Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Понятие случайного события

1.1.1. Определение случайного события

До сих пор мы имели дело с явлениями или событиями, которые происходили всякий раз при реализации некоторого комплекса условий S.

Например, если воду при нормальном атмосферном давлении $p = 760$ мм ртутного столба разогреть до температуры 100 °C (комплекс условий S), то она превратится в пар (событие A).

Или, если в некоторой δ - окрестности точки (x_0, y_0) существуют непрерывные частные производные функции $z = f(x, y)$ (комплекс условий S), то эта функция дифференцируема в точке (x_0, y_0) (событие A).

Если в результате эксперимента всякий раз происходит некоторое событие, то это событие называется достоверным (обозначается Ω).

Если в результате эксперимента некоторое событие не происходит никогда, то оно называется невозможным (обозначается $\varnothing$).

Если в результате эксперимента событие может произойти, либо не произойти, то оно называется случайным (обозначается $A, B, C, \ldots$).

Теория вероятностей изучает случайные события, которые можно наблюдать неограниченное число раз при одних и тех же условиях, и не рассматривает случайных уникальных событий.

1.1.2. Пространство элементарных исходов

Выше мы выяснили, что с каждым случайным событием связан некоторый опыт или эксперимент.

Множество всевозможных, взаимоисключающих исходов (результатов) эксперимента называется пространством **элементарных исходов** или **элементарных событий** (обозначается Ω).

Пример 1.1. Эксперимент – подбрасывание монеты.

Возможны два исхода: ω_1 – монета выпала гербом, ω_2 – монета выпала надписью, пространство элементарных исходов – $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Пример 1.2. Эксперимент – подбрасывание игральной кости.

Элементарные исходы: ω_i – на выпавшей грани игральной кости – i очков, $i = \overline{1, 6}$, пространство элементарных исходов – $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$.

Пример 1.3. Эксперимент – извлечение карты из тщательно перемешанной колоды.

Элементарные исходы: ω_i – карта определенной масти и определенного достоинства $i = \overline{1, 36}$, пространство элементарных исходов – $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{36}\}$.

Пример 1.4. Эксперимент – регистрация вызовов в течение часа на АТС.

Элементарные исходы: ω_i – в течение часа на АТС поступило i вызовов, пространство элементарных исходов – $\Omega = \{\omega_i \mid i \in N \cup \{0\}\}$.

Пример 1.5. Эксперимент – стрельба по плоской мишени.

Элементарные исходы: $\omega = (x, y)$ – точки некоторой области на плоскости, пространство элементарных исходов – $\Omega = \{(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

В первых трех примерах пространство элементарных исходов - конечное, в четвертом – бесконечное, но счетное, в пятом – бесконечное и несчетное.

1.1.3. Алгебра случайных событий

Назовем некоторый элементарный исход эксперимента **благоприятствующим** событию *A*, если в результате эксперимента, в котором имел место данный элементарный исход, происходит событие *A*.

Тогда любое случайное событие можно представить как совокупность (множество) случайных исходов, благоприятствующих этому событию, т.е. как некоторое подмножество из пространства элементарных событий Ω.

Например, в примере 1.2 можно рассмотреть событие *A* – на грани игральной кости выпало число очков кратное 3, тогда это событие представляется как совокупность двух элементарных исходов $A = \{\omega_3, \omega_6\}$.

В примере 1.3 – событие *A* – из колоды карт извлечен туз (каждая девятая карта в масти), тогда $A = \{\omega_9, \omega_{18}, \omega_{27}, \omega_{36}\}$.

В примере 1.4 – событие *A* – в течение часа поступило не более 10 вызовов, тогда $A = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{10}\}$.

В примере 1.5 – событие *A* – произошло попадание в круг радиуса *R* = 1, здесь $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

Суммой *A* + *B* ($A \bigcup B$) случайных событий *A* и *B* называется случайное событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий, т.е. в результате эксперимента происходит хотя бы одно событие.

Произведением *A*•*B* ($A \bigcap B$) случайных событий *A* и *B* называется случайное событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих и событию *A*, и событию *B*, т.е. в результате эксперимента события *A* и *B* происходят одновременно.

Разностью *A* – *B* (*A**B*) случайных событий *A* и *B* называется случайное событие, состоящее из элементарных исходов, которые благоприятствуют событию *A* и не благоприятствуют событию *B*, т.е. в результате эксперимента происходит событие *A* и не происходит событие *B*.

События *A* и *B* называются **несовместными**, если нет элементарных исходов, благоприятствующих и событию *A*, и событию *B*, т.е. в результате эксперимента эти события не могут произойти одновременно или $A \cdot B = \varnothing$.

Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию *A*, если выполняются два условия: 1) $A + \overline{A} = \Omega$, 2) $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Если каждому элементарному исходу поставить в соответствие некоторую точку на плоскости, то пространство элементарных исходов и любое случайное событие изобразятся некоторыми множествами точек на плоскости, что дает наглядное представление о введенных арифметических операциях. Эти рисунки называются диаграммами Вьена.

Основные свойства введенных операций

1. Коммутативный закон (перестановочное свойство):

$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

2. Ассоциативный закон (сочетательное свойство)

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

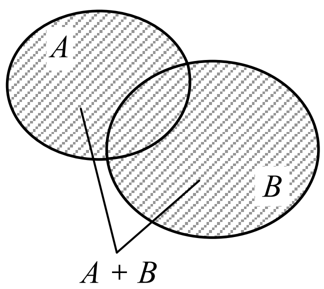
3. Дистрибутивный закон (распределительное свойство)

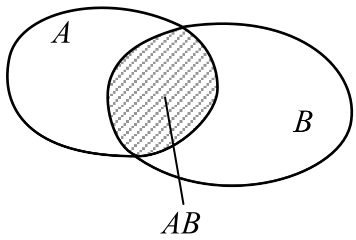
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

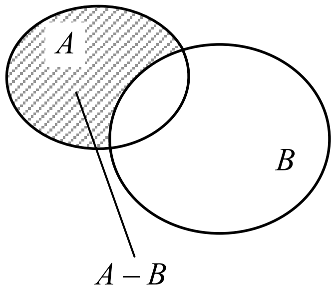
4. Правила де Моргана

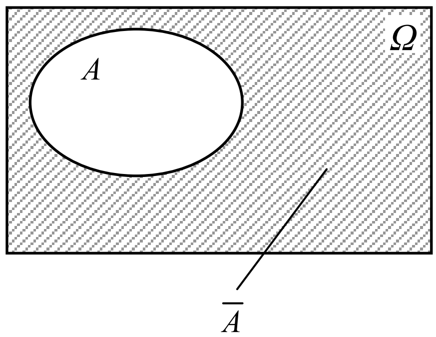
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

5. $A \cdot \varnothing = \varnothing$, $A + \varnothing = A$, $A \cdot \Omega = A$, $A + \Omega = \Omega$, $A + A = A$, $A \cdot A = A$.



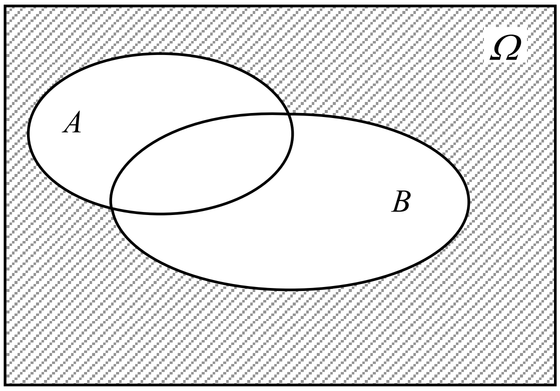




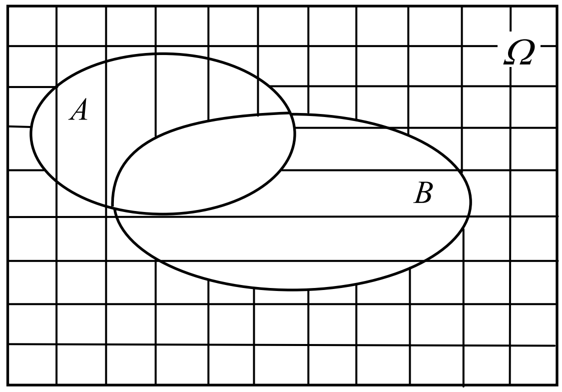


Все свойства доказываются непосредственно из определений операций, необходимо рассмотреть произвольный элементарный исход, благоприятствующий левой части равенства, и показать, что он благоприятствует и правой части тоже, и наоборот. Кроме того, при доказательстве можно использовать диаграммы Вьена. Для этого необходимо изобразить множества элементарных исходов, благоприятствующих левой и правой части на разных картинках, и визуально убедиться, что они совпадают. Покажем, например, что справедливо равенство $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Левая часть равенства



Правая часть равенства



Фигуры, заштрихованные на диаграммах, совпадают, значит $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Система (совокупность) случайных событий $\Re$ называется **алгеброй случайных событий**, если $\forall\ A, B \in \Re$ выполняются свойства:

1) $\Omega \in \Re$,
2) $A + B \in \Re$,
3) $A \cdot B \in \Re$,
4) $\overline{A} \in \Re$.

Таким образом, алгебра случайных событий - это множество случайных событий, содержащее достоверное событие и замкнутое относительно операций сложения и умножения.

Наиболее простой алгеброй случайных событий является множество, состоящее из двух событий: $\Re = \{\varnothing, \Omega\}$.

В дальнейшем везде будет использоваться алгебра случайных событий, которая является множеством всевозможных подмножеств из пространства элементарных событий Ω (легко проверить, что все свойства в определении алгебры случайных событий выполняются для этого множества).

Утверждение 1.1. В алгебре с конечным числом элементов в пространстве элементарных исходов 2^n случайных событий.

Доказательство. Каждому случайному событию можно однозначно сопоставить последовательность из 0 и 1 длины n по следующему правилу.

Если i-й элементарный исход благоприятствует событию A ($\omega_i \in A$), то на i-м месте в последовательности ставится 1, если не благоприятствует событию A ($\omega_i \notin A$), то на i-м месте ставится 0.

Таким образом, перебираются все последовательности из 0 и 1 длины n, а таких последовательностей будет 2^n штук.

1.2. Вероятность случайного события

Числовая характеристика возможности появления случайного события в эксперименте называется **вероятностью** этого события.

1.2.1. Аксиоматическое определение и простейшие следствия из аксиом

Числовая функция, заданная на алгебре случайных событий, называется вероятностью, если выполняются следующие аксиомы:

А1 (аксиома неотрицательности): $\forall\ A \in \Re: \quad P(A) \geq 0$.

А2 (аксиома нормированности): $P(\Omega) = 1$.

А3 (аксиома аддитивности): для любых двух несовместных событий $A, B \in \Re$

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1.1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (1.1')$$

Доказательство. $1 \overset{A2}{=} P(\Omega) \overset{def}{=} P(A+\overline{A}) \overset{A3}{=} P(A) + P(\overline{A})$.

Следствие 1.2.

$$P(\varnothing)=0.$$

Доказательство. Так как $\varnothing=\overline{\Omega},\ \overline{\varnothing}=\Omega$, используя равенство (1.1'), получаем

$$P(\varnothing)=1-P(\overline{\varnothing})=1-P(\Omega)\overset{A2}{=}1-1=0.$$

Следствие 1.3. $\forall A\in\Re:\quad 0\le P(A)\le 1.$

Доказательство. Из (1.1') $\quad\Rightarrow\quad P(A)=1-P(\overline{A})\le 1$, так как

$$\forall A\in\Re:\quad P(\overline{A})\overset{A1}{\ge}0.$$

Следствие 1.4 (теорема сложения**).**

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2}$$

Доказательство. Покажем, что

$$A=A\overline{B}+AB, \tag{*}$$

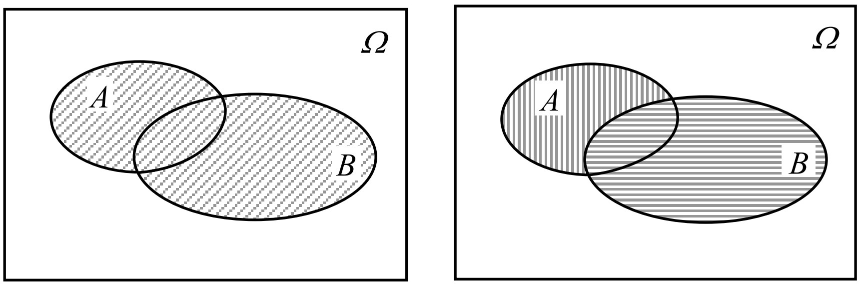
действительно, $A=A\cdot\Omega=A=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$.

С другой стороны

$$A+B=B+A\cdot\overline{B}, \tag{**}$$

действительно

Левая часть равенства *Правая часть равенства*



$$\Rightarrow\quad A+B=B+A\cdot\overline{B}.$$

В правых частях равенств (*) и (**) суммы несовместных событий:

$$(A\cdot\overline{B})(AB)=(A\cdot A)(\overline{B}\cdot B)=A\cdot\varnothing=\varnothing\quad\Rightarrow\quad A\overline{B},\ AB\ \text{– несовместны},$$

$$B(A\cdot\overline{B})=A(B\cdot\overline{B})=A\cdot\varnothing=\varnothing\quad\Rightarrow\quad B,\ A\overline{B}\ \text{– несовместны.}$$

Таким образом,

$$P(A)\overset{(*)}{=}P(A\overline{B}+AB)\overset{A3}{=}P(A\overline{B})+P(AB),\ P(A+B)\overset{(**)}{=}P(B+A\overline{B})\overset{A3}{=}P(B)+P(A\overline{B}).$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$P(A+B)-P(A)=P(B)-P(AB),\quad P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Для трех слагаемых, аналогично

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть $B+C=D$, тогда

$$P(A+B+C)=P(A+D)\overset{(1.2)}{=}P(A)+P(D)-P(AD)\overset{(1.2)}{=}P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(BC)-(P(AB)+P(AC)-P(ABC))\ \Rightarrow\ (1.3).$$

Для большего числа случайных событий вероятность суммы вычисляется по формуле (как выяснится позже, вероятность совместного появления большого числа событий найти проще, чем вероятность суммы):

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)\overset{(1.1')}{=}1-P(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n})=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}).$$

1.2.2. Конечная вероятностная схема

Тройка $(\Omega, \Re, P)$ называется вероятностным пространством.

Пусть в этом вероятностном пространстве пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n\}$ – конечное множество.

Припишем каждому элементарному исходу некоторое неотрицательное число $p_i \ \ (p_i = P(\omega_i),\ i = \overline{1, n})$, для которых выполняются два свойства:

$$\text{а) } \forall\, i = \overline{1, n}: \quad p_i \ge 0\,; \quad \text{б) } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,;$$

тогда $\forall\ A \in \Re$ определим функцию P с помощью равенства

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{k=1}^{m} p_{i_k} \quad , \tag{1.4}$$

где i_k – номера элементарных исходов, которые благоприятствуют событию A, т.е. $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$; p_i – вероятности элементарных исходов.

Формула (1.4) – определение вероятности в конечной схеме.

Таким образом, **вероятность** случайного события – это сумма вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих данному событию.

Классическое определение вероятности.

Если в некотором смысле вероятности элементарных исходов одинаковы, т.е. элементарные исходы равновозможные, то логично считать, что

$$p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}, \quad i = \overline{1, n}\,,$$

в этом случае условия а) и б) выполняются:

а) $p_i > 0, \quad i = \overline{1, n}$, б) $\sum p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, тогда

$$\forall A \in \Re: \quad P(A) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}\,. \tag{1.5}$$

Вероятность случайного события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу **равновозможных** элементарных исходов.

В примере 1.2 (с игральными костями) $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, тогда

$$P(A) \overset{(1.5)}{=} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

Пространство элементарных исходов в каждом случае выбирается наиболее подходящим образом. Довольно часто этот выбор не всегда очевиден. Рассмотрим простой пример.

Эксперимент – подбрасывание двух одинаковых монет, событие A – монеты выпали одинаковыми сторонами. Рассмотрим два варианта решения.

Модель 1.1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где ω_1 – монеты выпали "гербами", ω_2 – монеты выпали "решками", ω_3 – монеты выпали разными сторонами, тогда $n = 3$,

$$A = \{\omega_1, \omega_2\} \ \Rightarrow\ P(A) \overset{(1.5)}{=} \frac{2}{3}\,.$$

Модель 1.2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где ω_1 – монеты выпали "гербами", ω_2 – выпали "герб" и "решка", ω_3 – выпали "решка" и "герб", ω_4 – монеты выпали "решками", тогда $n = 4$,

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad \Rightarrow \quad P(A) \overset{(1.5)}{=} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Какое из этих решений более соответствует истине сразу, вообще говоря, не понятно. В первом случае монеты не различимы, во втором случае они считаются разными. В этих случаях помогает статистическое определение вероятности (критерий истины – это практика). Но прежде еще один пример.

Парадокс де Мере. Многократно наблюдая игру в кости, шевалье де Мере обратил внимание, что при подбрасывании трех игральных костей сумма очков, равная 11, появляется чаще, чем сумма очков, равная 12, хотя число элементарных исходов, благоприятствующих тому и другому событию, одно и то же.

$\sum = 11$: 6–4–1, 5–4–2, 4–4–3, 5–5–1, 6–3–2, 5–3–3;

$\sum = 12$: 6–5–1, 5–5–2, 4–5–3, 4–6–2, 4–4–4, 6–3–3.

В чем здесь дело?

1.2.3. Статистическое определение вероятности

Рассмотрим последовательность из N экспериментов, в каждом из которых может произойти некоторое событие A.

Обозначим через N_A число испытаний, в которых событие A произошло, тогда $w_A = \dfrac{N_A}{N}$ – относительная частота появления события A в этих испытаниях.

Если при увеличении N относительная частота незначительно отклоняется от некоторого числа p, то это число называется вероятностью события A, т.е. в соответствии со статистическим определением вероятности

$$p = P(A) = \lim_{N \to \infty} w_A$$

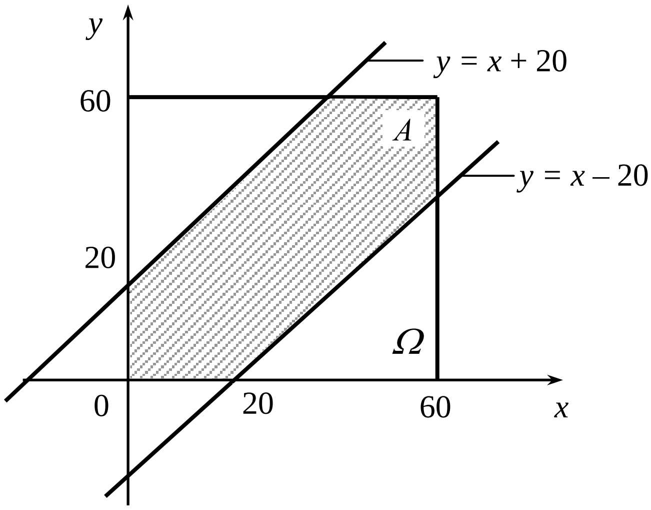
1.2.4. Геометрическая вероятность

Идея: представить пространство элементарных исходов в виде некоторого множества пространства R_n, тогда любое случайное событие – это подмножество данного множества и

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega},$$

где mes$C$ – мера множества $C \subset R_n$, т.е. при $n = 1$ mes$C$ – длина промежутка, при $n = 2$ mes$C$ – площадь плоской фигуры, при $n = 3$ mes$C$ – объем тела.

