключения локальной несимметрии, определяется при отключении локальной несимметричной нагрузки любым известным методом расчета линейных цепей, причем в силу симметрии цепи расчет проводится для одной фазы.

В отдельности рассчитываются входные сопротивления симметричной цепи для различных последовательностей, которая предварительно преобразуется известными методами в пассивную цепь. При этом при расчете входного сопротивления нулевой последовательности $\underline{Z}_0$ необходимо учитывать только те участки цепи, которые соединены с нейтральным проводом или заземленной нейтральной точкой, т.е. принимать во внимание только те ветви, по которым могут протекать токи нулевой последовательности. Схемы для расчета входных сопротивлений прямой и обратной последовательностей одинаковы, однако в случае вращающихся машин величины этих сопротивлений различны.

Поскольку в отдельности для каждой симметричной последовательности имеет место симметричный режим, расчет указанным методом ведется на одну фазу с использованием расчетных схем для прямой (рис. 2.8.28,а), обратной (рис. 2.8.28,б) и нулевой (рис. 2.8.28,в) последовательностей.

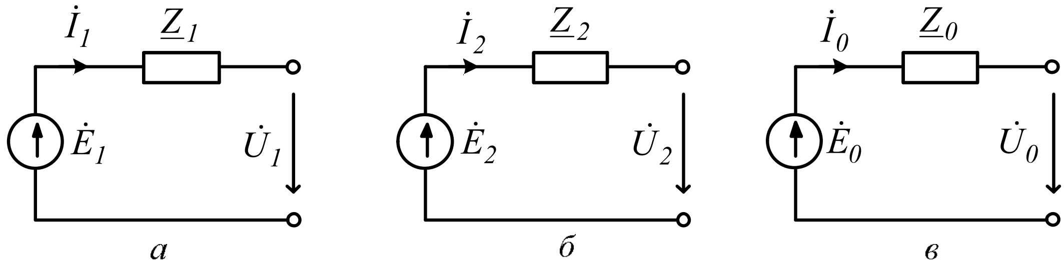


Рис. 2.8.28

Данным схемам соответствуют соотношения

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{U}_1; \tag{2.8.17}$$

$$\dot{E}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{U}_2; \tag{2.8.18}$$

$$\dot{E}_0 = \dot{I}_0 \underline{Z}_0 + \dot{U}_0. \tag{2.8.19}$$

Поскольку соотношений три, а число входящих в них неизвестных шесть $\left(\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0\right)$, необходимо составление трех дополнительных уравнений, учитывающих конкретный вид несимметрии.

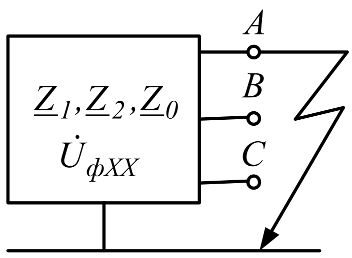


Рис. 2.8.29

Рассмотрим некоторые типовые примеры применения метода.

1. Однополюсное короткое замыкание на землю (рис. 2.8.29).

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{кз}.$$

Поскольку фаза A замкнута на землю, то дополнительные уравнения имеют вид

$$\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0; \qquad (2.8.20)$$

$$\dot{I}_B = 0;$$

$$\dot{I}_C = 0.$$

Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3}\left(\dot{I}_A + \underline{a}\dot{I}_B + \underline{a}^2\dot{I}_C\right) = \frac{1}{3}\dot{I}_{кз};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{3}\left(\dot{I}_A + \underline{a}^2\dot{I}_B + \underline{a}\dot{I}_C\right) = \frac{1}{3}\dot{I}_{кз};$$

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{3}\left(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C\right) = \frac{1}{3}\dot{I}_{кз}.$$

С учетом последних соотношений уравнения (2.8.17)…(2.8.19) можно записать в виде

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{I}_{кз}}{3}\underline{Z}_1 + \dot{U}_1; \qquad (2.8.21)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{\dot{I}_{кз}}{3}\underline{Z}_2 + \dot{U}_2; \qquad (2.8.22)$$

$$\dot{E}_0 = \frac{\dot{I}_{кз}}{3}\underline{Z}_0 + \dot{U}_0. \qquad (2.8.23)$$

Принимая во внимание (2.8.20), а также то, что источник питания симметричный $\left(\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0\right)$, просуммируем (2.8.21), (2.8.22) и (2.8.23):

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{фXX} = 0 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0\right)\frac{\dot{I}_{кз}}{3},$$

откуда получаем

$$\dot{I}_{кз} = \frac{3\dot{U}_{фXX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}.$$

2. Двухполюсное короткое замыкание «без земли» (рис. 2.8.30).

Для рассматриваемого случая можно записать

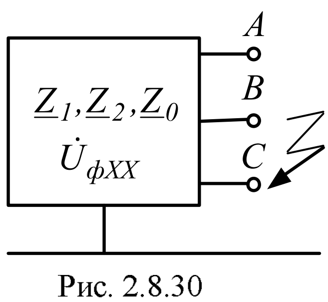


Рис. 2.8.30

$$\dot{I}_A = 0;$$
$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \dot{I}_{кз};$$
$$\dot{U}_B = \dot{U}_C;$$
$$\dot{I}_0 = 0.$$

Последнее равенство объясняется отсутствием пути для протекания токов нулевой последовательности.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_A + \underline{a}\dot{I}_B + \underline{a}^2\dot{I}_C}{3} = \frac{\left(\underline{a} - \underline{a}^2\right)\dot{I}_{кз}}{3} = j\frac{\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}};$$
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_A + \underline{a}^2\dot{I}_B + \underline{a}\dot{I}_C}{3} = \frac{\left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\dot{I}_{кз}}{3} = -j\frac{\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}};$$
$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_A + \underline{a}\dot{U}_B + \underline{a}^2\dot{U}_C}{3} = \frac{\dot{U}_A + \left(\underline{a} + \underline{a}^2\right)\dot{U}_B}{3} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{3};$$
$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_A + \underline{a}^2\dot{U}_B + \underline{a}\dot{U}_C}{3} = \frac{\dot{U}_A + \left(\underline{a}^2 + \underline{a}\right)\dot{U}_B}{3} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{3}.$$

Из двух последних соотношений вытекает, что $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$. При этом $\dot{U}_0 = 0$, так как $\dot{E}_0 = 0$ и $\dot{I}_0 = 0$.

Подставив полученные выражения для напряжений и токов прямой и обратной последовательностей в (2.8.17) и (2.8.18), запишем

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_1 + \frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}}\underline{Z}_1; \qquad (2.8.24)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_2 - \frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}}\underline{Z}_2. \qquad (2.8.25)$$

Вычитая из (2.8.24) соотношение (2.8.25) и учитывая, что в силу симметрии источника $\dot{E}_2 = 0$, получим

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{фXX} = 0 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)\frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\dot{I}_{кз} = -j\frac{\sqrt{3}\dot{U}_{фXX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

3. Обрыв линейного провода (рис. 2.8.31) – определить напряжение в месте разрыва.

В рассматриваемом случае дополнительные уравнения имеют вид

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0; \qquad (2.8.26)$$

$$\dot{U}_{B'B''} = 0; \qquad (2.8.27)$$

$$\dot{U}_{C'C''} = 0. \qquad (2.8.28)$$

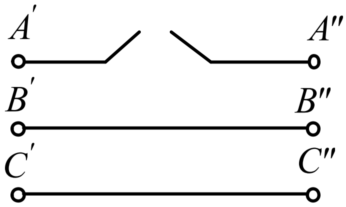


Рис. 2.8.31

Из соотношений (2.8.27) и (2.8.28) вытекает равенство

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0. \qquad (2.8.29)$$

На основании (2.8.17)…(2.8.19) с учетом (2.8.29) запишем

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_2}; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_0 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_0}.$$

Принимая во внимание симметричность источника $\left(\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0\right)$, подставим последние выражения в (2.8.26):

$$\frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} - \dot{U}_1\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_0}\right) = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{фXX} / \underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_0}.$$

Таким образом, искомое напряжение

$$\dot{U}_{A'A''} = 3\frac{\dot{U}_{фXX} / \underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_0}.$$

4. Подключение несимметричной нагрузки $\left(\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C\right)$ к симметричной цепи (рис. 2.8.32).

Учитывая, что $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$, подставим в уравнения (2.8.17)…(2.8.19) определенные ранее выражения $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{U}_0$ (см. соотношение (2.8.16):

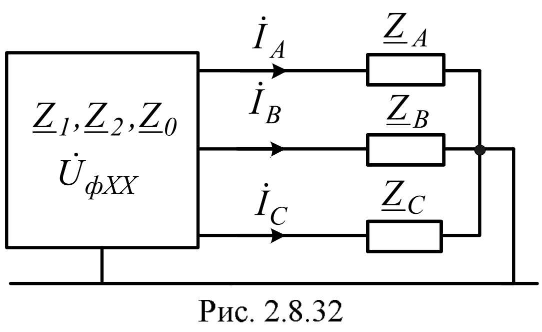


Рис. 2.8.32

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{фXX} = \dot{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{11}) + \dot{I}_2\underline{Z}_{12} + \dot{I}_0\underline{Z}_{10};$$

$$0 = \dot{I}_1\underline{Z}_{21} + \dot{I}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{22}) + \dot{I}_0\underline{Z}_{20};$$

$$0 = \dot{I}_1\underline{Z}_{01} + \dot{I}_2\underline{Z}_{02} + \dot{I}_0(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{00}).$$

Решая данную систему уравнений, находим $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ и $\dot{I}_0$. Тогда

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0;$$

$$\dot{I}_B = \underline{a}^2\dot{I}_1 + \underline{a}\dot{I}_2 + \dot{I}_0;$$

$$\dot{I}_C = \underline{a}\dot{I}_1 + \underline{a}^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0$$

и $\dot{U}_A = \dot{I}_A\underline{Z}_A;\quad \dot{U}_B = \dot{I}_B\underline{Z}_B;\quad \dot{U}_C = \dot{I}_C\underline{Z}_C$.

В рассмотренных примерах предполагалось, что необходимые для анализа цепи параметры $\dot{U}_{фXX}, \underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_0$ предварительно определены. Рассмотрим их расчет на примере предыдущей задачи для некоторой схемы на рис. 2.8.33.

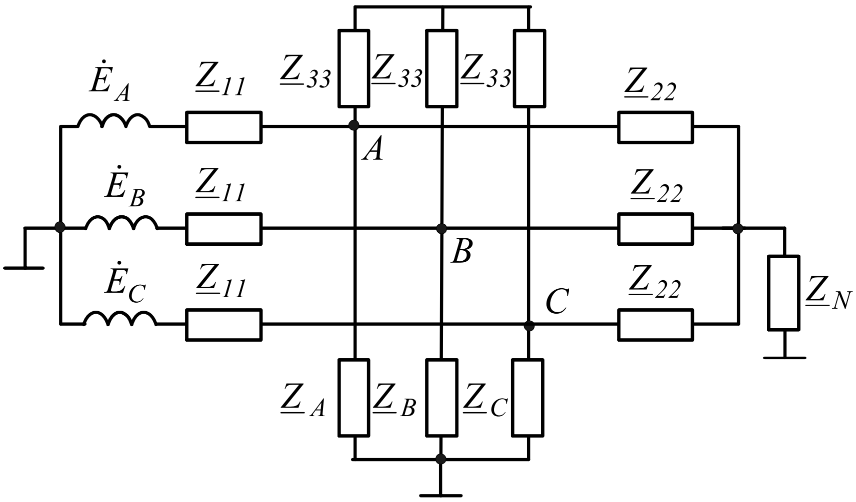


Рис. 2.8.33

Поскольку при отключении несимметричной нагрузки $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ оставшаяся часть схемы будет работать в симметричном режиме, для определения $\dot{U}_{фXX}$ получаем расчетную однофазную схему на рис. 2.8.34.

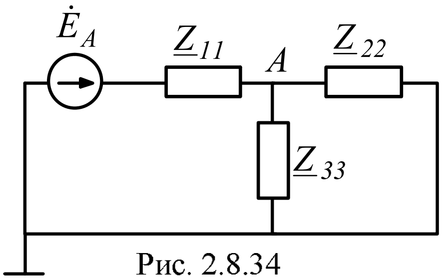


Рис. 2.8.34

Из нее

$$\dot{U}_{фXX} = \dot{\varphi}_A = \frac{\dot{E}_A / \underline{Z}_{11}}{1/\underline{Z}_{11} + 1/\underline{Z}_{22} + 1/\underline{Z}_{33}}.$$

Схема для определения входных сопротивлений прямой $\underline{Z}_1$ и обратной $\underline{Z}_2$ последовательностей одна и та же и соответствует цепи на рис. 2.8.35,а. В соответствии с ней

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}\underline{Z}_{33}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{33} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{33}}.$$

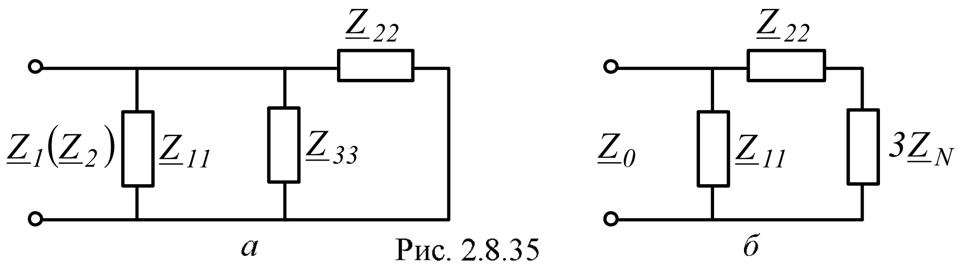


Рис. 2.8.35

Схема для определения $\underline{Z}_0$, полученная с учетом возможных путей протекания токов нулевой последовательности, приведена на рис. 2.8.35,б. Из нее

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_{11}(\underline{Z}_{22} + 3\underline{Z}_N)}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + 3\underline{Z}_N}.$$

Выражение мощности через симметричные составляющие

Комплекс полной мощности в трехфазной цепи

$$S = P + jQ = \dot{U}_A \overset{\times}{I}_A + \dot{U}_B \overset{\times}{I}_B + \dot{U}_C \overset{\times}{I}_C. \qquad (2.8.30)$$

Для фазных напряжений имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= \underline{a}^2\dot{U}_1 + \underline{a}\dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= \underline{a}\dot{U}_1 + \underline{a}^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0. \end{aligned} \qquad (2.8.31)$$

Учитывая, что комплекс, сопряженный $\underline{a}$, равен $\underline{a}^2$ и наоборот, для сопряженных комплексов токов запишем:

$$\begin{aligned} \overset{\times}{I}_A &= \overset{\times}{I}_1 + \overset{\times}{I}_2 + \overset{\times}{I}_0; \\ \overset{\times}{I}_B &= \underline{a}\overset{\times}{I}_1 + \underline{a}^2\overset{\times}{I}_2 + \overset{\times}{I}_0; \\ \overset{\times}{I}_C &= \underline{a}^2\overset{\times}{I}_1 + \underline{a}\overset{\times}{I}_2 + \overset{\times}{I}_0. \end{aligned} \qquad (2.8.32)$$

Подставляя (2.8.31) и (2.8.32) в (2.8.30), после соответствующих преобразований получим

$$\underline{S} = 3\dot{U}_1 \overset{\times}{I}_1 + 3\dot{U}_2 \overset{\times}{I}_2 + 3\dot{U}_0 \overset{\times}{I}_0 .$$

Отсюда

$$P = 3U_1 I_1 \cos\varphi_1 + 3U_2 I_2 \cos\varphi_2 + 3U_0 I_0 \cos\varphi_0 = P_1 + P_2 + P_0$$

и

$$Q = 3U_1 I_1 \sin\varphi_1 + 3U_2 I_2 \sin\varphi_2 + 3U_0 I_0 \sin\varphi_0 = Q_1 + Q_2 + Q_0 ,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$ – разности фаз соответствующих симметричных составляющих напряжений и токов.

3. Методические указания к выполнению курсовой работы первого (порогового) уровня сложности

3.1. Методические указания к заданию 1.2

Рассмотрим пункты выполнения задания 1.1 на примере цепи на рис. 3.1.

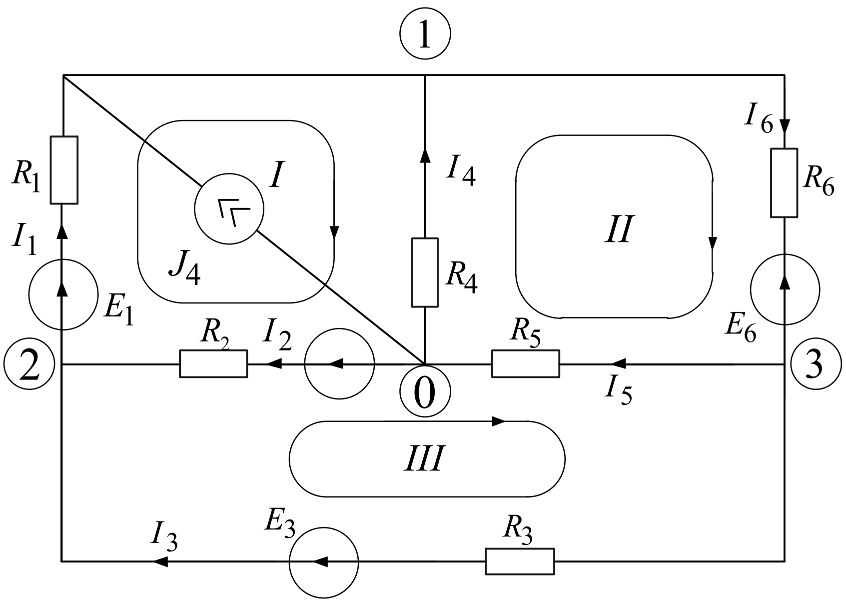


Рис. 3.1

Параметры цепи: $E_1 = 100$ В; $E_2 = 30$ В; $E_3 = 50$ В; $J_4 = 3$ А; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 30$ Ом; $R_5 = 50$ Ом; $R_6 = 25$ Ом.

1.1.1. Система уравнений цепи по законам Кирхгофа

Данная цепь содержит 6 ветвей, 4 узла и 3 независимых контура. Таким образом, для расчета токов в ветвях необходимо записать три уравнения по первому закону Кирхгофа и три – по второму.

Для принятых в цепи положительных направлений токов запишем уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_4 - I_6 + J_4 = 0;$$

$$-I_1+I_2+I_3=0;$$
$$I_1+I_4-I_6=0.$$

Для указанных на рис. 3.1 контуров и выборе направления их обхода по часовой стрелке имеем следующую систему уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$R_1I_1-R_4I_4+R_2I_2=E_1+E_2;$$
$$R_4I_4+R_6I_6+R_5I_5=-E_6;$$
$$-R_2I_2-R_5I_5+R_3I_3=-E_2+E_3;$$

1.1.2. Система уравнений по методу контурных токов

В соответствии с числом независимых контуров для цепи на рис. 3.1 необходимо записать три контурных уравнения:

$$I_I(R_1+R_2+R_4)-I_{II}R_4-I_{III}R_2=E_1+E_2-R_4J_4;$$
$$-I_IR_4+I_{II}(R_4+R_5+R_6)-I_{III}R_5=-E_2+R_4J_4;$$
$$-I_IR_2-I_{II}R_5+I_{III}(R_2+R_3+R_5)=-E_2+E_3.$$

При составлении этих уравнений параллельное соединение источника тока J_4 и резистора R_4 было заменено последовательным соединением источника ЭДС, равной J_4R_4, и резистора R_4.

При заданных параметрах цепи получаем следующие численные значения контурных токов: I_{I} = 1,956 А; I_{II} = 2,02 А; I_{III} = 1,769 А.

По найденным контурным токам определяем искомые токи ветвей в соответствии с соотношениями:

$$I_1=I_I;\ I_2=I_I-I_{III};\ I_3=I_{III};\ I_4=-I_I+I_{II}-J_4;\ I_5=I_{II}-I_{III};\ I_6=I_{II}.$$

Таким образом, численные значения токов ветвей: I_1 = 1,956 А; I_2 = 0,187 А; I_3 = 1,769 А; I_4 = –2,936 А; I_5 = 0,251 А; I_6 = 2,02 А.

1.1.3. Система уравнений по методу узловых потенциалов

При принятии потенциала узла 0 равным нулю $(\varphi_0=0)$ система узловых уравнений для цепи на рис. 3.1 имеет вид:

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)-\varphi_2\frac{1}{R_1}-\varphi_3\frac{1}{R_6}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_6}{R_6}+J_4;$$
$$-\varphi_1\frac{1}{R_1}+\varphi_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\varphi_3\frac{1}{R_3}=-\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3};$$
$$-\varphi_1\frac{1}{R_6}-\varphi_2\frac{1}{R_3}-\varphi_3\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)=-\frac{E_3}{R_3}-\frac{E_6}{R_6}.$$

Решение данных узловых уравнений дает следующие численные значения потенциалов узлов:

φ_1 = 88,073 В; φ_2 = 27,193 В; φ_3 = 12,569 В.

По найденным при решении данной системы уравнений потенциалам узлов в соответствии с законом Ома для участка цепи с источником ЭДС, определяются токи ветвей на основании соотношений:

$$I_1=\frac{\varphi_2-\varphi_1+E_1}{R_1};\ I_2=\frac{-\varphi_2+E_2}{R_2};\ I_3=\frac{\varphi_3-\varphi_2+E_3}{R_3};\ I_4=\frac{-\varphi_1}{R_4};\ I_5=\frac{\varphi_3}{R_5};$$

$$I_6=\frac{\varphi_1-\varphi_3-E_6}{R_6}.$$

Отсюда численные значения токов ветвей: I_1 = 1,956 А; I_2 = 0,187 А; I_3 = 1,769 А; I_4 = –2,936 А; I_5 = 0,251 А; I_6 = 2,02 А, что полностью соответствует результату, полученному по методу контурных токов.

1.1.4. Баланс мощностей

Выражение баланса мощностей определяет правильность расчета электрической цепи.

Суммарная активная мощность источников:

$$P_И=E_1I_1+E_2I_2+E_3I_3+J_4U_4-E_6I_6,$$

где $U_4=-R_4I_4$ – напряжение на зажимах источника тока J_4 (положительное направление от узла 1 к узлу 0).

Суммарная активная мощность приемников

$$P_П=R_1I_1^2+R_2I_2^2+R_3I_3^2+R_4I_4^2+R_5I_5^2+R_6I_6^2.$$

Если цепь рассчитана корректно, то выполняется равенство (баланс мощностей)

$$P_И=P_П.$$

В рассматриваемом примере $P_{\text{И}}$ = 503,367 Вт и $P_{\text{П}}$ = 503,367 Вт

3.2. Методические указания к заданию 1.2

Рассмотрим пункты выполнения задания 1.2 на примере цепи на рис. 3.2.

Параметры цепи: $E_1=150\ В;\ \psi_1=-\pi/6\ рад;\ E_2=300\ В;$ $\psi_2=-\pi/4\ рад;\ f=50\ Гц;\ R_1=15\ Ом;\ R_2=10\ Ом;\ L_1=0{,}1\ Гн;$ $L_2=0{,}15\ Гн;\ L_3=0{,}12\ Гн;\ L_4=0{,}18\ Гн;\ C_1=160\ мкФ;\ C_2=200\ мкФ;$ $C_3=250\ мкФ.$

1.2.1. Расчет комплексных сопротивлений ветвей

Рассчитаем сопротивление реактивных элементов исходной цепи:

$$X_{L1}=2\pi fL_1=2\pi\cdot50\cdot0{,}1=31{,}4\ \text{Ом};$$

$$X_{L2}=2\pi fL_2=2\pi\cdot50\cdot0{,}15=47{,}1\ \text{Ом};$$

$$X_{L3}=2\pi fL_3=2\pi\cdot50\cdot0{,}12=37{,}7\ \text{Ом};$$

$$X_{L4}=2\pi fL_4=2\pi\cdot50\cdot0{,}18=56{,}5\ \text{Ом}.$$

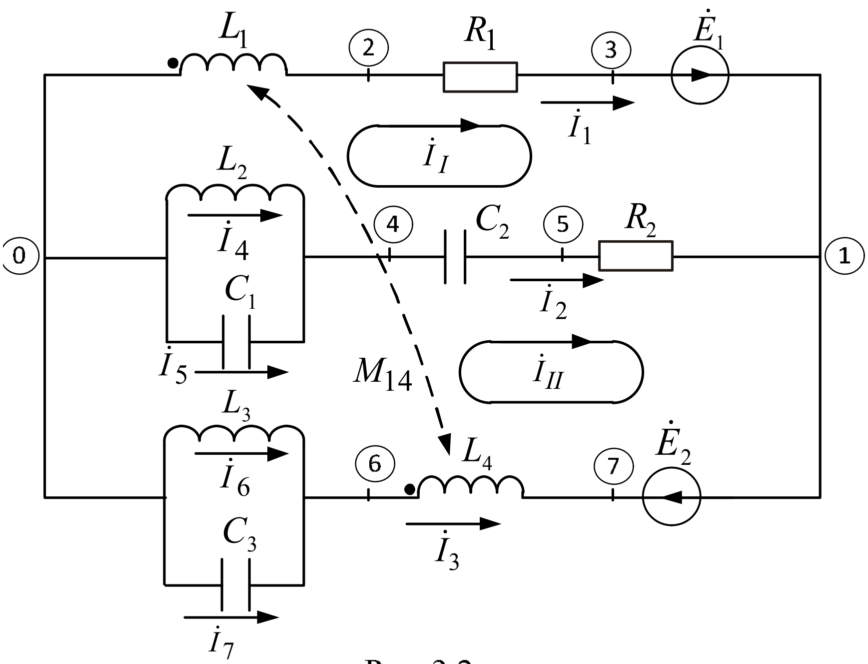


Рис. 3.2

Рассчитаем сопротивление реактивных элементов исходной цепи:

$$X_{L1} = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}1 = 31{,}4 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}15 = 47{,}1 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 2\pi f L_3 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}12 = 37{,}7 \text{ Ом};$$

$$X_{L4} = 2\pi f L_4 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}18 = 56{,}5 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = 19{,}9 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 15{,}9 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{2\pi f C_3} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 12{,}7 \text{ Ом}.$$

Заменим параллельно соединенные элементы во второй и третьей ветвях эквивалентными последовательными соединениями

$$\underline{Z}_{21} = \frac{jX_{L2}(-jX_{C1})}{jX_{L2} - jX_{C1}} = -j34{,}47 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{33} = \frac{jX_{L3}(-jX_{C3})}{jX_{L3} - jX_{C3}} = -j19{,}25 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление первой ветви

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 15 + j31{,}4 = 34{,}8e^{j1{,}125} \text{ Ом};$$

второй ветви –

$\underline{Z}_2 = R_2 + \underline{Z}_{21} - jX_{C2} = 10 - j34{,}47 - j15{,}9 = 10 - j50{,}37 = 51{,}38e^{-j1{,}375}$ Ом;

третьей ветви –

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{33} + jX_{L4} = -j19{,}25 + j36{,}5 = j37{,}25 = 37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ Ом.}$$

1.2.2. Определение токов в ветвях схемы

Рассчитаем токи методом двух узлов. Напряжение $\dot{U}_{10}$ между узлами 1 и 0 цепи

$$\dot{U}_{10} = \frac{\dfrac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} - \dfrac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\dfrac{150e^{-j\frac{\pi}{6}}}{34{,}8e^{j1{,}125}} - \dfrac{300e^{j\frac{\pi}{4}}}{37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}}{\dfrac{1}{34{,}8e^{j1{,}125}} + \dfrac{1}{51{,}38e^{-j1{,}375}} + \dfrac{1}{37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}} =$$

$$= -103{,}51 - j129{,}28 = 165{,}61e^{-j2{,}246} \ B.$$

Тогда в соответствии с законом Ома для участка цепи с источником ЭДС для выбранных положительных направлений токов получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{150e^{-j\frac{\pi}{6}} - 165{,}61e^{-j2{,}246}}{34{,}8e^{j1{,}125}} = 4{,}3 - j5{,}38 = 6{,}89e^{-j0{,}897} \text{А;}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_2} = \frac{-165{,}61e^{-j2{,}246}}{51{,}38e^{-j1{,}375}} = -2{,}08 + j2{,}47 = 3{,}22e^{j2{,}271} \text{А;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{-\dot{E}_2 - \dot{U}_{10}}{\underline{Z}_3} = \frac{-300e^{j\frac{\pi}{4}} - 165{,}61e^{-j2{,}246}}{37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}} = -2{,}22 + j2{,}91 = 3{,}67e^{j2{,}222} \text{А.}$$

Отсюда токи в параллельно соединенных элементах:

$$\dot{I}_4 = \frac{\underline{Z}_{21}\dot{I}_2}{jX_{L2}} = \frac{-j34{,}47 \cdot 3{,}22e^{j2{,}271}}{j47{,}1} = 1{,}52 - j1{,}81 = 2{,}36e^{-j0{,}871} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\underline{Z}_{21}\dot{I}_5}{-jX_{C1}} = \frac{-j34{,}47 \cdot 3.22e^{j2{,}271}}{-j19{,}9} = -3{,}6 + j4{,}27 = 5{,}58e^{j2{,}271} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_6=\frac{\underline{Z}_{33}\dot{I}_3}{jX_{L3}}=\frac{-j19,25\cdot 3,67e^{j2,222}}{j37,7}=1,14-j1,49=1,87e^{-j0,919}\text{ А};$$

$$\dot{I}_7=\frac{\underline{Z}_{33}\dot{I}_3}{-jX_{C3}}=\frac{-j19,25\cdot 3,67e^{j2,222}}{-j12,7}=-3,6+j4,4=5,54e^{j2,222}\text{ А}.$$

1.2.3. Баланс мощностей

Суммарная комплексная мощность источников

$$\underline{S}_И=P_И+jQ_И=\dot{E}_1\overset{*}{I}_1-\dot{E}_2\overset{*}{I}_3=$$

$$=150e^{-j\frac{\pi}{6}}\cdot 6,89e^{j0,897}-300e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 3,67e^{-j2,222}=815,37+j1466\ ВА.$$

Отсюда активная мощность источников

$$P_И=815,37\ Вт$$

и реактивная

$$Q_И=1466\ ВАр.$$

Суммарная активная мощность нагрузки

$$P_Н=R_1I_1^2+R_2I_2^2=156,89^2+10\cdot 3,22^2=815,35\ Вт.$$

Суммарная реактивная мощность нагрузки:

$$Q_Н=X_{L1}I_1^2+X_{L2}I_4^2-X_{C1}I_5^2-X_{C2}I_2^2+X_{L3}I_6^2-X_{C3}I_7^2+X_{L4}I_3^2=$$
$$=31,4\cdot 6,89^2+47,1\cdot 2,36^2-19,9\cdot 5,58^2-15,9\cdot 3,22^2+$$
$$+37,7\cdot 1,87^2-12,7\cdot 5,54^2+56,5\cdot 3,67^2=1466\ ВАр.$$

Таким образом, баланс мощностей $P_И=P_Н;\ \ Q_И=Q_Н$ выполняется, а следовательно, токи рассчитаны правильно.

