КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
1семестр

Решение задач по теме «*Линейная алгебра*»

В задачах 1-10 даны матрицы А и В. Найти А·В и В·А.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

В задачах 11-20 дана система линейных уравнений. Требуется решить систему:
1) по формулам Крамера;
2) методом Гаусса;
3) средствами матричного исчисления, т.е. используя обратную матрицу.

11. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x-3y+z=0, \\ 3x+2y-2z=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 3x-2y+2z=7, \\ 2x+2y-z=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x+3y+z=6, \\ 3x+4y-2z=5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ 2x-3y+2z=3, \\ 3x-4y+3z=4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-3y+2z=-4, \\ 3x-6y+4z=-7, \\ 2x-5y+2z=-5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x-y-z=-1, \\ 2x-3y-6z=1, \\ 3x+y+2z=-4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-2y+3z=-2, \\ 3x-y+4z=-6, \\ 2x-3y-z=2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y-2z=2, \\ 2x+3y+z=-2, \\ -3x+y-z=-3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-y+3z=1, \\ 2x-3y+4z=-1, \\ x+2y-z=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-2y+z=-2, \\ 2x-3y-z=0, \\ 3x+y-z=5. \end{cases}$

В задачах 21-30 дана система линейных уравнений. Требуется найти все решения системы методом Гаусса (не использовать ранг матриц.

21. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=5, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=7, \\ x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+x_2+5x_3+3x_4=6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=2, \\ 4x_1+x_2-2x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=-1, \\ 5x_1+3x_2-3x_3+x_4=3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=3, \\ x_1+2x_2-3x_3+2x_4=2, \\ 3x_1+3x_2-4x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=7, \\ x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1-2x_2-2x_3+2x_4=-4, \\ x_1+3x_2+3x_3-x_4=9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1-2x_2+3x_3-x_4=2, \\ 4x_1-x_2+4x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-2x_4=-3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=5, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4=3, \\ 3x_1-x_2+4x_3=7 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1, \\ 2x_1+x_2-x_3-5x_4=2, \\ x_1-x_2-4x_3-9x_4=1, \\ 3x_1+3x_2+2x_3-x_4=3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=6, \\ 2x_1-2x_2+x_3+2x_4=8, \\ x_1-3x_2-x_3-x_4=2, \\ 3x_1-x_2+3x_3+5x_4=14. \end{cases}$

В задачах 31-40 дана система линейных уравнений. Требуется решить систему методом Гаусса или доказать ее несовместность, решая методом Гаусса

31. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+3x_2-2x_3=8. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=10, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=8, \\ 3x_1+7x_2+x_3=4. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=4, \\ x_1-3x_2+4x_3=5, \\ 4x_1-2x_2+6x_3=1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=4, \\ 3x_1-x_2+x_3=7, \\ 4x_1-4x_2-x_3=5. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3=10, \\ x_1+3x_2-x_3=7, \\ 4x_1+7x_2+4x_3=2. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3=7, \\ 3x_1-2x_2+x_3=3. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=7, \\ 3x_1+x_2-x_3=3, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=1. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6, \\ 2x_1+5x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+7x_2+3x_3=3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=2, \\ 2x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1-3x_2+4x_3=6. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=5, \\ 3x_1-x_2-x_3=4, \\ 4x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$

Решение задач по теме «*Аналитическая геометрия*»

В задачах 41-50 даны координаты точки A и уравнение прямой l.
Требуется:
1) составить уравнение прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l;
2) составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l;
3) изобразить на чертеже точку A и прямые l, l_1, l_2.

41. $A(2;\ -1)$, l: $3x-4y+5=0$.
42. $A(-3;\ 1)$, l: $2x-3y+4=0$.
43. $A(-2;\ 1)$, l: $3x+5y-4=0$.
44. $A(3;\ -2)$, l: $4x+2y+5=0$.
45. $A(-3;\ 1)$, l: $2x+3y-6=0$.
46. $A(1;\ -2)$, l: $3x-6y+12=0$.
47. $A(1;\ -3)$, l: $3x-2y-6=0$.
48. $A(3;\ -1)$, l: $2x-y-2=0$.
49. $A(-3;\ 2)$, l: $4x-3y-12=0$.
50. $A(-1;\ 1)$, l: $2x+4y-5=0$.