Задача о встрече. Два лица договорились встретиться в определенном месте от 12.00 часов до 13.00 часов с условием, что пришедший первый ждет другого 20 минут и, если не дожидается, то уходит. Какова вероятность встречи?



Решение. Событие A – встреча состоялась. Пусть x – время прихода к месту встречи одного, y – время прихода к месту встречи другого. Возможные элементарные исходы это точки квадрата со стороной 60 мин, т.е. $\Omega = \{(x, y) | 0 \le x, y \le 60\}$. Тогда событие A – это подмножество из Ω:

$$A = \{(x, y) \| x - y | \le 20\}.$$

$$|x - y| \le 20 \quad \Leftrightarrow \quad -20 \le x - y \le 20,$$

строим множество A по граничным линиям:

$$x - y = 20, \quad y = x - 20; \; -20 = x - y, \quad -x + y = 20, \quad y = x + 20.$$

$P(A)$ – отношение площадей фигур A и Ω, тогда

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

1.3. Основные теоремы и формулы

1.3.1. Условная вероятность и теорема умножения

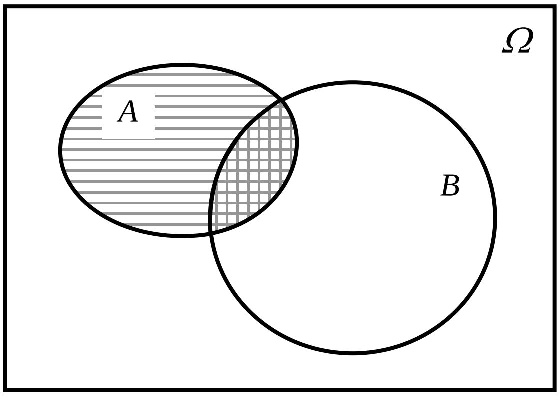
Рассмотрим произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \Re, P)$ и два события A и B. Будем считать, что $P(A) \ne 0 \Leftrightarrow P(A) > 0$.

Что можно сказать о вероятности события B, если известно, что произошло событие A?

Тот факт, что событие A произошло, несет некоторую дополнительную информацию о пространстве элементарных исходов, что, возможно, изменяет вероятность появления B.

По определению вероятность события B, найденная в предположении, что произошло некоторое событие A, называется **условной вероятностью** события B (обозначается $P_A(B), P(B/A)$).

Если событие A произошло, то некоторые из элементарных исходов становятся невозможными, $\omega_i \in \overline{A}$, и мы можем рассматривать новое усеченное пространство элементарных исходов, из которых невозможные исходы исключены, т.е. $\Omega_A = A$.



Например, при классическом определении вероятности условную вероятность можно подсчитать в этом новом пространстве элементарных исходов следующим образом:

$$P_A(B) = \frac{|AB|}{|A|}, \; P_A(B) = \frac{|AB| / |\Omega|}{|A| / |\Omega|} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Условной вероятностью события B называется число, равное отношению вероятности совместного появления событий к вероятности события A.

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \ . \qquad (1.6)$$

Условная вероятность, определенная таким образом, удовлетворяет всем аксиомам А1 – А3 в определении вероятности.

Действительно:

1) так как $P(AB) \overset{A1}{\geq} 0$, $\quad (P(A) > 0$ по условию), то

$$P_A(B) \overset{(1.6)}{=} \frac{P(AB)}{P(A)} \geq 0 \ \Rightarrow \text{ А1 справедлива;}$$

2) $P_A(\Omega) \overset{(1.6)}{=} \dfrac{P(A\Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1 \ \Rightarrow$ А2 справедлива;

3) Если B и C несовместные события, т.е. $BC = \varnothing$, то события AB и AC тоже несовместны $(AB)(AC) = A(BC) = A\varnothing = \varnothing$, тогда

$$P_A(B+C) \overset{(1.6)}{=} \frac{P(AB+AC)}{P(A)} \overset{A3}{=} \frac{P(AB)}{P(A)} + \frac{P(AC)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C) \ \Rightarrow \text{ А3 справедлива.}$$

Пример 1.6. Студент идет на экзамен, зная первые пять билетов из первого десятка и пять последних билетов из третьего десятка. Общее количество билетов 30. Ему достается билет из первого десятка. Найти вероятность того, что билет знаком студенту.

Решение. Пусть событие A – билет извлечен из первого десятка, событие B – билет знаком студенту. Тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{30}\}, \quad B = \{\omega_1, \ldots, \omega_5; \omega_{26}, \ldots, \omega_{30}\}, \quad P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

$$\Omega_A = \{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\} = A, \quad B = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\} \ \Rightarrow \ P_A(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Если использовать формулу (1.6), то

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{5/30}{10/30} = \frac{1}{2}.$$

Равенство (1.6) можно представить в следующем виде

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \qquad (1.7)$$

– теорема умножения, или

$$P(AB) = P(B)P_B(A)$$

Эти формулы легко обобщаются на случай n сомножителей

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\ldots A_{n-1}}(A_n) \qquad (1.8)$$

Доказательство этой формулы проводится по индукции. При $n = 2$ равенство (1.8) справедливо (см. формулу (1.7)). Предположим, что оно справедливо для $n - 1$ сомножителей , тогда обозначим

$$A_1A_2\ldots A_{n-1} = A, \ \ A_n = B$$

и запишем формулу (1.7).

$$P(AB) = P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1\ldots A_{n-1})\ldots P_{A_1\ldots A_{n-1}}(A_n) \ ,$$

откуда следует справедливость формулы (1.8) $\ \forall\, n = 2, 3, \ldots$.

Пример 1.7. Студент идет на экзамен, выучив 15 из 30 вопросов. Ему предлагают билет из трех вопросов. Найти вероятность того, что студент знает все три вопроса.

Решение. Пусть $A = A_1 A_2 A_3$, где A_i – i-й вопрос знаком студенту, тогда

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) \overset{(1.8)}{=} P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{15}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} = \frac{13}{116}.$$

Событие B – хотя бы один вопрос знаком студенту, тогда

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) P_{\overline{A_1}\,\overline{A_2}}(\overline{A_3}) = 1 - \frac{15}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} = 1 - \frac{13}{116} = \frac{103}{116}.$$

В общем случае имеем

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + \ldots + A_n}) \overset{(1.8)}{=} 1 - P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots P_{\overline{A_1} \ldots \overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n})$$

Если вероятность появления одного из событий не зависит от того, произошло ли другое, то эти события называются **независимыми**.

Для независимых событий

$$P_A(B) = P(B),\ P_B(A) = P(A) \overset{(1.7)}{\Leftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B).$$

События $A_1, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ справедливы равенства

$$P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}) \quad \text{или} \quad P_{A_{i_1} \ldots A_{i_{k-1}}}(A_{i_k}) = P(A_{i_k}).$$

Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но, вообще говоря, не наоборот, т.е. попарная независимость не является достаточным условием независимости в совокупности.

Пример 1.8. Пусть имеется урна с 4 шарами, в которой: 1 – белый шар, 1 – черный, 1 – красный, 1 – раскрашен в три цвета.

Решение. Событие A – извлеченный наудачу шар содержит в окраске белый цвет, событие B – извлеченный наудачу шар содержит в окраске черный цвет, событие C – извлеченный наудачу шар содержит в окраске красный цвет. Тогда

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4},$$

и $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, т.е. события попарно независимы, но $P(ABC) = \frac{1}{4} \ne P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$, или, например, $P_{AB}(C) = 1 \ne P(C) = \frac{1}{2}$, следовательно события A, B, C зависимы в совокупности.

1.3.2. Формула полной вероятности

События $H_1, \ldots, H_n$ называются полной группой, если справедливо равенство $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, т.е. в результате эксперимента происходит хотя бы одно из этих событий. Будем рассматривать полную группу попарно несовместных случайных событий, т.е. таких, что $\forall\, i, j; i \ne j: \quad H_i H_j = \varnothing$.

Для полной группы несовместных событий: $P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$.

Задача. Пусть некоторое событие A может произойти лишь при условии появления одного из событий, образующих полную группу. Причем заранее не известно, какое из этих событий произойдет (эти события называются **гипотезами**). Требуется найти вероятность события A.

Так как по определению $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$, то событие A можно представить в виде

$$A=A\Omega=A(H_1+H_2+\ldots+H_n)=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n.$$

Причем в правой части равенства записана сумма несовместных событий, так как $(AH_i)(AH_j)=A(H_iH_j)=A\varnothing=\varnothing \quad \Rightarrow \; P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_kA)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A)$, т.е.

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P_{H_k}(A) \tag{1.9}$$

– формула полной вероятности

Пример 1.9. Студент идет на экзамен, зная 20 билетов из 25. Каким лучше зайти в аудиторию: первым, вторым или третьим? Одним словом, когда вероятность взять выученный билет больше?

Решение. Пусть событие A – студент взял знакомый билет.

Если студент заходит первым, то

$$P(A)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}.$$

Если студент заходит вторым, то относительно первого студента можно выдвинуть две гипотезы: H_1 – взял знакомый билет, H_2 – взял незнакомый билет. В этом случае по формуле полной вероятности находим:

$$P(H_1)=\frac{4}{5},\; P(H_2)=\frac{1}{5},\; P_{H_1}(A)=\frac{19}{24};\; P_{H_2}(A)=\frac{20}{24}, \text{ и } P(A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{19}{24}+\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{24}=\frac{4}{5}.$$

Если студент заходит третьим, то относительно первых двух студентов можно предположить: H_1 – взяли два знакомых студенту билета, H_2 – взяли один знакомый, один незнакомый билет, H_3 – взяли два незнакомых билета, тогда

$$P(H_1)=\frac{C_{20}^2}{C_{25}^2}=\frac{20!\cdot 2!\cdot 23!}{2!\cdot 18!\cdot 25!}=\frac{19}{30},\; P(H_2)=\frac{C_{20}^1\cdot C_5^1}{C_{25}^2}=\frac{20\cdot 5\cdot 2!\cdot 23!}{25!}=\frac{10}{30},$$

$$P(H_3)=\frac{C_5^2}{C_{25}^2}=\frac{5!\cdot 2!\cdot 23!}{2!\cdot 3!\cdot 25!}=\frac{1}{30},\; P_{H_1}(A)=\frac{18}{23},\; P_{H_2}(A)=\frac{19}{23},\; P_{H_3}(A)=\frac{20}{23},$$

тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{19}{30}\cdot\frac{18}{23}+\frac{10}{30}\cdot\frac{19}{23}+\frac{1}{30}\cdot\frac{20}{23}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Видно, что во всех трех случаях вероятность получить выученный билет одна и та же, т.е. здесь "фортуну" обмануть нельзя.

1.3.3. Формулы Байеса

Предположим, что при выполнении условий предыдущей задачи (см. формулу (1.9)) в результате эксперимента событие A произошло. Этот факт несет дополнительную информацию об эксперименте, что приводит к тому, что первоначальные вероятности гипотез каким-то образом изменяются. Используя формулу (1.7), можно записать

$$P(A)P_A(H_i) = P(H_iA) = P(H_i)P_{H_i}(A) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)}$$

– формулы Байеса.

Здесь $P(H_i)$ – априорные вероятности, $P_A(H_i)$ – апостериорные вероятности.

Пример 1.10. Студент идет на экзамен, зная 20 билетов из 25, заходит вторым и берет знакомый ему билет. Какова вероятность того, что зашедший первым тоже взял знакомый ему билет? (см. предыдущий пример).

Решение.

$$P(H_1) = \frac{4}{5},\ P(H_2) = \frac{1}{5},\ P_A(H_1) = \frac{4/5 \cdot 19/24}{4/5} = \frac{19}{24} < \frac{4}{5},\ P_A(H_2) = \frac{1/5 \cdot 20/24}{4/5} = \frac{5}{24} > \frac{5}{25},$$

так как $H_i,\ i = \overline{1, n}$ по-прежнему образуют полную группу, то

$$P_A(H_1) + P_A(H_2) + \ldots + P_A(H_n) = 1.$$

1.3.4. Примеры решения задач

Задача о разорении игрока. Два игрока продолжают некоторую игру до полного разорения. Первый игрок имеет капитал в n_1 рублей, второй – в n_2 рублей. Вероятность того, что очередную партию выиграет первый, равна p, а вероятность того, что ее выиграет второй, равна q. Будем считать, что $p + q = 1$ (т.е. ничьих не бывает). Требуется найти вероятности разорения игроков.

Решение. Обозначим через p_n вероятность того, что первый игрок, имея n рублей, разорился, q_n – второй игрок, имея n рублей, разорился. Тогда искомые вероятности есть p_{n_1} и q_{n_2}.

Очевидно, выполняются соотношения (краевые условия):

$$p_{n_1+n_2} = 0,\ p_0 = 1.$$

Так как в первом случае первый игрок собрал весь капитал, его разорение невозможно. Во втором случае у него не осталось ни рубля (он разорился). Перед очередной партией разорение первого игрока может произойти двумя способами:

а) H_1 – он выиграл очередную партию и A – проиграл всю игру,

б) H_2 – он проиграл очередную партию и затем A – проиграл всю игру. Здесь применима формула полной вероятности (стоимость выигрыша и проигрыша 1 рубль).

$$p_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1},\ \ (p+q) \cdot p_n = p \cdot p_{n+1} + q \cdot p_{n-1},\ \ (p+q=1),$$

$$p(p_{n+1} - p_n) = q(p_n - p_{n-1}). \qquad (*)$$

1) Пусть $p = q = 1/2$, тогда из равенства (*), получаем

$$p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1} = \ldots = p_1 - p_0 = c,\ \ p_1 = p_0 + c,\ p_2 = p_0 + 2c, \ldots,\ p_n = p_0 + nc,$$

так как $p_0 = 1,\ p_n = 1 + nc$, тогда из равенства $p_{n_1+n_2} = 0 \ \Rightarrow$

$$0 = 1 + (n_1 + n_2)c,\ c = -\frac{1}{n_1 + n_2}, \text{ т.е. } p_n = 1 - \frac{n}{n_1 + n_2} \ \Rightarrow\ p_{n_1} = 1 - \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

Аналогично $q_{n_2} = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$.

2) В общем случае, если $p \neq q$ из равенства (*) $\Rightarrow$

$$\Delta p_{n+1} = \frac{q}{p}\Delta p_n \;\Rightarrow\; \Delta p_{n+1} = \frac{q^2}{p^2}\Delta p_{n-1}, \ldots, \Delta p_{n+1} = \left(\frac{q}{p}\right)^n \Delta p_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - p_0).$$

Так как $p_0 = 1,\; p_{n+1} - p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - 1),\; p_{n+1} = p_n - \left(\frac{q}{p}\right)^n (1 - p_1)$:

$$p_2 = p_1 - \frac{q}{p}(1 - p_1),\; p_3 = p_1 - \frac{q}{p}(1 - p_1) - \left(\frac{q}{p}\right)^2 (1 - p_1), \ldots,$$

$$p_{n_1} = p_1 - \sum_{k=1}^{n_1-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k (1 - p_1) = 1 - (1 - p_1) - \sum_{k=1}^{n_1-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k (1 - p_1) = p_1 + (1 - p_1)\sum_{k=1}^{n_1}\left(\frac{q}{p}\right)^k \quad (**)$$

Из второго краевого условия находим:

$$0 = p_{n_1+n_2} = p_1 - \sum_{k=0}^{n_1+n_2-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k (1 - p_1) = 1 - (1 - p_1)\sum_{k=0}^{n_1+n_2-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k = 1 - (1 - p_1)\cdot\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}}{1 - \frac{q}{p}},$$

откуда $1 - p_1 = \dfrac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}}$, из равенства (**) $\Rightarrow$

$$p_{n_1} = 1 - \sum_{k=0}^{n_1-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}} = 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1}}{1 - \frac{q}{p}} \cdot \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2} + \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}};$$

$$p_{n_1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_2}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}}$$ – вероятность разорения первого игрока,

$$q_{n_2} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n_2} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2}}$$ – вероятность разорения второго игрока.

Пусть, например, капитал второго игрока $n_2 >> n_1$. В этом случае разорить второго игрока практически невозможно

$$q_{n_2} = \frac{n_1}{n_2 + n_1} \approx 0.$$

Если $p >> q$, то $p_{n_1} \approx \left(\frac{q}{p}\right)^{n_1} \xrightarrow{n_1} 0$, так как $\left(\frac{q}{p}\right)^{n_1} \to 0$ и $\left(\frac{q}{p}\right)^{n_1+n_2} \to 0$.

Задача о безотказной работе станка. Найти вероятность того, что станок, работавший в момент времени t_0, не остановится в течение промежутка времени $t_0 + t$ при условиях:

1) вероятность остановки станка не зависит от величины промежутка (t_0, $t_0 + t$), т.е. от t,

2) вероятность остановки станка за малый промежуток времени Δt пропорциональна этому промежутку с точностью до бесконечно малой более высокого порядка.

Решение. Обозначим используемую вероятность через $P(t)$, тогда из 2-го условия можно получить

$$P(\overline{A}'_{\Delta t}) = 1 - P(\Delta t) = 1 - (a\Delta t + o(\Delta t))$$

– за время Δt станок остановится, где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Вероятность бесперебойной работы станка за промежуток $(t_0, t_0 + t + \Delta t)$ будет равна вероятности совместного появления двух событий, т.е. $P(t + \Delta t) = P(t) \cdot P(\Delta t)$ (так как по 1-му условию они независимы)

$$P(t + \Delta t) = P(t)(1 - a\Delta t + o(\Delta t)) \Rightarrow P(t + \Delta t) - P(t) = (-a\Delta t - o(\Delta t))P(t),$$

разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Таким образом, слева получим определение производной и приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dP(t)}{dt} = -aP(t), \quad \frac{dP}{P} = -adt, \quad \ln P = -at + c_1, \quad P(t) = e^{-at+c_1} = ce^{-at}.$$

$$P(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1, \quad P(t) = e^{-at}.$$

1.4. Повторение испытаний

Пусть производится n одинаковых экспериментов, в каждом из которых может произойти одно из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_r$, образующих полную группу.

Все события рассматриваются на одном пространстве элементарных исходов Ω. Для моделирования последовательности испытаний построим новое пространство элементарных исходов Ω_n: $\Omega_n = \left\{\omega_j = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \,\middle|\, i_k \in J_r,\ k = \overline{1, n}\right\}$,

где $J_r = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$; i_k – номер случайного события, произошедшего в k-м испытании; ω_j – последовательность длины n номеров событий, произошедших в каждом из испытаний.

Пусть $B_{i_k}^{(k)}$ – случайное событие, которое заключается в том, что в k-м испытании произошло событие с номером i_k, тогда

$$\omega_j = B_{i_1}^{(1)} B_{i_2}^{(2)} \ldots B_{i_k}^{(k)} \ldots B_{i_n}^{(n)} \quad ;$$

$$P(\omega_j) = P(B_{i_1}^{(1)}) P_{B_{i_1}^{(1)}}(B_{i_2}^{(2)}) \ldots P_{B_{i_1}^{(1)} \ldots B_{i_{n-1}}^{(n-1)}}(B_{i_n}^{(n)})$$

Последовательность испытаний называется **независимой**, если результаты предшествующих испытаний не влияют на результаты последующих испытаний.