1.2.4. Построение векторной диаграммы токов и топографической диаграммы напряжений

Векторная диаграмма токов (рис. 3.3) строится по результатам их расчёта.

Для построения топографической диаграммы рассчитаем напряжения на элементах цепи на рис. 3.2, а по ним − потенциалы узлов.

Напряжения на элементах цепи:

$$\dot{U}_{02}=jX_{L1}\cdot\dot{I}_1=j31,4\cdot 6,89e^{-j0,897}=168,93+j134,98\ В;$$

$$\dot{U}_{23}=R_1\dot{I}_1=15\cdot 6,89e^{-j0,897}=64,89-j80,7\ В;$$

$$\dot{U}_{13}=\dot{E}_1=129,9-j75\ В;$$

$$\dot{U}_{04} = jX_{L2}\dot{I}_4 = j47{,}1\cdot 2{,}36e^{-j0{,}871} = 85 + j71{,}57\ B;$$
$$\dot{U}_{45} = -jX_{C2}\dot{I}_2 = -j15{,}9\cdot 3{,}22e^{-j2{,}271} = 39{,}27 + j33{,}06$$
$$\dot{U}_{51} = R_2\dot{I}_2 = 10\cdot 3{,}22e^{-j2{,}271} = -20{,}76 + j24{,}66\ B;$$
$$\dot{U}_{06} = jX_{L3}\dot{I}_6 = j37{,}7\cdot 1{,}87e^{-j0{,}919} = 56{,}09 + j42{,}78\ B;$$
$$\dot{U}_{67} = jX_{L4}\dot{I}_3 = j56{,}5\cdot 3{,}67e^{j2{,}222} = -164{,}71 - j125{,}63\ B;$$
$$\dot{U}_{71} = \dot{E}_2 = 212{,}13 + j212{,}13\ B.$$

Тогда, приняв $\varphi_0 = 0$, получим следующие значения потенциалов узлов:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_0 - \dot{U}_{02} = 0 - (168{,}93 + j134{,}98) = -168{,}93 - j134{,}98\ B;$$
$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 - \dot{U}_{23} = (-168{,}93 - j134{,}98) - (64{,}48 - j80{,}7) = -233{,}41 - j54{,}28\ B;$$
$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 + \dot{U}_{13} = (-233{,}41 - j54{,}28) + (129{,}9 - j75) = -103{,}51 - j129{,}28\ B;$$
$$\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_0 - \dot{U}_{04} = 0 - (85 + j71{,}57) = -85 - j71{,}57\ B;$$
$$\dot{\varphi}_5 = \dot{\varphi}_4 - \dot{U}_{45} = (-85 - j71{,}57) - (39{,}27 + j33{,}06) = -124{,}27 - j104{,}62\ B;$$
$$\dot{\varphi}_6 = \dot{\varphi}_0 - \dot{U}_{06} = 0 - (56{,}09 + j42{,}78) = -56{,}09 - j42{,}78\ B;$$
$$\dot{\varphi}_7 = \dot{\varphi}_6 - \dot{U}_{67} = (-56{,}09 - j42{,}78) - (-164{,}71 - j125{,}63) = 108{,}62 + j85{,}85\ B.$$

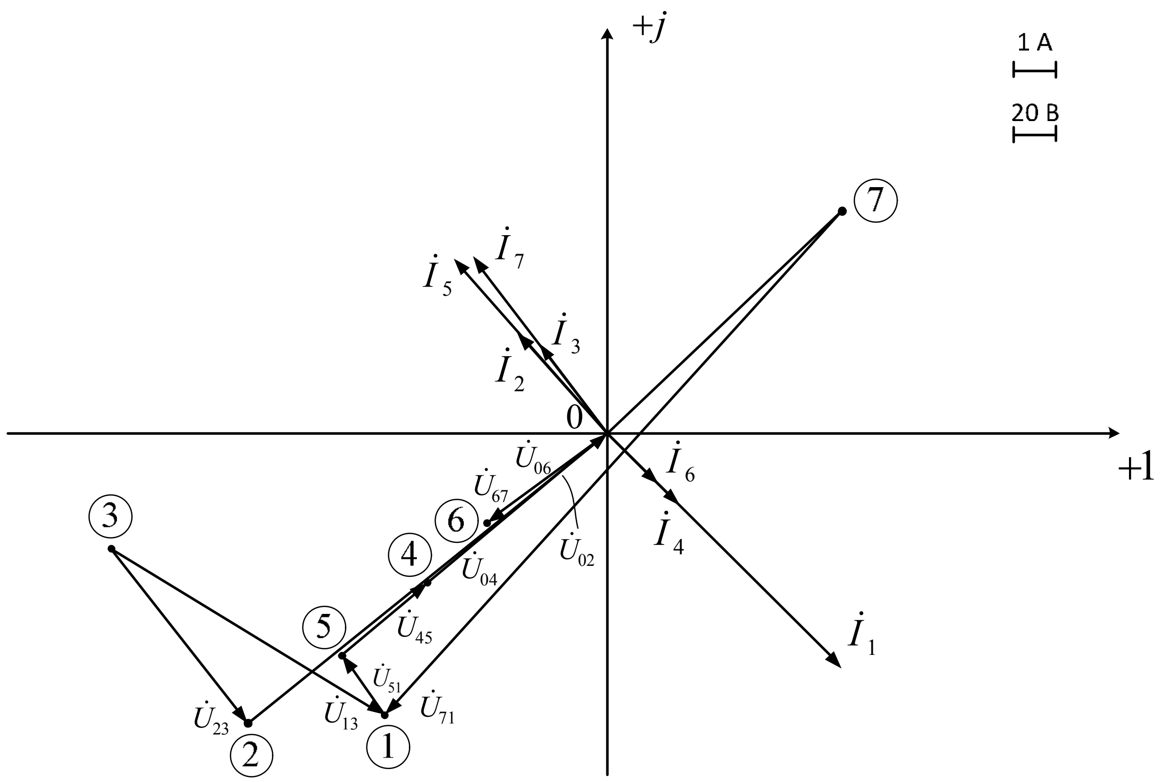


Рис. 3.3

1.2.5. Построение графиков временных зависимостей ЭДС и тока

Переход от комплексов действующих значений ЭДС $\dot{E}_i = E_i e^{j\psi_i}$ и тока $\dot{I}_k = I_k e^{j\psi_k}$ к соответствующим временным функциям этих переменных осуществляется по формулам:

$$e_i = \sqrt{2} E_i \sin(2\pi f t + \psi_i)\ B;$$

$$i_k = \sqrt{2} I_k \sin(2\pi f t + \psi_k)\ A.$$

По этим формулам строятся соответствующие им графики временных зависимостей $e_i(\omega t)$ и $i_k(\omega t)$.

В качестве примера на рис. 3.4 приведены кривые ЭДС $e_1 = \sqrt{2}\cdot 150 \sin(\omega t + \psi_1) = 212 \sin(\omega t - \pi/6)\ B$ и тока $i_1 = \sqrt{2}\cdot 6{,}89 \sin(\omega t - 0{,}897) = 9{,}74 \sin(\omega t - 0{,}897)\ A$ в схеме на рис. 3.2.

1.2.6. Расчет тока в последовательной R-L-нагрузке по теореме об активном двухполюснике

Пусть необходимо найти ток в нагрузке, определяемой последовательным R_1-L_1-соединением, т.е. ток $\dot{I}_1$. Тогда в соответствии с теоремой об активном двухполюснике искомый ток определяется выражением

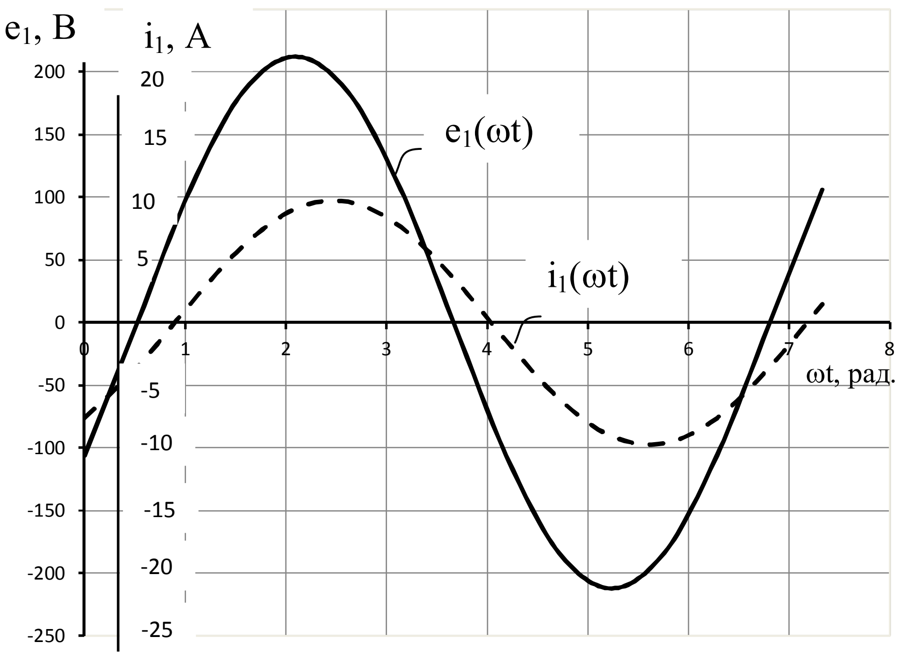


Рис. 3.4

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{xx0-3}}{\underline{Z}_{вх} + (R_1 + jX_{L1})},$$

где $\dot{U}_{xx0-2}$ – направление холостого хода на зажимах 0-3, определяемое по схеме на рис. 3.5,а, а $\underline{Z}_{вх}$ – входное сопротивление активного двухполюсника по отношению к зажимам 0-3, определяемое по схеме на рис. 3.5,б.

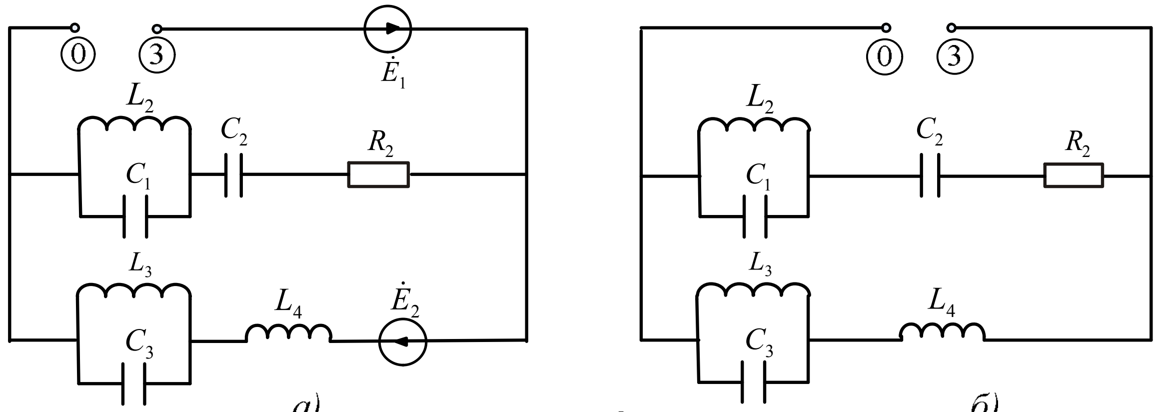


Рис. 3.5

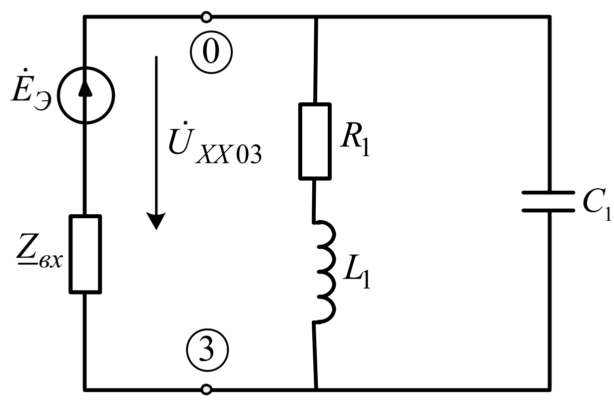


Рис. 3.6

Напряжение $\dot{U}_{xx0-3}$ определяется формулой

$$\dot{U}_{xx0-3} = \dot{U}_{01} + \dot{E}_1,$$

где

$$\dot{U}_{01}=\frac{\dfrac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_2}+\dfrac{1}{\underline{Z}_3}}=\frac{\dfrac{300e^{j\frac{\pi}{4}}}{37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}}{\dfrac{1}{51{,}38e^{-j1{,}375}}+\dfrac{1}{37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}}=934{,}29e^{j0{,}33}B.$$

Таким образом,

$$\dot{U}_{xx0-3}=934{,}29e^{j0{,}33}+150e^{-j\frac{\pi}{6}}=1039e^{j0{,}221}\ B.$$

Входное сопротивление пассивного двухполюсника на рис. 3.5,б

$$\underline{Z}_{вх}=\frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\frac{51{,}38e^{-j1{,}375}\cdot 37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}{51{,}38e^{-j1{,}375}+37{,}25e^{j\frac{\pi}{2}}}=116{,}09e^{j1{,}115}Ом.$$

Тогда искомый ток

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_{xx0-3}}{\underline{Z}_{вх}+R_1+jX_{L1}}=\frac{1039e^{j0{,}221}}{116{,}09e^{j1{,}115}+15+j31{,}4}=6{,}89e^{-j0{,}897}\ A.$$

Полученный результат совпадает со значением этого тока, полученного ранее методом двух узлов.

1.2.7. Определение ёмкости конденсатора, подключаемого параллельно *R*-*L* нагрузке для получения коэффициента мощности эквивалентной нагрузки, равного единице, и расчет для этого случая $\cos\varphi$ в схеме эквивалентного генератора

Равенство коэффициента мощности, равного единице, цепи, состоящей из последовательной R_1-L_1-нагрузки и параллельно присоединенного к ней конденсатора *C* (рис. 3.6), соответствует условию, при котором проводимость данной цепи будет вещественной (режим резонанса). В соответствии с этим запишем:

$$\underline{Y}=\frac{1}{R_1+jX_{L1}}+\frac{1}{-jX_C}=\frac{R_1-jX_{L1}}{R_1^2+X_{L1}^2}+j\frac{1}{X_C}=\frac{R_1}{R_1^2+X_{L1}^2}+j\left(\frac{1}{X_C}-\frac{X_{L1}}{R_1^2+X_{L1}^2}\right).$$

В соответствии с вышесказанным условием

$$\frac{1}{X_C}-\frac{X_{L1}}{R_1^2+X_{L1}^2}=0$$

или

$$\omega C=\frac{\omega L_1}{R_1^2+X_{L1}^2},$$

откуда искомая емкость

$$C = \frac{L_1}{R_1^2 + X_{L1}^2} = \frac{0,1}{15^2 + 31,4^2} = 82,6\ мкФ.$$

В рассматриваемом режиме результирующая нагрузка для эквивалентного источника с ЭДС $\dot{E}_э = \dot{U}_{xx0-3}$ равна

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{вх} + \frac{1}{\underline{Y}} = \underline{Z}_{вх} + \frac{R_1^2 + X_{L1}^2}{R_1} = 116,09e^{j1,115} + \frac{15^2 + 31,4^2}{15} = 168,03e^{j0,669}\,Ом.$$

Аргумент полученного комплексного сопротивления определяет $\cos\psi$ в схеме эквивалентного генератора:

$$\cos\psi = \cos 0,669 = 0,784.$$

3.3. Методические указания к заданию 1.3

Пусть в цепи на рис. 3.2 имеет место индуктивная связь между катушками L_1 и L_4, коэффициент индуктивной связи $k_{св}$ = 0,7, катушки включены согласно.

1.3.1. Определение токов ветвей при наличии индуктивно связанных элементов

Для принятых на рис. 3.2 направлений контурных токов $\dot{I}_I$ и $\dot{I}_{II}$ запишем систему контурных уравнений с учетом индуктивных связей:

$$\dot{I}_I(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \dot{I}_{II}(\underline{Z}_2 + jX_M) = \dot{E}_1;$$
$$-\dot{I}_I(\underline{Z}_2 + jX_M) + \dot{I}_{II}\underline{Z}_2 = \dot{E}_2.$$

Здесь

$$X_M = 2\pi f M_{14} = 2\pi f k\sqrt{L_1 L_4} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,7 \cdot \sqrt{0,1 \cdot 0,18} = 26,9\ Ом.$$

Подставив в данную систему численные значения входящих в нее параметров, запишем

$$\dot{I}_I(15 + j31,4 + 10 - j50,37) - \dot{I}_{II}(10 - j50,73 + j26,9) = 150e^{-j\frac{\pi}{6}};$$

$$-\dot{I}_I(10 - j50,73 + j26,9) - \dot{I}_{II}(10 - j50,73 + j37,25) = 300e^{j\frac{\pi}{4}},$$

или

$$\dot{I}_I(25 - j18,97) - \dot{I}_{II}(10 - j23,83) = 150e^{-j\frac{\pi}{6}};$$

$$\dot{I}_I(10 - j23,83) - \dot{I}_{II}(10 - j13,48) = 300e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Решив данную систему, получим:

$$\dot{I}_I = 17,47 - j9,84 = 20,07e^{-j0,515}A;$$
$$\dot{I}_{II} = 20 - j3,45 = 20,3e^{-j0,171}A.$$

Токи в ветвях цепи:

$$\dot I_1 = \dot I_I = 17{,}47 - j9{,}84 = 20{,}07 e^{-j0{,}515} A;$$

$$\dot I_2 = -\dot I_I + \dot I_{II} = -(17{,}47 - j9{,}84) + (20 - j3{,}45) = 2{,}53 + j6{,}39 = 6{,}92 e^{j1{,}196} A;$$

$$\dot I_3 = -\dot I_{II} = -20 + j3{,}45 = 20{,}3 e^{j2{,}971} A;$$

$$\dot I_4 = \frac{\underline{Z}_{21}\dot I_2}{jX_{L2}} = \frac{-j34{,}47 \cdot 6{,}92 e^{j1{,}196}}{j47{,}1} = -1{,}85 - j4{,}71 = 5{,}06 e^{-j1{,}945} A;$$

$$\dot I_5 = \frac{\underline{Z}_{21}\dot I_2}{-jX_{C1}} = \frac{-j34{,}47 \cdot 6{,}92 e^{j1{,}196}}{-j19{,}9} = 4{,}37 + j11{,}15 = 11{,}98 e^{j1{,}196} A;$$

$$\dot I_6 = \frac{\underline{Z}_{33}\dot I_3}{jX_{L3}} = \frac{-j19{,}25 \cdot 20{,}3 e^{j2{,}971}}{j37{,}7} = 10{,}22 - j1{,}76 = 10{,}37 e^{-j0{,}171} A;$$

$$\dot I_7 = \frac{\underline{Z}_{33}\dot I_3}{-jX_{C3}} = \frac{-j19{,}25 \cdot 20{,}3 e^{j2{,}971}}{-j12{,}7} = -30{,}22 + j5{,}21 = 30{,}66 e^{j2{,}971} A.$$

1.3.2. Проверка решения по балансу мощностей

Суммарная комплексная мощность источников

$$\underline{S}_И = P_И + jQ_И = \dot E_1 \overset{*}{I}_1 - \dot E_2 \overset{*}{I}_3 = 150 e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot 20{,}07 e^{j0{,}515} - 300 e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 20{,}3 e^{-j2{,}971} =$$
$$= 6523 + j4947\ BA.$$

Отсюда активная мощность источников

$$\underline{P}_И = 6253\ Bm$$

и реактивная

$$Q_И = 4947\ BAp.$$

Суммарная активная мощность нагрузки:

$$P_H = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 15 \cdot 20{,}07^2 + 10 \cdot 6{,}92^2 = 6523\ Bm.$$

Суммарная реактивная мощность нагрузки

$$Q_H = X_{L1} I_1^2 + X_{L2} I_4^2 - X_{C1} I_5^2 + X_{L3} I_6^2 - X_{C3} I_7^2 + X_{L4} I_3^2 + 2X_M I_1 I_3 \cos(\dot I_1 \wedge \dot I_3) =$$
$$= 31{,}4 \cdot 20{,}07^2 + 4{,}71 \cdot 5{,}06^2 - 19{,}9 \cdot 11{,}98^2 - 15{,}9 \cdot 6{,}92^2 + 37{,}7 \cdot 10{,}37^2 -$$
$$-12{,}7 \cdot 30{,}66^2 + 56{,}5 \cdot 20{,}3^2 + 2 \cdot 26{,}9 \cdot 20{,}07 \cdot 20{,}3 \cos(-0{,}515 - 2{,}971) =$$
$$= 4947\ BAp.$$

Таким образом, баланс мощностей:

$$P_И = P_H;$$
$$Q_И = Q_H$$

– выполняется, а следовательно, токи рассчитаны правильно.

3.4. Методические указания к заданию 1.4

Рассмотрим пункты выполнения задания на примере цепи на рис. 3.7.

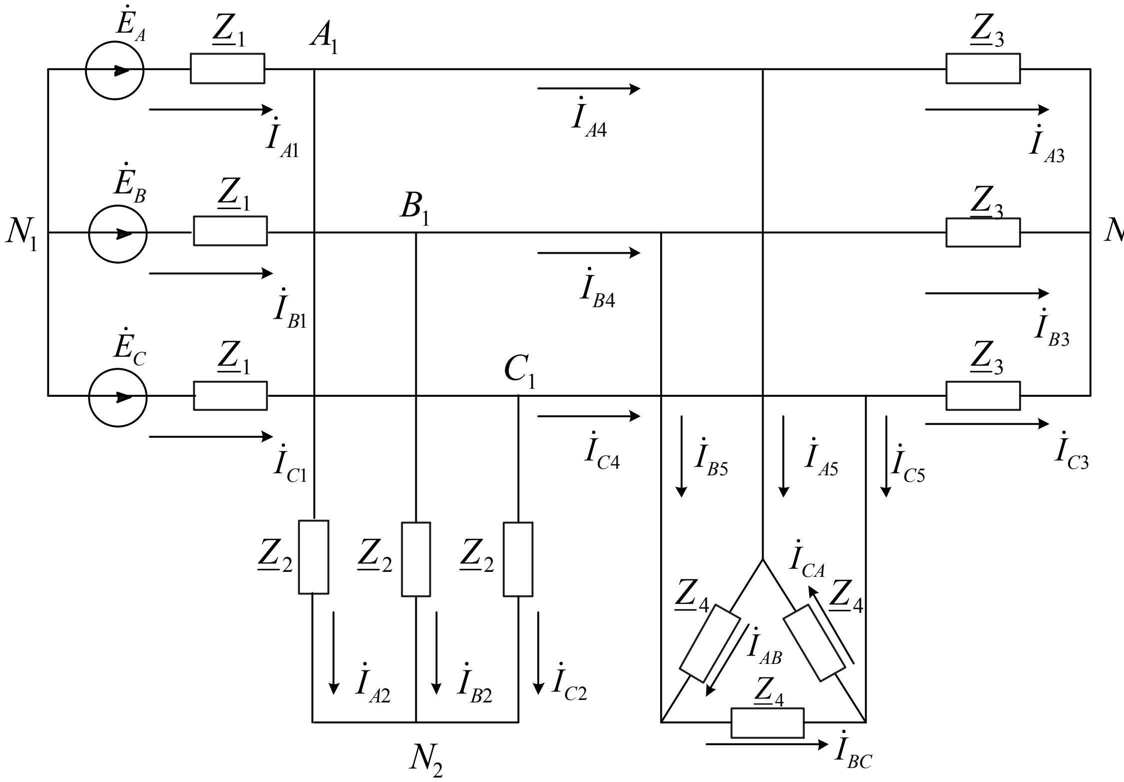


Рис. 3.7

Параметры цепи: $E = 100\,кВ$; $\underline{Z}_1 = j10\,Ом$; $\underline{Z}_2 = 100e^{j\frac{\pi}{6}}\,Ом$; $\underline{Z}_3 = 200e^{j\frac{\pi}{9}}\,Ом$; $\underline{Z}_4 = 300e^{-j\frac{\pi}{8}}\,Ом$.

1.4.1. Расчетная однофазная схема замещения

Поскольку режим работы цепи на рис. 3.7 симметричный, исходная 3-фазная цепь может быть сведена к расчетной однофазной. При этом соединение в треугольник заменяется соединением в звезду, сопротивление фаз в которой (см. стр. 107) $\underline{Z}_5 = \underline{Z}_4/3 = 100e^{-j\frac{\pi}{8}}\,Ом$ (см. рис. 3.8).