В задачах 51-60 даны координаты вершин треугольника *ABC*.
Требуется:
1) найти *tg* угла и между прямыми *AC* и *AB*, используя угловые коэффициенты прямых;
2) составить уравнение высоты *CD* и найти ее длину;
3) составить уравнение медианы *AM*;
4) сделать чертёж в декартовой системе координат (высоту и медиану строить по двум точкам).

51. A(2;-3), B(-2;-1), C(4;2).
52. A(3;-2), B(-1;0), C(5;3).
53. A(1;-4), B(-3;-2), C(3;1).
54. A(0;-5), B(-4;-3), C(2;0).
55. A(-1;-6), B(-5;-4), C(1;-1).
56. A(4;-1), B(0;1), C(6;4).
57. A(-2;-7), B(-6;-5), C(0;-2).
58. A(5;0), B(1;2), C(7;5).
59. A(-3;-8), B(-7;-6), C(-1;-3).
60. A(6;1), B(2;3), C(8;6).

В задачах 61-70 привести уравнения кривых к каноническому виду. Найти координаты центра и параметры *а, в* для эллипса и гиперболы; координаты вершины и параметр *р* для параболы. Сделать чертёж в декартовой системе координат (без переноса осей координат).

61. *а)* $4(x+2)^2+25(y-1)^2=100$,
б) $(x-3)^2-9(y+1)^2=9$,
в) $x^2-2x-3y-11=0$.

62. *а)* $(x-3)^2+9(y+1)^2=9$,
б) $4(x+1)^2-25(y-1)^2=100$,
в) $x^2-2x+3y+13=0$.

63. а) $25(x+2)^2+4(y-1)^2=100$,
б) $9(x-3)^2-(y+1)^2=-9$,
в) $y^2-4y-6x-2=0$.

64. а) $9(x-3)^2+(y+1)^2=9$,
б) $25(x+1)^2-4(y-1)^2=-100$,
в) $y^2-4y+6x+10=0$.

65. а) $16(x-4)^2+(y+2)^2=16$,
б) $4(x+1)^2-9(y-2)^2=36$,
в) $x^2+4x-4y+8=0$.

66. а) $9(x+1)^2+4(y-2)^2=36$,
б) $16(x-4)^2-(y+2)^2=16$,
в) $x^2+4x+2y+2=0$.

67. а) $(x-4)^2+16(y+2)^2=16$,
б) $9(x+1)^2-4(y-2)^2=-36$,
в) $y^2+2y-2x+7=0$.

68. а) $9(x+4)^2+16(y-3)^2=144$,
б) $(x-4)^2-16(y+2)^2=-16$,
в) $y^2+2y+2x-5=0$.

69 а) $4(x+1)^2+9(y-2)^2=36$,
б) $9(x-2)^2-4(y+3)^2=36$,
в) $x^2-8x-4y+4=0$.

70. а) $16(x-3)^2+9(y+4)^2=144$,
б) $25(x-2)^2-4(y+5)^2=100$,
в) $y^2+8y+3x+7=0$.

В задачах 71-80 на трех векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, исходящих из общего начала, построена пирамида. Требуется найти:

1) проекцию вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{c}$;

2) площадь грани построенной на векторах $\bar{a}$ и $\bar{c}$ (площадь треугольника);

3) объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$;

5) длину медианы треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{c}$, исходящей из общего начала векторов.

71. $\bar{a}(2;\ 2;\ 1)$, $\bar{b}(3;\ 4;\ 0)$, $\bar{c}(1;\ -2;\ 1)$.

72. $\bar{a}(-3;\ 4;\ 0)$, $\bar{b}(1;\ -2;\ 2)$, $\bar{c}(2;\ 1;\ 1)$.

73. $\bar{a}(2;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}(-3;\ 4;\ 0)$, $\bar{c}(1;\ 2;\ 1)$.

74. $\bar{a}(2;\ 2;\ -1)$, $\bar{b}(3;\ -4;\ 0)$, $\bar{c}(1;\ 2;\ -1)$.

75. $\bar{a}(1;\ 2;\ -2)$, $\bar{b}(4;\ 0;\ -3)$, $\bar{c}(2;\ 3;\ 1)$.

76. $\bar{a}(1;\ -2;\ 2)$, $\bar{b}(4;\ 3;\ 0)$, $\bar{c}(3;\ 1;\ 2)$.