В этом случае естественно считать, что условные вероятности перечисленных выше событий совпадают с безусловными вероятностями

$$P_{B_{i_1}^{(1)}\ldots B_{i_{k-1}}^{(k-1)}}(B_{i_k}^{(k)}) = P(B_{i_k}^{(k)}) = P(B_{i_k}) \quad .$$

Обозначим вероятности событий B_i через p_i, т.е. $P(B_i) = p_i$, тогда

$$P(\omega_j) = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n} \quad , \tag{1.10}$$

где $i_k \in J_r$, $k = \overline{1, n}$.

Если $\Re$ – обычная алгебра случайных событий, то

$$\forall\ A \in \Re: \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{1.11}$$

Получили вероятностное пространство, которое называется полиномиальной схемой.

Рассмотрим частный случай полиномиальной схемы – схему Бернулли.

1.4.1. Схема Бернулли

Рассмотрим два противоположных события, т.е. $r = 2,\ B_1 = A,\ B_2 = \overline{A}$. В каждом испытании может произойти лишь одно случайное событие. Считаем, что испытания независимы, т.е. применима формула (1.10). Если в *k*-м испытании произошло событие *A*, то этот исход назовем **успехом** и припишем ему значение равное 1. Если в *k*-м испытании событие *A* не произошло, то это **неудача,** припишем этому исходу значение, равное 0. Тогда

$$\Omega_n = \left\{ \omega_j = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \,\middle|\, i_k \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, n} \right\},$$

где ω_j – последовательность длины *n*, состоящая из 0 и 1.

Обозначим вероятность события $P(A) = p$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - p = q,\ \ p + q = 1$.

Пусть μ_n – число успехов в *n* испытаниях, тогда по формуле (1.10) вероятность произвольного исхода будет равна

$$P(\omega_j) = p^{\mu_n} q^{n-\mu_n} \ . \tag{1.12}$$

Наибольший интерес в этой схеме представляет случайное событие A_m, заключающееся в том, что в *n* независимых испытаниях событие *A* произошло *m* раз.

Теорема 1.1. Вероятность события A_m вычисляется по формуле

$$P(A_m) \equiv P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1.13}$$

– формула Бернулли.

Доказательство. В соответствии с определением вероятности случайного события (1.11), (1.12) получаем

$$P(A_m) \overset{(1.11),\,(1.12)}{=} \sum_{\omega \in A_m} p^m q^{n-m} \ ,$$

где $A_m = \left\{ \omega_j \,\middle|\, i_1 + i_2 + \ldots + i_n = m,\ i_k \in \{0, 1\} \right\}$.

Необходимо найти только число элементарных исходов, благоприятствующих событию A_m, а это число будет совпадать с числом способов, которыми в последовательности длины n можно выбрать m номеров испытаний, в которых произошло событие A, т.е. C_n^m, откуда и следует формула (1.13).

Пример 1.11. Что вероятнее выиграть у равносильного шахматиста: две партии из четырех или три из шести (ничьи не учитываются).

Решение. Событие A – выигрыш в партии одним из игроков, тогда по условию

$$P(A) = P(\overline{A}) = p = \frac{1}{2}.$$

1) При $n = 4$, $m = 2$ по формуле (1.13) находим

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8};$$

2) При $n = 6$, $m = 3$, получаем

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16},$$

т.е. вероятность выигрыша двух партий из четырех больше, чем трех из шести.

1.4.2. Общая полиномиальная схема

Рассмотрим общую полиномиальную схему с r случайными событиями и найдем вероятность случайного события $A_{n_1 n_2 \ldots n_r}$, которое заключается в том, что событие B_1 произошло n_1 раз, событие B_2 произошло n_2 раз, …, событие B_r произошло n_r раз $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Теорема 1.2. Вероятность события $A_{n_1 n_2 \ldots n_r}$ вычисляется по формуле

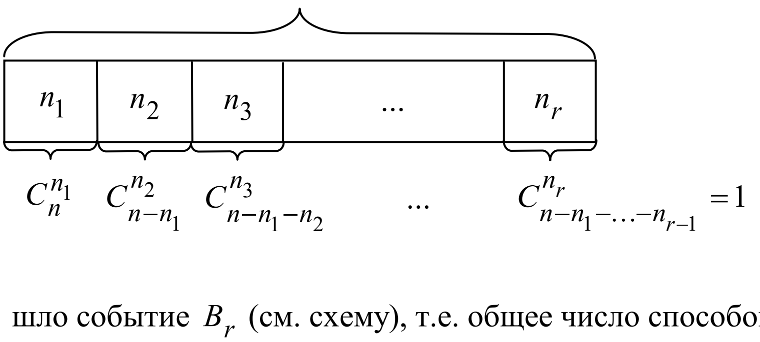
$$P(A_{n_1 n_2 \ldots n_r}) \equiv P_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \qquad (1.14)$$

где $p_k = P(B_k)$, $\quad k = \overline{1, r}$.

Доказательство. Вероятность этого случайного события

$$P(A_{n_1 n_2 \ldots n_r}) \overset{(1.10)}{=} \sum_{\omega \in A_{n_1 n_2 \ldots n_r}} P(\omega).$$

Осталось найти число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A_{n_1 n_2 \ldots n_r}$. Это число будет равно числу способов, которыми в последовательности длины n можно выбрать n_1 номеров испытаний, в которых произошло событие B_1, n_2 номеров испытаний, в которых произошло событие B_2, …, n_r номеров испытаний, в которых произошло событие B_r (см. схему), т.е. общее число способов будет равно



$$N = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \dots C_{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}^{n_r} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \ldots \cdot 1 =$$
$$= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \quad \Rightarrow \quad (1.14).$$

Здесь в каждой паре соседних дробей в числителе и знаменателе есть общие множители, поэтому большая часть сомножителей сокращаются.

Пример 1.12. Какова вероятность выиграть три партии из шести, две свести вничью и одну проиграть у равносильного шахматиста.

Решение. Пусть B_1 – выигрыш партии одним из игроков, B_2 – партия завершилась вничью, B_3 – проигрыш партии одним из игроков. Теперь

$$P(B_1) = P(B_3) = \frac{1}{4}, \ \ P(B_2) = \frac{1}{2}, \ \ P_6(3,2,1) \overset{(1.14)}{=} \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{15}{256}.$$

1.4.3. Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли

По формуле Бернулли, $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $p = P(A)$, найдем отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot p^{m+1} \cdot q^{n-m-1}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}.$$ Если $\frac{np}{q} > 1$, то

$$\exists m: \ \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \ge 1 \Rightarrow P_n(m+1) \ge P_n(m); \ \ \exists m: \ \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \le 1 \Rightarrow P_n(m+1) \le P_n(m).$$

Значит существует m_0 – наивероятнейшее число появлений события *A*. Рассмотрим второе неравенство

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \le 1, \ \ np - mp \le mq + q, \ \ np - q \le m(p+q) = m.$$

1) Если $np - q$ – целое число, то пусть $m_0 = np - q$ и тогда

$$\frac{P_n(m_0+1)}{P_n(m_0)} = \frac{n - np + q}{np - q + 1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{nq + q}{np + p} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$

таким образом $P_n(m_0) = P_n(m_0+1)$, т.е. m_0, m_0+1 два наивероятнейших числа появлений события *A* в испытаниях.

2) Если $np - q$ – нецелое число, то обозначим через m_0 – наименьшее целое число большее $np - q$, т.е. в этом случае m_0 определяется как решение неравенств

$$np - q < m_0 < np - q + 1, \quad \text{или} \quad np - q < m_0 < np + p.$$

1.4.4. Предельные теоремы в схеме Бернулли

По формуле Бернулли (1.14), в том случае когда число испытаний очень большое, а вероятность появления или непоявления события *A* мала, ничего посчитать практически невозможно. В этом случае перемножаются очень большие числа и очень маленькие и за счет ошибок округления возникают большие погрешности. В данной ситуации используются приближенные формулы.

Теорема 1.3. (Пуассона)

Если при $n \to \infty,\ p \to 0$ так, что $np \to \lambda\ \ (\lambda - \text{const})$, тогда

$$P_n(m) \to \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \tag{1.15}$$

Доказательство. Обозначим $np = \lambda_n$, тогда $p = \frac{\lambda_n}{n},\ q = 1 - \frac{\lambda_n}{n}$, и по формуле Бернулли

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m} = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{\lambda_n^m}{m!} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\frac{\lambda_n}{n}(n-m)} = \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{m-2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 1 \cdot \frac{\lambda_n^m}{m!}\left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\lambda_n\left(1 - \frac{m}{n}\right)} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

(так как при $n \to \infty,\ \lambda_n \to \lambda,\ [\ldots] \to e,\ \forall k < m:\ \left(1 - \frac{m-k}{n}\right) \to 1,\ \frac{m}{n} \to 0)$.

Если $n >> 1,\ p << 1$, то справедлива приближенная формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Пример 1.13. Пекарня выпекает булочки с изюмом, среднее число изюминок в булочке равно 5. Что вероятнее: купить булочку с 4 или с 6 изюминками.

Решение. По формуле Пуассона (1.15) находим

$$P_n(4) = \frac{5^4}{4!} e^{-5},\ \ P_n(6) = \frac{5^6}{6!} e^{-5},\ \ P_n(4) - P_n(6) = \frac{5^4}{4!} e^{-5}\left(1 - \frac{25}{30}\right) > 0,\ \text{ т.е. } P_n(4) > P_n(6).$$

Теорема 1.4 (локальная теорема Лапласа)

Если при $n \to \infty:\ \forall m, n,\ \exists a, b \in R \;\Big|\; x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \in [a, b]$, то $P_n(m) \to \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)$,

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – локальная функция Лапласа.

Доказательство. Из условия $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ находим

$$m = np + x_m\sqrt{npq} = np\left(1 + x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \ \Rightarrow\ \frac{np}{m} = \left(1 + x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-1} \quad (*),$$

$$n - m = n - np - x_m\sqrt{npq} = nq\left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \ \Rightarrow\ \frac{nq}{n-m} = \left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-1} \quad (**).$$

Из (*), (**) $\Rightarrow$ при $n \to \infty:\quad m \to \infty,\ n - m \to \infty.$

Далее используем формулу Стирлинга $k! = \sqrt{2\pi k}\, k^k e^{-k} e^{\theta_k}$, где $|\theta_k| < \frac{1}{12k}$, таким образом

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta_n},\ \ m! = \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} e^{\theta_m},\ \ (n-m)! = \sqrt{2\pi(n-m)}\,(n-m)^{n-m} e^{-(n-m)} e^{\theta_{n-m}}.$$

Подставляя в формулу Бернулли, получаем

$$P_n(m)=\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta_n}p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}m^m e^{-m}e^{\theta_m}\sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}}\frac{1}{e^{-(n-m)}e^{\theta_{n-m}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}e^{\theta},$$

где $\theta=\theta_n-\theta_m-\theta_{n-m}$, причем $|\theta|\le|\theta_n|+|\theta_m|+|\theta_{n-m}|<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}\right)\to 0$.

Обозначим $\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}=A_n$ и вычислим логарифм A_n.

$$\ln A_n=m\ln\left(\frac{np}{m}\right)+(n-m)\ln\left(\frac{nq}{n-m}\right)\overset{(*),(**)}{=}np\left(1+x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\ln\left(1+x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-1}+$$

$$+nq\left(1-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\ln\left(1-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\\ \ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\end{bmatrix}=$$

$$=-np\left(1+x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\left(x_m\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{1}{2}x_m^2\frac{q}{np}+o\left(n^{-3/2}\right)\right)-nq\left(1-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\left(-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{1}{2}x_m^2\frac{p}{nq}+o\left(n^{-3/2}\right)\right)=$$

$$=-x_m\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x_m^2q+o\left(n^{-1/2}\right)-x_m^2q+\frac{1}{2}x_m^3\frac{\sqrt{q}\cdot q}{\sqrt{np}}+o\left(n^{-1}\right)+x_m\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x_m^2p+o\left(n^{-1/2}\right)-$$

$$-x_m^2p-\frac{1}{2}x_m^3\sqrt{\frac{p}{nq}}\cdot p+o\left(n^{-1}\right)=\frac{1}{2}x_m^2(q+p)-x_m^2(q+p)+o\left(n^{-1/2}\right)=-\frac{x_m^2}{2}+o\left(n^{-1/2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln A_n=-\frac{x_m^2}{2};\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}A_n=e^{-x_m^2/2}.$$

Рассмотрим первый множитель

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\overset{(*),(**)}{=}\sqrt{\frac{n}{np\left(1+x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)nq\left(1-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}}\sim\sqrt{\frac{1}{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Таким образом

$$P_n(m)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{-x_m^2/2}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m).$$

При $n>>1,\ p\approx 1/2$, справедлива локальная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m), \tag{1.16}$$

где $x_m = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Теорема 1.5 (интегральная теорема Лапласа)

При $n \to \infty$: $P(a \le x_m \le b) \to \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_a^b e^{-x^2/2}dx = \Phi(b) - \Phi(a)$,

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – интегральная функция Лапласа.

Доказательство. $P(a \le x_m \le b) = \sum\limits_{m, x_m \in [a,b]} P_n(m) \approx \sum\limits_{m, x_m \in [a,b]} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{npq}}e^{-x_m^2/2} = S_n$,

здесь $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} = \dfrac{(m+1-np)-(m-np)}{\sqrt{npq}} = x_{m+1} - x_m = \Delta x_m \quad \Rightarrow \quad S_n$ – интегральная сумма для функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим нужный результат.

Если $n >> 1$, то справедлива интегральная формула Лапласа

$$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx, \tag{1.17}$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 1.14. Вероятность появления события A в одном испытании равна p = 0,7. Найти вероятность того, что в 100 независимых испытаниях событие A произойдет от 60 до 90 раз.

Решение. Решим поставленную задачу приближенным способом с помощью интегральной теоремы Лапласа:

$$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Находим:

$$x_1 = \frac{60-70}{\sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -\frac{10}{10\sqrt{0{,}21}} \approx -2{,}18, \quad x_2 = \frac{90-70}{\sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{20}{10\sqrt{0{,}21}} \approx 4{,}36.$$

Таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ для положительных x приведена в приложении 2. Причем функция $\Phi(x)$ – нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для всех значений $x > 4$ принимают $\Phi(x) = 0{,}5$. В нашем случае:

$$\Phi(-2{,}18) = -0{,}4854, \quad \Phi(4{,}36) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(60 \le m \le 90) = 0{,}5 + 0{,}4854 = 0{,}9854.$$

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Определение и примеры случайных величин

Рассмотрим вероятностное пространство ($\Omega, \Re, P$).

Однозначная числовая функция, заданная на пространстве элементарных исходов, называется **случайной величиной.**

Обозначения: μ, η, ν, θ, …

Таким образом, $\mu = \mu(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

В соответствии с определением, случайная величина каждому элементарному исходу из пространства Ω, в зависимости от случая, ставит в соответствие одно определенное числовое значение.

Значения функции $\mu(\omega)$ будем называть возможными значениями случайной величины μ.

Приведем несколько примеров случайных величин.

Пример 2.1. Эксперимент – подбрасывание игральной кости.

Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$,

где ω_i – на грани игральной кости выпало i очков, $i = \overline{1, 6}$.

Пусть $\mu(\omega_i) = i$ – число очков, выпавших на грани игральной кости.

Возможные значения μ: 1, 2, ..., 6.

Пример 2.2. Эксперимент – последовательность из n независимых испытаний в схеме Бернулли.

Пространство элементарных исходов:

$$\Omega_n = \left\{\omega_j = (i_1, i_2, \ldots, i_n), \quad j = \overline{1, 2^n}: \quad i_k \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, n}\right\},$$

где $i_k = \begin{cases} 0, \text{ если в } k-\text{м испытании событие } A \text{ не произошло} \\ 1, \text{ если в } k-\text{м испытании событие } A \text{ произошло} \end{cases}$.

Пусть $\mu(\omega_j)$ – число появлений события *A* в этих испытаниях.

Возможные значения μ: 0, 1, ..., n.

Пример 2.3. Эксперимент – регистрация вызовов в течение часа на АТС.

Пространство элементарных исходов – $\Omega = \{\, \omega_i \mid i \in N \cup \{0\}\}$.

Пусть $\mu(\omega_i)$ – число вызовов, поступивших на АТС в течение часа.

Возможные значения μ: 0, 1, ...

Пример 2.4. Эксперимент – бросание случайной точки в квадрат со стороной 1.

Пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\omega = (x, y): \quad 0 \le x, y \le 1\},$$

где x, y декартовы координаты точки на плоскости.

Пусть $\mu(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от начала координат до точки $M(x, y)$.

Возможные значения μ: $[0, \sqrt{2}]$.

Если пространство элементарных исходов, на котором задается случайная величина, конечное (примеры 2.1 – 2.2) или счётное (пример 2.3), то эта случайная величина называется **дискретной** (принимает отдельные изолированные значения).

Если пространство элементарных исходов бесконечное, несчётное и связное (пример 2.4), то случайная величина называется **непрерывной** (имеет несчетное множество значений).

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Пусть пространство элементарных исходов Ω - конечное или счётное множество. Во втором случае будем считать, что n равно бесконечности.

Наибольший интерес представляют вероятности, с которыми случайная величина принимает каждое из своих возможных значений.

Обозначим через $A_i = (\mu = x_i)$ событие, которое заключается в том, что μ принимает своё i-е значение, $i = \overline{1, n}$. Появление события A_i означает, что в результате эксперимента имел место элементарный исход ω_i, поэтому

$$P(A_i) = P(\omega_i) = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Множество пар чисел (x_i, p_i) называется **законом распределения** дискретной случайной величины.

Закон распределения обычно представляется в виде таблицы, состоящей из двух строк, в первой из которых записываются возможные значения случайной величины, а во второй – вероятности, с которыми эти возможные значения принимаются

μ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ так как по определению $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$ и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\mu = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) = 1$$

(ω_i – несовместные события).

2.2.1. Основные дискретные распределения

Равномерное распределение на множестве $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Возможные значения: $x_i = \mu(i) = i$; $\quad p_i = P(\mu = x_i) = \dfrac{1}{n}$.

μ	1	2	$\ldots$	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Биномиальное распределение

В последовательности из n независимых испытаний схемы Бернулли, μ – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения μ: $0, 1, 2, \ldots, n$;

$$p_i = P(\mu = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}.$$

μ	0	1	…	i	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^i p^i q^{n-i}$	…	p^n

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Распределение Пуассона

Рассмотрим последовательность независимых испытаний при $n \to \infty$, случайная величина μ – число появлений события A в этих испытаниях.

Возможные значения: 0, 1, 2, …; $p_i = P(\mu = x_i) = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

μ	0	1	…	i	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$	…

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Здесь использовано известное разложение показательной функции в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Геометрическое распределение

Рассмотрим последовательность независимых испытаний. Случайная величина μ – число испытаний, проведённых до первого появления события A.