1.4.2. Расчет однофазной схемы замещения. Определение токов в исходной цепи

При принятии $\dot{\varphi}_{N1} = \dot{\varphi}_{N2} = \dot{\varphi}_{N3} = 0$, в соответствии с методом узловых потенциалов для цепи на рис. 3.7, будет справедливо уравнение

$$\dot{\varphi}_{A1}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_5}\right) = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_1},$$

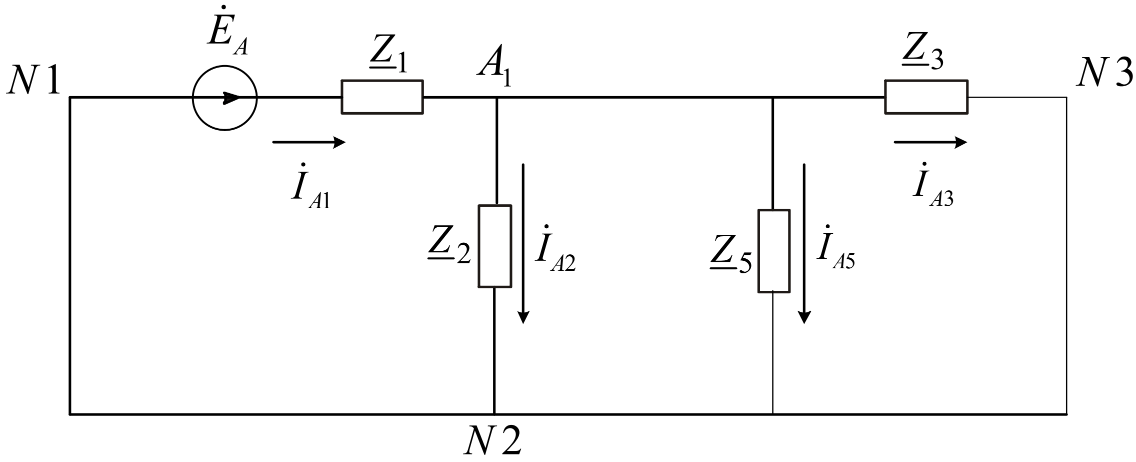


Рис. 3.8

откуда

$$\dot{\varphi}_{A1} = \frac{\dfrac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_1}}{\left(\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} + \dfrac{1}{\underline{Z}_5}\right)} = \frac{\dfrac{100}{j10}}{\dfrac{1}{j10} + \dfrac{1}{100e^{-j\frac{\pi}{6}}} + \dfrac{1}{200e^{j\frac{\pi}{9}}} + \dfrac{1}{100e^{-j\frac{\pi}{8}}}} =$$

$$= 92,72 - j20,37 = 94,94e^{-j0,216}\ кВ.$$

Тогда в соответствии с законом Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{\varphi}_{N1} - \dot{\varphi}_{A1} + \dot{E}_A}{\underline{Z}_1} = \frac{-94,94e^{-j0,216}}{j10} = 2,16e^{-j0,343} = 2,04 - j0,73\ кА;$$

$$\dot{I}_{A2} = \frac{\dot{\varphi}_{A1} - \dot{\varphi}_{N2}}{\underline{Z}_2} = \frac{94,94e^{-j0,216}}{100e^{j\frac{\pi}{6}}} = 0,95e^{-j0,74} = 0,7 - j0,64\ кА;$$

$$\dot{I}_{A3} = \frac{\dot{\varphi}_{A1} - \dot{\varphi}_{N3}}{\underline{Z}_3} = \frac{-94,94e^{-j0,216}}{200e^{j\frac{\pi}{9}}} = 0,48e^{-j0,565} = 0,4 - j0,25\ кА;$$

$$\dot{I}_{A5} = \frac{\dot{\varphi}_{A1} - \dot{\varphi}_{N2}}{\underline{Z}_5} = \frac{94,94e^{-j0,216}}{100e^{-j\frac{\pi}{6}}} = 0,95e^{j0,176} = 0,94 + j0,17\ кА.$$

Токи в исходной цепи:

$$\dot{I}_{B1} = \dot{I}_{A1}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 2,16e^{-j0,343} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 2,16e^{-j2,438} = -1,65 - j1,4\ кА;$$

$$\dot{I}_{C1} = \dot{I}_{A1}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 2,16e^{-j0,343} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 2,16e^{j1,751} = -0,39 + j2,13\ кА;$$

$$\dot{I}_{B2} = \dot{I}_{A2}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{-j0,74} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{-j2,834} = -0,91 - j0,2\,кА;$$

$$\dot{I}_{C2} = \dot{I}_{A2}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{-j0,74} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{j1,335} = 0,2 + j0,93\,кА;$$

$$\dot{I}_{B3} = \dot{I}_{A3}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,48e^{-j0,565} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,48e^{-j2,66} = -0,42 - j0,22\,кА;$$

$$\dot{I}_{C3} = \dot{I}_{A3}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,48e^{-j0,565} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,48e^{j1,529} = 0,02 + j0,47\,кА;$$

$$\dot{I}_{A4} = \dot{I}_{A1} - \dot{I}_{A2} = 2,16e^{-j0,343} - 0,95e^{-j0,74} = 1,34 - j0,09 = 1,34e^{-j0,065}\,кА;$$

$$\dot{I}_{B4} = \dot{I}_{A4}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 1,34e^{-j0,065} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 1,34e^{-j2,16} = -0,74 - j1,11\,кА;$$

$$\dot{I}_{C4} = \dot{I}_{A4}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 1,34e^{-j0,065} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 1,34e^{j2,029} = -0,59 + j1,2\,кА;$$

$$\dot{I}_{B5} = \dot{I}_{A5}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{j0,176} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{-j1,918} = -0,32 - j0,89\,кА;$$

$$\dot{I}_{C5} = \dot{I}_{A5}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{j0,176} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,95e^{j2,271} = -0,61 + j0,73\,кА.$$

Потенциалы узлов *B1* и *C1*:

$$\dot{\varphi}_{B1} = \dot{\varphi}_{A1}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 94,94e^{-j0,216}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 94,94e^{-j2,311} = -64 - j70,12\,кВ;$$

$$\dot{\varphi}_{C1} = \dot{\varphi}_{A1}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 94,94e^{-j0,216}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 94,94e^{j1,878} = -28,73 + j90,49\,кВ.$$

Тогда по закону Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{\varphi}_{A1} - \dot{\varphi}_{B1}}{\underline{Z}_4} = \frac{94,94e^{-j0,216} - 94,94e^{-j2,311}}{300e^{-j\frac{\pi}{8}}} = 0,55e^{j0,7} = 0,42 + j0,35\,кА,$$

и токи в других фазах, соединенных в треугольник:

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB}e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,55e^{j0,7} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 0,55e^{-j1,349} = 0,1 - j0,54\,кА;$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB}e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,55e^{j0,7} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = 0,55e^{j2,794} = -0,52 + j0,19\,кА.$$

1.4.3.Построение векторных диаграмм

Векторная диаграмма токов и напряжений для ветвей с индексом “1” строятся по результатам предыдущего расчёта их комплексных величин и приведены на рис. 3.9.

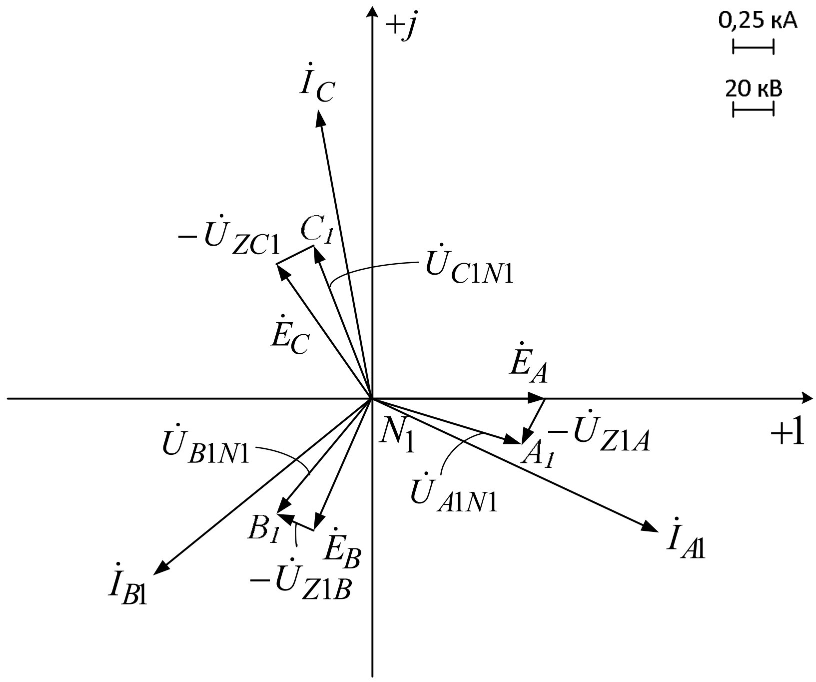


Рис. 3.9

1.4.4. Мгновенные значения токов и напряжений

Для переменных в ветвях с индексом “1” в соответствии с результатами расчета запишем:

$$i_{A1} = \sqrt{2} \cdot 2{,}16 \sin(2\pi ft - 0{,}343) = 3{,}05 \sin(314t - 0{,}343)\ кA;$$

$$i_{B1} = 3{,}05 \sin(314t - 2{,}438)\ кA;$$

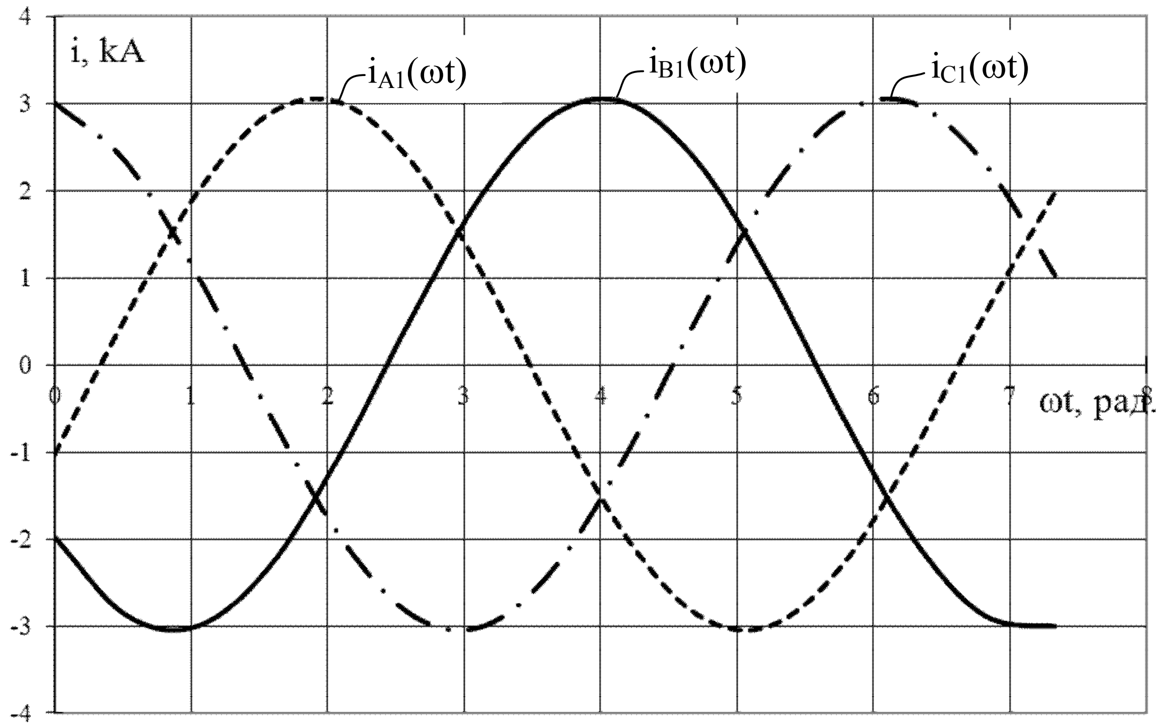
$$i_{C1} = 3{,}05 \sin(314t + 1{,}751)\ кA;$$

$$u_{A1N1} = \sqrt{2} \cdot 94{,}94 \sin(314t - 0{,}216) = 134{,}27 \sin(314t - 0{,}216)\ кB;$$

$$u_{B1N1} = 134{,}27 \sin(314t - 2{,}311)\ кB;$$

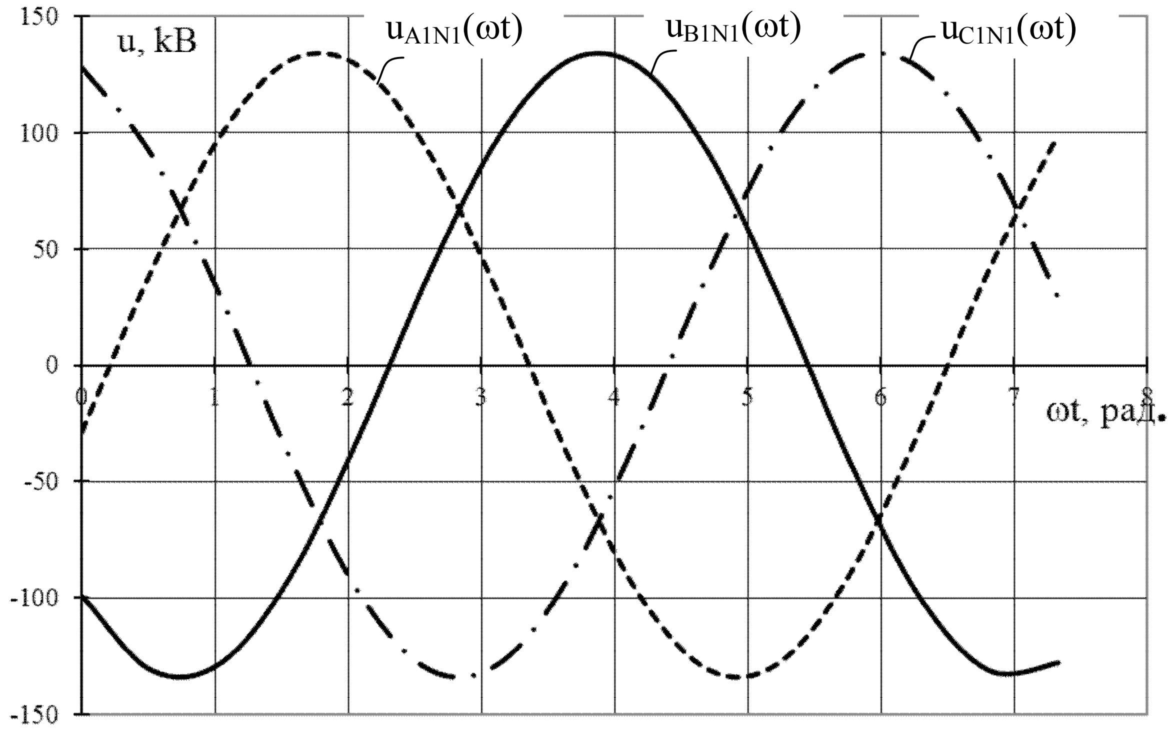
$$u_{C1N1} = 134{,}27 \sin(314t + 1{,}878)\ кB.$$

По этим формулам строятся соответствующие им графики временных зависимостей, представленные на рис. 3.10,а и 3.10,б.



i, kA
iA1(ωt)
iB1(ωt)
iC1(ωt)
ωt, рад.

а)



u, kB
uA1N1(ωt)
uB1N1(ωt)
uC1N1(ωt)
ωt, рад.

б)

Рис. 3.10

4. Методические указания к выполнению курсовой работы второго (повышенного) уровня сложности

4.1. Методические указания к заданию 2.1

Рассмотрим вопросы первой части курсовой работы на примере электрической цепи рис. 4.1.

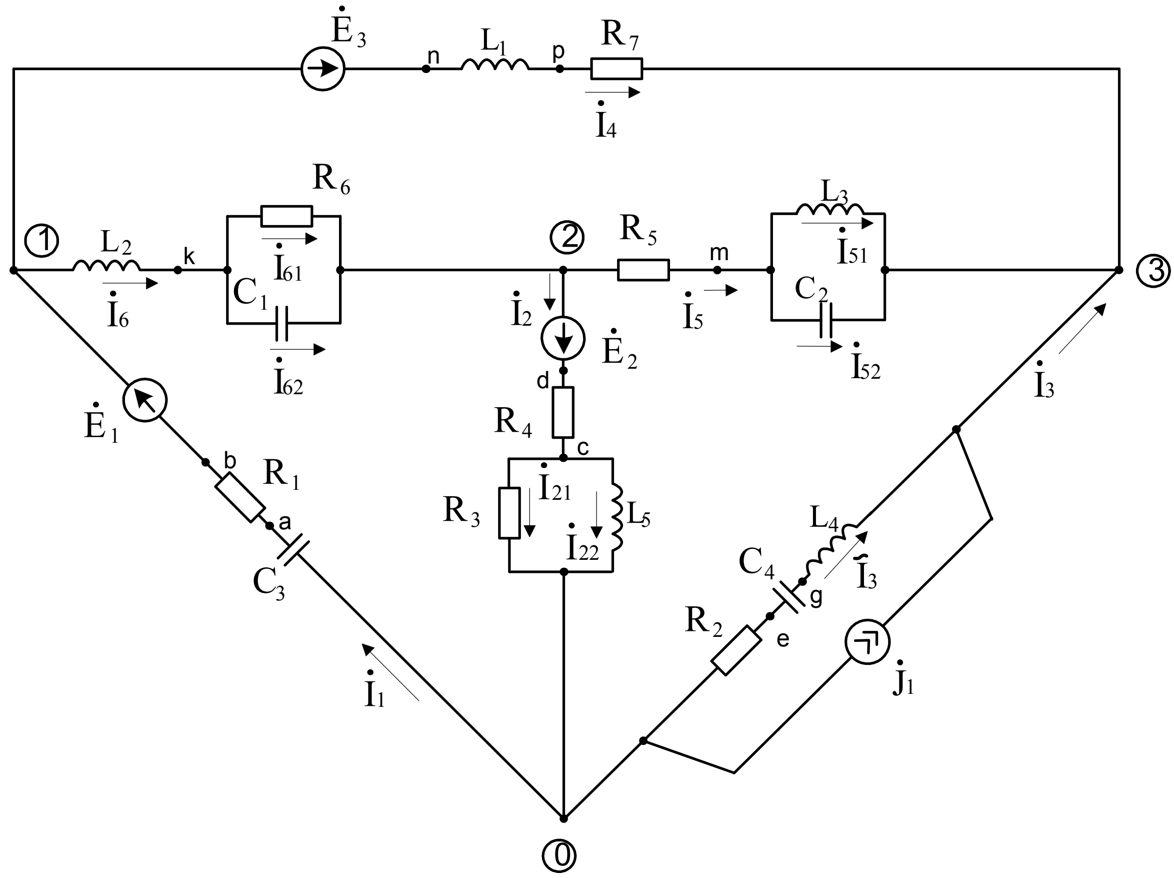


Рис. 4.1

Параметры цепи:

$\dot{E}_1 = 100e^{j45^\circ}$ В; $\dot{E}_2 = 40e^{-j30^\circ}$ В; $\dot{E}_3 = 80e^{j60^\circ}$ В; $\dot{J}_1 = 2e^{-j45^\circ}$ А; $f = 50$ Гц;
$R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 15$ Ом; $R_4 = 6$ Ом; $R_5 = 25$ Ом; $R_6 = 40$ Ом;
$R_7 = 30$ Ом; $L_1 = 0{,}08$ Гн; $L_2 = 0{,}06$ Гн; $L_3 = 0{,}1$ Гн; $L_4 = 0{,}12$ Гн;
$L_5 = 0{,}02$ Гн; $C_1 = 20$ мкФ; $C_2 = 40$ мкФ; $C_3 = 80$ мкФ; $C_4 = 50$ мкФ.
Угловая частота $\omega = 2\pi f = 314$ с$^{-1}$.

Реактивные сопротивления цепи:

– индуктивные сопротивления:

$X_{L1} = \omega L_1 = 25{,}1$ Ом; $X_{L2} = \omega L_2 = 18{,}85$ Ом;

$X_{L3} = \omega L_3 = 31{,}4\,\text{Ом}$; $X_{L4} = \omega L_4 = 37{,}7\,\text{Ом}$;
$X_{L5} = \omega L_5 = 6{,}28\,\text{Ом}$;

– емкостные сопротивления:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 159{,}2\,\text{Ом};\ X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = 79{,}6\,\text{Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = 39{,}8\,\text{Ом};\ X_{C4} = \frac{1}{\omega C_4} = 63{,}7\ \text{Ом}.$$

4.1.1. Всю цепь синусоидального тока можно представить состоящей из так называемых обобщенных ветвей. На рис. 4.2 представлена K-я обобщенная ветвь. Как правило, обобщенные ветви цепи, содержащие источники электрической энергии (ветви 1, 2, 3, 4 на рис. 4.1) содержат или источник ЭДС $\dot{E}_K$ (ветви 1, 2, 4), или источник тока $\dot{J}_K$ (ветвь 3); ветви без источников электрической энергии представлены только комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_K$.

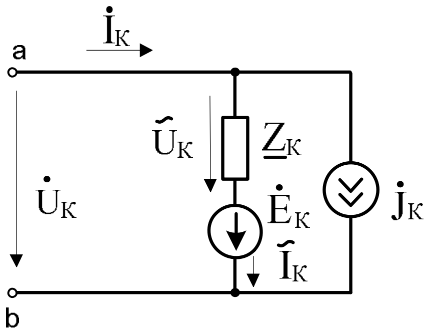


Рис. 4.2

Представив исследуемую цепь (рис. 4.1) состоящей из обобщенных ветвей (рис. 4.2), получим схему, изображенную на рис. 4.3.

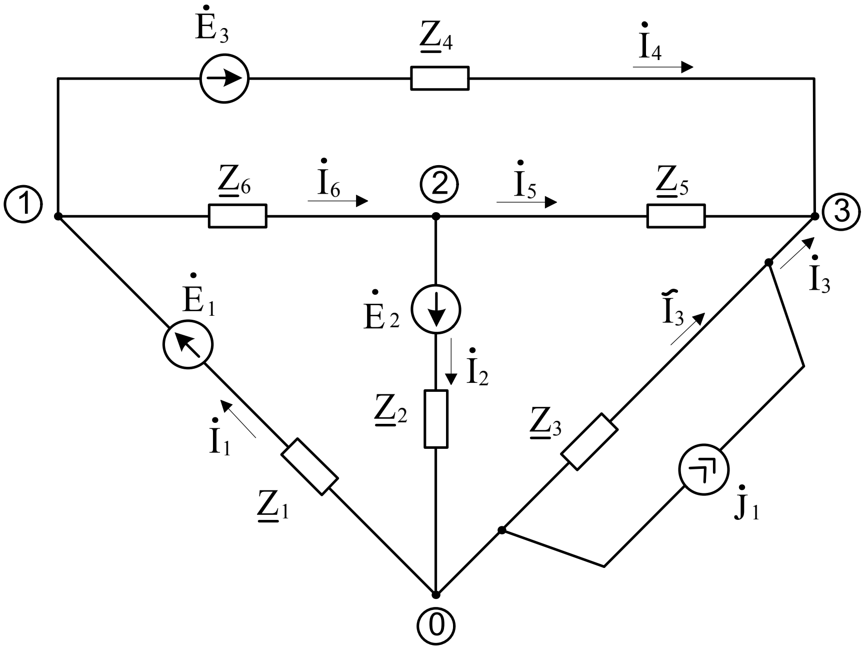


Рис. 4.3

Комплексные сопротивления ветвей этой цепи будут равны:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{c3} = 10 - j39{,}8 \text{ Ом}; \ \underline{Z}_2 = R_4 + \frac{jR_3 X_{L5}}{R_3 + jX_{L5}} = 8{,}24 + j5{,}35 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_2 + j(X_{L4} - X_{C4}) = 20 - j25{,}96 \text{ Ом}; \ \underline{Z}_4 = R_7 + jX_{L1} = 30 + j25{,}1 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_5 = R_5 + \frac{jX_{L3}(-jX_{C2})}{j(X_{L3} - X_{C2})} = 25 + j51{,}9 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_6 = \frac{-jR_6 X_{C1}}{R_6 - jX_{C1}} + jX_{L2} = 37{,}6 + j9{,}39 \text{ Ом}.$$

4.1.2. Направленный граф исследуемой цепи представлен на рис. 4.4, при этом сплошными линиями изображены ветви дерева, а пунктирными – ветви связей графа. Стрелками условно выбраны направления токов и напряжений ветвей. При сквозной нумерации ветвей первыми нумеруются ветви дерева графа, а уже затем − ветви связей графа.

Топологические матрицы исследуемой схемы.

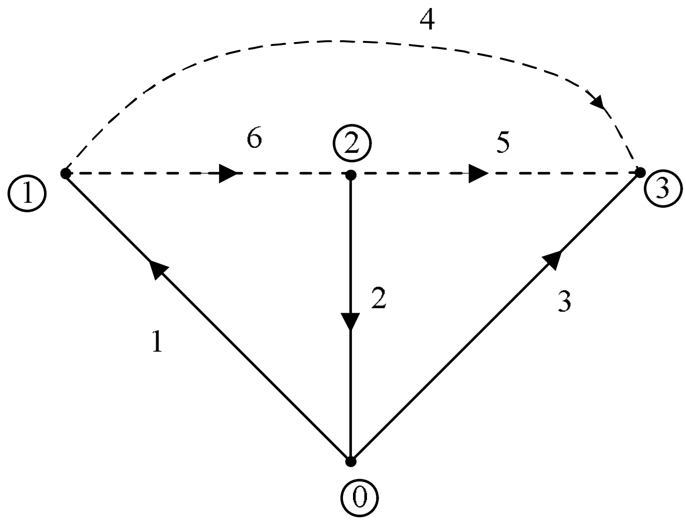


Рис. 4.4

Матрица инциденций (узловая матрица).

Номера узлов

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 - \text{Номера ветвей} \end{array} \\ [A] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{c:c:c|c:c:c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Матрица главных контуров

Номера контуров

$$[B]=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\ \text{– Номера ветвей} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} +1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array} = \left[[B_T];[1]\right]$$

Ветви дерева	Ветви связей

Из структур матриц $[A]$ и $[B]$ следует, что для исследуемой цепи можно составить следующее число независимых уравнений:

- 6 – по первому и второму законам Кирхгофа;
- 3 – по методу контурных токов;
- 3 – по методу узловых потенциалов.
-

4.1.3. Матрица сопротивлений обобщенных ветвей (Ом)

$$[Z]=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 10-j39,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,24+j5,35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20-j25,96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30+j25,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25+j51,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,6+j9,39 \end{bmatrix}.$$

Матрицы источников ЭДС [E] (B) и источников тока [J] (A):

$$[E]=\begin{bmatrix}\dot{E}_1\\ \dot{E}_2\\ 0\\ \dot{E}_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100e^{j45^\circ}\\ 40e^{-j30^\circ}\\ 0\\ 80e^{j60^\circ}\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\qquad [J]=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{J}_1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2e^{-j45^\circ}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

4.1.4. Независимые уравнения по первому закону Кирхгофа в матричной форме

$$[A][I]=[0], \qquad (4.1)$$

где

$$[I]=\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\\ \dot{I}_3\\ \dot{I}_4\\ \dot{I}_5\\ \dot{I}_6\end{bmatrix}$$ – матрица - столбец токов обобщенных ветвей.

Раскрывая матрицы (4.1), получаем систему независимых уравнений цепи, составленных по первому закону Кирхгофа

$$\begin{aligned}-\dot{I}_1+\dot{I}_4+\dot{I}_6&=0;\\ \dot{I}_2+\dot{I}_5-\dot{I}_6&=0;\\ -\dot{I}_3-\dot{I}_4-\dot{I}_5&=0.\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Независимые уравнения по второму закону Кирхгофа в матричной форме

$$[B][Z][I]=[B]([E]+[Z][J]). \qquad (4.3)$$

Выполнив произведение матриц, получим систему независимых уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1\dot{I}_1-\underline{Z}_3\dot{I}_3+\underline{Z}_4\dot{I}_4&=\dot{E}_1-\underline{Z}_3\dot{J}_1+\dot{E}_3;\\ -\underline{Z}_2\dot{I}_2-\underline{Z}_3\dot{I}_3+\underline{Z}_5\dot{I}_5&=-\dot{E}_2-\underline{Z}_3\dot{J}_1;\\ \underline{Z}_1\dot{I}_1+\underline{Z}_2\dot{I}_2+\underline{Z}_6\dot{I}_6&=\dot{E}_1+\dot{E}_2.\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Решая, системы (4.2) и (4.4), можно определить токи во всех ветвях.

4.1.5. Метод контурных токов основан на том, что токи всех ветвей могут быть выражены через значения токов связей:

$$[I] = [B]^t [I_S], \tag{4.5}$$

где $[I_S] = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix}$ – матрица столбец токов связей.

Подставив (4.5) в (4.3), получим матричное уравнение по методу контурных токов:

$$[Z_K][I_S] = [E_K], \tag{4.6}$$

где $[Z_K] = [B][\underline{Z}][B]^t$ – матрица контурных сопротивлений;

$[E_K] = [B]([\dot{E}] + [\underline{Z}][J])$ – матрица - столбец контурных ЭДС.

$$[Z_k] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 & \underline{Z}_3 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_6 \end{bmatrix};$$

$$[E_K] = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \underline{Z}_3 \dot{J}_1 + \dot{E}_3 \\ -\dot{E}_2 - \underline{Z}_3 \dot{J}_1 \\ \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \end{bmatrix}.$$

Решая уравнение (4.6), находим токи связей (А):

$$[I_S] = \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = [Z_K]^{-1}[E_K] = \begin{bmatrix} 2,33e^{j92.1^\circ} \\ 1,57e^{j126^\circ} \\ 0,484e^{j115,5^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи обобщенных ветвей (4.5) (А):

$$[I]=[B]^t[I_S]=\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\\ \dot{I}_3\\ \dot{I}_4\\ \dot{I}_5\\ \dot{I}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2,78e^{j96,1^\circ}\\ 1,1e^{-j49,4^\circ}\\ 3,73e^{-j74,3^\circ}\\ 2,33e^{j92,1^\circ}\\ 1,57e^{j126^\circ}\\ 0,484e^{j115,5^\circ}\end{bmatrix}.$$

4.1.6. В основе метода узловых потенциалов лежит обобщенный закон Ома (закон Ома для участка цепи, содержащей источник ЭДС), согласно которому токи $[\dot{I}]$, протекающие через комплексные сопротивления обобщенных ветвей, могут быть определены через напряжения обобщенных ветвей $[\dot{U}]$ с помощью следующего матричного выражения:

$$[I]=[Y][U]+[Y][E], \tag{4.7}$$

где $[U]$ – матрица - столбец комплексных напряжений на обобщенных ветвях; $[Y]=[Z]^{-1}$ – матрица комплексных проводимостей обобщенных ветвей.

Комплексные напряжения ветвей $[U]$ могут быть определены через матрицу-столбец комплексных потенциалов узлов $[\varphi]$ (относительного опорного узла, потенциал которого принят равным нулю) с помощью соотношения

$$[U]=[A]^t[\varphi]. \tag{4.8}$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа (рис. 4.2)

$$[I]=[\tilde{I}]+[J]. \tag{4.9}$$

Подставляя выражение (4.9) в уравнение (4.1) с учетом выражений (4.7) и (4.8), получим матричное уравнение узловых потенциалов

$$[A][Y][A]^t[\varphi]+[A]([Y][E]+[J])=[0]$$

или

$$[Y_У][\varphi]=[J_У], \tag{4.10}$$

где $[Y_У]=[A][Y][A]^t$ – матрица узловых проводимостей; $[J_У]=-[A]([Y][E]+[J])$ – матрица узловых токов.