77. $\bar{a}(-1;\ 2;\ -2)$, $\bar{b}(4;\ 0;\ 3)$, $\bar{c}(2;\ 1;\ 3)$.

78. $\bar{a}(1;\ -2;\ -2)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ 4)$, $\bar{c}(3;\ 2;\ 1)$.

79. $\bar{a}(-1;\ -2;\ 2)$, $\bar{b}(4;\ 1;\ 3)$, $\bar{c}(3;\ 1;\ -2)$.

80. $\bar{a}(2;\ 1;\ -2)$, $\bar{b}(3;\ 4;\ 1)$, $\bar{c}(3;\ -1;\ 2)$.

В задачах 81-90 задана прямая l и точка A. Требуется составить:

а) канонические уравнения прямой l_1, проходящей через точку A параллельно прямой l;

б) общее уравнение плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l.

81. (l) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$, A (3, - 4, 1).

82. $(l)\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-2},\qquad A\ (-1, 1, 6).$

83. $(l)\quad \frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+7}{1},\qquad A\ (3, 1, -2).$

84. $(l)\quad \frac{x+1}{7}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{5},\qquad A\ (1, 3, -2).$

85. $(l)\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1},\qquad A\ (-4, 5, 3).$

86. $(l)\quad \frac{x-7}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{1},\qquad A\ (2, -1, 1).$

87. $(l)\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{5},\qquad A\ (3, 2, -1).$

88. $(l)\quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-5},\qquad A\ (1, 2, -2).$

89. $(l)\quad \frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-4},\qquad A\ (5, 1, -1).$

90. $(l)\quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-7}{-3},\qquad A\ (-1, 2, 2)$

Решение задач по теме «*Введение в математический анализ*»

В задачах 91-100 требуется вычислить пределы не пользуясь правилом Лопиталя и не используя эквивалентные бесконечно малые.

91. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x^2+1}{8x^4+3x^3+x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{2x^2-5x+3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4-\sqrt{5x+6}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 9x}{x\,tg 3x}$,

д) $\lim\limits_{x\to -3}(3x+10)^{\frac{4x}{9-x^2}}$.

92. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^8+5x^4-1}{3x^7+2x^8+5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-9x-2}{3x^2+5x-22}$,

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{5+x}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 7x}{tg^2 5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{3x+1}$.

93. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^4+5x}{2x^4+x^3+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-2x-5}{5x^2+4x-1}$,

94. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^6-5x^3+4}{14x^4+10x^2-x^5}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2+5x-6}{3x^2+4x-4}$, в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-\sqrt{6+x}}{x^3-4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{tg^2 4x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{2-\sqrt{3+x}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{x\sin 3x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{5x+3}$.

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+5x^2-7}{6x^4+2x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2}{4-\sqrt{18+x}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 3x}{x\, tg 5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{3x}{x^2-16}}$.

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^6-5x^2+3}{3x^6+6x^3+4}$,

б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^2+10x+3}{4x^2+5x-21}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{2-\sqrt{3x+1}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{2x\sin 9x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-5}{7x+1}\right)^{3x+4}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-3x^3+x}{5x^4+x^2+4}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2-11x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{2-\sqrt{x+2}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg 6x}$

д). $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3}{x^2+x-2}}$.

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x^3+3}{8x^2-4x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^2+3x-10}{3x^2+7x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2-\sqrt{3-x}}{x-x^3}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 3x}{\sin 5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+2}{6x+1}\right)^{3x-2}$.

99. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4+3x^5-8}{6x^4+x-3x^5}$,

б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+x-2}{2x^2+x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-x^3}{\sqrt{2x-1}-1}$,

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+3x^4+7}{12x^4+x-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-6x-20}{3x^2-14x-5}$,

в) $\lim\limits_{x\to -0,5} \dfrac{4x^2-1}{3-\sqrt{10+2x}}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 8x}{x\cdot tg5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^2 3x}{x sin5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{4}{x^2-x}}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{2x-3}$.

В задачах 101-110 требуется исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва, указать характер разрыва. Сделать схематический чертеж.