Возможные значения: 1, 2, 3, …;

$$p_i = P(\mu = x_i) = q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot p = p \cdot q^{i-1}.$$

μ	1	2	…	i	…
P	p	pq	…	$p\ q^{i-1}$	…

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p \cdot q^{i-1} = p \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Гипергеометрическое распределение

Имеется N объектов произвольной природы. Среди них M объектов обладают некоторым свойством S. Наудачу отбираются n объектов. Случайная величина μ – число объектов среди отобранных, обладающих свойством S .

Возможные значения: $i_1, i_1 + 1, \ldots, i_2$,

где $i_1 = \max\{0, n-(N-M)\}$, $i_2 = \min\{n, M\}$; при этом $p_i = P(\mu = i) = \dfrac{C_M^i \cdot C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}$.

2.3. Функция распределения случайной величины

Функция $F(x) \equiv F_\mu(x)$, равная вероятности того, что случайная величина μ примет значение меньшее x, называется функцией распределения этой случайной величины μ, т. е.

$$F_\mu(x) = P(\mu < x). \tag{2.1}$$

Геометрически, функция распределения – это вероятность того, что случайная величина примет значение, которое расположено на числовой оси левее точки x.

Пусть μ дискретная случайная величина, заданная законом распределения.

μ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad .$$

Построим функцию распределения этой случайной величины.

Для удобства предположим, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, тогда

1) Если $x \le x_1$, то $(\mu < x) = \varnothing \;\Rightarrow\; F_\mu(x) = 0$.

2) Если $x_1 < x \le x_2$, то $(\mu < x) = (\mu = x_1) \;\Rightarrow\; F_\mu(x) = p_1$.

3) Если $x_2 < x \le x_3$, то $(\mu < x) = (\mu = x_1) + (\mu = x_2) \;\Rightarrow$

$$F_\mu(x) = P[(\mu = x_1) + (\mu = x_2)] = P(\mu = x_1) + P(\mu = x_2) = p_1 + p_2.$$

4) Если рассматривается *k*-й промежуток $x_{k-1} < x \le x_k$, то

$$(\mu < x) = \sum_{i=1}^{k-1} (\mu = x_i) \;\Rightarrow\; F_\mu(x) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i .$$

5) Если $x_n < x$, то $(\mu < x) = \Omega \;\Rightarrow\; F_\mu(x) = 1$.

График функции распределения дискретной случайной величины (2.1) имеет вид (рис. 2.1).

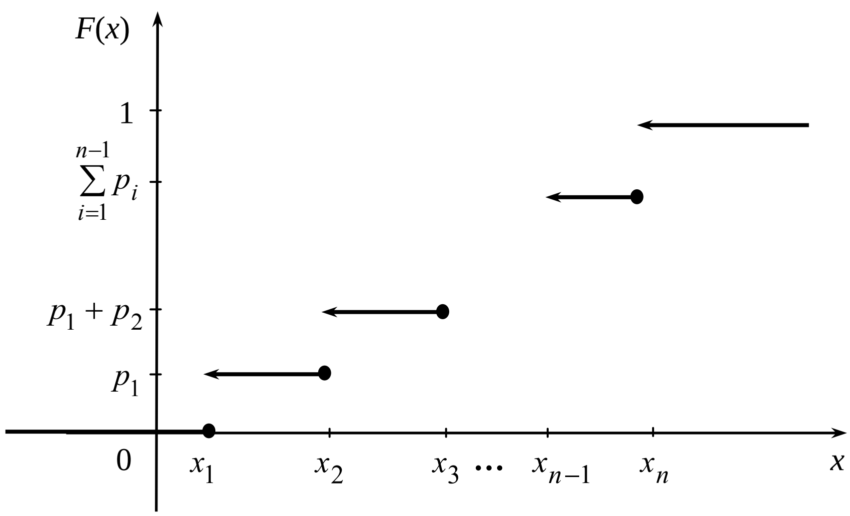


Рис. 2.1

Для любой дискретной случайной величины функция распределения есть кусочно-постоянная функция.

Случайная величина μ называется **непрерывной**, если её функция распределения непрерывна.

Основные свойства функции распределения:

1^0. Функция распределения ограничена $0 \le F_\mu(x) \le 1$, так как функция распределения – это вероятность появления некоторого случайного события;

2^0. $F_\mu(x)$ – неубывающая функция, т.е.

$$\forall x_1, x_2;\, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F_\mu(x_1) \le F_\mu(x_2).$$

Доказательство.

$$(\mu < x_2) = (\mu < x_1) + (x_1 \le \mu < x_2) \quad \Rightarrow$$

$$P(\mu < x_2) = P[(\mu < x_1) + (x_1 \le \mu < x_2)] = P(\mu < x_1) + P(x_1 \le \mu < x_2).$$

Так как $P(x_1 \le \mu < x_2) \ge 0$, то $F_\mu(x_1) \le F_\mu(x_2)$.

Следствие 2.1. Из последнего равенства следует, что

$$\forall a, b: \quad P(a \le \mu < b) = F(b) - F(a) \tag{2.2}$$

Следствие 2.2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно из своих возможных значений равна нулю, т.е. $P(\mu = x_0) = 0$!

Доказательство. Рассмотрим x_0 – фиксированное значение переменной и приращение $\Delta x > 0$:

$$P(x_0 \le \mu < x_0 + \Delta x) \overset{(2.2)}{=} F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \Delta F(x_0). \tag{*}$$

По определению функции непрерывной в точке x_0: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x_0) = 0$.

При $\Delta x \to 0$: $(x_0 \le \mu < x_0 + \Delta x) \to (\mu = x_0)$.

Переходя к пределу в равенстве (*), получаем $P(\mu = x_0) = 0$.

Теперь для непрерывной случайной величины формулу (2.2) можно записать в виде

$$P(a \le \mu \le b) = P(a \le \mu < b) = P(a < \mu \le b) = P(a < \mu < b) = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

3^0. $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$.

Доказательство. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x), \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

При $x \to -\infty$, событие $(\mu < x) \to (\mu < -\infty) = \varnothing \quad \Rightarrow$

$$F(-\infty) = P(\mu < -\infty) = P(\varnothing) = 0.$$

При $x \to +\infty$, событие $(\mu < x) \to (\mu < +\infty) = \Omega \quad \Rightarrow$

$$F(+\infty) = P(\mu < +\infty) = P(\Omega) = 1.$$

В частности, если все возможные значения μ принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$F(x) = 0, \text{ при } x \le a; \quad F(x) = 1, \text{ при } x \ge b.$$

2.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины $f(x) \equiv f_\mu(x)$ называется первая производная от функции распределения, т.е.

$$f_\mu(x) = F'_\mu(x) \tag{2.4}$$

Из равенства (2.4) следует, что $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$.

Используя равенство (2.3) получаем

$$P(a \le \mu \le b) = \int_a^b f(x)dx, \qquad (2.5)$$

так как по формуле Ньютона-Лейбница $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Запишем формулу (2.5) при $a = -\infty,\ b = x$, получим

$$P(-\infty < \mu < x) \overset{def}{=} F(x) \overset{(2.5)}{=} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.6)$$

Вероятностный смысл

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \overset{(2.3)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \mu < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x}.$$

Геометрическая интерпретация

$$P(x < \mu < x + \Delta x) \overset{(2.3)}{=} F(x + \Delta x) - F(x) \overset{\text{Т. Лагранжа}}{=} f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x.$$

Вероятность попадания случайной величины в промежуток длиною Δx пропорциональна плотности распределения вероятности в некоторой точке c из этого промежутка.

Свойства плотности распределения вероятностей:

1^0. Неотрицательность. $\forall x \in R:\ f(x) \ge 0$.

Так как $F(x)$ – неубывающая функция, то $F'(x) \ge 0 \ \Rightarrow\ f(x) \ge 0$.

2^0. Нормированность. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,

так как $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ и $F(+\infty) = 1 \ \Rightarrow\ F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$, так как в этом случае:

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a, \quad F(x) = 1 \text{ при } x \ge b \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x) = 0 \text{ при } x \notin [a,b].$$

2.4.1. Основные распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение

Случайная величина равномерно распределена на $[a, b]$, если (рис. 2.2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [a,b] \\ c, & \text{при } x \in [a,b] \end{cases}.$$

Из условия нормировки (свойство 2^0)

$$1 = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Функция распределения находится по формуле (2.6):

а) Если $x \le a$, то

$$F(x) \overset{(2.6)}{=} \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$$

b) Если $x \in [a,b]$, то

$$F(x) \overset{(2.6)}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int\limits_{a}^{x} cdt = \frac{1}{b-a} t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

c) Если $x \ge b$, то

$$F(x) \overset{(2.6)}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int\limits_{a}^{b} cdt + \int\limits_{b}^{x} 0 \cdot dt = 1.$$

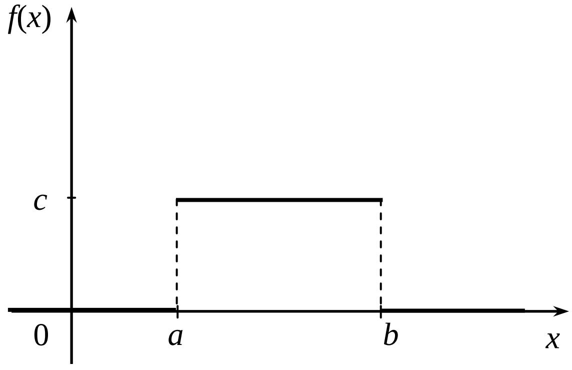


Рис. 2.2

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при } x \in [a, b] \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина имеет показательное распределение с параметром λ (рис. 2.3), если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Постоянную ***c*** находим из условия нормировки

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = c\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{c}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$c = \lambda.$$

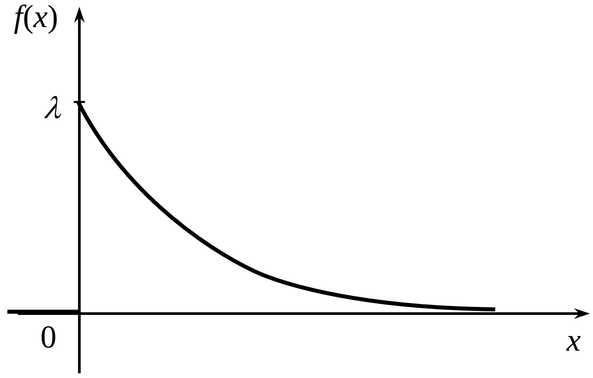


Рис. 2.3

Функция распределения:
если $x < 0$, то

$$F(x) \overset{(2.6)}{=} \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0,$$

если $x \ge 0$, то

$$F(x) \overset{(2.6)}{=} \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Значит

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases}.$$

Нормальное распределение

Случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами m, σ (рис. 2.4), если

$$f(x) = c \cdot e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \quad m \in R, \quad \sigma > 0.$$

Для определения постоянной c вычислим предварительно интеграл Пуассона

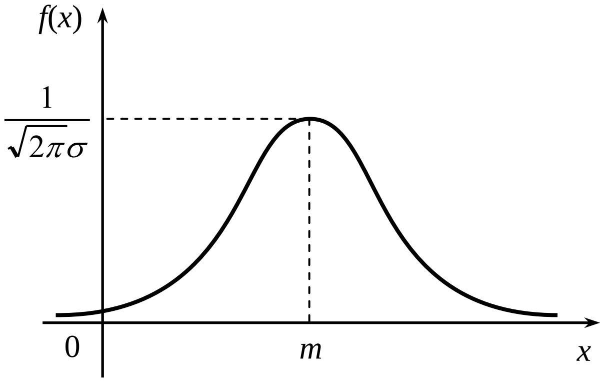


Рис. 2.4

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$J=\iint_D e^{-(x^2+y^2)/2}d\sigma,$$

где D – первая четверть плоскости ($D:\ \ x\geq 0,\ y\geq 0$). С одной стороны:

$$J=\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx\cdot\int_0^{\infty} e^{-y^2/2}dy=I\cdot I=I^2.$$

С другой стороны, переходя к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases},\quad x^2+y^2=\rho^2,\qquad d\sigma=\rho d\rho d\varphi.$$

$$I=\int_0^{\pi/2} d\varphi\cdot\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2}\rho d\rho=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2}d(-\rho^2/2)=-\frac{\pi}{2}e^{-\rho^2/2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow$$

$$I^2=\frac{\pi}{2},\qquad I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Теперь находим постоянную c из условия нормировки

$$1=c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{x-m}{\sigma},\ x=\sigma t+m,\ dx=\sigma dt, \\ x=-\infty\leftrightarrow t=-\infty,\ x=+\infty\leftrightarrow t=+\infty. \end{array}\right|=c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\sigma dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c} e^{-t^2/2}\ \text{– четная} \\ \text{функция} \end{array}\right|=2c\sigma\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt=2c\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}=c\sigma\sqrt{2\pi}\quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Функция распределения выражается через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{u-m}{\sigma},\ u=\sigma t+m,\ du=\sigma dt, \\ u=x\leftrightarrow t=\dfrac{u-m}{\sigma},\ u=-\infty\leftrightarrow t=-\infty. \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}\sigma dt=$$

$$\left|\ \text{для четной функции}\ \int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_0^{\infty} f(x)dx\ \underset{}{\overset{\substack{\text{условие}\\\text{нормировки}}}{\Rightarrow}}\ \int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\frac{1}{2}.\ \right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Распределение Вейбулла

Случайная величина имеет распределение Вейбулла с параметрами α, β, если

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ cx^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}, \qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

Из условия нормировки:

$$1=c\int_0^{\infty}x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}dx=-c\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^{\beta}}d(-\alpha x^{\beta})=-\frac{c}{\alpha\beta}e^{-\alpha x^{\beta}}\Big|_0^{\infty}=\frac{c}{\alpha\beta}\quad\Rightarrow\quad c=\alpha\beta\ .$$

Функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ 1-e^{-\alpha x^{\beta}}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

При $\beta=1$ получаем экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=\alpha$.

Гамма-распределение

Случайная величина имеет Гамма-распределение с параметрами γ, λ, если

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ cx^{\gamma-1}e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0\end{cases}, \qquad \gamma>0,\ \lambda>0.$$

Из условия нормировки:

$$1=\int_0^{\infty}cx^{\gamma-1}e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix}t=\lambda x,\ \ x=\dfrac{1}{\lambda}t,\ \ dx=\dfrac{1}{\lambda}dt,\\ x=0\leftrightarrow t=0,\ x=\infty\leftrightarrow t=\infty.\end{matrix}\right|=c\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{t^{\gamma-1}}{\lambda^{\gamma-1}}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{c}{\lambda^{\gamma}}\underbrace{\int_0^{\infty}t^{\gamma-1}e^{-t}dt}_{\Gamma(\gamma)}=\frac{c\Gamma(\gamma)}{\lambda^{\gamma}}\quad\Rightarrow\quad c=\frac{\lambda^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция (z может быть комплексным числом), которая определяется как решение функционального уравнения $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, при начальном условии $\Gamma(1)=1$.

Одно из представлений этой функции имеет вид:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Действительно:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt=\frac{1}{z}\int_0^{\infty}e^{-t}dt^{z}=\underbrace{\frac{1}{z}e^{-t}t^{z}\Big|_0^{\infty}}_{=0}-\frac{1}{z}\int_0^{\infty}t^{z}(-e^{-t})dt=\frac{1}{z}\int_0^{\infty}t^{z}e^{-t}dt=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)\quad\Rightarrow$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ \Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1.$$

Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \dfrac{\lambda^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\displaystyle\int_0^{x}t^{\gamma-1}e^{-\lambda t}dt, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

Если $\gamma=1$, то получаем опять экспоненциальное распределение.

2.5. Функции от одной случайной величины

Рассмотрим произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \Re, P)$, случайную величину μ, заданную на этом пространстве, и числовую функцию $y = \varphi(x)$.

Поставим в соответствие каждому значению случайной величины μ значение случайной величины η по следующему правилу: $\eta(\omega) = \varphi(\mu(\omega))$.

Построенную таким образом случайную величину логично назвать функцией от случайной величины. Обозначается: $\eta = \varphi(\mu)$.

Если μ – дискретная случайная величина, то и η тоже будет дискретной случайной величиной, так как она не может принимать "больше" значений, чем случайная величина μ. Закон распределения этой случайной величины будет иметь вид:

η	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	…	p_n

где

μ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Если в законе распределения случайной величины η появляются одинаковые возможные значения (функция φ не монотонная), то соответствующие столбцы объединяются, а вероятности суммируются.

Так как, если $y_k = \varphi(x_{i_1}) = \varphi(x_{i_2})$, то:

$$P(\eta = y_k) = P((\mu = x_{i_1}) + (\mu = x_{i_2})) = P(\mu = x_{i_1}) + P(\mu = x_{i_2}) = p_{i_1} + p_{i_2}.$$

Пример 2.5. Случайная величина μ задана законом распределения

μ	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \mu^2$.

Решение. Используется числовая функция $y = x^2$. Возможные значения случайной величины η: $(-2)^2 = 4, (-1)^2 = 1, 0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4$. Здесь $\varphi(x_1) = \varphi(x_5) = 4$, $\varphi(x_2) = \varphi(x_4) = 1$. Значит

$$P(\eta = 1) = P\big((\mu = -1) + (\mu = 1)\big) = p_2 + p_4 = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3;$$

$$P(\eta = 4) = P\big((\mu = -2) + (\mu = 2)\big) = p_1 + p_5 = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4; \ P(\eta = 0) = P(\mu = 0) = 0{,}3$$

и закон распределения случайной величины η будет иметь вид

η	0	1	4
P	0,3	0,3	0,4

Если μ - непрерывная случайная величина и $\varphi(x)$ непрерывная функция, то случайная величина $\eta = \varphi(\mu)$ будет также непрерывной.

Найдём её распределение в этом случае:

$$F_\eta(y) \overset{def}{=} P(\eta < y) = P(\varphi(\mu) < y),$$

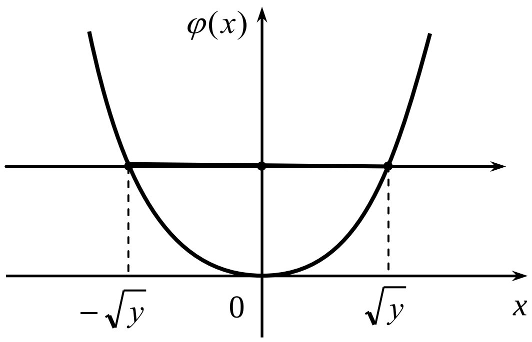
где событие $(\eta < y)$ состоит из тех элементарных исходов ω, для которых $\varphi(\mu(\omega)) < y$. В свою очередь, вероятность события $(\varphi(\mu(\omega)) < y)$ можно определить, используя аксиому сложения вероятностей, "просуммировав" вероятности всех возможных значений случайной величины μ, для которых $\varphi(x) < y$. Так как известно, что $P(\mu \in [x, x + \Delta x]) \approx f_\mu(x)\Delta x$, то, суммируя и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$F_\eta(y) = \int\limits_{\varphi(x)<y} f_\mu(x)dx \tag{2.7}$$

Пример 2.6. Случайная величина μ распределена по стандартному нормальному закону ($m = 0, \sigma^2 = 1$). Найти распределение случайной величины $\eta = \mu^2$.