Для исследуемой цепи:

$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_6} \end{bmatrix};$$

$$[Y_У]=[A][Y][A]^t=\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_6} & -\frac{1}{\underline{Z}_6} & -\frac{1}{\underline{Z}_4} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_6} & \frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_5}+\frac{1}{\underline{Z}_6} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_4} & -\frac{1}{\underline{Z}_5} & \frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_5} \end{bmatrix};$$

$$[J_У]=-[A]([Y][E]+[J])=\begin{bmatrix} \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1}-\frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_4} \\ -\frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_2} \\ \dot{J}_1+\frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_4} \end{bmatrix}.$$

Решая уравнение (4.10), находим потенциалы узлов цепи (В):

$$[\varphi]=[Y_У]^{-1}[J_У]=\begin{bmatrix} 48,0e^{j139^\circ} \\ 29,6e^{j145^\circ} \\ 72,7e^{j27.1^\circ} \end{bmatrix}.$$

Определяем по соотношению (4.8) напряжение ветвей (В):

$$[U]=\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix}=[A]^t[\varphi]=\begin{bmatrix} 48,0e^{-j41^\circ} \\ 29,6e^{j145^\circ} \\ 72,7e^{-j152,9^\circ} \\ 101,0e^{-j179^\circ} \\ 90,5e^{-j169,7^\circ} \\ 18,8e^{j129,5^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи $[\tilde{I}]$ в соответствии с выражением (4.7) (А):

$$[\tilde{I}]=[Y]([U]+[E])=\begin{bmatrix} 2,78e^{j96,1^\circ} \\ 1,1e^{-j49,4^\circ} \\ 2,22e^{-j100,5^\circ} \\ 2,33e^{j92,1^\circ} \\ 1,57e^{j126^\circ} \\ 0,484e^{j115,5^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи обобщенных ветвей $[I]$ (4.9) (А):

$$[I]=\begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\\ \dot I_3\\ \dot I_4\\ \dot I_5\\ \dot I_6\end{bmatrix}=[\tilde I]+[J]=\begin{bmatrix}2,78e^{j96,1^\circ}\\ 1,1e^{-j49,^\circ}\\ 3,73e^{-j74,3^\circ}\\ 2,33e^{j92,1^\circ}\\ 1,57e^{j126^\circ}\\ 0,484e^{j115,5^\circ}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, токи обобщенных ветвей по методу узловых потенциалов получились такими же, как и по методу контурных токов.

В исследуемой цепи вторая, пятая и шестая ветвь содержат параллельно соединенные элементы. Токи в этих элементах можно определить, используя формулу распределения токов по двум параллельным ветвям:

$$\dot I_{21}=\dot I_2\frac{jX_{L5}}{R_3+jX_{L5}}=0,424e^{j17,9^\circ}\ (A);$$

$$\dot I_{22}=\dot I_2\frac{R_3}{R_3+jX_{L5}}=\dot I_2-\dot I_{21}=1,01e^{-j72.1^\circ}\ (A);$$

$$\dot I_{51}=\dot I_5\frac{-jX_{C2}}{j(X_{L3}-X_{C2})}=2,6e^{j126^\circ}\ (A);$$

$$\dot I_{52}=\dot I_5\frac{jX_{L3}}{j(X_{L3}-X_{C2})}=\dot I_5-\dot I_{51}=1,03e^{-j54^\circ}\ (A);$$

$$\dot I_{61}=\dot I_6\frac{-jX_{C1}}{R_6-jX_{C1}}=0,469e^{j101,4^\circ}\ (A);$$

$$\dot I_{62}=\dot I_6\frac{R_6}{R_6-jX_{C1}}=\dot I_6-\dot I_{61}=0,118e^{-j168,6^\circ}\ (A).$$

4.1.7. Баланс мощностей исследуемой цепи.

Для комплексных мощностей справедливо соотношение

$$\underline{S}_{ucm}=\underline{S}_{np},$$

где $\underline{S}_{ucm}$ – сумма комплексных мощностей всех идеальных источников электроэнергии; $\underline{S}_{np}$ –сумма комплексных мощностей всех приемников.

Комплексная мощность двухполюсника может быть определена по формуле

$$\underline{S} = \dot{U}\overset{*}{I},$$

где $\overset{*}{I}$ – сопряженная комплексная величина тока $\dot{I}$; $\dot{U}$ –комплекс напряжения на зажимах двухполюсника, при этом на пассивных двухполюсниках $\dot{U}$ совпадает с направлением $\dot{I}$, а на активных двухполюсниках направления $\dot{U}$ и $\dot{I}$ противоположны.

В исследуемой цепи

$$\underline{S}_{ист} = \dot{E}_1\overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2\overset{*}{I}_2 + \dot{E}_3\overset{*}{I}_4 + \dot{U}_J J_1 = P_{ист} + jQ_{ист},$$

где $\dot{U}_J = \dot{U}_{30} = \dot{\varphi}_3$ – комплекс напряжения на источнике тока.

$$\underline{S}_{ист} = 100e^{j45^\circ}\cdot 2{,}78e^{-j96{,}1^\circ} + 40e^{-j30^\circ}\cdot 1{,}1e^{j49{,}4^\circ} + 80e^{j60^\circ}\cdot 2{,}33e^{-j92{,}1^\circ} +$$

$$+72{,}7e^{j27{,}1^\circ}\cdot 2e^{j45^\circ} = 418{,}4 - j161{,}9 \quad (BA).$$

Комплексная мощность пассивного двухполюсника, комплексное сопротивление которого равно $\underline{Z}$, может быть определена по формуле:

$$\underline{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = \underline{Z}\dot{I}\overset{*}{I} = \underline{Z}I^2,$$

где I – действующее значение тока пассивного двухполюсника.

Для рассматриваемой цепи:

$$\underline{S}_{пр} = P_{пр} + jQ_{пр} = I^2{}_1\underline{Z}_1 + I^2{}_2\underline{Z}_2 + \tilde{I}_3^2\underline{Z}_3 + I^2{}_4\underline{Z}_4 + I^2{}_5\underline{Z}_5 + I^2{}_6\underline{Z}_6 =$$

$$= 2{,}78^2(10 - j39{,}8) + 1{,}1^2(8{,}24 + j5{,}35) + 2{,}22^2(20 - j25{,}96) +$$

$$+2{,}33^2(30 + j25{,}1) + 1{,}57^2(25 + j51{,}9) + 0.484^2(37{,}6 + j9{,}39) =$$

$$= 418{,}4 - j161{,}9 \quad (BA).$$

При расчетах на ПЭВМ относительная погрешность между значениями $\underline{S}_{ист}$ и $\underline{S}_{пр}$ составляет обычно менее 0,1%.

Активная и реактивная мощности источника электрической энергии могут быть определены по формулам:

$$P_{ист} = UI\cos\varphi; \quad Q_{ист} = UI\sin\varphi,$$

где U и I – соответственно действующие значения напряжения и тока источника; φ – сдвиг по фазе (разность начальных фаз) между напряжением и током.

Активная мощность всех источников схемы

$$P_{ucm} = E_1 I_1 \cos(\dot{E}_1 \wedge \dot{I}_1) + E_2 I_2 \cos(\dot{E}_2 \wedge \dot{I}_2) + E_3 I_4 \cos(\dot{E}_3 \wedge \dot{I}_4) +$$
$$+U_J J_1 \cos(\dot{U}_J \wedge \dot{J}_1) = 100 \cdot 2{,}78 \cos(45^\circ - 96{,}1^\circ) + 40 \cdot 1{,}1 \cos(-30^\circ + 49{,}4^\circ) +$$
$$+80 \cdot 2{,}33 \cos(60^\circ - 92{,}1^\circ) + 72{,}7 \cdot 2 \cos(27{,}1^\circ + 45^\circ) = 418{,}4 \quad (Bm).$$

Реактивная мощность источников

$$Q_{ucm} = E_1 I_1 \sin(\dot{E}_1 \wedge \dot{I}_1) + E_2 I_2 \sin(\dot{E}_2 \wedge \dot{I}_2) + E_3 I_4 \sin(\dot{E}_3 \wedge \dot{I}_4) +$$
$$+U_J J_1 \sin(\dot{U}_J \wedge \dot{J}_1) = 100 \cdot 2{,}78 \sin(45^\circ - 96{,}1^\circ) + 40 \cdot 1{,}1 \sin(-30^\circ + 49{,}4^\circ) +$$
$$+80 \cdot 2{,}33 \sin(60^\circ - 92{,}1^\circ) + 72{,}7 \cdot 2 \sin(27{,}1^\circ + 45^\circ) = -161{,}9 \quad (BAp).$$

Активная мощность приемников равна сумме мощностей всех резисторов

$$P_{np} = I^2{}_1 R_1 + I^2{}_2 R_4 + I^2{}_{21} R_3 + \tilde{I}_3^2 R_2 + I^2{}_4 R_7 + I^2{}_5 R_5 + I^2{}_{61} R_6 =$$
$$= 2{,}78^2 \cdot 10 + 1{,}1^2 \cdot 6 + 0{,}424^2 \cdot 15 + 2{,}22^2 \cdot 20 + 2{,}33^2 \cdot 30 +$$
$$+1{,}57^2 \cdot 25 + 0{,}469^2 \cdot 40 = 418{,}4 \quad (Bm).$$

Реактивная мощность приемников равна алгебраической сумме мощностей всех реактивных элементов, при этом реактивная мощность конденсаторов считается отрицательной величиной:

$$Q_{np} = -I^2{}_1 X_{C3} + I^2{}_{22} X_{L5} + \tilde{I}_3^2 (X_{L4} - X_{C4}) + I^2{}_4 X_{L1} + I^2{}_{51} X_{L3} - I^2{}_{52} X_{C2} +$$
$$+I^2{}_6 X_{L2} - I^2{}_{62} X_{C1} = -2{,}78^2 \cdot 39{,}8 + 1{,}01^2 \cdot 6{,}28 + 2{,}22^2 (37{,}7 - 63{,}7) + 2{,}33^2 \cdot 25{,}1 +$$
$$+2{,}6^2 \cdot 31{,}4 - 1{,}03^2 \cdot 79{,}6 + 0{,}484^2 \cdot 18{,}85 - 0{,}118^2 \cdot 159{,}2 = -161{,}9 \quad (BAp).$$

4.1.8. Векторная диаграмма токов представлена на рис. 4.5.

Для построения топографической диаграммы напряжений определим комплексные потенциалы точек электрической цепи, представленной на рис. 4.1. Так как напряжение между любыми точками цепи s и t определяется через разность потенциалов этих точек $\dot{U}_{st} = \dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_t$, то значения потенциалов всех точек могут быть определены через напряжения на элементах цепи и потенциалы узлов, найденных по методу узловых потенциалов.

Потенциалы точек схемы (В):

$$\dot{\varphi}_a = -\dot{U}_{0a} = -\dot{I}_1(-jX_{C3}) = 110{,}5 e^{-j174^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a - \dot{I}_1 R_1 = \varphi_1 - \dot{E}_1 = 113,9e^{-j160^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_c = \dot{I}_{21} R_3 = j\dot{I}_{22} X_{L5} = 6,37e^{j18^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_c + \dot{I}_2 R_4 = \dot{\varphi}_2 + \dot{E}_2 = 10,8e^{-j16,4^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_e = -\tilde{I}_3 R_2 = 44,4e^{j79,5^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_g = \dot{\varphi}_e - \tilde{I}_3(-jX_{C4}) = \dot{\varphi}_3 + j\tilde{I}_3 X_{L4} = 148e^{j6,9^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_1 - j\dot{I}_6 X_{L2} = \dot{\varphi}_2 + \dot{I}_{61} R_6 = \dot{\varphi}_2 - j\dot{I}_{62} X_{C1} = 45e^{j128^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_m = \dot{\varphi}_2 - \dot{I}_5 R_5 = \dot{\varphi}_3 + j\dot{I}_{51} X_{L3} = \dot{\varphi}_3 - j\dot{I}_{52} X_{C2} = 14,9e^{-j94,7^\circ};$$

$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_1 + \dot{E}_3 = 100,8e^{j87,9^\circ};$$

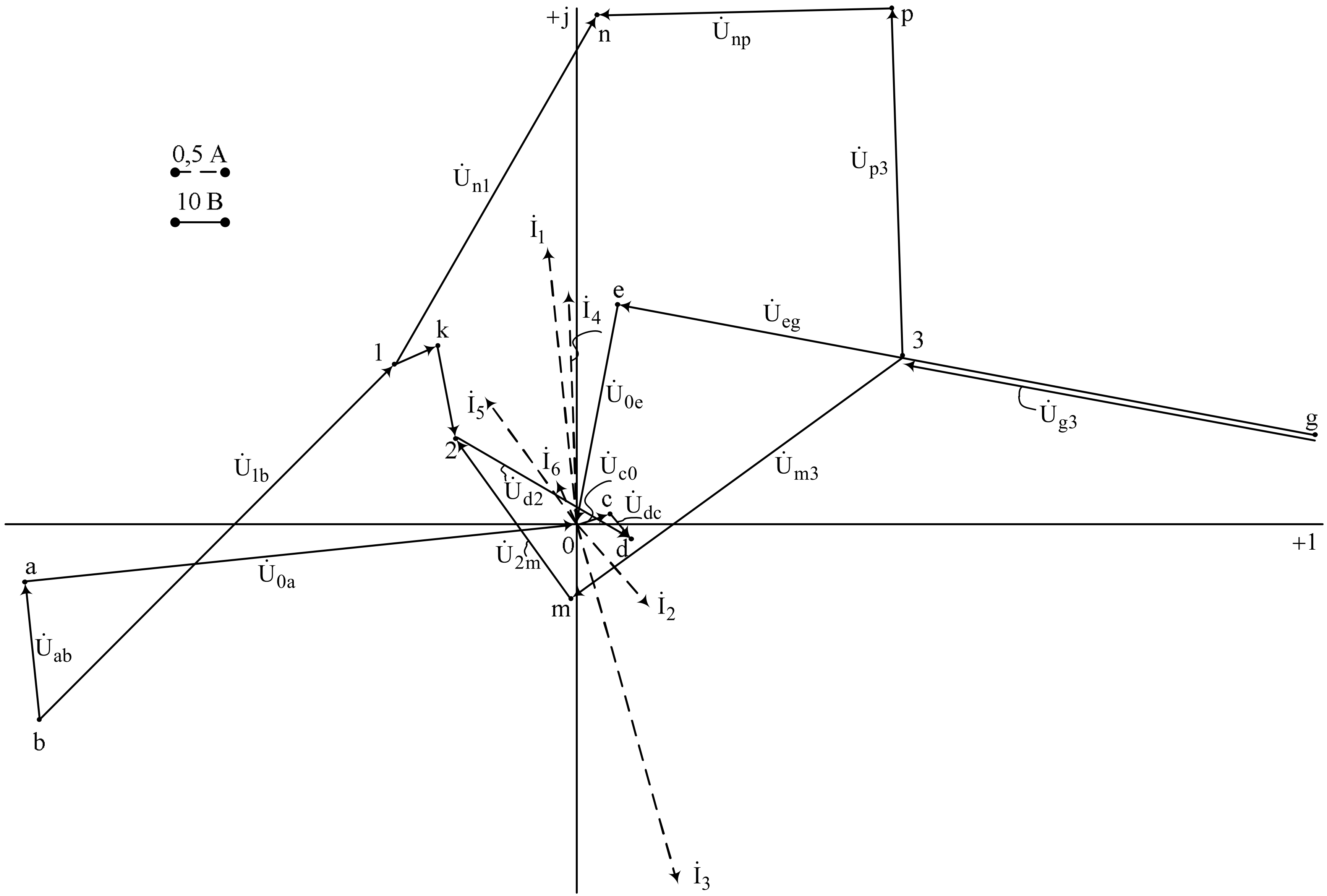
$$\dot{\varphi}_p = \dot{\varphi}_3 + \dot{I}_4 R_7 = \dot{\varphi}_n - j\dot{I}_n X_{L1} = 120,2e^{j58,8^\circ}.$$

Топографическая диаграмма напряжений изображена на рис. 4.5, совмещенной с векторной диаграммой токов.

4.1.9. Выполним построение графиков мгновенных значений ЭДС источника e_1 и тока в нем i_1 (графики временных зависимостей). Перейдя от комплексов $\dot{E}_1 = 100e^{j45^\circ}$ (В) и $\dot{I}_1 = 2,78e^{j96,1^\circ}$ (А) к мгновенным значениям, получим:

$$e_1 = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right) \text{ (В)}; \; i_1 = 2,78\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 96,1^o\right) \text{(А)}.$$

Задаваясь значениями ωt на периоде изменения синусоидальных величин (от 0 до 360^o), построим зависимости величин $e_1(\omega t)$ и $i_1(\omega t)$, приведенные на рис.4.6.


+j
n
$\dot U_{np}$
p
0,5 A
10 B
$\dot U_{n1}$
$\dot U_{p3}$
$\dot I_1$
e
$\dot I_4$
$\dot U_{eg}$
k
3
1
$\dot U_{0e}$
$\dot I_5$
$\dot U_{g3}$
g
2
$\dot U_{1b}$
$\dot I_6$
$\dot U_{c0}$
$\dot U_{m3}$
$\dot U_{d2}$
c
$\dot U_{dc}$
+1
0
d
a
$\dot U_{2m}$
$\dot U_{0a}$
m
$\dot I_2$
$\dot U_{ab}$
b
$\dot I_3$
Рис. 4.5

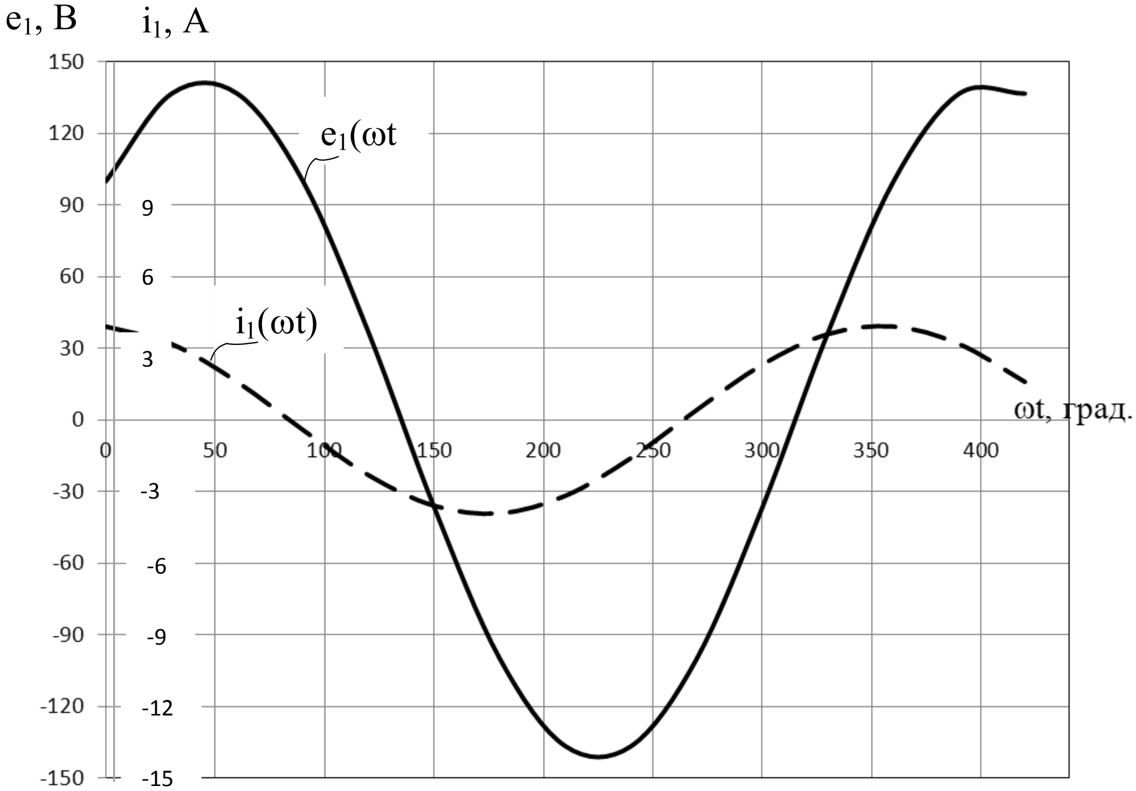


Рис. 4.6

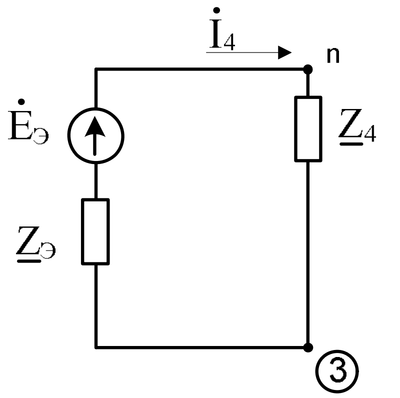


Рис. 4.7

4.1.10. Заменим по отношению к элементам R_7 и L_1 ($\underline{Z}_4$ на рис.4.3) всю цепь эквивалентным активным двухполюсником (рис. 4.7).

Для определения параметров активного двухполюсника $\dot{E}_Э$ и $\underline{Z}_Э$ рассмотрим схему без сопротивления $\underline{Z}_4$ (режим холостого хода по отношению к ветви L_1 и R_7), изображенную на рис. 4.8. При этом напряжение холостого хода между точками n и 3 $\dot{U}_{n3} = \dot{E}_Э$.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура 1-n-3-2-1:

$$\dot{U}_{n3} + \underline{Z}_5 \dot{I}_{5X} - \underline{Z}_6 \dot{I}_{6X} = \dot{E}_3. \quad (4.11)$$

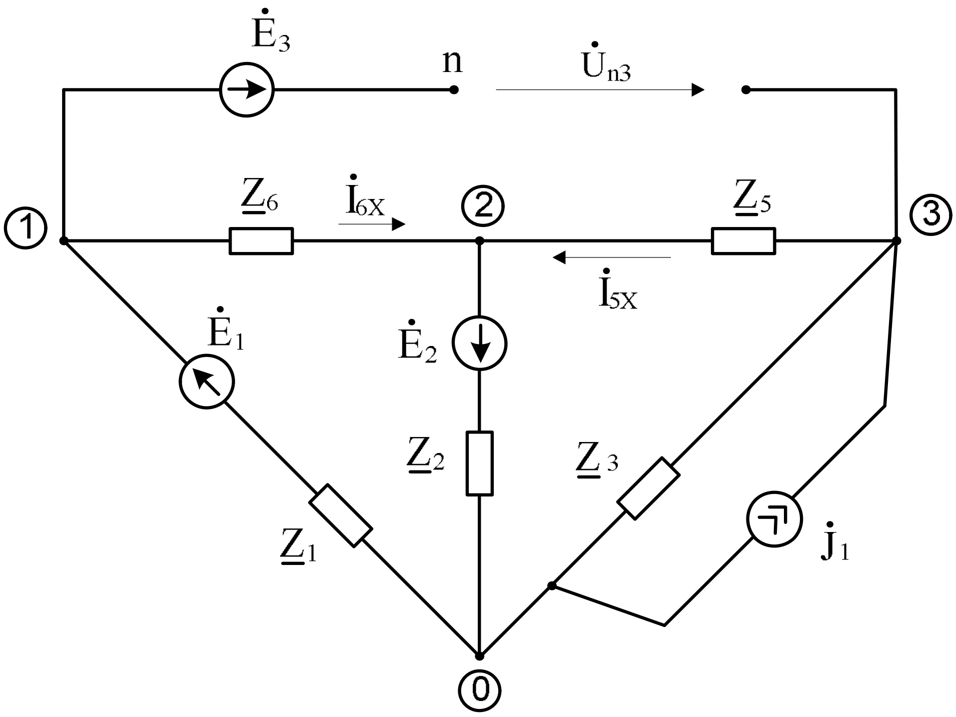


Рис. 4.8

Из уравнения (4.11) можно определить $\dot{U}_{n3}$, если знать токи $\dot{I}_{5X}$ и $\dot{I}_{6X}$. Для нахождения этих токов свернем схему на рис.4.8, заменив источник тока $\dot{J}_1$ источником ЭДС, получим схему, представленную на рис. 4.9, в которой

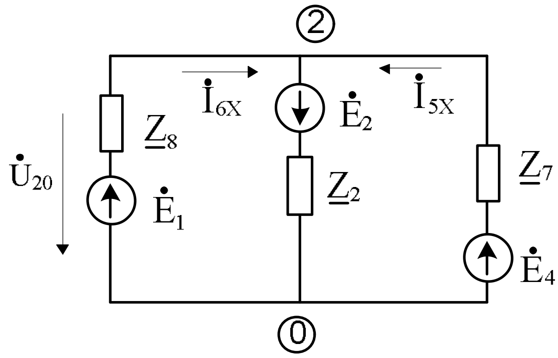


Рис. 4.9

$$\underline{Z}_7 = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 = 45 + j25{,}9 \quad Ом;$$

$$\underline{Z}_8 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_6 = 47{,}6 - j30{,}4 \quad Ом;$$

$$\dot{E}_4 = \underline{Z}_3 \cdot \dot{J}_1 = 65{,}5e^{-j97{,}4^\circ} \quad В.$$

Определим токи $\dot{I}_{5X}$ и $\dot{I}_{6X}$ в цепи на рис.4.9 методом межузлового напряжения. Напряжение между узлами 2 и 0:

$$\dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_1\underline{Y}_8 - \dot{E}_2\underline{Y}_2 + \dot{E}_4\underline{Y}_7}{\underline{Y}_8 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_7} = 37{,}8e^{j142{,}6^\circ} \text{ (В)},$$

где $$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0,08542 - j0,05542 \text{ (См)};$$

$$\underline{Y}_7 = \frac{1}{\underline{Z}_7} = 0,017 - j9,616 \cdot 10^{-3} \text{ (См)};$$

$$\underline{Y}_8 = \frac{1}{\underline{Z}_8} = 0,015 + j9,523 \cdot 10^{-3} \text{ (См)}.$$

Тогда в соответствии с законом Ома для участка цепи, содержащей источник ЭДС, и вторым законом Кирхгофа получим

$$\dot{I}_{5X} = \frac{\dot{E}_4 - \dot{U}_{20}}{\underline{Z}_7} = 1,74e^{-j106.2^\circ} \quad (A);$$

$$\dot{I}_{6X} = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{20}}{\underline{Z}_8} = 1,97e^{j57.9^\circ} \quad (A);$$

$$\dot{E}_Э = \dot{U}_{n3} = \dot{E}_3 - \underline{Z}_5\dot{I}_{5X} + \underline{Z}_6\dot{I}_{6X} = 209,4e^{j93^\circ} \ (B).$$

Для определения эквивалентного сопротивления активного двухполюсника $\underline{Z}_Э$ во внутренней схеме двухполюсника (рис.4.8) примем равными нулю все ЭДС источников и ток источника тока. Условие E=0 соответствует тому, что вместо идеального источника ЭДС можно включить провод, не имеющий сопротивления, а условие J = 0 соответствует обрыву ветви с источником тока. Внутренняя схема рассматриваемого пассивного двухполюсника представлена на рис. 4.10.

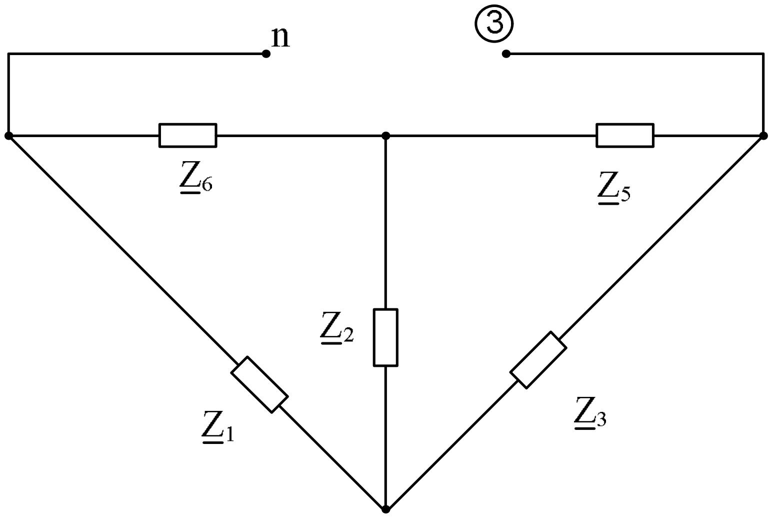


Рис. 4.10

Входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно зажимов подключения выделенной ветви и будет равно $\underline{Z}_Э$. Для определения $\underline{Z}_Э = \underline{Z}_{n3}$ (рис. 4.10), заменив треугольник сопротивлений $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_6$ эквивалентной звездой, получим схему, представленную на рис. 4.11.