101. $y=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ 2x+1, & 1<x<2, \\ 5, & x\ge 2. \end{cases}$

102. $y=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ 2x+3, & 0<x\le 2, \\ 3x+1, & x>2. \end{cases}$

103. $y=\begin{cases} 3x-2, & x<0, \\ x-2, & 0\le x\le 1, \\ 3x^2, & x>1. \end{cases}$

104. $y=\begin{cases} 2x+3, & x\le 0, \\ -x^2, & 0<x\le 2, \\ x-6, & x>2. \end{cases}$

105. $y=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \frac{x^2}{3}, & 0\le x<3, \\ 6-x, & x\ge 3. \end{cases}$

106. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ -x^2, & 0<x<1, \\ x-2, & x\ge 1. \end{cases}$

107. $y=\begin{cases} x-5, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$

108. $y=\begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ 3x-2, & 0\le x\le 2, \\ 2+x, & x>2. \end{cases}$

109. $y=\begin{cases} 3x^2, & x\le 0, \\ 2x, & 0<x\le 2, \\ x-3, & x>2. \end{cases}$

110. $y=\begin{cases} x+3, & x<0, \\ -x^2+1, & 0\le x<2, \\ x-5, & x\ge 2. \end{cases}$

В задачах 111-120 требуется найти производные функций.

111. а) $y=5x^3 tg5x+e^{5x^2-1}$,

б) $y=\frac{3}{x^4}+8^{\frac{4-x}{2x-3}}$,

в) $y=arctg ln\left(6x^2+1\right)$,

г) $y=sin^7\left(5x^2-1\right)$.

112. $a)\ y=5x^4 ctg8x+e^{2x^2+3}$, $б)\ y=\dfrac{2}{x^6}+3^{\frac{2x+5}{7-x}}$,

$в)\ y=\sin\ln(3x^3+1)$, $г)\ y=arctg^4 2x^5$.

113 $a)\ y=9x^3\cos 2x+3^{-x^2+2}$, $б)\ y=\dfrac{5}{x^7}+e^{\frac{1-2x}{3x+2}}$,

$в)\ y=\ln arctg\left(8x^2-1\right)$, $г)\ y=ctg^6(2x^2+1)$.

114. $a)\ y=2x^3 ctg2x+e^{-6x^2+5}$, $б)\ y=\dfrac{4}{x^2}-7^{\frac{1-3x}{2x+3}}$,

$в)\ y=arctg\log_3\left(5x^2+1\right)$, $г)\ y=\cos^6(2x^3+3)$.

115. $a)\ y=8\sqrt[7]{x}\,ctg4x^2+e^{-x^2+2}$, $б)\ y=\dfrac{8}{x^3}+3^{\frac{4-7x}{6x+5}}$,

$в)\ y=\ln\sin(2x^6+5)$, $г)\ y=arctg^3 4x^5$.

116. $a)\ y=2x^5\sin 2x^7+e^{-3x^2+1}$, $б)\ y=\dfrac{6}{x^2}+4^{\frac{3x+4}{1-7x}}$,

$в)\ y=arctg\ln\left(7x^4+1\right)$, $г)\ y=tg^7(2x^3+3)$.

117. $a)\ y=4\sqrt[4]{x}\cos(x^5+1)+e^{4x^2+3}$, $б)\ y=\dfrac{7}{x^6}-5^{\frac{5-2x}{3x+4}}$,

$в)\ y=\log_3 tg(2x^2+5)$, $г)\ y=\arcsin^6 6x^3$.

118. $a)\ y=2x\cos 4x^3+e^{5x^2-2}$, $б)\ y=\dfrac{10}{x^4}-6^{\frac{4-3x}{2x+9}}$,

$в)\ y=\log_5 tg(4x^2+5)$, $г)\ y=\arcsin^4 4x^3$.

119. $a)\ y=7x^3 ctgx^6+e^{-7x^2+4}$, $б)\ y=\dfrac{9}{x^2}+9^{\frac{5-4x}{2x+3}}$,

$в)\ y=\ln\cos(5x^3-3)$, $г)\ y=\arcsin^8 4x^2$.

120. а) $y=3x^3 ctg 7x+e^{-8x^2+3}$, б) $y=\frac{1}{x^4}-2^{\frac{3x+4}{3-2x}}$,

в) $y=\sin\ln(4x^2+5)$, г) $y=arcctg^9 5x^3$.

В задачах 121-130 требуется найти производные $\frac{dy}{dx}$ неявной и параметрической функций.