Решение. И здесь используется числовая функция $y = x^2$. По формуле (2.7) имеем

$F_\eta(y) = \int\limits_{x^2<y} f_\mu(x)dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x^2<y} e^{-x^2/2}dx$. Так как $x^2 \geq 0$, то при $y \leq 0$ нет ни одного значения для которого $x^2 < y$, следовательно $\forall y \leq 0: \; F_\eta(y) = 0$.



При $y > 0$:

$$x^2 < y \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{y}, \quad -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \quad \overset{(2.7)}{\Rightarrow}$$

$$F_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{так как функция} \quad e^{-x^2/2} \\ \text{является четной} \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = x^2,\, x = \sqrt{t},\, dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0;\, x = \sqrt{y} \leftrightarrow t = y \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^y \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/2}dt.$$

Таким образом,

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, & \text{при } y > 0 \end{cases}.$$

В результате получаем гамма-распределение с параметрами $\lambda = \gamma = 1/2$.

Особенно просто находится функция распределения случайной величины $\eta = \varphi(\mu)$, если φ – монотонная функция.

Если $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая функция, то

$$(\varphi(\mu) < y) \quad \Leftrightarrow \quad (\mu < \varphi^{-1}(y)),$$

где $\varphi^{-1}(y)$ функция обратная к $\varphi(x)$, значит

$$F_{\eta}(y) = P(\eta < y) = P(\varphi(\mu) < y) = P(\mu < \varphi^{-1}(y)) = F_{\mu}(\varphi^{-1}(y)),$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\mu}(\varphi^{-1}(y)). \tag{2.8}$$

Если, к тому же, $\varphi(x)$ дифференцируемая функция, то $\exists(\varphi^{-1}(y))'$ и

$$f_{\eta}(y) = F'_{\mu}(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))' = f_{\mu}(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))' \text{ или}$$

$$f_{\eta}(y) = f_{\mu}(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))' \tag{2.9}$$

Пример 2.7. Найти распределение, часто встречающегося, линейного преобразования $\eta = a\mu + b \quad (a > 0)$.

Решение. Здесь $y = \varphi(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad x = \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}, \quad \left(\varphi^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{a}$ и по формуле (2.9) получаем $f_{\eta}(y) = \dfrac{1}{a} f_{\mu}\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Если $\varphi(x)$ – монотонно убывающая функция, то

$$(\eta < y) = (\varphi(\mu) < y) \quad \Leftrightarrow \quad (\mu > \varphi^{-1}(y)) \text{ и}$$

$$F_{\eta}(y) = P(\varphi(\mu) < y) = P(\mu > \varphi^{-1}(y)) = 1 - P(\mu < \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\mu}(\varphi^{-1}(y)).$$

$$F_{\eta}(y) = 1 - F_{\mu}(\varphi^{-1}(y))$$

Если к тому же $\varphi(x)$ дифференцируемая функция, то $\exists(\varphi^{-1}(y))'$ и

$$f_{\eta}(y) = -F'_{\mu}(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))' = -f_{\mu}(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'.$$

$$f_{\eta}(y) = -f_{\mu}(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))' \tag{2.10}$$

Формулы (2.9), (2.10) можно объединить и записать в виде

$$f_{\eta}(y) = f_{\mu}(\varphi^{-1}(y)) \left|(\varphi^{-1}(y))'\right|$$

Пример 2.8. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами m, σ. Найти распределение случайной величины $\eta = e^{\mu}$.

Решение. Здесь $y = \varphi(x) = e^x$ – монотонно возрастающая функция, при этом $x = \varphi^{-1}(y) = \ln y$. В силу свойств функции $y = e^x$, случайная величина η может принимать только положительные значения. Функция $\varphi^{-1}(y)$ – дифференцируема при $y > 0$ и $\left(\varphi^{-1}(y)\right)' = (\ln y)' = \dfrac{1}{y}$. По формуле (2.9) находим

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le 0 \\ f_{\mu}(\ln y)\dfrac{1}{y}, & \text{при } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{при } y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-(\ln y - m)^2 / 2\sigma^2}, & \text{при } y > 0 \end{cases}.$$

Полученное распределение называется **логнормальным**.

Пример 2.9. Пусть $f(x)$ – плотность распределения случайной величины μ и $\forall x: \quad f(x) > 0$. Найти распределение случайной величины $\eta = F(\mu)$, где $F(x)$ – функция распределения случайной величины μ.

Решение. В силу сделанного предположения $(f(x) > 0)$ функция $F(x)$ будет монотонно возрастающей и значения этой функции, по определению, принадлежат отрезку $[0,1]$ $(\forall x: \quad 0 \le F(x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \eta \in [0,1])$. Тогда по формуле (2.8):

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < 0 \\ F\left(F^{-1}(y)\right) = y, & \text{при } y \in [0,1] \\ 1, & \text{при } y > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \notin [0,1] \\ 1, & \text{при } y \in [0,1] \end{cases},$$

т.е. случайная величина η – равномерно распределена на отрезке $[0,1]$.

Этот результат находит широкое применение при моделировании случайных величин с заданной функцией распределения. Практически все датчики случайных чисел инициируют случайную величину, распределенную равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда, если функция распределения $F(x)$ моделируемой случайной величины имеет достаточно просто вычисляемую обратную функцию $F^{-1}(y)$, то, полагая $\mu = F^{-1}(\eta)$, получаем случайную величину с заданной функцией распределения $F(x)$.

Например, если требуется смоделировать случайную величину, распределенную по показательному закону с параметром λ, то это будет величина

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\eta) \quad \left(y = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda x} = 1 - y, \quad x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y) \right),$$

где η – равномерно распределена на отрезке $[0,1]$.

2.6. Многомерные случайные величины

Пусть на пространстве $(\Omega, \Re, P)$ заданы n случайных величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Система случайных величин $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ называется **многомерной случайной величиной** или **случайным вектором** (**случайной точкой**).

Если каждая из случайных величин μ_i является дискретной, то многомерная случайная величина называется **дискретной**.

Если каждая из случайных величин μ_i является непрерывной, то многомерная случайная величина называется **непрерывной**.

2.6.1. Функция распределения многомерной случайной величины

Пусть ν - двумерная случайная величина, т. е. $\nu = (\mu, \eta)$.

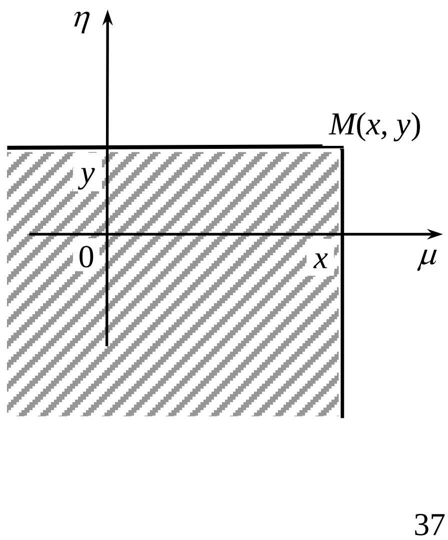
Функцией распределения этой случайной величины называется вероятность совместного появления событий $(\mu < x), (\eta < y)$.

Обозначения: $F(x,y) \equiv F_{\mu\eta}(x,y)$.

Таким образом, по определению

$$F(x,y) = P[(\mu < x)(\eta < y)]. \qquad (2.11)$$

Геометрически значение функции распределения равно вероятности того, что случайная точка попадёт в четверть плоскости, заштрихованной на рисунке.



Свойства функции распределения:

1^0. $0 \le F(x,y) \le 1$, так как по определению $F(x,y)$ есть вероятность некоторого события.

2^0. $F(x,y)$ неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

$$\forall x_1, x_2, \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1, y) \le F(x_2, y); \quad \forall y_1, y_2, \quad y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

Например, пусть $x_1 < x_2$, тогда

$$(\mu < x_2)(\eta < y) = (\mu < x_1)(\eta < y) + (x_1 \le \mu < x_2)(\eta < y) \quad \Rightarrow$$

$$F(x_2, y) = P[(\mu < x_2)(\eta < y)] = P[(\mu < x_1)(\eta < y)] + P[(x_1 \le \mu < x_2)(\eta < y)] =$$

$$= F(x_1, y) + P[(x_1 \le \mu < x_2)(\eta < y)] \quad \Rightarrow \quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y) \cdot$$

Так как вероятность любого события неотрицательна, $P[(x_1 \le \mu < x_2)(\eta < y)] \ge 0$.

Аналогично доказывается неубывание по второму аргументу.

3^0. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$, так как

$$(\mu < x) \underset{x \to -\infty}{\to} \varnothing, \quad (\eta < y) \underset{y \to -\infty}{\to} \varnothing, \quad (\mu < x)(\eta < y) \underset{\substack{x \to -\infty \\ \text{или} \\ y \to -\infty}}{\to} \varnothing$$

4^0. $F_{\mu\eta}(+\infty, y) = P(\Omega \cdot \{\eta < y\}) = P(\{\eta < y\}) \overset{def}{=} F_\eta(y)$, $F_{\mu\eta}(x, +\infty) = F_\mu(x)$.

5^0. $F_{\mu\eta}(+\infty, +\infty) = 1$.

6^0. $P\{(\mu, \eta) \in D\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$ (2.12)

где $D = \{(x, y) \mid x_1 < x < x_2, \quad y_1 < y < y_2\}$. $P[(\mu, \eta) \in D] = \Delta_x F(x_1, y_2) - \Delta_x F(x_1, y_1)$.

2.6.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Понятие функции распределения определено как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины.

Дискретную случайную величину можно задать также с помощью закона распределения, перечислением всех возможных значений и вероятностей, с которыми эти значения принимаются.

Пусть (μ, η) – дискретная случайная величина. Обычно закон распределения представляется в виде таблицы:

μ \ η	y_1	y_2	…	y_n	p_μ
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	$p_{\mu 1}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	$p_{\mu 2}$
…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	$p_{\mu m}$
p_η	$p_{\eta 1}$	$p_{\eta 2}$	…	$p_{\eta n}$	1

В поле таблицы указываются вероятности совместного появления событий $(\mu = x_i), (\eta = y_j)$: $p_{ij} = P[(\mu = x_i)(\eta = y_j)]$.

Затем таблица дополняется ещё одной строкой и одним столбцом – p_μ, p_η, где записываются сумма вероятностей по столбцам и сумма вероятностей по строкам. В результате первый и последний столбцы дают закон распределения случайной величины μ, а первая и последняя строки – закон распределения случайной величины η. Так как $\forall i = \overline{1, m}$:

$$P(\mu = x_i) = P[(\mu = x_i)(\eta - \text{любое})] = P[(\mu = x_i)(\sum_{j=1}^{n}(\overbrace{\eta = y_j}^{\text{несовместны}})] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P[(\mu = x_i)(\eta = y_j)] = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad \Rightarrow \quad p_{\mu i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}.$$

Аналогично, $\forall j = \overline{1, n}$: $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = P(\eta = y_j) = p_{\eta j}$.

С помощью закона распределения можно получить функцию распределения двумерной случайной величины:

$$F_{\mu\eta}(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij},$$

где суммирование производится по тем возможным значениям для которых выполняются неравенства: $x_i < x,\ y_j < y$.

2.6.3. Плотность распределения вероятностей многомерной случайной величины

Пусть (μ, η) – непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_{\mu\eta}(x, y) \equiv F(x, y)$.

Смешанная производная по переменным *x* и *y* от функции распределения называется **плотностью распределения вероятностей** двумерной случайной величины.

Обозначения: $f(x, y) \equiv f_{\mu\eta}(x, y)$.

По определению

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}. \tag{2.13}$$

Интегрируя равенство (2.13) от $-\infty$ до *x* и от $-\infty$ до *y*, получаем выражение функции распределения:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv \tag{2.14}$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

1°. **Неотрицательность.** $\forall x, \forall y$: $f(x, y) \geq 0$.

2°. **Нормированность.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1, \tag{2.15}$$

так как при $x \to \infty$ и $y \to \infty$:

$$(\mu < x)(\eta < y) \to \Omega \quad \Rightarrow \quad F(+\infty, +\infty) = 1 \quad \overset{(2.14)}{\Rightarrow} \quad (2.15).$$

3°.

$$P[(\mu,\eta)\in D]=\iint\limits_D f(x,y)dxdy \tag{2.16}$$

Действительно

$$P[(\mu,\eta)\in \Delta D] \overset{(2.12)}{=} \Delta_x F(x,y+\Delta y)-\Delta_x F(x,y) \overset{\substack{\text{теорема}\\ \text{Лагранжа}^{*)}}}{=} F'_x(c_1,y+\Delta y)\Delta x - F'_x(c_2,y)\Delta x \approx$$

$$\approx \left[F'_x(x,y+\Delta y)-F'_x(x,y)\right]\Delta x \overset{\substack{\text{теорема}\\ \text{Лагранжа}}}{=} F''_{xy}(x,c)\Delta y\Delta x \approx f(x,y)\Delta x\Delta y = f(x,y)\Delta\sigma$$

Просуммировав вероятности по всем $\Delta\sigma$ и перейдя к пределу при $\Delta x,\Delta y\to 0$, получим формулу (2.16).

4°. При выводе формулы (2.11) было показано, что:

$$F_\mu(x) \overset{(2.11)}{=} F_{\mu\eta}(x,\infty) \overset{(2.15)}{=} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu\eta}(u,v)dudv \quad\Rightarrow\quad f_\mu(x)=F'_\mu(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu\eta}(x,v)dv=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu\eta}(x,y)dy.$$

Аналогично

$$f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu\eta}(x,y)dx$$

2.6.4. Независимость случайных величин

Случайные величины μ,η называются **независимыми**, если распределение одной из них не зависит от того, какие значения принимает другая величина.

Из этого определения следует, что для независимых случайных величин события $(\mu<x)$ и $(\eta<y)$ будут также независимыми, тогда

$$F_{\mu\eta}(x,y) \overset{def}{=} P[(\mu<x)(\eta<y)]=P(\mu<x)P(\eta<y) \overset{def}{=} F_\mu(x)F_\eta(y),$$

$$F_{\mu\eta}(x,y)=F_\mu(x)F_\eta(y). \tag{2.17}$$

Для дискретных случайных величин:

$$p_{ij}=P[(\mu=x_i)(\eta=y_j)]=P(\mu=x_i)P(\eta=y_j)=p_{\mu i}p_{\eta j},$$

$$p_{ij}=p_{\mu i}\cdot p_{\eta j}$$

Для непрерывных случайных величин:

$$f_{\mu\eta}(x,y) \overset{(2.17)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_\mu(x)F_\eta(y)=\frac{dF_\mu(x)}{dx}\frac{dF_\eta(y)}{dy}=f_\mu(x)f_\eta(y),$$

$$f_{\mu\eta}(x,y)=f_\mu(x)f_\eta(y).$$

---

*) **Теорема Лагранжа.** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то существует точка c из этого интервала такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

2.7. Функции от многомерных случайных величин

Рассмотрим двумерную случайную величину (μ,η) и однозначную числовую функцию $z=\varphi(x,y)$. Определим новую случайную величину ρ по следующему правилу:

$$\forall\omega\in\Omega: \quad \rho(\omega)=\varphi[\mu(\omega),\eta(\omega)],$$

которую естественно назвать функцией от случайных величин μ и η, т.е. $\rho=\varphi(\mu,\eta)$.

2.7.1. Функции от дискретных случайных величин

Если случайная величина (μ,η) - дискретная, то случайная величина ρ тоже будет дискретной, так как множество её значений не "больше", чем множество возможных значений случайной величины (μ,η). Причём закон распределения случайной величины будет иметь вид:

ρ	$\overbrace{\varphi(x_1,y_1)}^{z_1}$	$\overbrace{\varphi(x_1,y_2)}^{z_2}$	$\dots$	$\overbrace{\varphi(x_m,y_n)}^{z_{mn}}$
P	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{mn}

$$p_{\rho_k}=P(\rho=z_k)=P((\mu=x_i)(\eta=y_j))=p_{ij}.$$

Если появляются одинаковые значения в первой строке, то соответствующие столбцы таблицы заменяются одним и возможному значению приписывается суммарная вероятность. Так как, если $z_k=\varphi(x_{i_1},y_{j_1})=\varphi(x_{i_2},y_{j_2})$, то

$$(\rho=z_k)=\underbrace{(\mu=x_{i_1})(\eta=y_{j_1})+(\mu=x_{i_2})(\eta=y_{j_2})}_{\text{события несовместн ы}} \;\Rightarrow\; P(\rho=z_k)=p_{i_1j_1}+p_{i_2j_2}.$$

2.7.2. Функции от непрерывных случайных величин

Для непрерывной двумерной случайной величины (μ,η) с плотностью распределения вероятностей $f_{\mu\eta}(x,y)$ функция распределения, как и ранее, определяется равенством

$$F_\rho(z)\overset{def}{=}P(\rho<z)=P(\varphi(\mu,\eta)<z)\overset{(2.16)}{=}\iint\limits_D f_{\mu\eta}(x,y)dxdy, \qquad (2.18)$$

где D область, определяемая неравенством $\varphi(x,y)<z$.

Композицией случайных величин называется случайная величина, равная сумме этих величин.

Если композиция случайных величин, распределённых по одному и тому же закону распределения, является случайной величиной, распределённой по тому же закону, то закон распределения называется **композиционно устойчивым**.

Пусть μ,η – независимые случайные величины, рассмотрим случайную величину $\rho=\mu+\eta$ (используем функцию $z=x+y$).

Найдём функцию распределения $F_\rho(z)$ случайной величины ρ.

По формуле (2.18) (рис. 2.5):

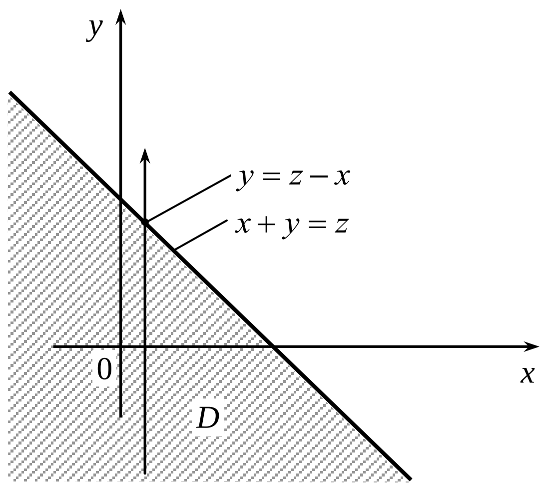


Рис. 2.5

$$F_{\rho}(z) = \iint\limits_{D: x+y<z} f_{\mu\eta}(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\mu}(x) f_{\eta}(y)dy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{замена переменной} \\ t = y + x,\ y = t - x,\ dy = dt, \\ y = -\infty \leftrightarrow t = -\infty,\ \ y = z - x \leftrightarrow t = z. \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z} f_{\mu}(x) f_{\eta}(t - x)dt \ .$$

По определению:

$$f_{\rho}(z) = F'_{\rho}(z) = \overbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu}(x) f_{\eta}(z - x)dx}^{\text{свёртка функций}} \qquad (2.19)$$

– выражение плотности распределения вероятностей случайной величины ρ. Интеграл, стоящий в правой части равенства (2.19), называется сверткой функций и обозначается $f_{\mu} * f_{\eta}$.

2.8. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Пусть μ – дискретная случайная величина, заданная законом распределения.