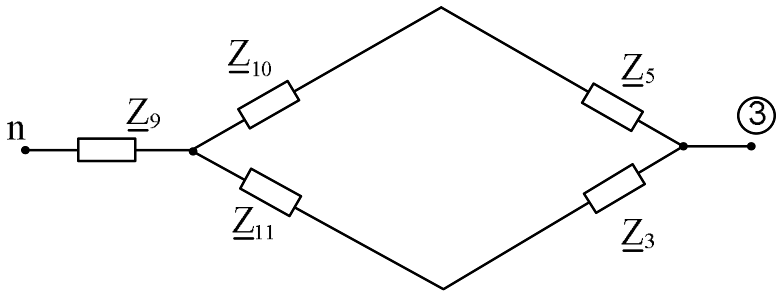


Рис. 4.11

При этом

$$\underline{Z}_9 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_6}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_6} = 20{,}56 - j15{,}9 \text{ (Ом)};$$

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_6}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_6} = 2{,}1 + j5{,}59 \text{ (Ом)};$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_6} = 6{,}23 - j2{,}12 \text{ (Ом)};$$

$$\underline{Z}_Э = \underline{Z}_{n3} = \underline{Z}_9 + \frac{(\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{10})(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{11})}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{10} + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{11}} = 60 - j23{,}7 \text{ (Ом)}.$$

Ток в четвертой ветви после определения параметров эквивалентного активного двухполюсника (рис. 4.7) определится по формуле

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_Э}{\underline{Z}_Э + \underline{Z}_4} = 2{,}33e^{j92{,}1^\circ} \text{ (А)}.$$

Нетрудно видеть, что значение тока $\dot{I}_4$ полностью совпадает с найденным ранее.

4.1.11. Введем индуктивную связь между катушками L_1 и L_2 с коэффициентом индуктивной связи $K_{св} = 0{,}6$. Полагаем, что катушки включены встречно. При наличии взаимной индукции между двумя катушками исследуемую схему можно изобразить в виде, представленном на рис. 4.12.

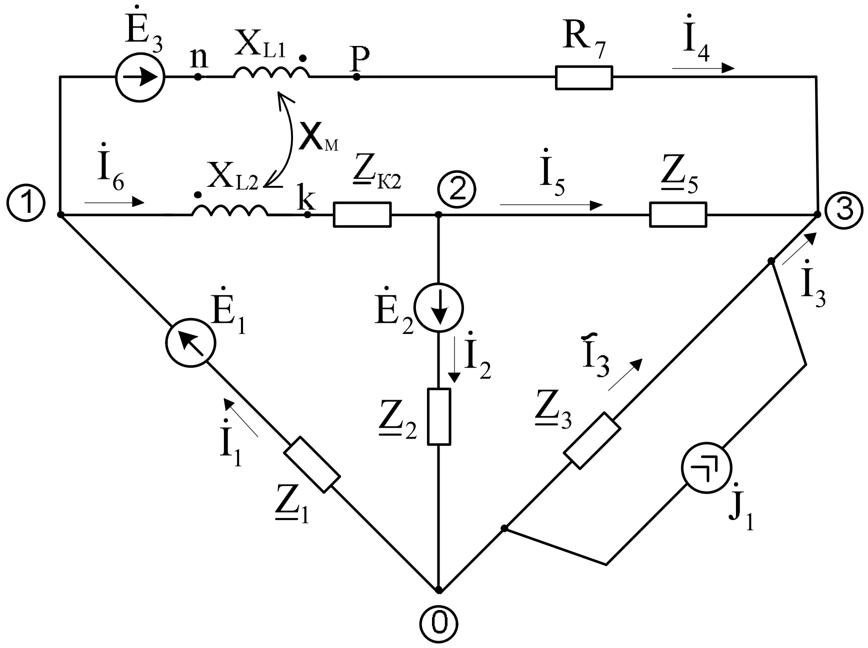


Рис. 4.12

Взаимная индуктивность между катушками

$$M = K_{св}\sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,042 \text{ (Гн)}.$$

Сопротивление взаимной индукции

$$X_M = \omega M = 13,06 \text{ (Ом)}.$$

Комплексное сопротивление $\underline{Z}_{K2}$ в схеме на рис. 4.12

$$\underline{Z}_{K2} = \frac{-jX_{C1} \cdot R_6}{R_6 - jX_{C1}} = 37,6 - j9,46 \text{ (Ом)}.$$

При наличии индуктивной связи между катушками L_1 и L_2 и встречном включении катушек комплексные напряжения на катушках определятся по формулам:

$$\dot{U}_{np} = jX_{L1}\dot{I}_4 - jX_M\dot{I}_6;$$

$$\dot{U}_{1K} = jX_{L2}\dot{I}_6 - jX_M\dot{I}_4.$$

Напряжения на пассивных элементах четвертой и шестой ветви будут соответственно равны

$$\dot{U}_{n3} = \dot{U}_{np} + \dot{U}_{p3} = jX_{L1}\dot{I}_4 - jX_M\dot{I}_6 + R_7\dot{I}_4 = \underline{Z}_4\dot{I}_4 - \underline{Z}_M\dot{I}_6;$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_{1K} + \dot{U}_{K2} = jX_{L2}\dot{I}_6 - jX_M\dot{I}_4 + \underline{Z}_{K2}\dot{I}_6 = \underline{Z}_6\dot{I}_6 - \underline{Z}_M\dot{I}_4,$$

где $\underline{Z}_M = jX_M$ – комплексное сопротивление взаимной индукции (Ом).

Матрица сопротивлений обобщенных ветвей при наличии индуктивной связи (Ом)

$$[Z] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 & -\underline{Z}_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_M & 0 & \underline{Z}_1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если между катушками имеется индуктивная связь, то матрица $[Z]$ уже не будет диагональной. На пересечении строк и столбцов $[Z]$ соответствующих ветвей с индуктивной связью между катушками, появятся комплексные сопротивления взаимной индукции между этими ветвями. При этом $\underline{Z}_M$ берутся со знаком "+", если катушки включены согласно, и "–" – если катушки включены встречно.

Вид уравнений в матричной форме, составленных по второму закону Кирхгофа (4.3), не зависит от наличия или отсутствия индуктивной связи между катушками, меняется только структура матрицы $[Z]$. Выполнив в общем виде операции с матрицами в выражении (4.3), получим систему независимых уравнений, составленных по II закону Кирхгофа для рассматриваемой цепи:

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_1\dot{I}_1 - \underline{Z}_3\dot{I}_3 + \underline{Z}_4\dot{I}_4 - \underline{Z}_M\dot{I}_6 = \dot{E}_1 - \underline{Z}_3\dot{J}_1 + \dot{E}_3; \\ &-\underline{Z}_2\dot{I}_2 - \underline{Z}_3\dot{I}_3 + \underline{Z}_5\dot{I}_5 = -\dot{E}_2 - \underline{Z}_3\dot{J}_1; \\ &\underline{Z}_1\dot{I}_1 + \underline{Z}_2\dot{I}_2 - \underline{Z}_M\dot{I}_4 + \underline{Z}_6\dot{I}_6 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Если токи ветвей $[I]$ выразить через токи связей (4.5) и подставить в соотношение (4.12), то получится система уравнений по методу контурных токов.

Преимущество матричных уравнений цепей с использованием топологических матриц заключается в том, что вид уравнений по методу контурных токов (4.6) или методу узловых потенциалов (4.10) не зависит от наличия или отсутствия индуктивных связей между катушками. Как уже отмечалось, меняется только структура матрицы $[Z]$. Так, в рассматриваемой цепи матрица $[Z_K]$ (4.6) будет иметь следующую структуру:

$$[Z_K]=[B][Z][B]^t=\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4 & \underline{Z}_3 & \underline{Z}_1-\underline{Z}_M \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_5 & -\underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_1-\underline{Z}_M & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

Необходимо отметить, что при использовании метода узловых потенциалов к расчету цепей с взаимно индуктивными связями матрица [Y] в уравнении (4.7) уже не будет диагональной. Кроме того, в строках и столбцах матрицы [Y], соответствующих ветвей с индуктивными связями, элементы уже не будут равны проводимостям соответствующих ветвей. Так, например, для рассматриваемой цепи

$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\underline{Z}_6}{\underline{Z}_M^2-\underline{Z}_4\cdot\underline{Z}_6} & 0 & -\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_M^2-\underline{Z}_4\cdot\underline{Z}_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_M^2-\underline{Z}_4\cdot\underline{Z}_6} & 0 & -\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_M^2-\underline{Z}_4\cdot\underline{Z}_6} \end{bmatrix}.$$

Подставляя матрицу $[Z_K]$ в уравнение (4.6), находим токи связей цепи с взаимоиндуктивностью между катушками (А);

$$[I_s]=[Z_K]^{-1}[E_K]=\begin{bmatrix} 2{,}08e^{j89{,}9^\circ} \\ 1{,}58e^{j122{,}6^\circ} \\ 0{,}67e^{j141{,}2^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи обобщенных ветвей (А)

$$[I]=[B]^t[I_S]=\begin{bmatrix} 2,55e^{j101,7^\circ} \\ 0,966e^{-j70,2^\circ} \\ 3,51e^{-j76,1^\circ} \\ 2,08e^{j89,9^\circ} \\ 1,58e^{j122,6^\circ} \\ 0,67e^{j141,2^\circ} \end{bmatrix}.$$

Подставив значения матрицы $[Y]=[Z]^{-1}$ в (4.10), определим комплексные потенциалы узлов цепи (В):

$$[\varphi]=([A][Y][A]^t)^{-1}[J_Y]=\begin{bmatrix} 34,4e^{j133^\circ} \\ 30,6e^{j152^\circ} \\ 67,9e^{j21,7^\circ} \end{bmatrix}.$$

Напряжение обобщенных ветвей (В) по выражению (4.8)

$$[U]=[A]^t[\varphi]=\begin{bmatrix} 34,4e^{-j47^\circ} \\ 30,6e^{j152^\circ} \\ 67,9e^{-j158,3^\circ} \\ 86,7e^{-j180^\circ} \\ 90,9e^{-j173^\circ} \\ 11,4e^{j71,8^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи $[\tilde{I}]$ по уравнению (4.7) (А)

$$[\tilde{I}] = [Y]([U] + [E]) = \begin{bmatrix} 2{,}55e^{j101{,}7^\circ} \\ 0{,}966e^{-j70{,}2^\circ} \\ 2{,}073e^{-j106^\circ} \\ 2{,}08e^{j89{,}9^\circ} \\ 1{,}58e^{j122{,}6^\circ} \\ 0{,}67e^{j141{,}2^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи обобщенных ветвей [I] (A) по выражению (4.9)

$$[I] = [\tilde{I}] + [J] = \begin{bmatrix} 2{,}55e^{j101{,}7^\circ} \\ 0{,}966e^{-j70{,}2^\circ} \\ 3{,}51e^{-j76{,}1^\circ} \\ 2{,}08e^{j89{,}9^\circ} \\ 1{,}58e^{j122{,}6^\circ} \\ 0{,}67e^{j141{,}2^\circ} \end{bmatrix}.$$

Естественно, токи обобщенных ветвей для цепи с индуктивными связями между катушками по методу узловых потенциалов получились такими же, как и по методу контурных токов.

Токи в параллельно-соединенных элементах 2,5 и 6 обобщенных ветвей определяется по тем же формулам, что для цепи без индуктивных связей (рис. 4.1):

$$\dot{I}_{21} = \dot{I}_2 \frac{jX_{L5}}{R_3 + jX_{L5}} = 0{,}373e^{-j2{,}9^\circ} \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{22} = \dot{I}_2 - \dot{I}_{21} = 0{,}891e^{-j92{,}9^\circ} \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{51} = \dot{I}_5 \frac{-jX_{C2}}{j(X_{L3} - X_{C2})} = 2{,}61e^{j122{,}6^\circ} \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{52} = \dot{I}_5 - \dot{I}_{51} = 1{,}03e^{-j57{,}4^\circ} \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{61} = \dot{I}_6 \frac{-jX_{C1}}{R_6 - jX_{C1}} = 0{,}65e^{j127^\circ} \text{ (A)};$$

$$\dot{I}_{62} = \dot{I}_6 - \dot{I}_{61} = 0{,}163e^{-j143^\circ} \text{ (А)}.$$

Комплекс напряжения на источнике тока

$$\dot{U}_J = \dot{U}_{30} = \dot{\varphi}_3 = 67{,}9e^{j21{,}7^\circ} \text{ (В)}.$$

Комплексная мощность источников

$$S_{ист} = \dot{E}_1 \overset{*}{I}_1 + \dot{E}_2 \overset{*}{I}_2 + \dot{E}_3 \overset{*}{I}_4 + \dot{U}_J \overset{*}{J}_1 = 100e^{j45^\circ} \cdot 2{,}55e^{-j101{,}7^\circ} + 40e^{-j30^\circ} \cdot 0{,}966e^{j70{,}2^\circ} +$$
$$+80e^{j60^\circ} \cdot 2{,}08e^{-j89{,}9^\circ} + 67{,}9e^{j21{,}7^\circ} \cdot 2e^{j45^\circ} = 367{,}5 - j146{,}5 \text{ (ВА)}.$$

Комплексная мощность приемников при наличии индуктивной связи между катушками L_1 и L_2 с учетом уравнения (4.11)

$$\underline{S}_{пр} = I^2{}_1\underline{Z}_1 + I^2{}_2\underline{Z}_2 + \tilde{I}_3^2\underline{Z}_3 + (I^2{}_4\underline{Z}_4 - \underline{Z}_M \dot{I}_6 \overset{*}{I}_4) + I^2{}_5\underline{Z}_5 + (I^2{}_6\underline{Z}_6 - \underline{Z}_M \dot{I}_4 \overset{*}{I}_6) =$$
$$= 2{,}55^2(10 - j39{,}8) + 0{,}966^2(8{,}24 + j5{,}35) + 2{,}073^2(20 - j25{,}96) +$$
$$+2{,}08^2(30 + j25{,}1) - j13{,}06 \cdot 0{,}67e^{j141{,}2^\circ} \cdot 2{,}08e^{-j89{,}9^\circ} + 1{,}58^2(25 + j51{,}9) +$$
$$+0{,}67^2(37{,}6 + j9{,}39) - j13{,}06 \cdot 2{,}08e^{j89.9^\circ} \cdot 0{,}67e^{-j141.2^\circ} = 367{,}5 - j146{,}5 \;\; (BA).$$

Активная мощность цепи

$$\underline{P}_и = E_1 I_1 \cos(\dot{E}_1 \wedge \dot{I}_1) + E_2 I_2 \cos(\dot{E}_2 \wedge \dot{I}_2) + E_3 I_4 \cos(\dot{E}_3 \wedge \dot{I}_4) +$$
$$+U_J J_1 \cos(\dot{U}_J \wedge \dot{J}_1) = 100 \cdot 2{,}55 \cos(45^\circ - 101{,}7^\circ) + 40 \cdot 0{,}966 \cos(-30^\circ + 70{,}2^\circ) +$$
$$+80 \cdot 2{,}08 \cos(60^\circ - 89{,}9^\circ) + 67{,}9 \cdot 2 \cos(21{,}7^\circ + 45^\circ) = 367{,}5 \quad (Вт).$$

Реактивная мощность цепи

$$\underline{P}_и = E_1 I_1 \sin(\dot{E}_1 \wedge \dot{I}_1) + E_2 I_2 \sin(\dot{E}_2 \wedge \dot{I}_2) + E_3 I_4 \sin(\dot{E}_3 \wedge \dot{I}_4) +$$
$$+U_J J_1 \sin(\dot{U}_J \wedge \dot{J}_1) = 100 \cdot 2{,}55 \sin(45^\circ - 101{,}7^\circ) + 40 \cdot 0{,}966 \sin(-30^\circ + 70{,}2^\circ) +$$
$$+80 \cdot 2{,}08 \sin(60^\circ - 89{,}9^\circ) + 67{,}9 \cdot 2 \sin(21{,}7^\circ + 45^\circ) = -146{,}5 \quad (BAp).$$

Суммарная активная мощность, обусловленная взаимной индукцией, равна нулю. Следовательно, активная мощность всех приемников цепи будет равна сумме мощностей всех резисторов независимо от того, имеются или отсутствуют индуктивные связи между катушками:

$$P_{пр} = I^2{}_1 R_1 + I^2{}_2 R_4 + I^2{}_{21} R_3 + \tilde{I}_3^2 R_2 + I^2{}_4 R_7 + I^2{}_5 R_5 + I^2{}_{61} R_6 =$$
$$= 2{,}55^2 \cdot 10 + 0{,}966^2 \cdot 6 + 0{,}373^2 \cdot 15 + 2{,}073^2 \cdot 20 + 2{,}08^2 \cdot 30 +$$
$$+1{,}58^2 \cdot 25 + 0{,}65^2 \cdot 40 = 367{,}5 \quad (Вт).$$

При наличии индуктивной связи между катушками в выражении для реактивной мощности приемников появится составляющая, обусловленная взаимоиндукцией. Так как катушки включены встречно, то эта составляющая войдет в сумму реактивных мощностей со знаком "минус":

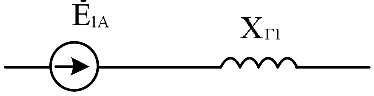
$$Q_{пр} = -I^2{}_1 X_{C3} + I^2{}_{22} X_{L5} + \tilde{I}_3^2 (X_{L4} - X_{C4}) + I^2{}_4 X_{L1} + I^2{}_{51} X_{L3} -$$
$$-I^2{}_{52} X_{C2} + I^2{}_6 X_{L2} - I^2{}_{62} X_{C1} - 2X_M I_4 I_6 \cos(\dot{I}_4 \hat{\ } \dot{I}_6) = -2{,}55^2 \cdot 39{,}8 + 0{,}891^2 \cdot 6{,}28 +$$
$$+2{,}073^2 (37{,}7 - 63{,}7) + 2{,}08^2 \cdot 25{,}1 + 2{,}61^2 \cdot 31{,}4 - 1{,}03^2 \cdot 79{,}6 + 0{,}67^2 \cdot 18{,}85 -$$
$$-0{,}163^2 \cdot 159{,}2 - 2 \cdot 13{,}06 \cdot 2{,}08 \cdot 0{,}67 \cos(89{,}9^\circ - 141{,}2^\circ) = -146{,}5 \ (ВАр).$$

4.2. Методические указания к заданию 2.2

Рассмотрим пункты выполнения к заданию 2.2 на примере трехфазной цепи, схема которой в однолинейном исполнении представлена на рис.4.13. Цепь состоит из двух симметричных трехфазных источников Г1 и Г2, нейтрали которых заземлены соответственно через сопротивления $\underline{Z}_{N1}$ и $\underline{Z}_{N2}$, двух приемников Н1 и Н2, при этом фазы приемника Н1 соединены по схеме звезда, и нейтраль соединена с землей через сопротивление $\underline{Z}_n$, а фазы приемника Н2 соединены по схеме треугольник. Источники и приемники цепи соединены пятью линиями электропередачи Л1, Л2, Л3, Л4, Л5.

Схемы замещения и параметры элементов цепи (отнесенные к фазе А).

Источник Г1:



$$\dot{E}_{1A} = 200\ кВ; \quad \underline{Z}_{Г1} = jX_{Г1} = j15\ (Ом).$$

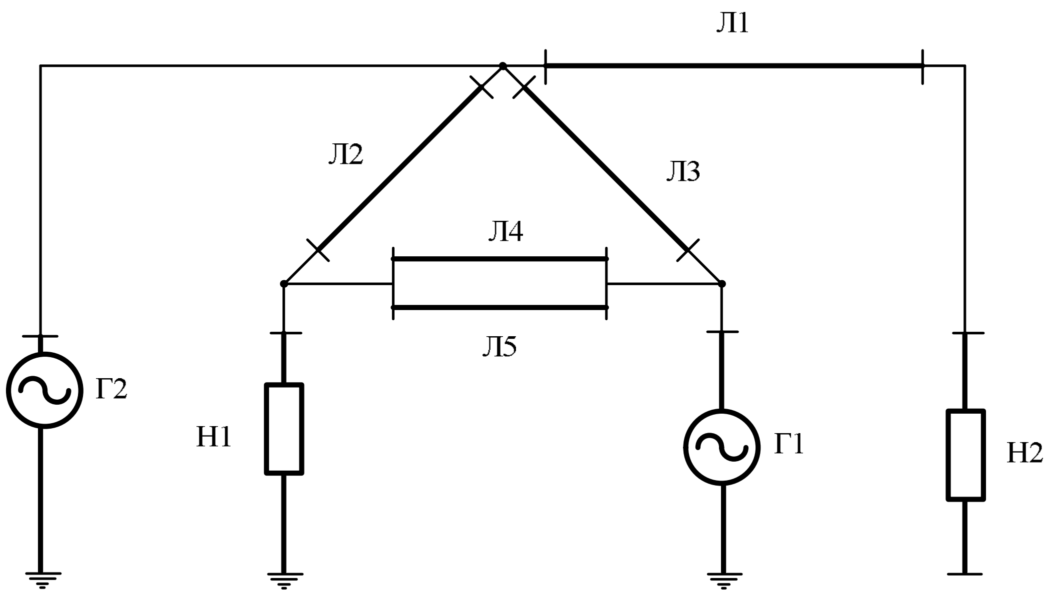
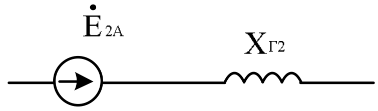


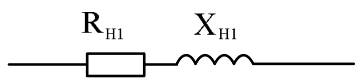
Рис. 4.13

Источник Г2:



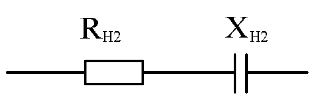
$$\dot{E}_{2A} = 220e^{j45^\circ} \text{ кВ}; \quad \underline{Z}_{Г2} = jX_{Г2} = j25 \text{ (Ом)}.$$

Приемник Н1:



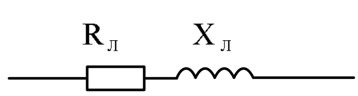
$$\underline{Z}_{Н1} = R_{Н1} + jX_{Н1} = 500 + j800 \text{ (Ом)}.$$

Приемник Н2:



$$\underline{Z}_{Н2} = R_{Н2} - jX_{Н2} = 150 - j600 \text{ (Ом)}.$$

Линии электропередачи:



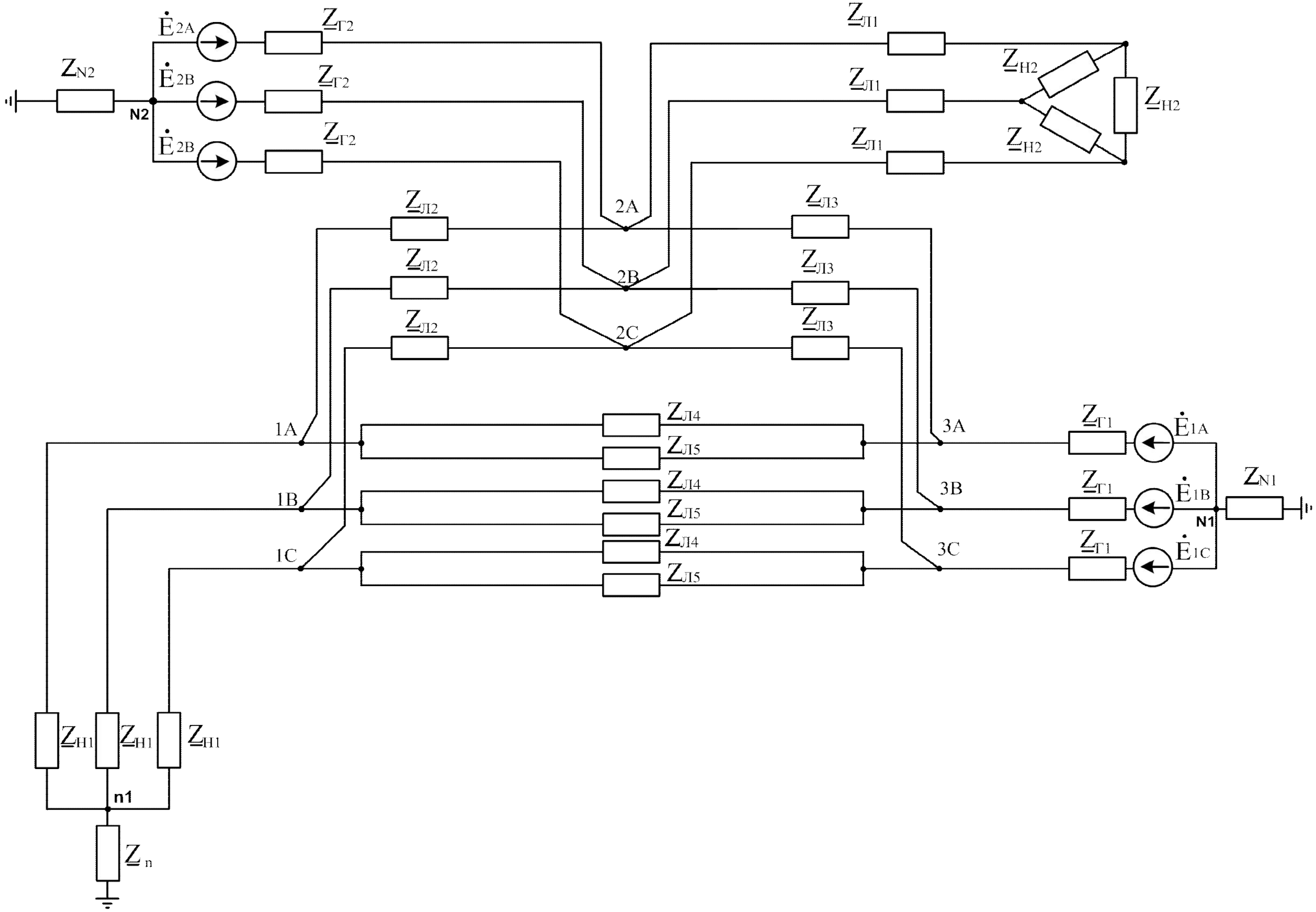

Z N2
N2
Ė 2A
Ė 2B
Ė 2B
Z Г2
Z Г2
Z Г2
Z Л1
Z Л1
Z Л1
Z Н2
Z Н2
Z Н2
Z Л2
Z Л2
Z Л2
2A
2B
2C
Z Л3
Z Л3
Z Л3
1A
1B
1C
Z Л4
Z Л5
Z Л4
Z Л5
Z Л4
Z Л5
3A
3B
3C
Z Г1
Z Г1
Z Г1
Ė 1A
Ė 1B
Ė 1C
Z N1
N1
Z Н1
Z Н1
Z Н1
n1
Z n

Рис. 4.14

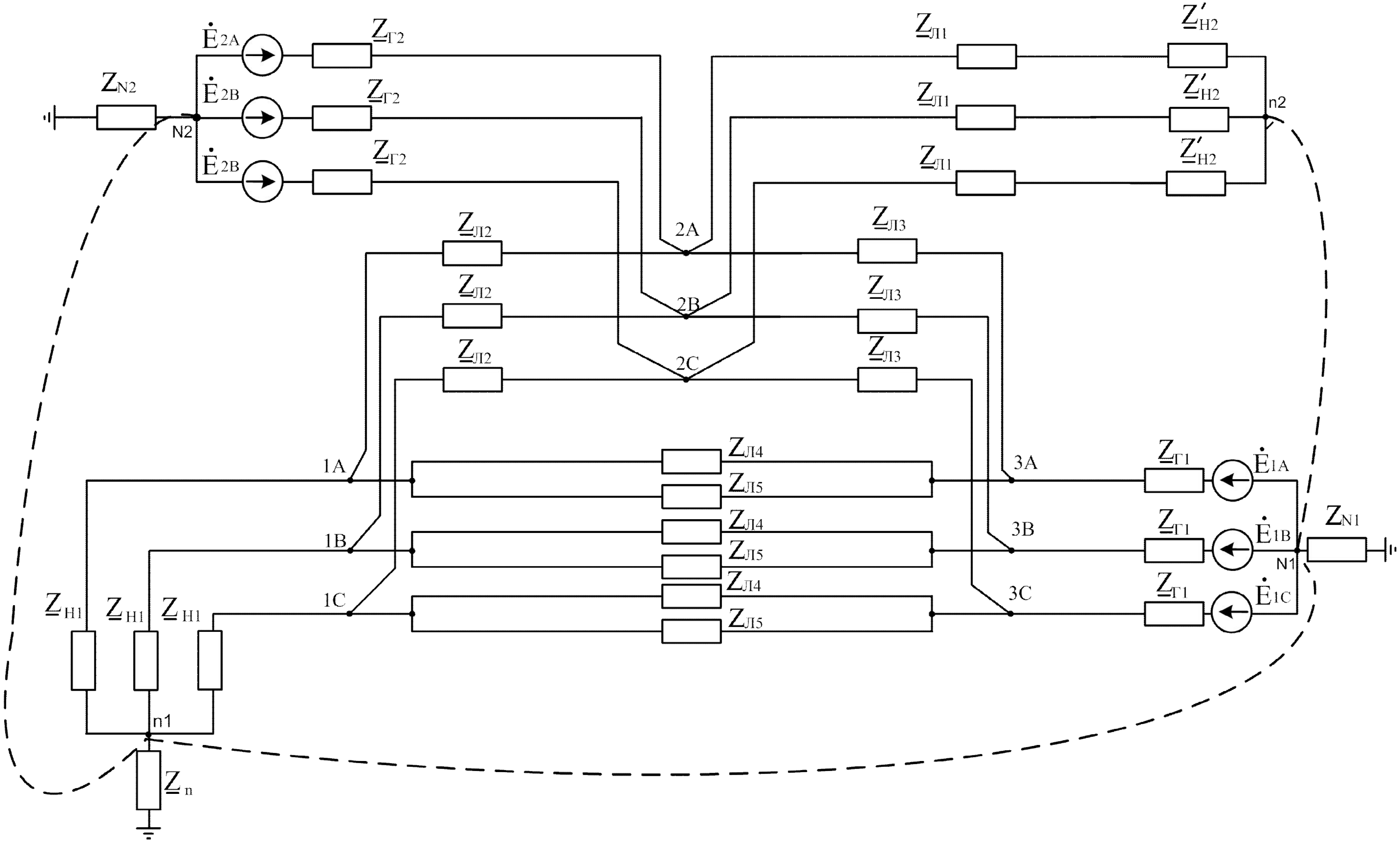

Z N2
N2
Ė 2A
Ė 2B
Ė 2B
Z Г2
Z Г2
Z Г2
Z Л1
Z Л1
Z Л1
Z′ Н2
Z′ Н2
Z′ Н2
n2
2A
2B
2C
Z Л2
Z Л2
Z Л2
Z Л3
Z Л3
Z Л3
1A
1B
1C
Z Л4
Z Л5
Z Л4
Z Л5
Z Л4
Z Л5
3A
3B
3C
Z Г1
Z Г1
Z Г1
Ė 1A
Ė 1B
Ė 1C
Z N1
N1
Z Н1
Z Н1
Z Н1
n1
Z n

Рис. 4.15

$$Л1: \quad \underline{Z}_{л1} = R_{л1} + jX_{л1} = 10 + j60 \ (Ом);$$
$$Л2: \quad \underline{Z}_{л2} = R_{л2} + jX_{л2} = 20 + j80 \ (Ом);$$
$$Л3: \quad \underline{Z}_{л3} = R_{л3} + jX_{л3} = 15 + j70 \ (Ом);$$
$$Л4: \quad \underline{Z}_{л4} = R_{л4} + jX_{л4} = 25 + j75 \ (Ом);$$
$$Л5: \quad \underline{Z}_{л5} = R_{л5} + jX_{л5} = 25 + j75 \ (Ом).$$

Сопротивление нейтралей: $\underline{Z}_{N1} = j5$ Ом; $\underline{Z}_{N2} = j8$ Ом; $\underline{Z}_{n} = j2$ Ом.