121. а) $3x^2+xy^3-e^{3y^2}=3$;
б) $\begin{cases} x=(4-t)^2, \\ y=\cos^2(4-t)^2. \end{cases}$

122. а) $x^2y+2xy^2-e^{4y}=6$;
б) $\begin{cases} x=\ln(1-t^6), \\ y=\arccos^2 t^3. \end{cases}$

123. а) $2y+xy^2+e^{2y^2}=2$;
б) $\begin{cases} x=\arcsin^2 8t, \\ y=\sqrt{1-4t^2}. \end{cases}$

124. а) $(3x+y)^2-2y^2+4x^3y=1$;
б) $\begin{cases} x=7(3t-\sin 3t), \\ y=7(1-\cos 3t). \end{cases}$

125. а) $x+2y+y^2\cos 2x=4$;
б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-9t^2}, \\ y=\arcsin^2 3t. \end{cases}$

126. а) $x^2y^2-2y+e^{3x^2}=5$;
б) $\begin{cases} x=a\cos^3(2-t), \\ y=a\sin^3(2-t). \end{cases}$

127. а) $x^3y-y^3+e^{-x^3}=7$;
б) $\begin{cases} x=\sin^2(8-t), \\ y=tg(8-t). \end{cases}$

128. а) $2x^2y-y^2+e^{x^4}=4$;
б) $\begin{cases} x=ctg(5-2t), \\ y=\cos^2(5-2t). \end{cases}$

129. а) $3xy+x^2y^3+e^{-2x}=8$;
б) $\begin{cases} x=arctg 2t^2, \\ y=\ln^2(1+4t^4). \end{cases}$

130. а) $ye^{3x}-xy^3+x^5=5$;
б) $\begin{cases} x=artg(2+t)^2, \\ y=\sqrt{t^2+4t+5}. \end{cases}$

Решение задач по теме «*Дифференциальное исчисление функции одной переменной*»

В задачах 131-140 требуется вычислить предел функции двумя способами: *а*) с помощью правила Лопиталя, *б*) используя эквивалентные бесконечно малые.

131. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 12x}{\ln(1+5x)}$.

132. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-5x}-1}{\arcsin\frac{x}{2}}$.

133. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 7x^2}{e^{2x^2}-1}$.

134 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x^2)}{tg 5x^2}$.

135. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(1+4x^3\right)}{sin5x^3}$.

136. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^3}{tgx^3}$.

137. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x^4}{e^{-2x^4}-1}$

138. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{sin3x^2}$.

139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin9x^2}{arctg\dfrac{x^2}{2}}$.

140. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,8x}{sin3x}$.

В задачах 111 – 120 требуется исследовать функции методами дифференциального исчисления и построить их графики по плану:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция чётной или нечётной, т. е. симметричен ли её график относительно оси ординат или начала координат.
3. Найти вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы монотонности, т. е. интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
6. Построить график функции, используя все собранные данные (если их окажется недостаточно, чтобы представить график функции, то найти несколько дополнительных точек, например, точки пересечения с осями координат).

111. *а*) $y = x^3 + 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4$, *б*) $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$.

112. *а*) $y = 1{,}5\cdot x^4 - 2\cdot x^3 + 1$, *б*) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

113. *а*) $y = x^3 - 3\cdot x^2 - 9\cdot x + 5$, *б*) $y=\dfrac{-x}{(x-1)^2}$.

114. *а*) $y = 3\cdot x^4 + 4\cdot x^3 + 3$, *б*) $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

115. *а*) $y = x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x + 4$, *б*) $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$.

116. *а*) $y = 4\cdot x^3 + 3\cdot x^4 + 1$, *б*) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

117. *а*) $y = x^3 + 3\cdot x^2 - 9\cdot x - 5$, *б*) $y=\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.

118. *а*) $y = 2\cdot x^3 - 1{,}5\cdot x^4 - 1$, *б*) $y=\dfrac{x^2}{2-x}$.

119. *а*) $y = -\ x^3 + 6\cdot x^2 + 15\cdot x - 10$, *б*) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

120. *а*) $y = 2\cdot x^3 - \ 4\cdot x^2 \ - 3$, *б*) $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

В задачах 121 - 130 требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

121. $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-12}$, $a = 5$, $b = 7$.

122. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-9}$, $a = -1$, $b = 2$.

123. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$, $a = -2$, $b = 1$.

124. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$, $a = 4$, $b = 6$.

125. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7}$, $a = -2$, $b = 1$.

126. $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-12}$, $a = 1$, $b = 3$.

127. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-9}$, $a = 6$, $b = 10$.

128. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$, $a = 2$, $b = 4$.

129. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$, $a = -2$, $b = 3$.

130. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7}$, $a = 6$, $b = 8$.

В задачах 131 – 140 дана функция $y = f(x)$ и точка x_o требуется составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_o (см. образец решения - задача 3).

131. $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} \ - \ 5\cdot x - \ 3$, $x_o = -1$.

132. $y = -3\cdot\sqrt[3]{x^2} \ + 6\cdot x - 5$, $x_o = 1$.

133. $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} \ - \ 7\cdot x - \ 6$, $x_o = -1$.

134. $y = -3\cdot\sqrt[3]{x^2} \ + 7\cdot x - 8$, $x_o = 1$.

135. $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} \ - 4\cdot x - \ 4$, $x_o = -1$.

136. $y = -\ 6\cdot\sqrt[3]{x^2}\ -\ 2\cdot x\ + 3,$ $x_o = 1.$

137. $y = 6\cdot\sqrt[3]{x^2}\ + 4\cdot x + 3,$ $x_o = -\ 1.$

138. $y = -\ 6\cdot\sqrt[3]{x^2}\ -\ x + 4,$ $x_o = 1.$

139. $y = 6\cdot\sqrt[3]{x^2}\ + x -\ 3,$ $x_o = -\ 1.$

140. $y = -\ 6\cdot\sqrt[3]{x^2}\ + 2\cdot x -\ 3,$ $x_o = 1.$

Решение задач по теме «*Функции нескольких переменных*»

В задачах 141 – 150 дана функция $z = f(x,y)$. Требуется найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Убедиться, что смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны.

141. $z = sin(x^3 - 3y) -\ 7xy + x^4y^5 - 14y^2 +2.$

142. $z = e^{2x+y^4} + 9xy - x^5y^3 + 4x^2\text{-}2\ .$

143. $z = cos(4x^3 + y^2) - 6xy + x^4y^2 - 2x^5+1\ .$

144. $z = cos(3x\ +2y^4) + 8xy + x^3y^5 - 5y^2 - 1.$

145. $z = sin(x^3 -\ 4y) - 5xy + x^5y^2 - 3y^4 +3.$

146. $z = e^{3x-y^3} + 4xy - x^2y^5 + 6x^4\text{-}3\ .$

147. $z = sin(x^2 + 2y) - 3xy + x^3y^4 - 5y^5 +8.$

148. $z = sin(2x\ + y^2) + 5xy\ - x^4y^3 + 4x^5 - 7.$

149. $z = cos(3y -\ x^3) -\ 2xy + x^4y^2 - 3y^5+7\ .$

150. $z = cos(3x - y^2) + 7xy - x^2y^5 + 2x^4 - 9.$

В задачах 151–160 составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Найти $z_0 = f(x_0,y_0)$.

151. $z = x^2 + 2xy -3\ x+5y$; $x_0 = 1,\quad y_0 = -\ 1.$

152. $z = x^2 + 2xy -y^2 +4x$; $x_0 = 2,\quad y_0 = 1.$

153. $z = 3x^2\ - xy\ +7\ y$; $x_0 = -\ 1,\quad y_0 = 3.$

154. $z = 4x^2y + x^3 + y^2$; $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

155. $z = 5x^2 + 3xy + y^2 - 4$; $x_0 = 1$, $y_0 = -4$.

156. $z = 3x^2 + 3y^2 - x + y + 2$; $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

157. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$; $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.

158. $z = 4x - x^2 - y^2 + 3y$; $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

159. $z = x^2 + 2xy - 7x - y^2$; $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

160. $z = 4 - 2x^2 - y^2 + xy$; $x_0 = 2$, $y_0 = 4$.

В задачах161–170 требуется найти экстремумы функции $z=f(x,y$.

161. $z = (x+y)^3 - 3x^2 - 3y$.

162. $z = (x - 2y)^3 - 3x + y^2$.

163. $z = (2x + y)^3 - y^3 - 2x$.

164. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 5$.

165. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

166. $z = (2y + x)^2 - 6y - x^3$.

167. $z = (x - y)^3 + 1{,}5y^2 - 3x$.

168. $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x$.

169. $z = 2x^3 - 24x + 3y^2 - 6y$.

170. $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x$.