Математическим ожиданием случайной величины μ называется число, равное сумме попарных произведений возможных значений случайной величины на вероятности, с которыми эти значения принимаются. Обозначается: $M(\mu)$.

Таким образом, по определению

$$M(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \qquad (2.20)$$

Выясним смысл этой характеристики. Пусть в N испытаниях случайная величина μ принимает значение $x_1 - n_1$ раз, $x_2 - n_2$ раз, …, $x_n - n_n$ раз. Найдём сумму всех значений, принимаемых случайной величиной в этих испытаниях $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k n_k$, а затем найдём среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} x_k n_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{n_k}{N}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k w_k \ .$$

При $N \to \infty$: $w_k \to p_k$ (см. статистическое определение вероятности), следовательно при $n >> 1$: $\bar{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k w_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k = M(\mu)$.

Таким образом, математическое ожидание $M(\mu)$ приближенно равно (и тем точнее, чем больше число испытаний) среднему значению, принимаемому случайной величиной.

Свойства $M(\mu)$:

1°. $M(c) = c$, c – const.

Доказательство. Постоянную c можно рассматривать как дискретную случайную величину с единственным возможным значением, которое принимается с вероятностью равной 1. Поэтому по формуле (2.20) $M(c) = c \cdot 1 = c$.

2°. $M(c\mu) = cM(\mu)$ (используемая функция $\eta = c\mu$ $(y = cx)$).

Доказательство. По формуле (2.20): $M(c\mu) = \sum\limits_{i=1}^{n}(cx_i)p_i = c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i = cM(\mu)$.

3°. $M(\mu+\eta) = M(\mu) + M(\eta)$ (используемая функция $\rho = \mu + \eta$ $(z = x + y)$).

Доказательство. По формуле (2.20):

$$M(\mu+\eta) = \sum_{i,j}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_i x_i p_{\mu i} + \sum_j y_j p_{\eta j} \overset{(2.20)}{=} M(\mu) + M(\eta).$$

4°. Если μ и η – независимые случайные величины, то

$$M(\mu \cdot \eta) = M(\mu) \cdot M(\eta).$$

Доказательство. Так как μ и η – независимые случайные величины, то

$$M(\mu\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j y_j p_{\mu i} p_{\eta j} = \sum_i x_i p_{\mu i} \sum_j y_j p_{\eta j} = M(\mu) \cdot M(\eta).$$

Величина, характеризующая разброс возможных значений случайной величины относительно среднего значения, называется **дисперсией**.

Обозначается: $D(\mu)$.

По определению дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания $M(\mu) = m$:

$$D(\mu) = M[\mu - M(\mu)]^2 \quad ,$$

(используемая функция $\eta = (\mu - m)^2$ $\quad (y = (x - m)^2)$).

Используя свойства математического ожидания, получаем формулу

$$D(\mu) = M(\mu^2 - 2m\mu + m^2) = M(\mu^2) - M(2m\mu) + M(m^2) =$$

$$= M(\mu^2) - 2mM(\mu) + m^2 = M(\mu^2) - 2m^2 + m^2 = M(\mu^2) - m^2,$$

$$D(\mu) = M(\mu^2) - M^2(\mu) \tag{2.21}$$

Свойства дисперсии:

1°. $D(c) = 0, \quad c - \text{const}$.

Доказательство. Используя формулу (2.21), получаем:

$$D(c) = M(c^2) - M^2(c) = c^2 - c^2 = 0.$$

2°. $D(c\mu) = c^2 D(\mu)$.

Доказательство. Используя формулу (2.21), можем записать:

$$D(c\mu) = M[(c\mu)^2] - M^2(c\mu) = c^2 M(\mu^2) - c^2 M^2(\mu) = c^2 D(\mu).$$

3°. Если μ, η – независимые случайные величины, то

$$D(\mu+\eta) = D(\mu) + D(\eta) \quad .$$

Доказательство. Используем формулу (2.21):

$$D(\mu+\eta) = M(\mu+\eta)^2 - M^2(\mu+\eta) = M(\mu+\eta)^2 - (M(\mu) + M(\eta))^2 =$$

$$= M(\mu^2 + 2\mu\eta + \eta^2) - M^2(\mu) - 2M(\mu)M(\eta) - M^2(\eta) =$$

$$= M(\mu^2) + 2M(\mu)M(\eta) + M(\eta^2) - M^2(\mu) - 2M(\mu)M(\eta) - M^2(\eta) = D(\mu) + D(\eta).$$

4^0 $\forall \mu: \quad D(\mu) \geq 0$.

Доказательство. Используем формулу (2.21):

$$D(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - m)^2}_{\geq 0} \underbrace{p_i}_{>0} \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для практических расчетов удобно иметь меру разброса, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. В качестве такой меры используется среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением $\sigma_\mu \equiv \sigma(\mu)$ случайной величины μ называется корень квадратный из дисперсии, т.е. по определению $\sigma_\mu = \sqrt{D(\mu)}$.

2.8.1. Числовые характеристики основных законов распределения

Равномерное распределение

μ	1	2	3	…	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

$$M(\mu) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n+1}{2}$$

(использована формула суммы n членов арифметической прогрессии).

$$D(\mu) = M(\mu^2) - M^2(\mu),$$

$$M(\mu^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$D(\mu) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}, \quad \sigma_\mu = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2\sqrt{3}}.$$

(использована формула суммы квадратов первых n натуральных чисел).

Биноминальное распределение

$$p_i = P(\mu = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}.$$

Здесь случайную величину можно рассматривать как сумму независимых случайных величин $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, где μ_i – число появлений события A в i–м испытании. Закон распределения каждой из них имеет вид

μ_i	0	1
P	q	p

Отсюда получаем:

$$M(\mu_i) \overset{def}{=} 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad M(\mu_i^2) \overset{def}{=} 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad D(\mu_i) \overset{(2.21)}{=} p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Так как μ_i – независимые случайные величины, то

$$M(\mu) = M(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} M(\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np ,$$

$$D(\mu) = D(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} D(\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq , \quad \sigma_\mu = \sqrt{npq} .$$

Распределение Пуассона

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (\lambda = np), \quad M(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda ,$$

$$M(\mu^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{\lambda^i}{(i-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(\mu) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda , \quad \sigma_\mu = \sqrt{\lambda} .$$

Геометрическое распределение

$$p_i = pq^{i-1} , \; M(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' = p (\sum_{i=1}^{\infty} q^i)' = p \cdot \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} ,$$

$$M(\mu^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} (i q^i)' = p \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i+1-1) q^i \right]' =$$

$$= p \left[\sum_{i=1}^{\infty} (q^{i+1})'' - \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' \right] = p \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^{i+1} \right)'' - \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)' \right] = p \left(\frac{q^2}{1-q} \right)'' - p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \ldots = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} ,$$

$$D(\mu) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} \right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} , \quad \sigma_\mu = \frac{\sqrt{q}}{p} .$$

2.9. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины μ с плотностью распределения вероятностей $f(x)$ называется число $M(\mu)$, равное

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Как и в дискретном случае, здесь $M(\mu)$ – среднее значение случайной величины

Свойства $M(\mu)$:

1°. $M(c) = c$, c – const.

2°. $M(c\mu) = cM(\mu)$ (используемая функция $\eta = c\mu$ $(y = cx)$)

3°. $M(\mu + \eta) = M(\mu) + M(\eta)$ (используемая функция $\rho = \mu + \eta$ $(z = x + y)$).

4°. Если μ и η – независимые случайные величины, то

$$M(\mu \cdot \eta) = M(\mu) \cdot M(\eta) .$$

Доказательство.

$$M(\mu\cdot\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f_{\mu\eta}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,f_{\mu}(x)f_{\eta}(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{\mu}(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_{\eta}(y)dy=M(\mu)M(\eta).$$

По определению дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания $M(\mu)=m$

$$D(\mu)=M\left[\mu-M(\mu)\right]^2,$$

$$D(\mu)=M(\mu^2)-M^2(\mu),$$

$$D(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2(\mu).$$

Числовые характеристики основных законов распределения

Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x\in[a,b]\\ 0, & \text{при } x\notin[a,b]\end{cases}.$$

$$M(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

$$M(\mu^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

$$D(\mu)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2+b^2-2ab}{12}=\frac{(a-b)^2}{12},\quad \sigma_\mu=\sqrt{D(\mu)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0\end{cases}.$$

$$M(\mu)=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{\infty}xd\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)=\underbrace{\lambda x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^{\infty}}_{\to 0}-\lambda\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx=\lambda\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

$$M(\mu^2)=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx=\ldots=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2},\quad D(\mu)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda},\quad \sigma_\mu=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

При вычислении $M(\mu^2)$ дважды используется формула интегрирования по частям.

Нормальное распределение

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

$$M(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-m}{\sigma},\ x=\sigma t+m,\ dx=\sigma dt, \\ x=-\infty\leftrightarrow t=-\infty,\ x=\infty\leftrightarrow t=\infty. \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+m)e^{-t^2/2}\sigma dt=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}dt}_{=0}+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\frac{m}{\sqrt{2\pi}}2\sqrt{\frac{\pi}{2}}=m\ .$$

$$D(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-m}{\sigma},\ x=\sigma t+m,\ dx=\sigma dt \\ x=-\infty\leftrightarrow t=-\infty,\ x=\infty\leftrightarrow t=\infty. \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2t^2e^{-t^2/2}\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}td\left(e^{-t^2/2}\right)}_{=0}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2,\quad \sigma_\mu=\sqrt{\sigma^2}=\sigma.$$

2.10. Дополнительные числовые характеристики случайных величин

Начальным моментом k **-го порядка** $-\ m_k$ называется математическое ожидание k -й степени случайной величины μ, т. е.

$$m_k=M(\mu^k).$$

Центральным моментом k **-го порядка** $-\ \overset{\circ}{m}_k$ называется математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины μ от её математического ожидания:

$$\overset{\circ}{m}_k=M[(\mu-M(\mu))^k]$$

Например,

$$\overset{\circ}{m}_1=M(\mu-M(\mu))=M(\mu)-M(\mu)=0,\quad \overset{\circ}{m}_2=D(\mu)=m_2-m_1^2.$$

Коэффициентом асимметрии – $\overset{\circ}{\gamma}_1$ называется величина, равная отношению центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратичного отклонения

$$\overset{\circ}{\gamma}_1=\frac{\overset{\circ}{m}_3}{\sigma_\mu^3}$$

Коэффициент асимметрии характеризует несимметричность распределения относительно математического ожидания. Для симметричного распределения

$$P(\mu<m_1-x)=P(\mu>m_1+x)\quad\Rightarrow\quad \overset{\circ}{\gamma}_1=0.$$

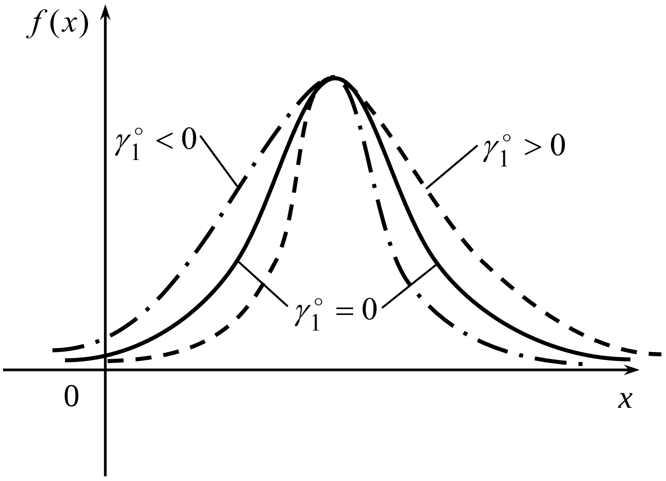


Рис. 2.6

Если для некоторого распределения $\gamma_1^\circ \neq 0$, то это распределение не симметрично относительно среднего значения. Геометрическая интерпретация приведена на рис. 2.6.

Коэффициентом эксцесса – γ_2° называется величина, равная отношению центрального момента четвертого порядка к четвертой степени среднего квадратичного отклонения за вычетом числа 3

$$\gamma_2^\circ = \frac{m_4^\circ}{\sigma_\mu^4} - 3 .$$

Для нормального распределения $\dfrac{m_3^\circ}{\sigma_\mu^3} = 3$, то есть $\gamma_2^\circ = 0$.

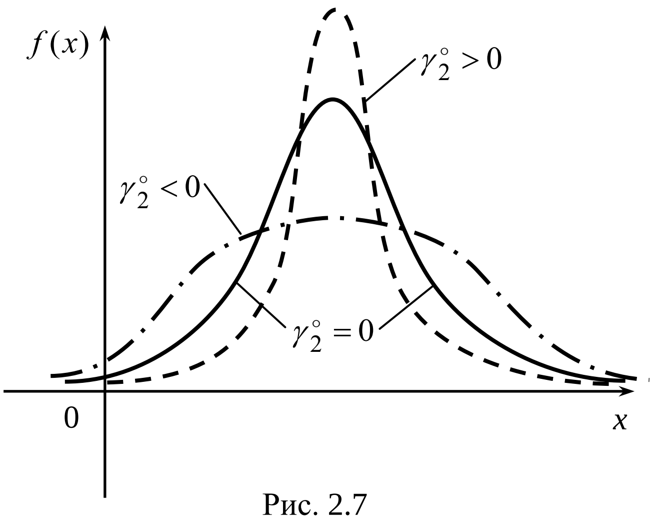


Рис. 2.7

Коэффициент эксцесса характеризует скорость изменения плотности вероятности случайной величины (рис. 2.7). γ_1°, γ_2° – безразмерные величины.

Квантилью уровня α или α-**квантилью** – x_α называется наибольшая величина, которая удовлетворяет неравенству (рис. 2.8):

$$P(\mu < x_\alpha) \le \alpha \quad \text{или} \quad F(x_\alpha) \le \alpha \quad (*)$$

Для непрерывного распределения неравенство заменяется равенством.

Для дискретной случайной величины x_α – максимальное значение, при котором выполняется неравенство (*).

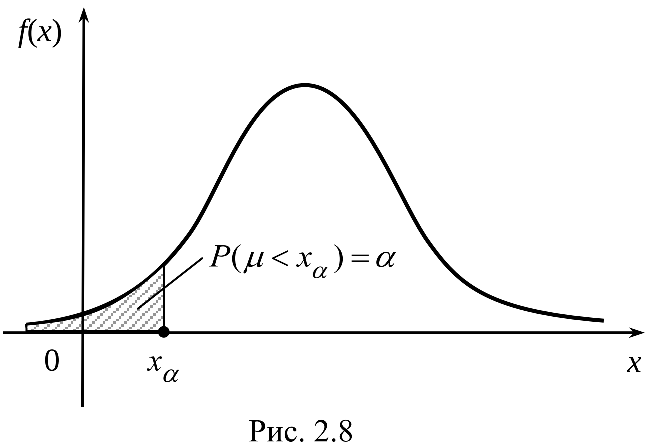


Рис. 2.8

Если $\alpha = \dfrac{k}{10}$, $k = \overline{1,\ 9}$, то x_α называются **децилями**. Квантиль $x_{1/2}$ называется **медианой**.

Для симметричного распределения медиана совпадает с математическим ожиданием.

Абсцисса точки локального максимума плотности распределения вероятностей случайной величины называется **модой** – mod_{μ} .

Рассмотрим двумерную случайную величину (μ_1, μ_2) и определим характеристику связи между μ_1 и μ_2, которая называется ковариацией.

Ковариацией называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин $\mu_1^\circ = \mu_1 - M(\mu_1)$ и $\mu_2^\circ = \mu_2 - M(\mu_2)$. Для них

$$M(\mu_1^\circ) = M(\mu_2^\circ) = 0 .$$

Обозначается: $\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2)$.

Таким образом, по определению

$$\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) = M(\mu_1^\circ \cdot \mu_2^\circ)$$

или

$$\mathrm{cov}(\mu_1,\mu_2) = M\big((\mu_1 - M(\mu_1)(\mu_2 - M(\mu_2)\big) =$$
$$= M(\mu_1\mu_2) - M(\mu_1)M(\mu_2) - M(\mu_2)M(\mu_1) + M(\mu_1)M(\mu_2) .$$

$$\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) = M(\mu_1\mu_2) - M(\mu_1)M(\mu_2) \tag{2.22}$$

Свойства ковариации:

1°. $\mathrm{cov}(\mu, \mu) = D(\mu)$.

2°. Если μ_1, μ_2 – независимые случайные величины, то

$$\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) = 0 .$$

Доказательство.

$$\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) = M(\mu_1\mu_2) - M(\mu_1)M(\mu_2) = M(\mu_1)M(\mu_2) - M(\mu_1)M(\mu_2) = 0 .$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т.е. существуют случайные величины, для которых $\mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) = 0$, но эти случайные величины являются зависимыми.

Пример 2.10. Подбрасываются две игральные кости. Случайные величины μ_1, μ_2 – числа очков, выпавших соответственно на первой и второй игральных костях.

Пусть $\eta_1 = \mu_1 + \mu_2, \eta_2 = \mu_1 - \mu_2$ – сумма и разность выпавших очков. Найти $\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2)$.

Решение. По формуле (2.22) находим (случайные величины μ_1, μ_2, очевидно, распределены одинаково)

$$\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2) = M[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)] - M(\mu_1 + \mu_2)M(\mu_1 - \mu_2) =$$
$$= M(\mu_1^2) - M^2(\mu_1) - M(\mu_2^2) + M^2(\mu_2) = D(\mu_1) - D(\mu_2) = 0 .$$

При этом сумма очков, очевидно, зависит от того, чему равна разность выпавших очков, т.е. случайные величины η_1, η_2 являются зависимыми. Так, например,

$$P(\eta_1 = 2) = P[(\mu_1 = 1)(\mu_2 = 1)] = 1/36; \quad P_{\eta_2 = 2}(\eta_1 = 2) = 0 .$$

3°. Если $\eta_1 = a_1\mu_1 + b_1$, $\eta_2 = a_2\mu_2 + b_2$, то $\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2) = a_1 a_2 \mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2)$.

Доказательство.

$$\mathrm{cov}(\eta_1, \eta_2) = M\big[(a_1\mu_1 + b_1)(a_2\mu_2 + b_2)\big] - M(a_1\mu_1 + b_1)M(a_2\mu_2 + b_2) =$$
$$= a_1 a_2 M(\mu_1, \mu_2) + a_1 b_2 M(\mu_1) + b_1 a_2 M(\mu_2) + b_1 b_2 - a_1 a_2 M(\mu_1)M(\mu_2) -$$
$$- a_1 b_2 M(\mu_1) - b_1 a_2 M(\mu_2) - b_1 b_2 = a_1 a_2 (M(\mu_1, \mu_2) - M(\mu_1)M(\mu_2)) = a_1 a_2 \mathrm{cov}(\mu_1, \mu_2) .$$

4°. $D(\mu_1+\mu_2)=D(\mu_1)+D(\mu_2)+2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)$.