4.2.1. Схема исследуемой трехфазной цепи в развернутом виде с отражением в ней режимов работы нейтралей и схем соединения фаз приемников представлена на рис 4.14.

4.2.2. Расчет симметричной трехфазной цепи производиться "на одну фазу". Для составления расчетной схемы фазы А заменим треугольник сопротивлений $Z_{Н2}$ эквивалентной звездой (рис. 4.15). При этом

$$Z'_{Н2} = \frac{{Z_{Н2}}^2}{3\underline{Z}_{Н2}} = \frac{1}{3}\underline{Z}_{Н2} = 50 - j200 \ (Ом).$$

В симметричной трехфазной цепи токи соответствующих ветвей фаз *A, B* и *C* равны по величине и сдвинуты по фазе на 120^0, сумма их комплексных значений равна нулю, токи в нейтральных проводах в соответствии с первым законом Кирхгофа равны нулю, а потенциалы всех нейтральных точек вне зависимости от того, соединены они с землей или нет, имеют одинаковые значения $(\varphi_{N1} = \varphi_{N2} = \varphi_{n1} = \varphi_{n2} = 0)$. Режим работы симметричной трехфазной цепи не измениться, если все нейтральные точки соединить проводом, не имеющим сопротивления, как это показано пунктиром на рис. 4.15. При этом режим работы каждой фазы можно рассматривать независимо от других фаз. Расчетная схема фазы *A* исследуемой симметричной трехфазной цепи представлена на рис. 4.16.

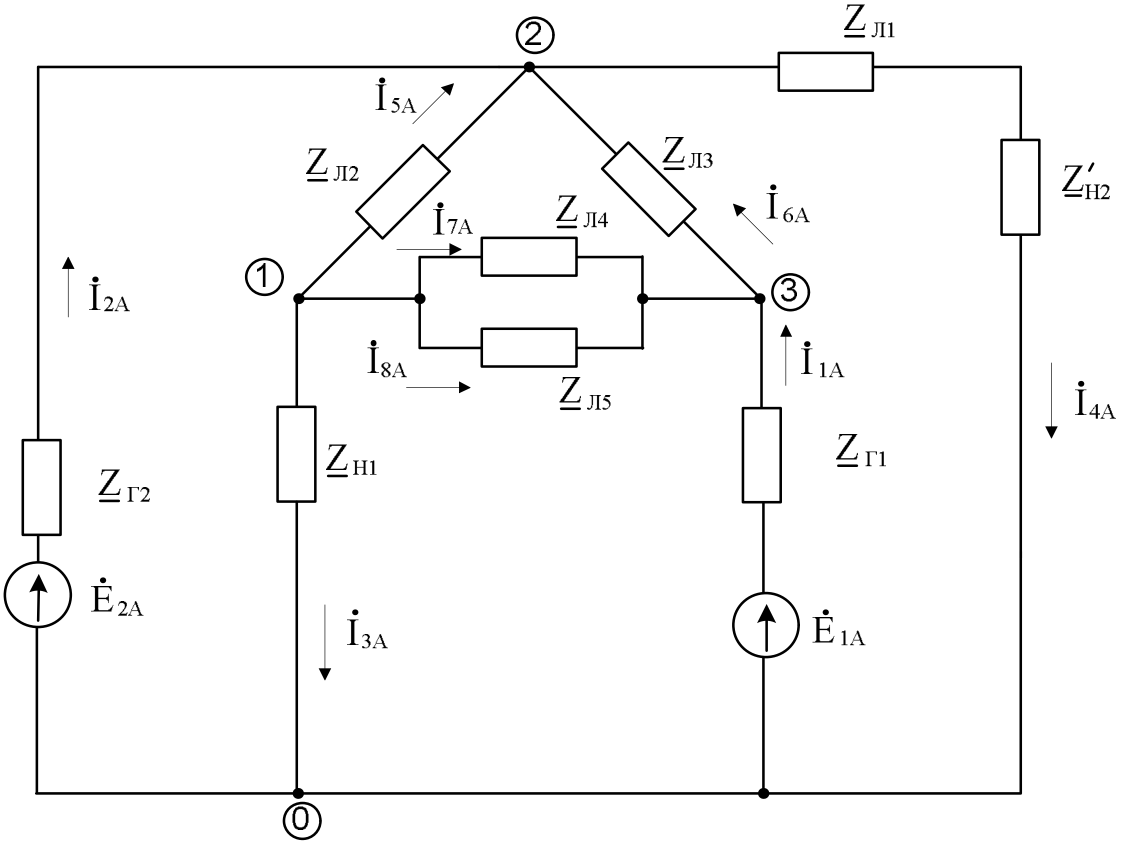


Рис. 4.16

4.2.3. Произведем расчет цепи на рис. 4.16 методом узловых потенциалов. Направленный граф схемы фазы А представлен на рис. 4.17.

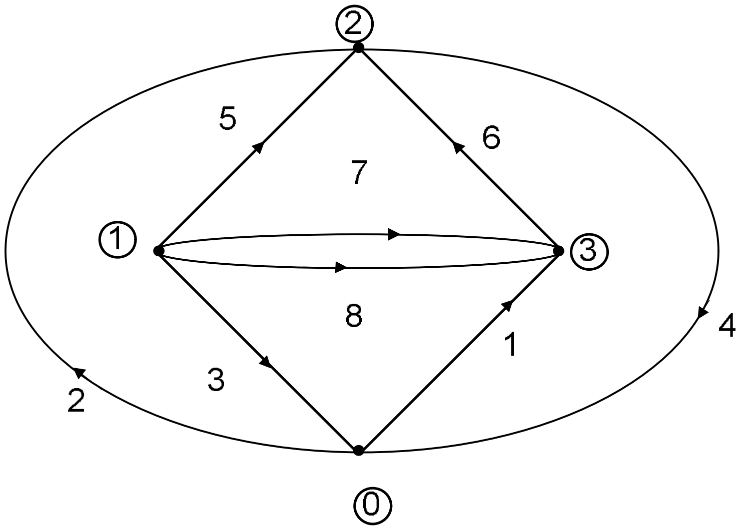


Рис. 4.17

Матрица инцинденций схемы будет иметь вид

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Комплексные проводимости ветвей исследуемой цепи:

$$\underline{Y}_1=\frac{1}{\underline{Z}_{\Gamma 1}}=-j0,0667\ (\text{См});\ \underline{Y}_2=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Н}1}}=-j0,04\ (\text{См});$$

$$\underline{Y}_3=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Н}1}}=5,62\cdot 10^{-4}-j8,99\cdot 10^{-4}\ (\text{См});$$

$$\underline{Y}_4=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Л}1}+\underline{Z}'_{\text{Н}2}}=2,59\cdot 10^{-3}+j6,03\cdot 10^{-3}\ (\text{См});$$

$$\underline{Y}_5=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Л}2}}=2,94\cdot 10^{-3}-j0,0118\ (\text{См});\ \underline{Y}_6=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Л}3}}=2,93\cdot 10^{-3}-j0,0137\ (\text{См});$$

$$\underline{Y}_7=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Л}4}}=4\cdot 10^{-3}-j0,012\ (\text{См});\ \underline{Y}_8=\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Л}5}}=4\cdot 10^{-3}-j0,012\ (\text{См}).$$

Матрица узловых проводимостей (См):

$$[\mathrm{Y}_{\text{У}}]=[\mathrm{A}][\mathrm{Y}][\mathrm{A}]^{t}=\begin{bmatrix} \underline{Y}_3+\underline{Y}_5+\underline{Y}_7+\underline{Y}_8 & -\underline{Y}_5 & -\underline{Y}_7-\underline{Y}_8 \\ -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_2+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5+\underline{Y}_6 & -\underline{Y}_6 \\ -\underline{Y}_7-\underline{Y}_8 & -\underline{Y}_6 & \underline{Y}_1+\underline{Y}_6+\underline{Y}_7+\underline{Y}_8 \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых токов (кА):

$$[\mathrm{J}_{\text{У}}]=-[\mathrm{A}][\mathrm{Y}][\mathrm{E}]=\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{Y}_2\dot{E}_{2\text{A}} \\ \underline{Y}_1\dot{E}_{1\text{A}} \end{bmatrix}.$$

Потенциалы узлов (кВ):

$$[\varphi]=[\mathrm{Y}_{\text{у}}]^{-1}[\mathrm{J}_{\text{У}}]=\begin{bmatrix} 211e^{j13,9^\circ} \\ 234e^{j28,5^\circ} \\ 212e^{j7^\circ} \end{bmatrix}.$$

Токи ветвей фазы А (кА):

$$[\mathrm{I}]=[\mathrm{Y}]([\mathrm{A}]^{\mathrm{t}}[\varphi]+[\mathrm{E}])=\begin{bmatrix} 1{,}84\mathrm{e}^{-\mathrm{j}159{,}7^\circ} \\ 2{,}66\mathrm{e}^{\mathrm{j}49{,}2^\circ} \\ 0{,}224\mathrm{e}^{-\mathrm{j}44{,}1^\circ} \\ 1{,}54\mathrm{e}^{\mathrm{j}95{,}3^\circ} \\ 0{,}741\mathrm{e}^{-\mathrm{j}166{,}7^\circ} \\ 1{,}21\mathrm{e}^{-\mathrm{j}165^\circ} \\ 0{,}324\mathrm{e}^{\mathrm{j}30{,}2^\circ} \\ 0{,}324\mathrm{e}^{\mathrm{j}30{,}2^\circ} \end{bmatrix}.$$

4.2.4. Для проверки решения составим уравнение баланса комплексных мощностей для рассматриваемой цепи. Комплексная мощность источников (МВА):

$$\underline{S}_{\text{ист}}=\dot{\mathrm{E}}_{1\mathrm{A}}\overset{*}{\mathrm{I}}_{1\mathrm{A}}+\dot{\mathrm{E}}_{2}\overset{*}{\mathrm{I}}_{2\mathrm{A}}=220\cdot 1{,}84\mathrm{e}^{\mathrm{j}159{,}7}+220\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\cdot 2{,}66\mathrm{e}^{-\mathrm{j}49{,}2^\circ}=$$
$$=(-379{,}2+\mathrm{j}140{,}6)+(584{,}5-\mathrm{j}42{,}7)=205{,}3+\mathrm{j}97{,}9.$$

Отметим, что активная мощность первого источника для рассматриваемой цепи является отрицательной, для второго источника – отрицательной является реактивная мощность. Таким образом, источником активной мощности в цепи является только второй источник ЭДС, при этом он потребляет реактивную мощность.

Комплексная мощность приемников (МВА):

$$\underline{S}_{\text{пр}}=\mathrm{I}_{1\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\Gamma 1}+\mathrm{I}_{2\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\Gamma 2}+\mathrm{I}_{3\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\mathrm{H}1}+\mathrm{I}_{4\mathrm{A}}^2(\underline{Z}_{\text{Л}1}+\underline{Z}'_{\mathrm{H}2})+\mathrm{I}_{5\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\text{Л}2}+\mathrm{I}_{6\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\text{Л}3}+\mathrm{I}_{7\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\text{Л}4}+$$
$$+\mathrm{I}_{8\mathrm{A}}^2\underline{Z}_{\text{Л}6}=1{,}84^2\cdot\mathrm{j}15+2{,}66^2\cdot\mathrm{j}25+0{,}224^2(500+\mathrm{j}800)+$$
$$+1{,}54^2(10+\mathrm{j}60+50-\mathrm{j}200)+0{,}741^2(20+\mathrm{j}80)+1{,}21^2(15+\mathrm{j}70)+$$
$$+0{,}324^2(25+\mathrm{j}75)+0{,}324^2(25+\mathrm{j}75)=205{,}3+\mathrm{j}97{,}9.$$

4.2.5. Комплексный ток в первой ветви фазы А (рис. 4.16) определен выше и равен $\dot{\mathrm{I}}_{1\mathrm{A}}=1{,}84\mathrm{e}^{-\mathrm{j}159.7^\circ}$ (кА). Так как в симметричной трехфазной цепи токи соответствующих ветвей фаз А, В и С равны по величине и сдвинуты по фазе на 120^0, то

$$\dot{I}_{1B} = a^2\dot{I}_{1A} = 1{,}84e^{-j159.7^\circ}e^{-j120^\circ} = 1{,}84e^{-j279.7^\circ} = 1{,}84e^{j80.3^\circ}\ (\text{кА});$$

$$\dot{I}_{1C} = a\dot{I}_{1A} = 1{,}84e^{-j159.7^\circ}e^{j120^\circ} = 1{,}84e^{-j39.7^\circ}\ (\text{кА}),$$

где $a = e^{j120^\circ}$.

Комплексы фазных напряжений первой ветви при принятой нумерации узлов на рис.4.17, будут соответственно равны

$$\dot{U}_{1A} = \dot{\varphi}_{3A} = 212e^{j7^\circ}\ (\text{кВ});$$

$$\dot{U}_{1B} = a^2\dot{U}_{1A} = 212e^{-j113^\circ}\ (\text{кВ});\ \dot{U}_{1C} = a\dot{U}_{1A} = 212e^{j127^\circ}\ (\text{кВ}).$$

Линейные напряжения $\dot{U}_{3AB}$, $\dot{U}_{3BC}$ и $\dot{U}_{3CA}$ между фазами узла 3 трехфазной цепи определятся через фазные напряжения по формулам:

$$\dot{U}_{3AB} = \sqrt{3}\dot{U}_{1A}e^{j30^0} = 367{,}2e^{j37^0}\ (\text{кВ});$$

$$\dot{U}_{3BC} = a^2\dot{U}_{3AB} = 367{,}2e^{-j83^\circ}\ (\text{кВ});\ \dot{U}_{3CA} = a\dot{U}_{3AB} = 367{,}2e^{j157^\circ}\ (\text{кВ}).$$

Векторная диаграмма токов первой ветви трехфазной цепи и топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений на этих ветвях представлены на рис. 4.18.

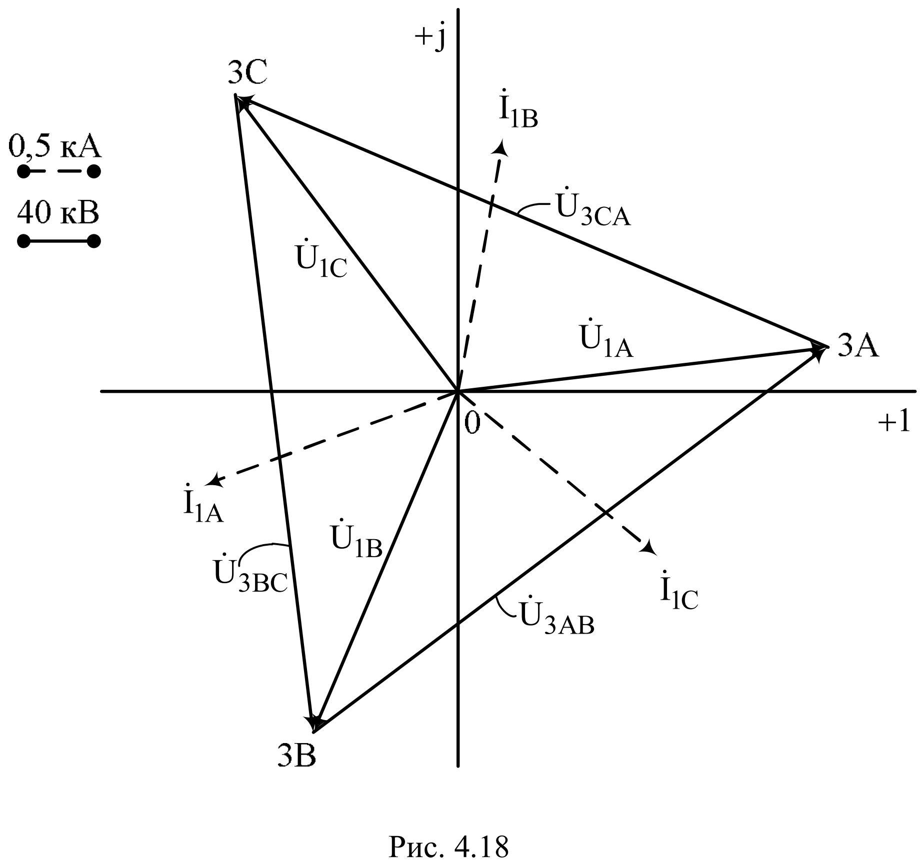


Рис. 4.18

4.2.6. Мгновенные значения токов и фазных напряжений первой ветви определятся через комплексные значения этих величин:

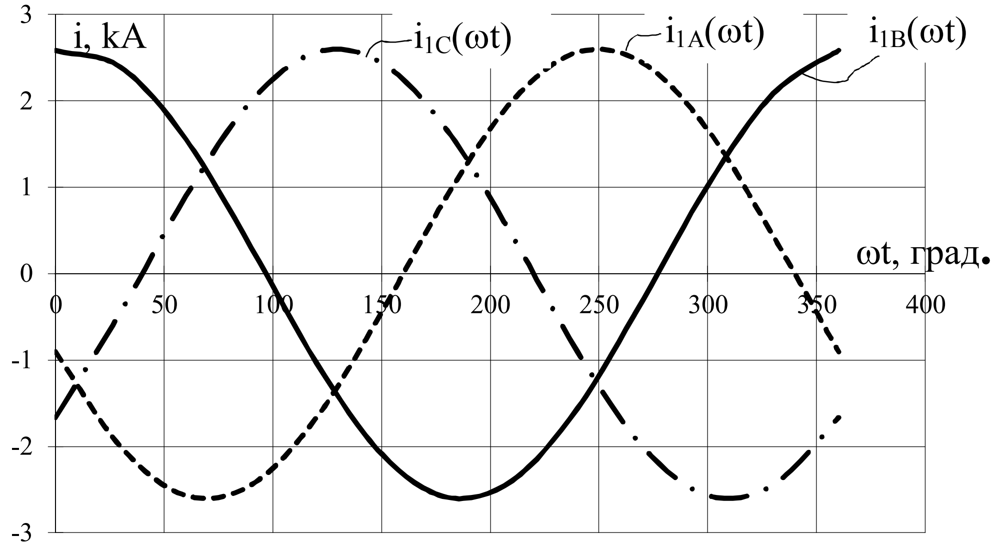
$$i_{1A} = 1{,}84\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 159{,}7^o\right) \text{ (кА)};$$

$$i_{1B} = 1{,}84\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 83{,}3^o\right) \text{ (кА)}; \; i_{1C} = 1{,}84\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 39{,}7^o\right) \text{ (кА)};$$

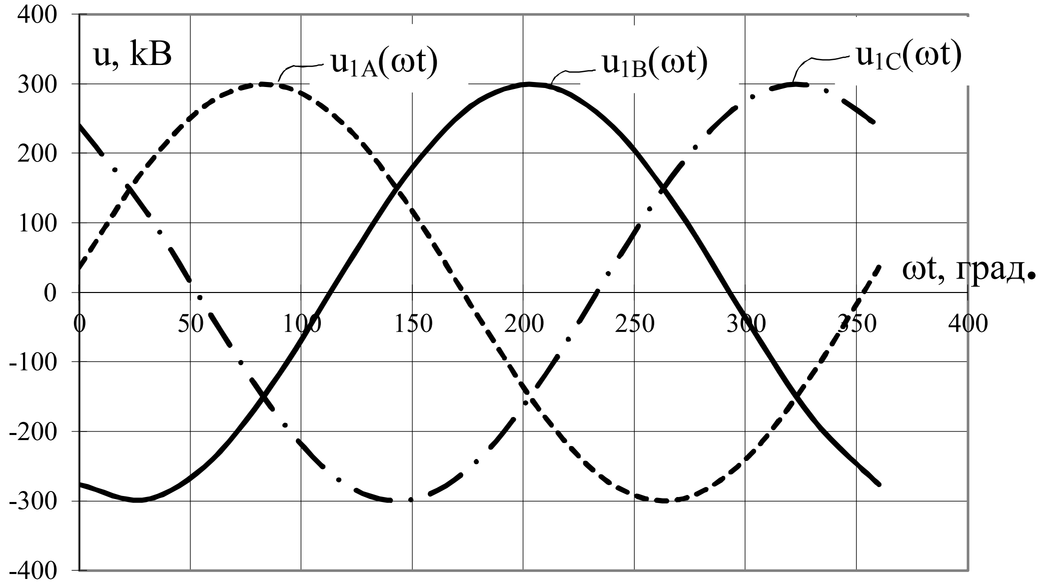
$$u_{1A} = 212\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 7^o\right) \text{ (кВ)};$$

$$u_{1B} = 212\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 113^o\right) \text{ (кВ)}; \; u_{1C} = 212\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 127^o\right) \text{ (кВ)}.$$

Задаваясь значениями ωt на периоде изменения синусоидальных величин (от 0 до 360^o), построим зависимости величин $i_{1A}(\omega t)$, $i_{1B}(\omega t)$, $i_{1C}(\omega t)$, $u_{1A}(\omega t)$, $u_{1B}(\omega t)$ и $u_{1C}(\omega t)$, приведенные на рис.4.19, а, б.



а)

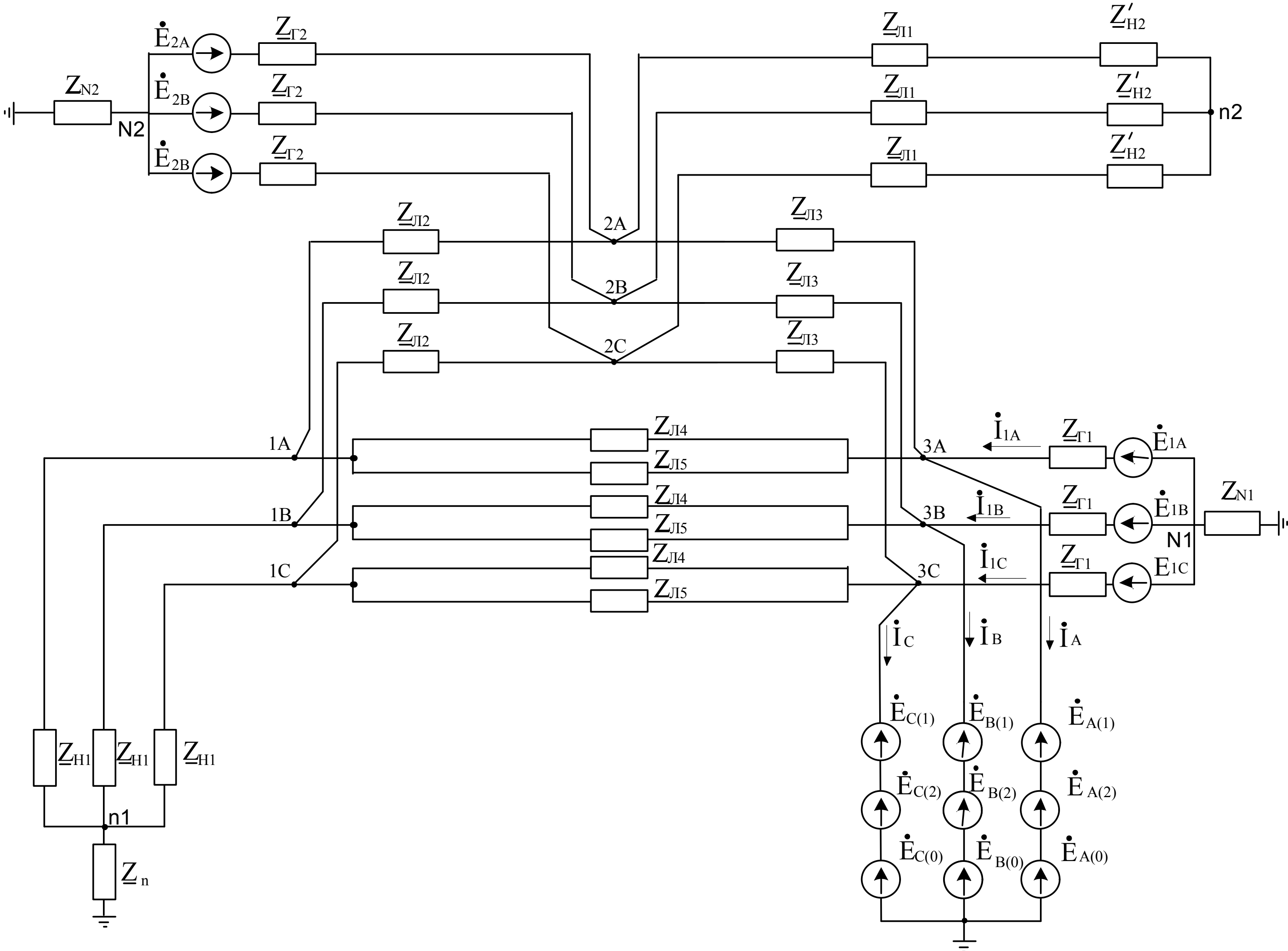


б)

Рис. 4.19

4.2.7. Допустим, что в узле *3B* рассматриваемой цепи (рис. 4.14) произошло короткое замыкание − однофазное короткое замыкание фазы *B*. В соответствии с принципом компенсации любую поперечную несимметрию в трехфазной цепи можно заменить тремя несимметричными источниками ЭДС ($\dot{E}_A;\dot{E}_B;\dot{E}_C$), значения которых до окончания расчета являются неизвестными. Эти три несимметричных источника разложим на симметричные составляющие $\dot{E}_{(1)};\dot{E}_{(2)};\dot{E}_{(0)}$, приняв фазу *A* за основную. В результате получим схему, представленную на рис. 4.20, при этом режим работы нейтрали соединенных звездой девять источников ЭДС будет зависеть от вида поперечной несимметрии: если несимметрия связанна с касанием земли − нейтраль будет заземлена, если несимметрия произошла без касания с землей − нейтраль будет изолирована. Для расчета несимметричного режима в соответствии с принципом суперпозиции рассмотрим три частичных схемы прямой, обратной и нулевой последовательностей, представленные соответственно на рис. 4.21, 4.22 и 4.23. Каждая из этих частичных схем будет являться симметричной и ее расчет можно проводить на одну фазу.