Доказательство. $D(\mu_1+\mu_2)=M[(\mu_1+\mu_2)^2]-M^2(\mu_1+\mu_2)=$

$$=M(\mu_1^2)+2M(\mu_1\mu_2)+M(\mu_2^2)-M^2(\mu_1)-2M(\mu_1)M(\mu_2)-M^2(\mu_2)=$$

$$=D(\mu_1)+D(\mu_2)+2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2).$$

При анализе связей между случайными величинами использование ковариации несколько неудобно, так как размерность этой характеристики равна произведению размерностей случайных величин μ_1 и μ_2. Поэтому определяется безразмерная характеристика, которая называется **коэффициентом корреляции** – $\rho(\mu_1,\mu_2)$.

По определению:

$$\rho(\mu_1,\mu_2)=\frac{\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)}{\sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}}.$$

Свойства $\rho(\mu_1,\mu_2)$:

1°. $\rho(\mu,\mu)=\dfrac{D(\mu)}{\sigma_\mu\sigma_\mu}=1$.

2°. Если случайные величины μ_1,μ_2 – независимы, то $\rho(\mu_1,\mu_2)=0$.

3°. Если $\eta_1=a_1\mu_1+b_1$, $\eta_2=a_2\mu_2+b_2$, то $\rho(\eta_1,\eta_2)=\rho(\mu_1,\mu_2)$.

4°. $\forall\mu_1,\mu_2:\ |\rho(\mu_1,\mu_2)|\le 1$.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\eta=\sigma_2\mu_1-\sigma_1\mu_2$ и найдем ее дисперсию.

$$D(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)=\sigma_2^2M(\mu_1^2)-2\sigma_1\sigma_2M(\mu_1\mu_2)+\sigma_1^2M(\mu_2^2)-$$

$$\sigma_2^2M^2(\mu_1)+2\sigma_1\sigma_2M(\mu_1)M(\mu_2)-\sigma_1^2M^2(\mu_2)=\sigma_2^2D(\mu_1)+\sigma_1^2D(\mu_2)-2\sigma_1\sigma_2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)=$$

$$=\sigma_2^2\sigma_1^2+\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)=2\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2).$$

$$\forall\eta:\ D(\eta)\ge 0\ \Rightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)\ge 0\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\ge\frac{\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\ \Rightarrow\ 1\ge\rho(\mu_1,\mu_2)$$

Аналогично, рассматривая случайную величину $\eta=\sigma_2\mu_1+\sigma_1\mu_2$, получаем

$$\rho(\mu_1,\mu_2)\ge -1.$$

5°. $|\rho(\mu_1,\mu_2)|=1\ \Leftrightarrow\ \mu_2=a\mu_1+b$, причём:

если $\rho(\mu_1,\mu_2)=1$, то $a>0$; если $\rho(\mu_1,\mu_2)=-1$, то $a<0$.

Доказательство. Из доказательства свойства 4° следует, что если рассмотреть случайную величину $\eta=\sigma_2\mu_1-\sigma_1\mu_2$, то

$$D(\eta)=0\ \Leftrightarrow\ \sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2\operatorname{cov}(\mu_1,\mu_2)=0\ \Leftrightarrow\ \rho(\mu_1,\mu_2)=1.$$

$$D(\eta)=0\Leftrightarrow\eta=c-\mathrm{const}\Leftrightarrow\sigma_1\mu_2-\sigma_2\mu_1=c\Rightarrow\mu_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1+\frac{c}{\sigma_1}\ \text{ причем }\ a=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}>0.$$

Если $\eta=\sigma_2\mu_1+\sigma_1\mu_2$, то $a=-\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}<0$.

Таким образом, коэффициент корреляции является показателем линейной корреляционной связи случайных величин. Считается, что если:

а) $0<|\rho|<0{,}5$ – слабая связь;

б) $0{,}5\le|\rho|<0{,}75$ – тесная связь;

в) $0{,}75\le|\rho|<1$ – сильная связь.

2.11. Условное распределение и условное математическое ожидание

Рассмотрим двумерную случайную величину (μ,η).

Если η принимает какое-либо одно из своих возможных значений, то как охарактеризовать распределение случайной величины μ?

Используя понятие условной вероятности случайного события, приходим к понятию условного распределения.

2.11.1. Условный закон распределения дискретной случайной величины

Пусть $\eta=y_j$, тогда условной функцией распределения случайной величины μ при условии $\eta=y_j$ называется функция

$$F_\mu(x\,|\,\eta=y_j)\equiv F_\mu(x\,|\,\eta)=P_{(\eta=y_j)}(\mu<x)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\mu(x\,|\,\eta)\overset{(2.1)}{=}\frac{P[(\mu<x)(\eta=y_j)]}{P(\eta=y_j)}=\frac{P[(\mu<x)(\eta=y_j)]}{p_{\eta j}}$$

Если случайная величина задана законом распределения можно определить условные вероятности

$$\pi_{ij}=P_{(\eta=y_j)}(\mu=x_i)\overset{(2.1)}{=}\frac{P[(\mu=x_i)(\eta=y_j)]}{P(\eta=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\eta j}}\,, \tag{2.23}$$

и составить условный закон распределения в виде следующей таблицы:

$\mu \backslash \eta$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	π_{11}	π_{12}	…	π_{1n}
x_2	π_{21}	π_{22}	…	π_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	π_{m1}	π_{m2}	…	π_{mn}

Первый столбец и *j*-й столбец этой таблицы представляют собой условный закон распределения случайной величины μ при $\eta=y_j$, где

$$\pi_{ij}=\frac{p_{ij}}{p_{\eta j}}.$$

Заметим, что $\quad \forall j: \quad \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} \overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{\eta j}} = \frac{1}{p_{\eta j}} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \frac{1}{p_{\eta j}} p_{\eta j} = 1$.

2.11.2. Условный закон распределения непрерывной случайной величины

В этом случае формулой (2.23) воспользоваться нельзя, так как ранее было доказано, что $P(\eta = y) = 0$.

Найдём вероятность того, что $(\mu < x)$ при условии $(y \le \eta < y + \Delta y)$ и затем перейдем к пределу при $\Delta y \to 0$:

$$P(y \le \eta < y + \Delta y) = F_\eta(y + \Delta y) - F_\eta(y).$$

Аналогично:

$$P[(\mu < x)(y \le \eta < y + \Delta y)] = F_{\mu\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\mu\eta}(x, y) \quad \Rightarrow$$

$$F_\mu(x \mid \eta) \overset{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} P_{(y \le \eta < y + \Delta y)}(\mu < x) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P[(\mu < x)(y \le \eta < y + \Delta y)]}{P(y \le \eta < y + \Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F_{\mu\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\mu\eta}(x, y)}{F_\eta(y + \Delta y) - F_\eta(y)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[F_{\mu\eta}(x, y + \Delta y) - F_{\mu\eta}(x, y)] / \Delta y}{[F_\eta(y + \Delta y) - F_\eta(y)] / \Delta y} = \frac{\left(F_{\mu\eta}(x, y)\right)'_y}{F'_\eta(y)}.$$

Таким образом, приходим к определению условной функции распределения

$$F_\mu(x \mid \eta) = \frac{\left(F_{\mu\eta}(x, y)\right)'_y}{f_\eta(y)}.$$

Так как $F_{\mu\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\mu\eta}(u, v)\, du\, dv$ и производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, то

$$\frac{\partial F_{\mu\eta}(x, y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu\eta}(u, y)\, du$$

и

$$F_\mu(x \mid \eta) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{\mu\eta}(u, y) du}{f_\eta(y)}.$$

Очевидно, что у этой функции существует производная по x.

Эта производная называется **условной плотностью распределения вероятностей** случайной величины μ при условии ($\eta = y$)

$$f_\mu(x \mid \eta) = \frac{f_{\mu\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}. \qquad (2.24)$$

2.11.3. Условное математическое ожидание случайной величины

Пусть (μ, η) – дискретная случайная величина.

Условным математическим ожиданием случайной величины μ при условии $\eta = y_j$ называется число, определяемое по формуле

$$M(\mu \mid \eta = y_j) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \pi_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Условное математическое ожидание зависит от того, какое из возможных значений принимает случайная величина η , т. е. как функция от случайной величины само является случайной величиной. Область определения этой функции совпадает с множеством возможных значений случайной величины η : $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т.е. это тоже дискретная случайная величина.

Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется аналогично дискретному случаю

$$M(\mu \mid \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu}(x \mid \eta) dx.$$

Здесь условная плотность распределения вероятностей $f_{\mu}(x \mid \eta)$ вычисляется по формуле (2.24).

Условное математическое ожидание $M(\mu \mid \eta)$ зависит от того, какое из возможных значений принимает случайная величина η , т. е. от y , следовательно $M(\mu \mid \eta) = \varphi(\eta)$ – случайная величина непрерывного типа.

Функция $\varphi(\eta) = M(\mu \mid \eta)$ называется **регрессией** случайной величины μ на случайную величину η .

Свойства условного математического ожидания:

1°. $M(c \mid \eta) = c, \quad c - \text{const}$.

2°. $M(a\mu + b \mid \eta) = aM(\mu \mid \eta) + b$.

3°. $M(\mu_1 + \mu_2 \mid \eta) = M(\mu_1 \mid \eta) + M(\mu_2 \mid \eta)$.

4°. Если μ_1, μ_2 – условно независимые величины, относительно случайной величины η (это означает, что μ_1 и μ_2 независимы при каждом значении случайной величины η), тогда

$$M(\mu_1 \mu_2 \mid \eta) = M(\mu_1 \mid \eta) M(\mu_2 \mid \eta).$$

5°. $M(M(\mu \mid \eta)) = M(\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим, например, дискретный случай. По определению $\varphi(\eta) = M(\mu \mid \eta)$.

$$M(\varphi(\eta)) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \varphi(y_j) p_{\eta j} \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \pi_{ij} \right) p_{\eta j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p_{ij}}{p_{\eta j}} \right) p_{\eta j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{\mu i} \overset{def}{=} M(\mu) .$$

6°. $M(\varphi_1(\mu) \varphi_2(\eta) \mid \eta) = \varphi_2(\eta) M(\varphi_1(\mu) \mid \eta)$.

Доказательство. Для любого фиксированного номера возможного значения j можем записать

$$M(\varphi_1(\mu)\varphi_2(\eta)\,|\,\eta) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m}\varphi_1(x_i)\varphi_2(y_j)\pi_{ij} = \varphi_2(y_j)\sum_{i=1}^{m}\varphi_1(x_i)\pi_{ij} \overset{def}{=} \varphi_2(y_j)M(\varphi_1(\mu)\,|\,\eta).$$

Так как j – произвольно, то получаем доказываемое свойство.

7°. Если $\nu = M(\mu\,|\,\eta) = \varphi(\eta)$, тогда

$$\operatorname{cov}(\nu,\eta) = \operatorname{cov}(\mu,\eta).$$

Доказательство. Рассмотрим опять дискретный случай. Пусть z_j – возможные значения случайной величины ν, $j=\overline{1,n}$, тогда

$$z_j \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m}x_i\pi_{ij} = \sum_{i=1}^{m}x_i\frac{p_{ij}}{p_{\eta j}} = \frac{1}{p_{\eta j}}\sum_{i=1}^{m}x_i p_{ij} \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{m}x_i p_{ij} = z_j p_{\eta j} = z_j\sum_{i=1}^{m}p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}z_j p_{ij},$$

$$\operatorname{cov}(\nu,\eta) = M(\nu\eta) - M(\nu)M(\eta) \overset{5^0}{=} \sum_{j=1}^{n}\varphi(y_j)y_j p_{\eta j} - M(\mu)M(\eta) \overset{def}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_i\pi_{ij}y_j p_{\eta j} - M(\mu)M(\eta) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_i y_j\frac{p_{ij}}{p_{\eta j}}p_{\eta j} - M(\mu)M(\eta) =$$

$$= M(\mu\eta) - M(\mu)M(\eta) = \operatorname{cov}(\mu,\eta).$$

2.11.4. Линейная регрессия

Во многих случаях регрессия случайной величины μ на случайную величину η, т.е. функция $\varphi(\eta)$ близка к линейной, поэтому зависимость $\nu = \varphi(\eta)$ можно заменить линейной зависимостью $\nu = a\eta + b$.

Возникает вопрос: как выразить параметры этой зависимости a и b?

Для получения параметров используется принцип метода наименьших квадратов, т. е. a и b выбираются из условия

$$\delta(a,b) = M[(\nu - (a\eta + b))^2] \to \min$$

Откуда, записывая необходимое условие существования экстремума, получаем систему уравнений относительно параметров

$$\begin{cases}\delta'_a = 0\\ \delta'_b = 0\end{cases},$$

$$\delta(a,b) = M(\nu^2 + a^2\eta^2 + b^2 - 2a\nu\eta - 2b\nu + 2ab\eta) =$$

$$= M(\nu^2) + a^2M(\eta^2) + b^2 - 2aM(\nu\mu) - 2bM(\nu) + 2abM(\eta) \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\delta'_a = 2aM(\eta^2) - 2M(\nu\eta) + 2bM(\eta) = 0\\ \delta'_b = 2b - 2M(\nu) + 2aM(\eta) = 0\end{cases}, \text{ или } \begin{cases}M(\eta^2)a + M(\eta)b = M(\nu\eta)\\ M(\eta)a + b = M(\nu)\end{cases}.$$

Решая эту систему, например по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix}M(\eta^2) & M(\eta)\\ M(\eta) & 1\end{vmatrix} = M(\eta^2) - M^2(\eta) = D(\eta),$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix}M(\nu\eta) & M(\eta)\\ M(\nu) & 1\end{vmatrix} = M(\nu\eta) - M(\nu)M(\eta) = \operatorname{cov}(\nu,\eta) \overset{7^0}{=} \operatorname{cov}(\mu,\eta),$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{\operatorname{cov}(\mu,\eta)}{D(\eta)}.$$

Из второго уравнения системы

$$b = M(\nu) - aM(\eta) = M(\mu) - \frac{\operatorname{cov}(\mu,\eta)}{D(\eta)} M(\eta) .$$

Таким образом, уравнение линейной регрессии случайной величины μ на случайную величину η будет иметь вид:

$$M(\mu \mid \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\mu,\eta)}{D(\eta)}\eta + M(\mu) - \frac{\operatorname{cov}(\mu,\eta)}{D(\eta)} M(\eta) = M(\mu) + \frac{\operatorname{cov}(\mu,\eta)}{D(\eta)} \frac{\sqrt{D(\mu)}}{\sqrt{D(\mu)}} (\eta - M(\eta)),$$

$$\nu = M(\mu) + \rho(\mu,\eta)\frac{\sigma_\mu}{\sigma_\eta}(\eta - M(\eta)). \tag{2.25}$$

Величина $k(\mu,\eta) = \rho(\mu,\eta)\dfrac{\sigma_\mu}{\sigma_\eta}$ называется **коэффициентом линейной регрессии.**

Аналогично можно получить уравнение линейной регрессии случайной величины η на случайную величину μ, оно имеет вид:

$$\xi = M(\eta) + \rho(\mu,\eta)\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\mu}(\mu - M(\mu)),$$

где $\xi = M(\eta \mid \mu)$.

2.12. Закон больших чисел

Ранее было отмечено, что нельзя предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина, так как мы не можем учесть все обстоятельства, от которых зависит это событие. Однако в некоторых случаях можно указать вероятность такого события. События, вероятность которых мала, редко происходят, а события, вероятность которых близка к единице, происходят почти обязательно.

Принцип, заключающийся в том, что маловероятные события на практике рассматриваются как невозможные, носит название "принципа практической невозможности маловероятных событий". События, вероятности которых близки к единице, считаются практически достоверными (принцип практической достоверности).

Следовательно, одной из задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящими с вероятностями, близкими к единице или к нулю. Всякое утверждение, устанавливающее отмеченные закономерности, называется законом больших чисел.

Лемма Маркова. Пусть μ – случайная величина, принимающая лишь неотрицательные значения, тогда справедливо неравенство:

$$\forall \tau > 0: \quad P(\mu < \tau) \le \frac{M(\mu)}{\tau}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Это неравенство справедливо как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Рассмотрим, для определенности, случай непрерывной случайной величины.

$$M(\mu)=\int\limits_0^{\infty} xf(x)dx=\int\limits_0^{\tau} xf(x)dx+\int\limits_{\tau}^{\infty} xf(x)dx.$$

Оба слагаемых в правой части неотрицательны, поэтому

$$M(\mu)\ge\int\limits_{\tau}^{\infty} xf(x)dx,$$

но теперь $x\ge\tau$, следовательно

$$M(\mu)\ge\int\limits_{\tau}^{\infty} xf(x)dx\ge\int\limits_{\tau}^{\infty} \tau f(x)dx=\tau\int\limits_{\tau}^{\infty} f(x)dx=\tau P(\mu\ge\tau),$$

отсюда, так как $\tau>0$, получаем неравенство (2.26).

Неравенство Чебышева. $\forall\varepsilon>0, \forall\mu$ справедливо неравенство:

$$P(|\mu-M(\mu)|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(\mu)}{\varepsilon^2} \quad . \tag{2.27}$$

Это неравенство справедливо как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин.

Так как события $|\mu-M(\mu)|<\varepsilon$ и $|\mu-M(\mu)|\ge\varepsilon$ несовместны и противоположны, то $P(|\mu-M(\mu)|<\varepsilon)=1-P(|\mu-M(\mu)|\ge\varepsilon)$.

Подставляя вероятность $P(|\mu-M(\mu)|<\varepsilon)$, выраженную через вероятность противоположного события, в левую часть неравенства (2.27), получаем эквивалентную запись неравенства Чебышева

$$P(|\mu-M(\mu)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(\mu)}{\varepsilon^2} \quad . \tag{2.28}$$

Доказательство. Для определенности пусть μ - дискретная случайная величина. Рассмотрим и оценим дисперсию этой случайной величины.

$$D(\mu)\overset{def}{=}\sum_i \underbrace{(x_i-M(\mu))^2}_{\ge 0}\underbrace{p_i}_{>0}\ge 0.$$

Отбросим в сумме часть слагаемых, для которых $|x_i-M(\mu)|<\varepsilon$. В результате получим:

$$D(\mu)=\sum_i (x_i-M(\mu))^2 p_i\ge\sum_j (x_j-M(\mu))^2 p_j\ge\sum_j \varepsilon^2 p_j=\varepsilon^2\sum_j p_j\ , \tag{2.29}$$

где $\forall j$: $|x_j-M(\mu)|\ge\varepsilon$. В правой части неравенства (2.29)

$$\sum_j p_j=\sum_j P(\mu=x_j)\overset{|x_j-M(\mu)|\ge\varepsilon}{=}P(|\mu-M(\mu)|\ge\varepsilon)\ .$$

Таким образом, $D(\mu)\ge\varepsilon^2 P(|\mu-M(\mu)|\ge\varepsilon)$.

Разделив обе части этого неравенства на ε^2, получим неравенство (2.28).

С помощью аналогичных рассуждений неравенство Чебышева доказывается и для непрерывных случайных величин.

Теорема Чебышева. Пусть $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,\ldots$ - последовательность независимых случайных величин с равномерно ограниченной дисперсией, т.е.

$$\exists c>0:\quad D(\mu_i)<c,\quad \forall i=1,2,\ldots,$$

тогда $\forall\varepsilon>0$, при $n\to\infty$ выполняется равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\mu_i)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (2.30)$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\overline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ – среднее арифметическое случайных величин μ_i, тогда $M(\overline{\mu}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\mu_i)$ – среднее арифметическое математических ожиданий. Запишем для этой случайной величины неравенство Чебышева. Так как μ_i независимые случайные величины, то

$$D(\overline{\mu}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(\mu_i) < \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c = \frac{1}{n^2} cn = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad P(|\,\overline{\mu} - M(\overline{\mu})\,| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\overline{\mu})}{\varepsilon^2} > 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ (второе слагаемое при этом стремится к нулю), получаем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\mu_i)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1,$$

но вероятность любого случайного события не может быть больше единицы, следовательно, справедливо равенство (2.30).