4.2.8. Расчетная схема фазы *A* для токов прямой последовательности (рис. 4.24) составляется точно так же, как для симметричного режима трехфазной цепи, при этом сопротивления ветвей будут также равны сопротивлениям симметричного режима, рассмотренного ранее. Симметричная трехфазная система обратной последовательности отличается от симметричной системы прямой последовательности только порядком чередования фаз. Следовательно, для составления расчетной схемы на одну фазу для токов обратной последовательности можно использовать такой же подход, как для схемы прямой последовательности (рис. 4.25). При этом необходимо помнить, что сопротивления фаз вращающихся электрических машин (Г1, Г2 и Н1) будут иметь значения, отличающиеся от сопротивлений для токов прямой последовательности (см. примечания к табл. 1.11).



$\dot{E}_{2A}$
$\underline{Z}_{Г2}$
$\underline{Z}_{Л1}$
$\underline{Z}'_{Н2}$
Z_{N2}
$\dot{E}_{2B}$
N2
$\dot{E}_{2B}$
n2
$\underline{Z}_{Л2}$
$\underline{Z}_{Л3}$
2A
2B
2C
$\underline{Z}_{Л4}$
$\underline{Z}_{Л5}$
1A
1B
1C
3A
3B
3C
$\dot{I}_{1A}$
$\dot{I}_{1B}$
$\dot{I}_{1C}$
$\underline{Z}_{Г1}$
$\dot{E}_{1A}$
$\dot{E}_{1B}$
E_{1C}
Z_{N1}
N1
$\dot{I}_{C}$
$\dot{I}_{B}$
$\dot{I}_{A}$
$\dot{E}_{C(1)}$
$\dot{E}_{B(1)}$
$\dot{E}_{A(1)}$
$\dot{E}_{C(2)}$
$\dot{E}_{B(2)}$
$\dot{E}_{A(2)}$
$\dot{E}_{C(0)}$
$\dot{E}_{B(0)}$
$\dot{E}_{A(0)}$
$\underline{Z}_{Н1}$
n1
$\underline{Z}_{n}$

Рис. 4.20

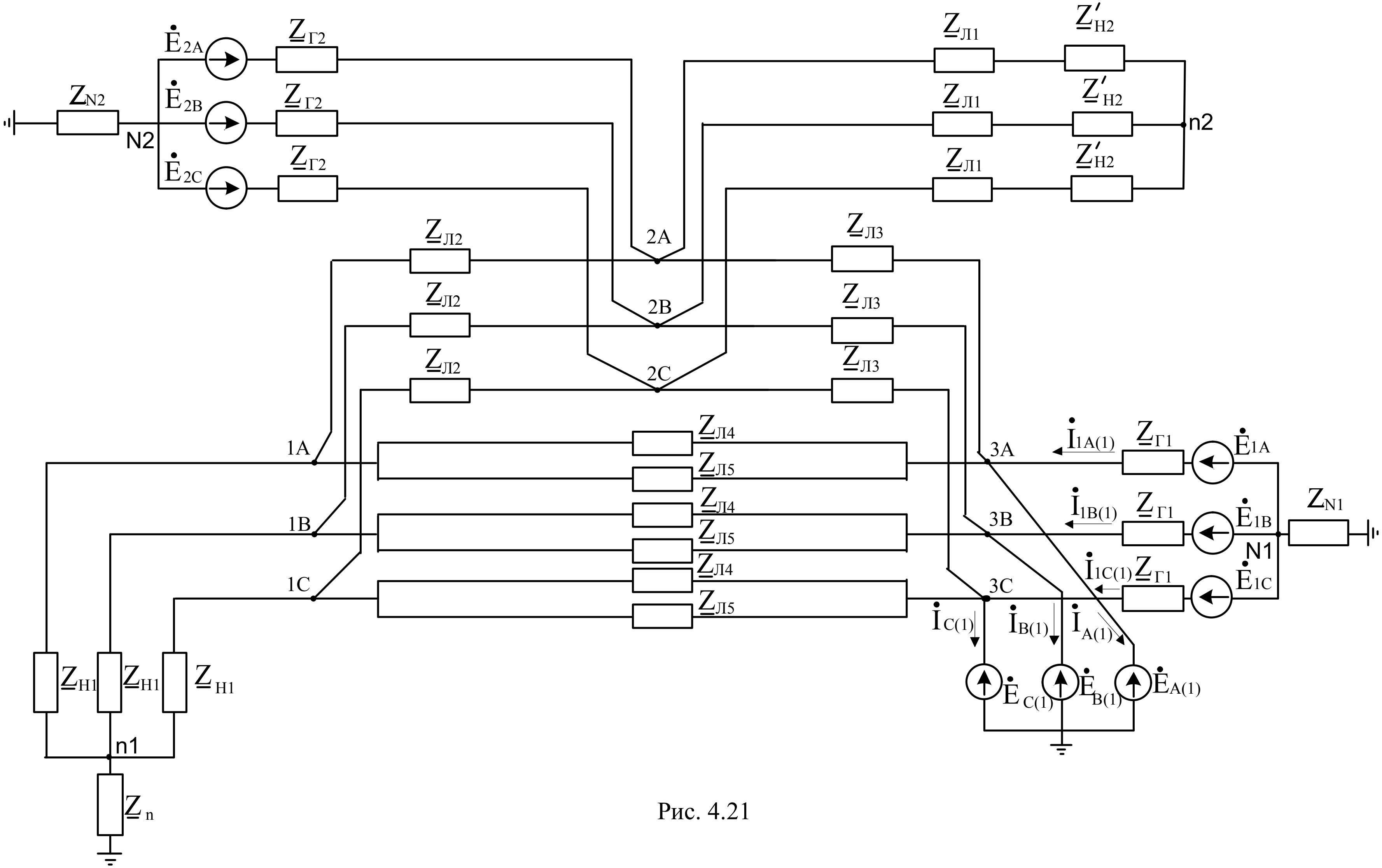
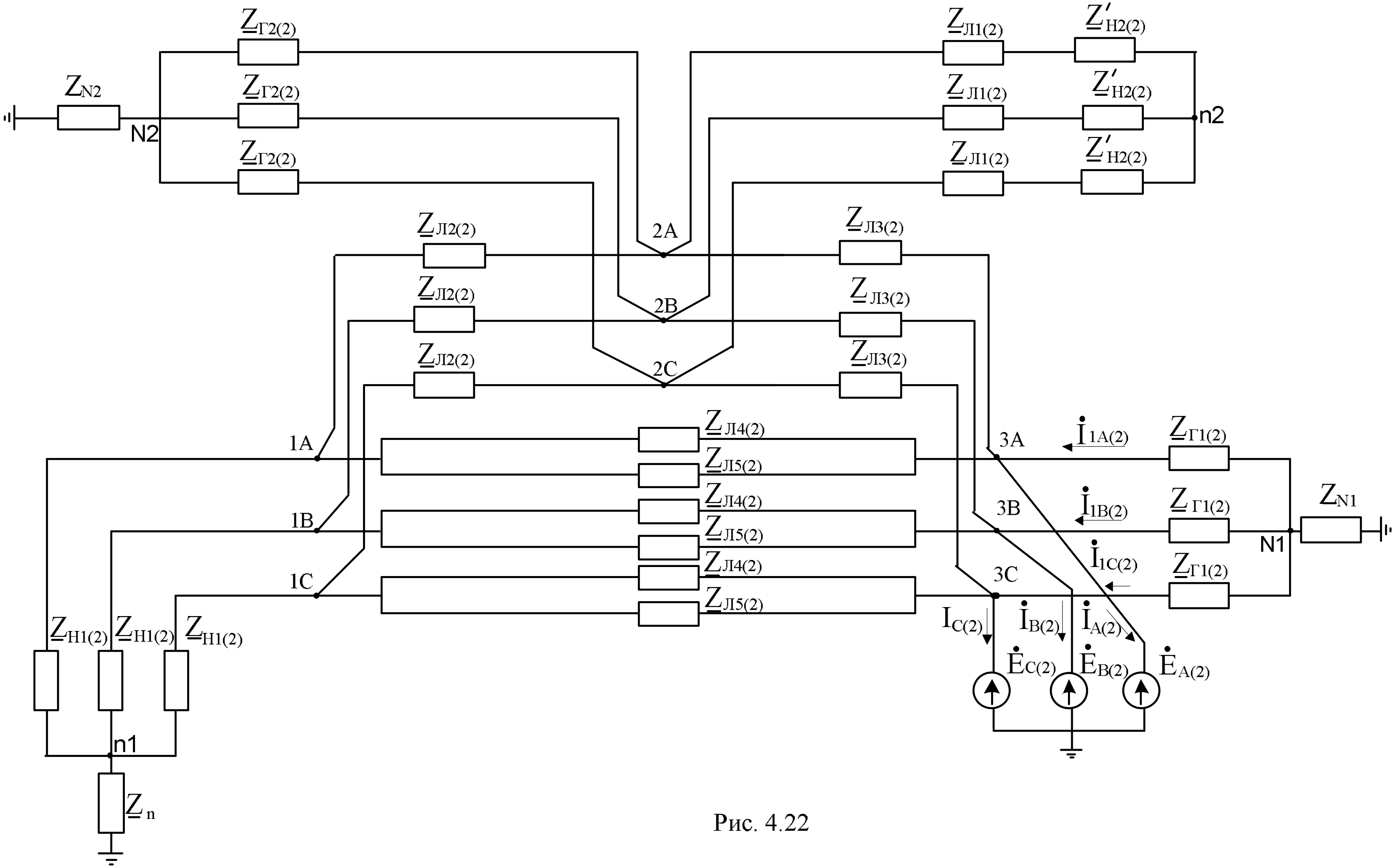
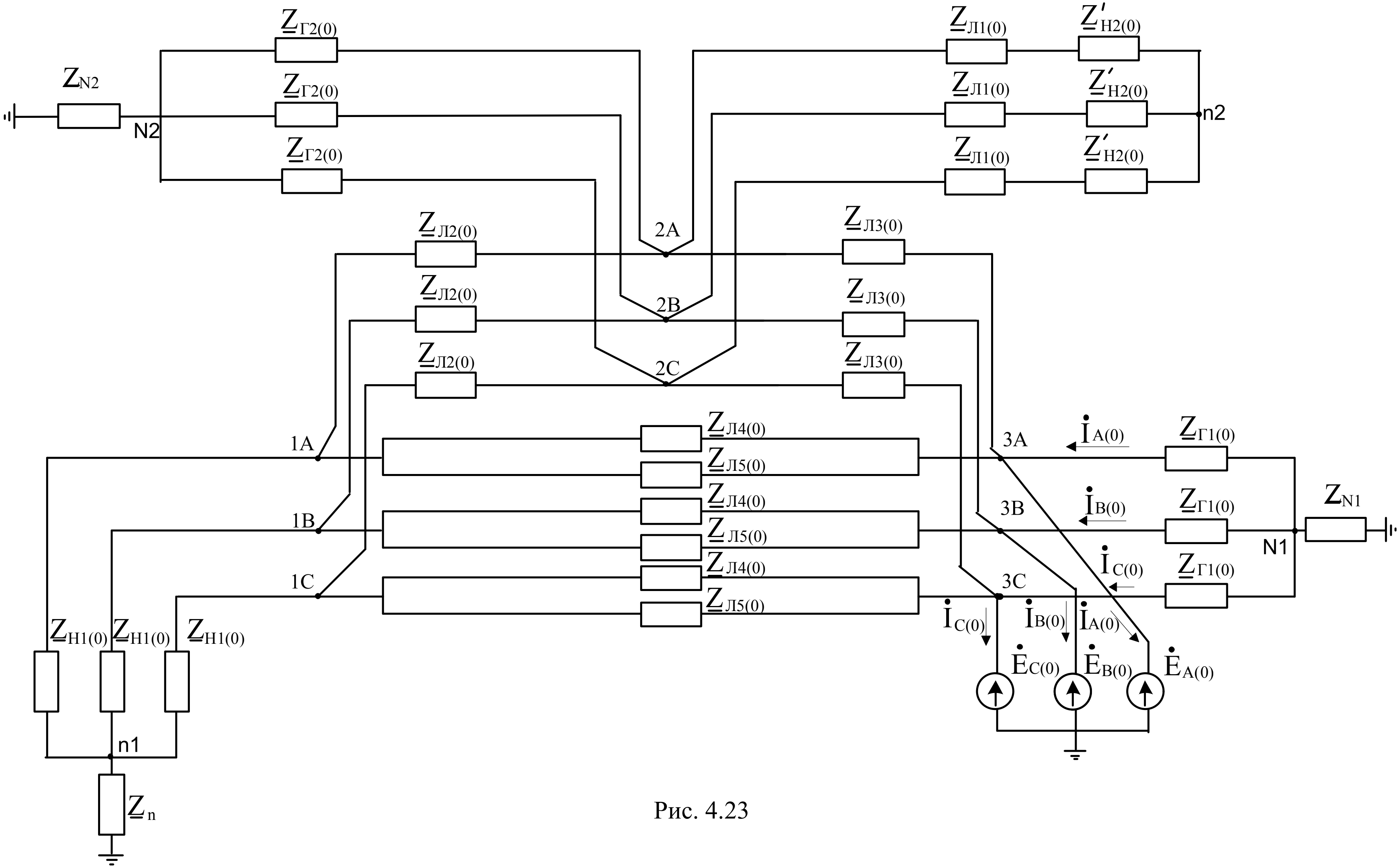

Ė2A
Z̲Г2
Ė2B
Z̲Г2
Ė2C
Z̲Г2
ZN2
N2
Z̲Л1
Z̲'Н2
Z̲Л1
Z̲'Н2
Z̲Л1
Z̲'Н2
n2
Z̲Л2
2A
Z̲Л3
Z̲Л2
2B
Z̲Л3
Z̲Л2
2C
Z̲Л3
1A
Z̲Л4
Z̲Л5
1B
Z̲Л4
Z̲Л5
1C
Z̲Л4
Z̲Л5
3A
İ1A(1)
Z̲Г1
Ė1A
3B
İ1B(1)
Z̲Г1
Ė1B
ZN1
N1
3C
İ1C(1)
Z̲Г1
Ė1C
İC(1)
İB(1)
İA(1)
ĖC(1)
ĖB(1)
ĖA(1)
Z̲Н1
Z̲Н1
Z̲Н1
n1
Z̲n

Рис. 4.21



$\underline{Z}_{N2}$
N2
$\underline{Z}_{Г2(2)}$
$\underline{Z}_{Л1(2)}$
$\underline{Z}'_{Н2(2)}$
n2
$\underline{Z}_{Л2(2)}$
$\underline{Z}_{Л3(2)}$
2A
2B
2C
1A
1B
1C
$\underline{Z}_{Л4(2)}$
$\underline{Z}_{Л5(2)}$
3A
3B
3C
$\dot{I}_{1A(2)}$
$\dot{I}_{1B(2)}$
$\dot{I}_{1C(2)}$
$\underline{Z}_{Г1(2)}$
$\underline{Z}_{N1}$
N1
$\underline{Z}_{Н1(2)}$
n1
$\underline{Z}_{n}$
$\dot{I}_{C(2)}$
$\dot{I}_{B(2)}$
$\dot{I}_{A(2)}$
$\dot{E}_{C(2)}$
$\dot{E}_{B(2)}$
$\dot{E}_{A(2)}$

Рис. 4.22



$\underline{Z}_{\Gamma2(0)}$
$\underline{Z}_{\Gamma2(0)}$
$\underline{Z}_{\Gamma2(0)}$
Z_{N2}
N2
$\underline{Z}_{Л1(0)}$
$\underline{Z}'_{Н2(0)}$
$\underline{Z}_{Л1(0)}$
$\underline{Z}'_{Н2(0)}$
$\underline{Z}_{Л1(0)}$
$\underline{Z}'_{Н2(0)}$
n2
$\underline{Z}_{Л2(0)}$
$\underline{Z}_{Л2(0)}$
$\underline{Z}_{Л2(0)}$
2A
2B
2C
$\underline{Z}_{Л3(0)}$
$\underline{Z}_{Л3(0)}$
$\underline{Z}_{Л3(0)}$
$\underline{Z}_{Л4(0)}$
$\underline{Z}_{Л5(0)}$
$\underline{Z}_{Л4(0)}$
$\underline{Z}_{Л5(0)}$
$\underline{Z}_{Л4(0)}$
$\underline{Z}_{Л5(0)}$
1A
1B
1C
3A
3B
3C
$\dot{I}_{A(0)}$
$\dot{I}_{B(0)}$
$\dot{I}_{C(0)}$
$\underline{Z}_{\Gamma1(0)}$
$\underline{Z}_{\Gamma1(0)}$
$\underline{Z}_{\Gamma1(0)}$
Z_{N1}
N1
$\dot{I}_{C(0)}$
$\dot{I}_{B(0)}$
$\dot{I}_{A(0)}$
$\dot{E}_{C(0)}$
$\dot{E}_{B(0)}$
$\dot{E}_{A(0)}$
$\underline{Z}_{Н1(0)}$
$\underline{Z}_{Н1(0)}$
$\underline{Z}_{Н1(0)}$
n1
$\underline{Z}_{n}$

Рис. 4.23

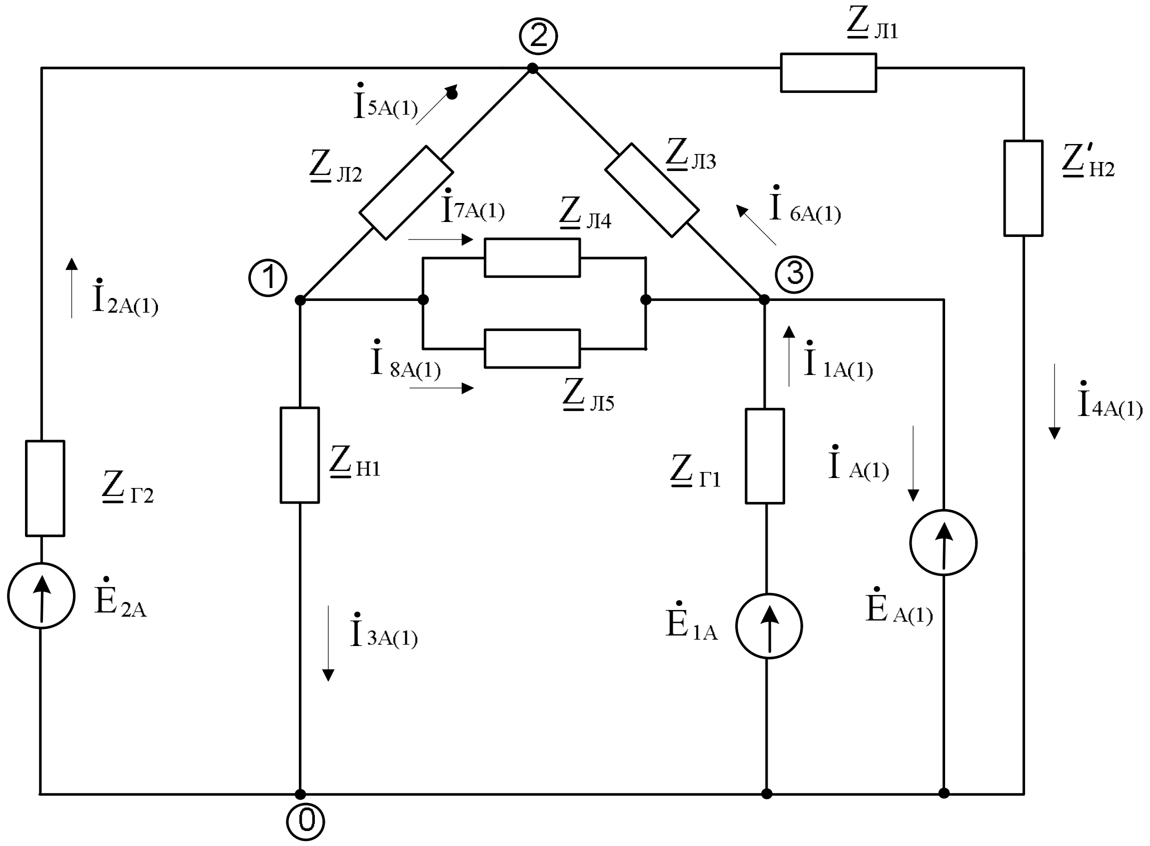


Рис. 4.24

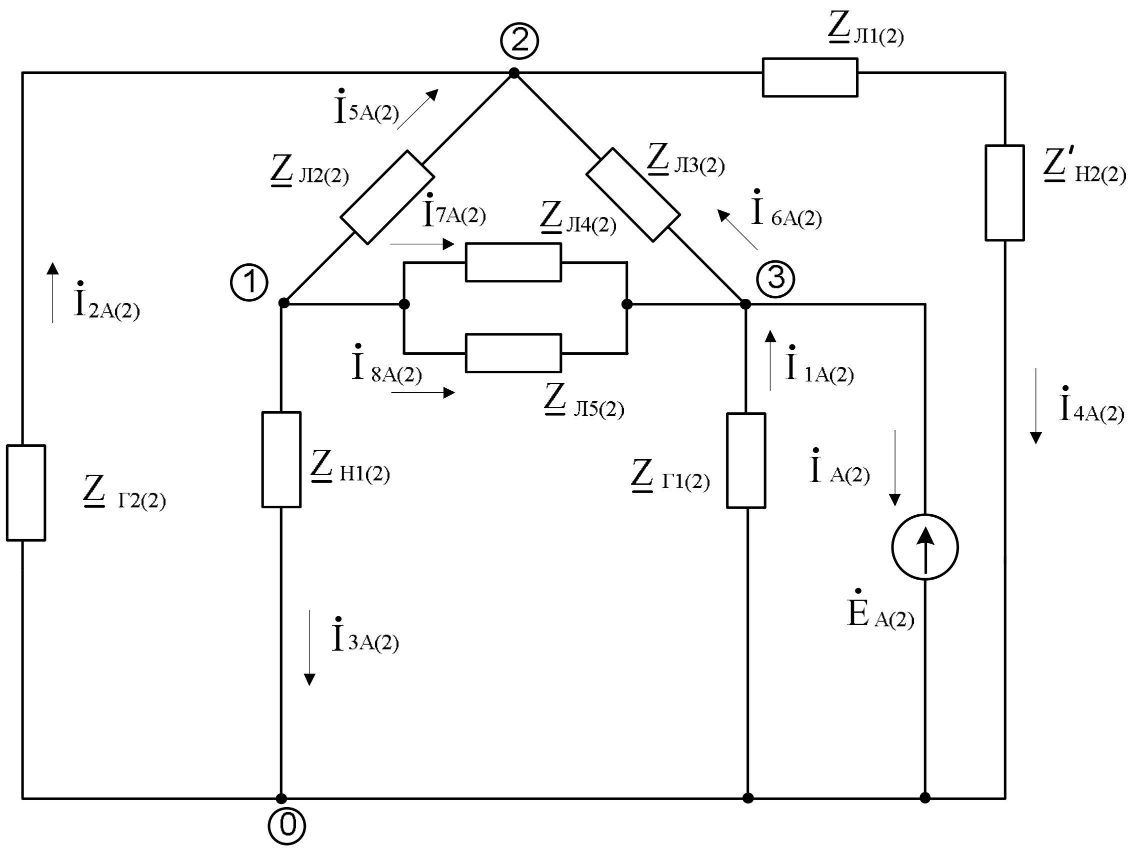


Рис. 4.25

Токи нулевой последовательности соответствующих ветвей фаз А, В и С равны по величине и совпадают по фазе. Геометрическая сумма этих токов будет равна утроенному значению тока нулевой последовательности одной из фаз. Следовательно, в соответствии с первым законом Кирхгофа в нейтральном проводе, имеющим сопротивление $\underline{Z}_N$, будет протекать утроенное значение тока нулевой последовательности. Если же у трехфазного источника или приемника нейтральный провод отсутствует (нейтраль изолирована от земли), то в соответствии с первым законом Кирхгофа геометрическая сумма токов всех фаз будет равна нулю и токи этих фаз не будут содержать симметричных составляющих нулевой последовательности.

Расчетная схема на одну фазу (А) для токов нулевой последовательности исследуемой цепи (рис. 4.23) представлена на рис. 4.26. Сопротивления нейтралей $\underline{Z}_{N1}$ $\underline{Z}_{N2}$ $\underline{Z}_n$ входят утроенными значениями в ветви тех фаз, нейтрали которых заземлены. Поскольку фазы приемника Н2 изолированны от земли и не содержат составляющих нулевой последовательности, то в четвертой ветви расчетной схемы (рис. 4.26) появится разрыв (сопротивление равно бесконечности).

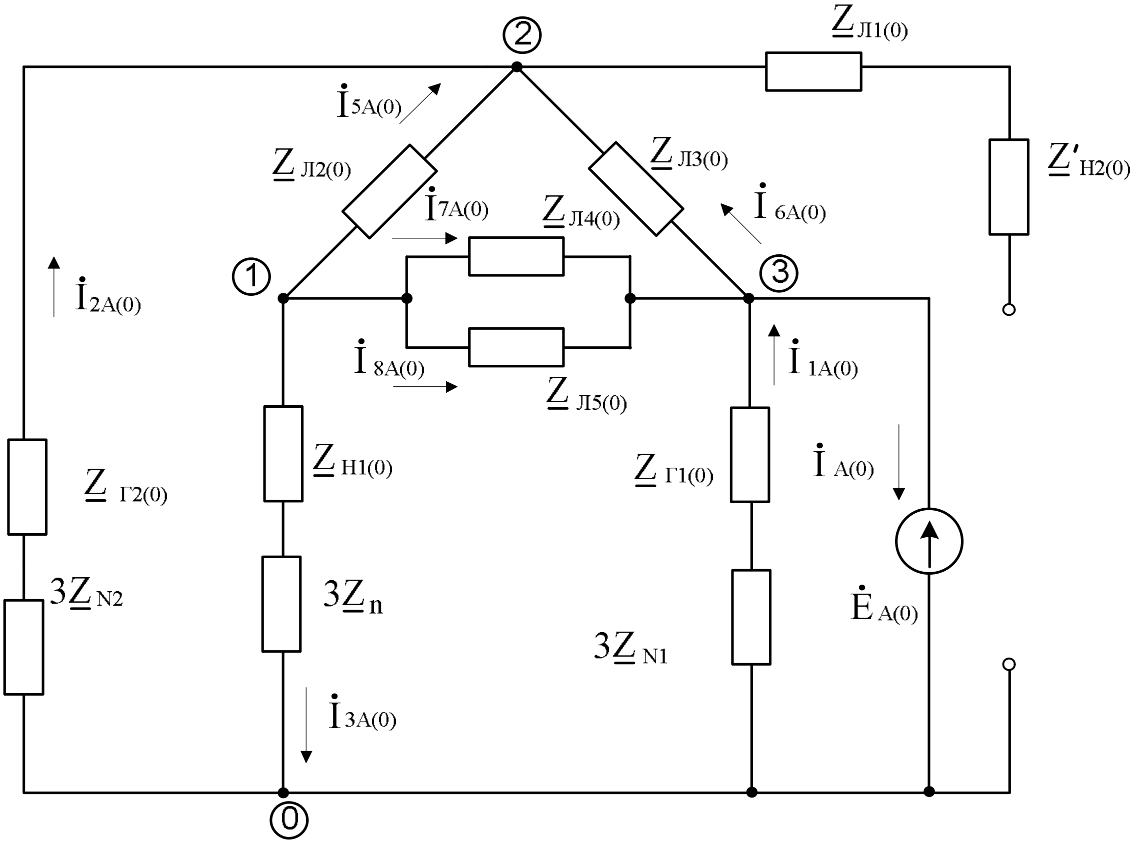


Рис. 4.26

В соответствии с примечаниями к табл. 1.11 пересчитываем сопротивления ветвей.

Для токов обратной последовательности (рис. 4.25):

$$\underline{Z}_{\text{Г1(2)}} = \text{j}3\ (\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Г2(2)}} = \text{j}5\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Н1(2)}} = 500 + \text{j}160\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}'_{\text{Н2(2)}} = \underline{Z}'_{\text{Н2}} = 50 - \text{j}200\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л1(2)}} = \underline{Z}_{\text{Л1}} = 10 + \text{j}60\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{\text{Л2(2)}} = \underline{Z}_{\text{Л2}} = 20 + \text{j}80\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л3(2)}} = \underline{Z}_{\text{Л3}} = 15 + \text{j}70\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{\text{Л4(2)}} = \underline{Z}_{\text{Л4}} = 25 + \text{j}75\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л5(2)}} = \underline{Z}_{\text{Л5}} = 25 + \text{j}75\,(\text{Ом}).$$

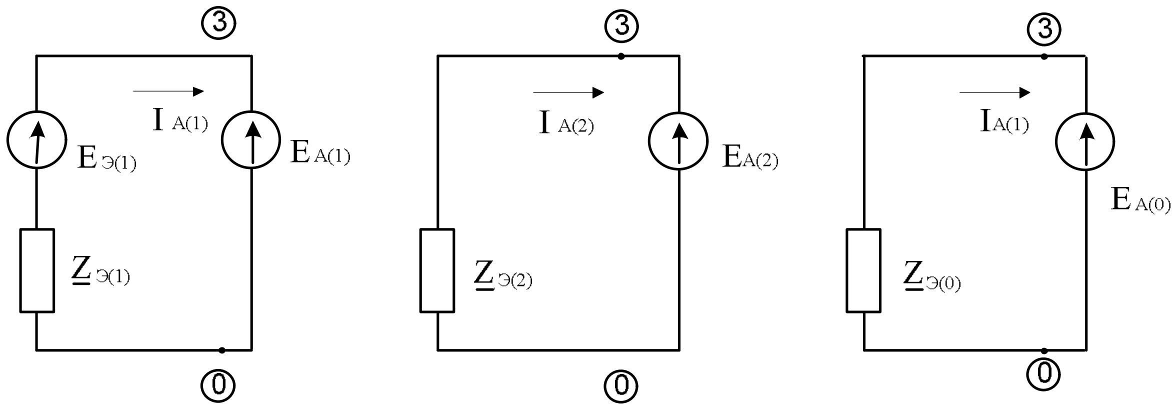
Для токов нулевой последовательности (рис. 4.26)

$$\underline{Z}_{\text{Г1(0)}} = \text{j}1{,}5\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Г2(0)}} = \text{j}2{,}5\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Н1(0)}} = 500 + \text{j}80\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}'_{\text{Н2(0)}} = 50 - \text{j}200\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л1(0)}} = 10 + \text{j}210\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л2(0)}} = 20 + \text{j}280\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{\text{Л3(0)}} = 15 + \text{j}245\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л4(0)}} = 25 + \text{j}262{,}5\,(\text{Ом});\ \underline{Z}_{\text{Л5(0)}} = 25 + \text{j}262{,}5\,(\text{Ом}).$$

4.2.9. Схемы, приведенные на рис. 4.24÷ 4.26, содержат неизвестные источники ЭДС $\dot{E}_{\text{A(1)}}$, $\dot{E}_{\text{A(2)}}$ и $\dot{E}_{\text{A(0)}}$. Для их определения в соответствии с теоремой об активном двухполюснике заменим по отношению к источникам $\dot{E}_{\text{A(1)}}$, $\dot{E}_{\text{A(2)}}$ и $\dot{E}_{\text{A(0)}}$ оставшуюся часть цепи схемами замещения, представленными на рис. 4.27.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.27

Для определения параметров $\dot{E}_{\text{Э(1)}};\underline{Z}_{\text{Э(1)}}$ (рис.4.27, а) рассмотрим схему, представленную на рис. 4.24, без источника ЭДС $\dot{E}_{\text{A(1)}}$ (режим холостого хода по отношению к этому источнику). Это схема была рассчитана ранее при анализе симметричного режима (рис. 4.4), следовательно, потенциал $\dot{\varphi}_3$ (напряжение холостого хода) будет равен $\dot{E}_{Э(1)} = \dot{\varphi}_3 = 212e^{j7^\circ}$ кВ.

Для нахождения $\underline{Z}_{Э(1)}$ в схеме рис. 4.4 примем равными нулю все ЭДС источников, т.е. рассмотрим пассивный двухполюсник, схема которого приведена на рис. 4.28. Заменяя последовательно и параллельно соединенные элементы на рис. 4.28 эквивалентными сопротивлениями, получаем схему, представленную на рис. 4.29.

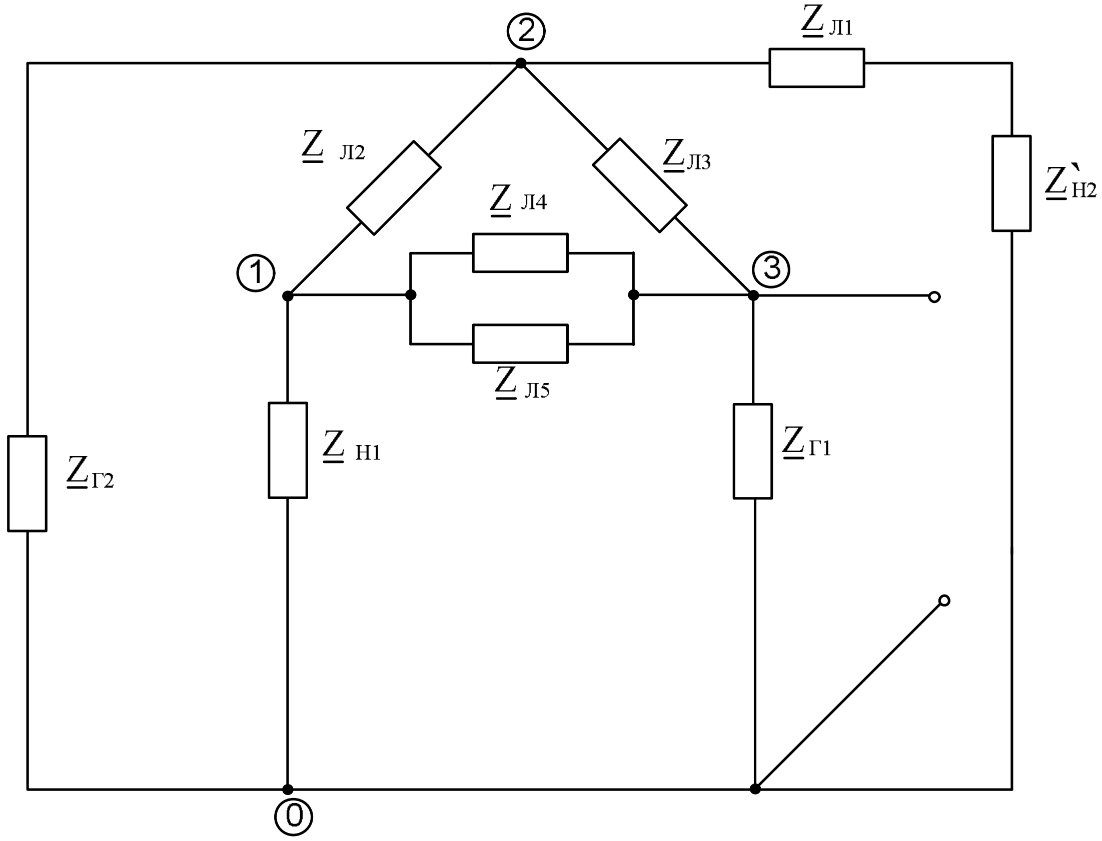


Рис. 4.28

При этом

$$\underline{Z}_6 = \frac{\underline{Z}_{Л4}\underline{Z}_{Л5}}{\underline{Z}_{Л4} + \underline{Z}_{Л5}} = 12,5 + j37,5\,(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_7 = \frac{(\underline{Z}_{Л1} + \underline{Z}'_{Н2})\underline{Z}_{Г2}}{\underline{Z}_{Л1} + \underline{Z}'_{Н2} + \underline{Z}_{Г2}} = 2,23 + j29,3\,(\text{Ом}).$$

Преобразуем треугольник сопротивлений $\underline{Z}_{Л2}; \underline{Z}_{Л3}; \underline{Z}_6$ в эквивалентную звезду (рис. 4.30), при этом

$$\underline{Z}_8 = \frac{\underline{Z}_{Л2}\underline{Z}_{Л3}}{\underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{Л3} + \underline{Z}_6} = 6,3 + j29,9 \quad (Ом);$$

$$\underline{Z}_9 = \frac{\underline{Z}_{Л2}\underline{Z}_6}{\underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{Л3} + \underline{Z}_6} = 5,28 + j16 \quad (Ом);$$

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_{Л3}\underline{Z}_{Л3}}{\underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{Л3} + \underline{Z}_6} = 4,12 + j14 \quad (Ом).$$

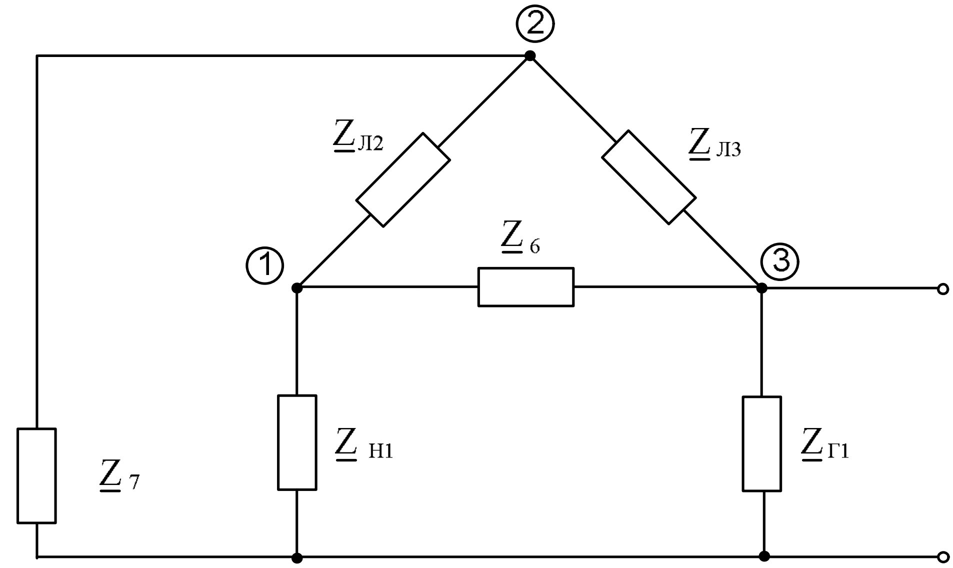


Рис. 4.29

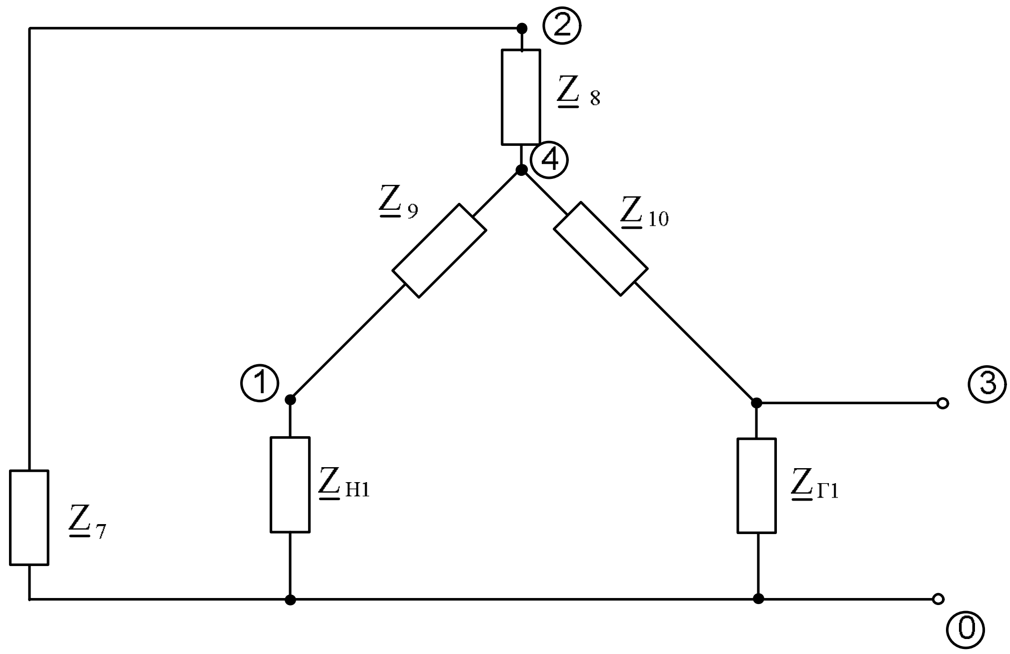


Рис. 4.30

Заменяя последовательно и параллельно соединенные сопротивления на рис.4.30 на эквивалентные, получаем схему, представленную на рис. 4.31, где

$$\underline{Z}_{11} = \frac{(\underline{Z}_7 + \underline{Z}_8)(\underline{Z}_9 + \underline{Z}_{\text{Н1}})}{\underline{Z}_7 + \underline{Z}_8 + \underline{Z}_9 + \underline{Z}_{\text{Н1}}} = 9{,}38 + \text{j}55{,}7\,(\text{Ом}).$$

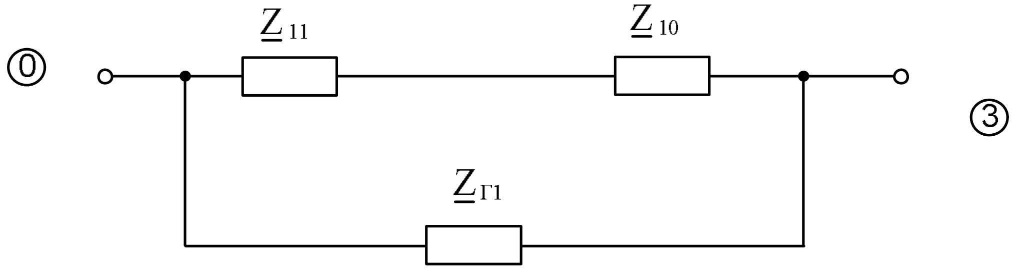


Рис. 4.31

Окончательно $\underline{Z}_{\text{Э}(1)}$ из схемы на рис. 4.31 будет равно

$$\underline{Z}_{\text{Э}(1)} = \frac{(\underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{11})\underline{Z}_{\text{Г1}}}{\underline{Z}_{10} + \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{\text{Г1}}} = 0{,}412 + \text{j}12{,}4\,(\text{Ом}).$$

Для определения $\underline{Z}_{\text{Э}(2)}$ (рис. 4.27,б) необходимо рассмотреть схему пассивного двухполюсника для токов обратной последовательности. Эта схема по своему виду ничем не будет отличаться от схемы на рис. 4.28, но параметры источников и первого приемника изменятся. Производя преобразования, аналогичные приведенным выше, получаем:

$$\underline{Z}_{6(2)} = \underline{Z}_6 = 12{,}5 + \text{j}37{,}5 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{7(2)} = \frac{(\underline{Z}_{\text{Л1}(2)} + \underline{Z}'_{\text{Н2}(2)})\underline{Z}_{\text{Г2}(2)}}{\underline{Z}_{\text{Л1}(2)} + \underline{Z}'_{\text{Н2}(2)} + \underline{Z}_{\text{Г2}(2)}} = 0.0687 + \text{j}5{,}15 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{8(2)} = \underline{Z}_8 = 6{,}3 + \text{j}29{,}9 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{9(2)} = \underline{Z}_9 = 5{,}28 + \text{j}16 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{10(2)} = \underline{Z}_{10} = 4{,}12 + \text{j}14 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{11(2)} = \frac{(\underline{Z}_{7(2)} + \underline{Z}_{8(2)})(\underline{Z}_{9(2)} + \underline{Z}_{\text{Н1}(2)})}{\underline{Z}_{7(2)} + \underline{Z}_{8(2)} + \underline{Z}_{9(2)} + \underline{Z}_{\text{Н1}(2)}} = 8{,}04 + \text{j}33{,}5 \quad (\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{Э(2)}=\frac{(\underline{Z}_{10(2)}+\underline{Z}_{11(2)})\underline{Z}_{Г1(2)}}{\underline{Z}_{10(2)}+\underline{Z}_{11(2)}+\underline{Z}_{Г1(2)}}=0,0405+j2,83\quad(\text{Ом}).$$

Для определения $\underline{Z}_{Э(0)}$ (рис. 4.27,в) свернем схему активного двухполюсника нулевой последовательности (рис. 4.26) по отношению к источнику ЭДС $\dot{E}_{A(0)}$:

$$\underline{Z}_{6(0)}=\frac{\underline{Z}_{Л4(0)}\underline{Z}_{Л5(0)}}{\underline{Z}_{Л4(0)}+\underline{Z}_{Л5(0)}}=12,5+j131,25\quad(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{7(0)}=\underline{Z}_{Г2(0)}+3\underline{Z}_{N2}=j26,5\quad(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{8(0)}=\frac{\underline{Z}_{Л2(0)}\underline{Z}_{Л3(0)}}{\underline{Z}_{Л2(0)}+\underline{Z}_{Л3(0)}+\underline{Z}_{6(0)}}=6,3+j104,5\quad\text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{9(0)}=\frac{\underline{Z}_{Л2(0)}\underline{Z}_{6(0)}}{\underline{Z}_{Л2(0)}+\underline{Z}_{Л3(0)}+\underline{Z}_{6(0)}}=5,3+j56\quad(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{10(0)}=\frac{\underline{Z}_{Л3(0)}\underline{Z}_{6(0)}}{\underline{Z}_{Л2(0)}+\underline{Z}_{Л3(0)}+\underline{Z}_{6(0)}}=4,12+j49\quad(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{11(0)}=\frac{(\underline{Z}_{7(0)}+\underline{Z}_{8(0)})(\underline{Z}_{9(0)}+\underline{Z}_{Н1(0)}+3\underline{Z}_{n})}{\underline{Z}_{7(0)}+\underline{Z}_{8(0)}+\underline{Z}_{9(0)}+\underline{Z}_{Н1(0)}+3\underline{Z}_{n}}=31+j114,6\quad(\text{Ом});$$

$$\underline{Z}_{Э(0)}=\frac{(\underline{Z}_{10(0)}+\underline{Z}_{11(0)})(\underline{Z}_{Г1(0)}+3\underline{Z}_{N1})}{\underline{Z}_{10(0)}+\underline{Z}_{11(0)}+\underline{Z}_{Г1(0)}+3\underline{Z}_{N1}}=0,284+j15\quad(\text{Ом}).$$

4.2.10. Схемам рис. 4.27 соответствуют уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{gathered}\dot{I}_{A(1)}\underline{Z}_{Э(1)}=\dot{E}_{Э(1)}-\dot{E}_{A(1)};\\ \dot{I}_{A(2)}\underline{Z}_{Э(2)}=-\dot{E}_{A(2)};\\ \dot{I}_{A(0)}\underline{\dot{Z}}_{Э(0)}=-\dot{E}_{A(0)}.\end{gathered}\tag{4.13}$$

Для определения шести неизвестных величин, входящих в уравнения (4.13), запишем три дополнительных уравнения через симметричные составляющие фазы A, определяющие заданный вид несимметрии (однофазное короткое замыкание фазы B), для несимметричной трехфазной цепи, представленной на рис. 4.18.

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{I}_{A(1)} + \dot{I}_{A(2)} + \dot{I}_{A(0)} = 0;$$

$$\dot{I}_C = 0; \quad a\dot{I}_{A(1)} + a^2\dot{I}_{A(2)} + \dot{I}_{A(0)} = 0; \tag{4.14}$$

$$\dot{E}_B = 0; \quad a^2\dot{E}_{A(1)} + a\dot{E}_{A(2)} + \dot{E}_{A(0)} = 0.$$

Решив систему уравнений (4.13), (4.14), получаем следующие симметричные составляющие токов и ЭДС фазы А:

$$\dot{I}_{A(1)} = 7e^{-j81,6^\circ}\ \text{кА}; \ \dot{I}_{A(2)} = 7e^{j38,4^\circ}\ \text{кА}; \ \dot{I}_{A(0)} = 7e^{j158,4^\circ}\ \text{кА};$$

$$\dot{E}_{A(1)} = 125e^{j7,36^\circ}\,\text{кВ}; \ \dot{E}_{A(2)} = 19,82e^{-j52,4^\circ}\,\text{кВ}; \ \dot{E}_{A(0)} = 105,3e^{j67,4^\circ}\,\text{кВ}.$$

Ток короткого замыкания фазы В несимметричного участка (рис. 4.18)

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B(1)} + \dot{I}_{B(2)} + \dot{I}_{B(0)} = a^2\dot{I}_{A(1)} + a\dot{I}_{A(2)} + \dot{I}_{A(0)} = 21e^{j158,4^\circ}\ (\text{кА}).$$

Напряжения между точками 3А, 3С и землей несимметричного участка

$$\dot{U}_{3A} = \dot{E}_{A(1)} + \dot{E}_{A(2)} + \dot{E}_{A(0)} = 201,9e^{j28,9^\circ} \quad (\text{кВ});$$

$$\dot{U}_{3C} = a\dot{E}_{A(1)} + a^2\dot{E}_{A(2)} + \dot{E}_{A(0)} = 201,6e^{j105,8^\circ} \quad (\text{кВ}).$$

Векторные диаграммы токов и напряжений несимметричного участка трехфазной цепи, а также их симметричные составляющие представлены на рис. 4.32.

4.2.11. Значения ЭДС $\dot{E}_{A(1)};\dot{E}_{A(2)};\dot{E}_{A(0)}$ в схемах на рис. 4.24÷4.26 равны потенциалу узла (узел 3), в котором имела место поперечная несимметрия. Зная значения потенциала узла 3 в схемах прямой, обратной и нулевой последовательностей, можно определить токи во всех ветвях схем на рис. 4.24÷4.26, например, методом узловых потенциалов и найти токи во всех ветвях несимметричной трехфазной цепи.

Если требуется определить токи только в ветвях, связанных с узлом, где произошла несимметрия, то можно воспользоваться законом Ома или вторым законом Кирхгофа. Рассчитаем симметричные составляющие для тока в первой ветви несимметричном режиме.

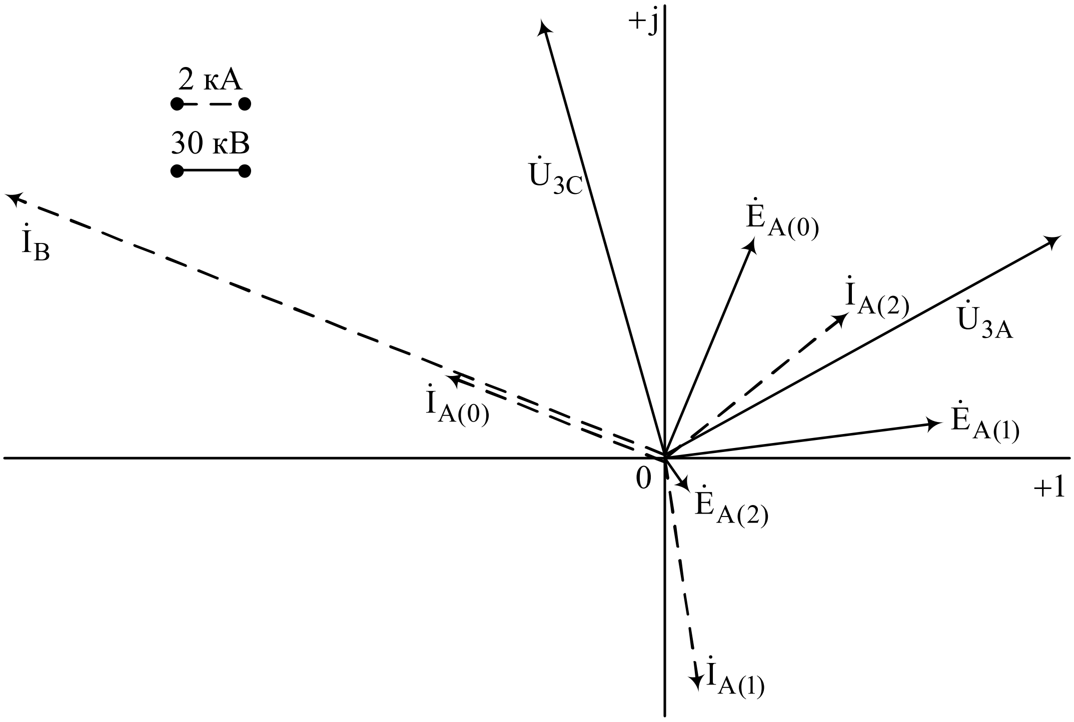


Рис. 4.32

Ток прямой последовательности $\dot{I}_{1A(1)}$ (рис. 4.24)

$$\dot{I}_{1A(1)} = \frac{\dot{E}_{1A} - \dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{\Gamma 1}} = 6{,}48e^{-j99{,}5^{\circ}} \quad (\text{кА}).$$

Ток обратной последовательности $\dot{I}_{1A(2)}$ (рис. 4.25)

$$\dot{I}_{1A(2)} = -\frac{\dot{E}_{A(2)}}{\underline{Z}_{\Gamma 1(2)}} = 6{,}61e^{j37{,}6^{\circ}} \quad (\text{кА}).$$

Ток нулевой последовательности $\dot{I}_{1A(0)}$ (рис. 4.26)

$$\dot{I}_{1A(0)} = -\frac{\dot{E}_{A(0)}}{\underline{Z}_{\Gamma 1(0)} + 3\underline{Z}_{N1}} = 6{,}38e^{j157{,}3^{\circ}} \quad (\text{кА}).$$

Фазные токи в первой ветви (рис. 4.20) определятся через симметричные составляющие

$$\dot{I}_{1A} = \dot{I}_{1A(1)} + \dot{I}_{1A(2)} + \dot{I}_{1A(0)} = 1,72e^{j177^\circ} \text{ (кА)};$$

$$\dot{I}_{1B} = a^2\dot{I}_{1A(1)} + a\dot{I}_{1A(2)} + \dot{I}_{1A(0)} = 19,3e^{j152^\circ} \text{ (кА)};$$

$$\dot{I}_{1C} = a\dot{I}_{1A(1)} + a^2\dot{I}_{1A(2)} + \dot{I}_{1A(0)} = 2,1e^{-j59,8^\circ} \text{ (кА)}.$$

Векторные диаграммы токов первой ветви и их симметричные составляющие представлены на рис.4.33.

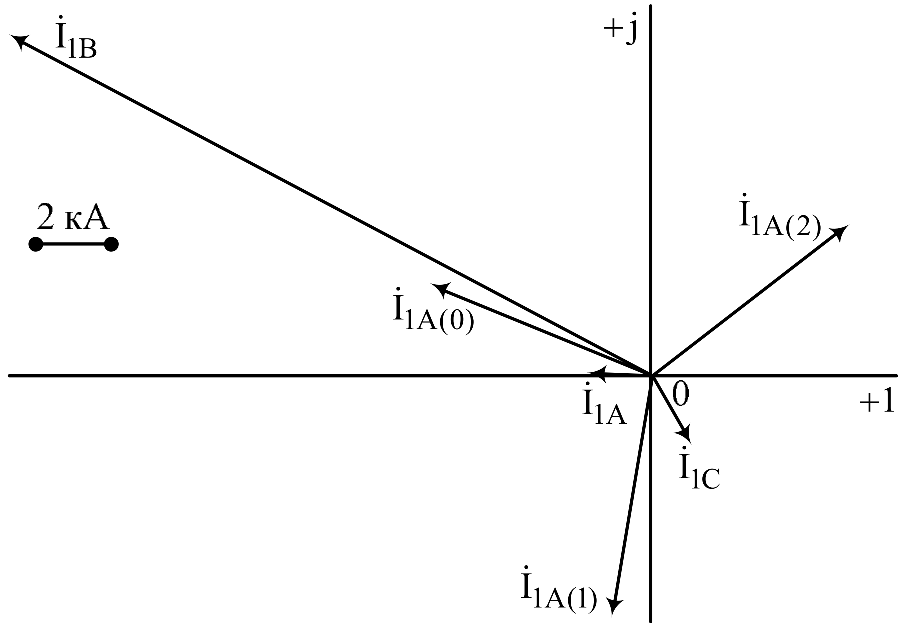


Рис. 4.33

Список
рекомендуемой учебно–методической литературы
по дисциплине

1. **Бессонов, Лев Алексеевич.** Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учеб. для студ. электротехн., энергет. и приборостроит. спец. вузов. /Л.А.Бессонов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528с.

2. **Зевеке, Георгий Васильевич.** Основы теории цепей: учеб. для вузов. /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. –528с.

3. **Поливанов, Константин Михайлович.** Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов. В 3-х т. /под общ. ред. К.М.Поливанова. Т.1. К.М.Поливанов. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными. М.:Энергия, 1972. –240с.

4. **Матханов, Платон Николаевич.** Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи: учеб. для электротехн. и радиотехн. спец. вузов./П.Н.Матханов. –3-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1990. –400 с.

5. **Атабеков, Григорий Иосифович.** Теоретические основы электротехники. – Линейные электрические цепи. Учебное пособие/ Атабеков Г.И.– СПб: Изд-во «Лань», 2010 -592 с.

6. **Ионкин, Петр Афанасьевич.** Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основы теории линейных цепей: учеб. для электротехн. вузов. /П..А..Ионкин, А.И.Даревский, Е.С.Кухаркин, В.Г.Миронов, Н.А.Мельников; под ред. П.А. Ионкина. Изд. 2-е, перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1976. –544 с.

7. **Демирчян, Камо Серопович.** Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 5-е изд. Т.1./ Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. – СПб.: Питер, 2009. – 512 с.

8. **Голубев, Александр Николаевич.** Теория линейных и нелинейных цепей: Курс лекций –2-е изд., перераб. и доп. –Иваново: ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина», 2007. –348 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ГОЛУБЕВ Александр Николаевич,
МАРТЫНОВ Владимир Александрович

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ
Учебное пособие
Редактор

Подписано в печать Формат 60х84 1/16

Печать плоская. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. 9,4. Тираж 300 экз. Заказ №
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.

ISBN
© А.Н. Голубев, В.А. Мартынов, 2013