Смысл теоремы заключается в том, что среднее арифметическое большого числа случайных величин утрачивает случайный характер и стремится к числу, равному среднему арифметическому математических ожиданий этих случайных величин.

Частный случай теоремы Чебышева – теорема Бернулли.

Теорема Бернулли. В последовательности из n независимых испытаний

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 ,$$

где $p = P(A)$, m – число появлений события A в n испытаниях, т. е. $\frac{m}{n} = w_A$ – относительная частота появления события A.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\mu^{(n)} = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n,$$

где μ_i – число появлений события A в i-м испытании. Законы распределения случайных величин μ_i одинаковы и имеют вид:

μ_i	0	1
P	q	p

следовательно: $M(\mu_i) \overset{def}{=} 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad D(\mu_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p - p^2 = pq$.

В этом случае $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}(\mu_1 + \ldots + \mu_n)$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\mu_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{np}{n} = p$,

и записывая теорему Чебышева, получаем требуемый результат.

Пусть имеется последовательность случайных величин $\{\eta_n\}$ и некоторое неслучайное число η_0.

Если $\forall\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\,\eta_n - \eta_0\,| < \varepsilon\right) = 1$, то говорят, что последовательность $\{\eta_n\}$ **по вероятности сходится** к η_0. При этом используются обозначения:

$$\left|\eta_n - \eta_0\right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \text{или} \quad \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta_0 .$$

2.13*. Характеристическая функция и её свойства

Рассмотрим произвольную случайную величину μ.

Характеристической функцией этой случайной величины называется математическое ожидание функции $e^{it\mu}$ (где i – мнимая единица, $i^2 = -1$).

Обозначается: $\varphi(t) \equiv \varphi_\mu(t)$.

Таким образом,

$$\varphi_\mu(t) = M(e^{it\mu}).$$

Для дискретной случайной величины

$$\varphi_\mu(t) = \sum_j e^{itx_j} p_j \tag{2.31}$$

или

$$\varphi_\mu(t) = \sum_j (\cos tx_j + i\sin tx_j) p_j ,$$

здесь использована формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Для непрерывной случайной величины

$$\varphi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\mu(x)dx \tag{2.32}$$

или

$$\varphi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx + i\sin tx) f_\mu(x)dx .$$

Формула (2.32) представляет собой с точностью до постоянного множителя $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ преобразование Фурье функции $f_\mu(x)$. Если записать обратное преобразование Фурье, то получим, что

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_\mu(t)dt$$

или для любых точек x_1 и x_2 непрерывности плотности распределения:

$$F_\mu(x_2) - F_\mu(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx_1} - e^{itx_2}}{it} dt \quad .$$

Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями случайных величин и их плотностями распределения вероятностей (функциями распределений для дискретных случайных величин) или, что то же самое, характеристическая функция однозначно определяет случайную величину.

Простейшие свойства характеристической функции

1^0. $\varphi_\mu(t)$ – непрерывная функция, $\varphi_\mu(0) = 1$.

Доказательство. Непрерывность $\varphi_\mu(t)$ следует для дискретной случайной величины с бесконечным множеством значений из равномерной сходимости ряда

$$\sum_j e^{itx_j} p_j .$$

Этот ряд сходится равномерно, так как $\sum_j \left| e^{itx_j} p_j \right| = \sum_j \underbrace{\left| e^{itx_j} \right|}_{=1} p_j = \sum_j p_j = 1$, а, как известно, равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций является непрерывной функцией.

Если дискретная случайная величина имеет конечное множество значений, то непрерывность функции $\varphi_\mu(t)$ очевидна. Она непрерывна как сумма конечного числа непрерывных функций.

Непрерывность функции $\varphi_\mu(t)$ для непрерывной случайной величины следует из равномерной сходимости интеграла, стоящего в правой части равенства (2.31).

Для дискретной случайной величины:

$$\varphi_\mu(0) = \sum_j e^0 p_j = \sum_j p_j = 1 .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\varphi_\mu(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^0 f_\mu(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\mu(x)dx = 1 ,$$

последнее равенство есть условие нормировки плотности распределения вероятностей.

2^0. Если $\eta = a\mu + b$, то $\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\mu(at)$.

Доказательство. Действительно

$$\varphi_\eta(t) = M(e^{it\eta}) = M(e^{ita\mu+itb}) = M(e^{ita\mu} \cdot e^{itb}) = e^{itb}M(e^{i(at)\mu}) = e^{itb}\varphi_\mu(at) .$$

3^0. Если случайные величины μ_1 и μ_2 – независимы, то

$$\varphi_{\mu_1+\mu_2}(t) = \varphi_{\mu_1}(t)\varphi_{\mu_2}(t) .$$

Доказательство. Так как μ_1, μ_2 – независимые случайные величины, то и функции $e^{it\mu_1}, e^{it\mu_2}$ тоже будут независимыми случайными величинами, следовательно, по свойствам математического ожидания:

$$\varphi_{\mu_1+\mu_2}(t) = M(e^{it(\mu_1+\mu_2)}) = M(e^{it\mu_1} \cdot e^{it\mu_2}) = M(e^{it\mu_1})M(e^{it\mu_2}) = \varphi_{\mu_1}(t)\varphi_{\mu_2}(t) .$$

4^0. Если существует начальный момент порядка *n* для случайной величины μ, то

$$\forall k \le n : \ \varphi_\mu^{(k)}(0) = i^k m_k$$

Доказательство. Пусть μ – непрерывная случайная величина, тогда по условию существует начальный момент порядка *n*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_\mu(x)dx , \quad \varphi_\mu(t) = M\left[e^{it\mu}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\mu(x)dx .$$

Существование m_n позволяет $\forall k$ дифференцировать правую часть равенства по t как по параметру:

$$\varphi_\mu^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} f_\mu(x)dx = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f_\mu(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{\mu}^{(k)}(0) = i^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^0 f_{\mu}(x)dx = i^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\mu}(x)dx = i^k m_k .$$

При изучении закона больших чисел было показано, что

$$\overline{\mu}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m .$$

Требуется определить закон распределения $\overline{\mu}_n$. Если μ_i одинаково распределены, то

$$M(\overline{\mu}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\mu_i) = \frac{1}{n}\cdot nm = m .$$

Пусть $\{\mu_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин.

Рассмотрим нормированную и центрированную случайную величину

$$\overline{\mu}_n^{\circ} = \frac{\overline{\mu} - M(\overline{\mu})}{\sigma_{\overline{\mu}}}, \quad \text{здесь} \quad M\left(\overline{\mu}_n^{\circ}\right) = 0, \quad D\left(\overline{\mu}_n^{\circ}\right) = 1 .$$

Центральная предельная теорема. При $n \to \infty$ справедливо соотношение:

$$F_{\overline{\mu}_n^{\circ}}(x) = P(\overline{\mu}_n^{\circ} < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = F_0(x) ,$$

где $F_0(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство.

$$\overline{\mu}_n^{\circ} = \frac{\overline{\mu} - M(\overline{\mu})}{\sigma_{\overline{\mu}}} . \quad M(\overline{\mu}) = m, \quad D(\overline{\mu}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(\mu_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\overline{\mu}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mu}_n^{\circ} = \frac{\overline{\mu} - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\nu - mn}{\sigma\sqrt{n}} = a\nu + b ,$$

где $\nu = n\overline{\mu} = n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, $\quad a = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}$, $\quad b = -\frac{mn}{\sigma\sqrt{n}}$.

Обозначим характеристическую функцию случайной величины $\overline{\mu}_n^{\circ}$ через $\psi(t)$, а случайной величины μ_i через $\varphi(t)$, тогда

$$\psi(t) \overset{2^{\circ}}{=} e^{itb}\varphi_{\nu}(at) = e^{itb}\varphi^n(at) = e^{\frac{itmn}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left[e^{\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n .$$

Найдём $\ln\psi(t)$:

$$\ln\psi(t) = n\left(\ln e^{-\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}}} + \ln\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = n\left(-\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}} + \ln\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) .$$

Запишем формулу Маклорена второго порядка для функции $\ln\varphi(u)$, $\left(f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)\right)$, где $u = \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$.

$$\ln\varphi(0)\overset{1^0}{=}\ln 1=0\,;\quad \left(\ln\varphi(u)\right)'=\frac{1}{\varphi(u)}\varphi'(u)\,,\quad (\ln\varphi(u))'\big|_{u=0}=\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}=\frac{im_1}{1}=im\,,$$

$$(\ln\varphi(u))''=\left(\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right)'=\frac{\varphi''(u)\varphi(u)-(\varphi'(u))^2}{\varphi^2(u)}\,,$$

$$(\ln\varphi(u))''\big|_{u=0}=\frac{\varphi''(0)\varphi(0)-(\varphi'(0))^2}{\varphi^2(0)}\overset{4^0}{=}\frac{i^2m_2-(im)^2}{1}=-m_2+m_1^2=-\sigma^2\,.$$

$$\ln\varphi(u)=0+imu-\frac{1}{2}\sigma^2u^2+o(u^2)=\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{\sigma^2 n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\ln\psi(t)=n\left(-\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}}+\frac{itm}{\sigma\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}t^2+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right),$$

по определению $o(\alpha)$: $\dfrac{o(\alpha)}{\alpha}\underset{\alpha\to 0}{\to}0\;\Rightarrow\; n\cdot o(1/n)=\dfrac{o(1/n)}{1/n}\underset{n\to\infty}{\to}0$, тогда из последнего соотношения получаем

$$\ln\psi(t)\underset{n\to\infty}{\to}-\frac{t^2}{2}\;\Rightarrow\;\psi(t)\underset{n\to\infty}{\to}e^{-t^2/2}$$

– характеристическая функция стандартного нормального закона распределения, значит $\overline{\mu}_n^{\circ}$ – распределена по стандартному нормальному закону.

2.14*. Распределения, связанные с нормальным распределением

Рассмотрим несколько распределений, которые широко используются в математической статистике (в следующей главе курса).

2.14.1. Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Рассмотрим *n* независимых случайных величин, распределённых по стандартному нормальному закону, т.е. с параметрами $m=0,\sigma=1$. Построим новую случайную величину χ_n^2, определив ее с помощью равенства

$$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\;.$$

Распределение этой случайной величины носит название χ^2-распределения (хи-квадрат) с *n* степенями свободы. Получим закон распределения этой случайной величины. При *n* = 1, получаем $\chi_1^2=\mu_1^2$,

$$F_{\chi_1^2}(x)\overset{def}{=}P(\chi_1^2<x)=P(|\mu_1|<\sqrt{x})=P(-\sqrt{x}<\mu_1<\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^{-t^2/2}dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2/2}dt=\left|\begin{array}{c}u=t^2,\;t=\sqrt{u},\;dt=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}du,\\ t=0\leftrightarrow u=0,\;t=\sqrt{x}\leftrightarrow u=x.\end{array}\right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-u/2}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}\frac{e^{-u/2}}{\sqrt{u}}du\,,$$

$$f_{\chi_1^2}(x) = F'_{\chi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}.$$

Методом математической индукции покажем, что

$$f_{\chi_n^2}(x) = c_n x^{n/2-1} e^{-x/2}.$$

При $n = 1$ равенство получено.

Предполагаем, что при произвольном n эта формула справедлива, покажем, что она справедлива и при $n+1$

$$f_{\chi_{n+1}^2}(x) = f_{\chi_n^2 + \mu_{n+1}^2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi_n^2}(x) f_{\mu_{n+1}^2}(-x+u)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \chi_n^2 \text{ и } \mu_{n+1}^2 \geq 0 \Rightarrow \\ x \geq 0, -x+u \geq 0 \;\Rightarrow -u \geq x \end{array} \right| = \int_0^u c_n x^{n/2-1} e^{-x/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (u-x)^{-1/2} e^{-(u-x)/2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = ut,\, dx = udt, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\, x = u \leftrightarrow t = 1. \end{array} \right| = \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (ut)^{n/2-1} e^{-ut/2} u^{-1/2} (1-t)^{-1/2} e^{-u(1-t)/2} udt =$$

$$= \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} u^{n/2-1} u^{-1/2} u \int_0^1 t^{n/2-1} (1-t)^{-1/2} e^{-ut/2 - u/2 + ut/2} dt =$$

$$= \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} u^{n/2-1/2} e^{-u/2} \underbrace{\int_0^1 t^{n/2} (1-t)^{-1/2} dt}_{=c_0} = c_{n+1} u^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-u/2}.$$

Постоянную c_n найдём из условия нормировки

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi_n^2}(x)dx = \int_0^{\infty} c_n x^{n/2-1} e^{-x/2} dx = \left| \begin{array}{c} x/2 = t,\, x = 2t,\, dx = 2dt, \\ x = 0 \leftrightarrow t = 0,\, x = \infty \leftrightarrow t = \infty. \end{array} \right| =$$

$$= c_n \int_0^{\infty} 2^{n/2-1} t^{n/2-1} e^{-t} 2dt = c_n 2^{n/2} \underbrace{\int_0^{\infty} t^{n/2-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(n/2)} = c_n 2^{n/2} \Gamma(n/2) \;\Rightarrow\; c_n = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}.$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей случайной величины хи-квадрат с n степенями свободы имеет вид

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}.$$

В математической статистике используется следующий факт.

Если $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, подчиненные нормальному закону с одинаковыми параметрами: математическим ожиданием m, дисперсией σ^2, тогда случайная величина

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \overline{\mu})^2,$$

где $\overline{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, имеет χ^2-распределение, но с $n-1$ степенями свободы.

2.14.2. Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

Пусть μ и χ^2 – независимые случайные величины, причем μ – случайная величина, распределённая по стандартному нормальному закону, χ^2 – случайная величина с законом распределения хи-квадрат с n степенями свободы. Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\mu}{\sqrt{\chi^2 / n}}$$

называется распределением Стьюдента (*t*-распределением) с n степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$t(x) = T'(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

В математической статистике используется следующий факт.

Если $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, подчиненные нормальному закону с математическим ожиданием m, то случайные величины $\overline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ и $\rho = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \overline{\mu})^2$ также независимы, а случайная величина

$$\tau = \frac{\sqrt{n}(\overline{\mu} - m)}{\sqrt{\rho/(n-1)}}$$

имеет распределение Стьюдента с n – 1 степенями свободы.

2.14.3. Распределение Фишера (*F*-распределение)

Пусть χ_1^2 и χ_2^2 – две независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение с m и n степенями свободы соответственно. Распределение случайной величины

$$\kappa = \frac{\left(\chi_1^2 / m\right)}{\left(\chi_2^2 / n\right)} = \frac{n\chi_1^2}{m\chi_2^2}$$

носит название распределения Фишера (*F*-распределение) с параметрами m и n.

Распределение Фишера имеет плотность

$$\psi(x) = \Psi'(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{m/2} n^{n/2} x^{m/2-1} (m+nx)^{-(m+n)/2} \quad (x > 0).$$

Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3.1. Основные задачи и понятия математической статистики

Установление закономерностей, которым подчиняются случайные массовые явления методами теории вероятности на основе эмпирических (статистических) данных, составляет предмет **математической статистики**.

Математическая статистика решает две основные задачи:

1) разработку методов сбора, группировки и хранения статистических данных (общая статистика);

2) разработку методов анализа полученных статистических данных:

а) оценку неизвестной вероятности случайного события;

б) оценку неизвестной функции распределения случайной величины;

в) оценку неизвестных параметров распределения при известной функции распределения;

г) оценку зависимости случайных величин от одной или нескольких других случайных величин;

д) проверку статистических гипотез:

– о законе распределения случайной величины;

– о величине параметров распределения случайной величины (при известной функции распределения);

– о совпадении двух распределений;

– о равенстве параметров двух распределений и т.д.

Пусть имеется N объектов произвольной природы, объединённых по некоторому качественному или количественному признаку. Требуется на основе статистических данных установить распределение этого признака.

Наиболее надёжный способ – это полное обследование.

Изучаемая совокупность из N объектов называется **генеральной совокупностью.**

Выборочной совокупностью или просто **выборкой** называется n случайно отобранных объектов.

При таком определении выборки, количественный признак, по которому сформирована генеральная совокупность, является некоторой случайной величиной. Каждому объекту в выборке соответствуют некоторые значения этой случайной величины, которые называются **вариантами.** Таким образом, выборку можно рассматривать как набор вариант.

С другой стороны, значения вариант от выборки к выборке меняются, т.е. они сами являются случайными величинами. Причём эти случайные величины независимы, одинаково распределены и распределены точно так же, как случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности.

Варианты, расположенные в неубывающем порядке, называются **вариационным рядом.**

Пусть в результате формирования выборки значение признака, равного x_1, наблюдалось n_1 раз, значение признака, равного x_2, наблюдалось n_2 раз, …, значение признака, равного x_m, – n_m раз. Числа n_i называются **частотами вариант,** а $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – **относительными частотами** $i = \overline{1, m}$, здесь m – число различных вариант в выборке.

Совокупность пар чисел (x_i, n_i) или (x_i, w_i) называется **статистическим распределением** и обычно представляется в виде таблиц:

Варианты	x_1	x_2	...	x_m
Частоты	n_1	n_2	...	n_m

или

Варианты	x_1	x_2	...	x_m
Относительные частоты	w_1	w_2	...	w_m

Статистическое распределение является аналогом закона распределения дискретной случайной величины.

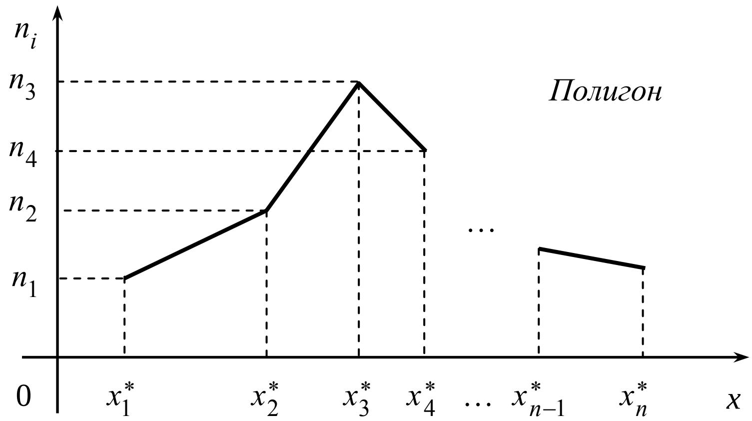
Если количественный признак генеральной совокупности является непрерывной случайной величиной, трудно ожидать, что в выборке будут появляться одинаковые варианты (в теории вероятностей было получено, что для непрерывной случайной величины $P(\mu = x) = 0, \forall x$ – фиксированного возможного значения), т.е. наиболее вероятно, что все $n_i = 1$. В этом случае строится интервальное статистическое распределение. Пусть $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ – вариационный ряд, т.е.

$$x_1^* = \min_i \{x_i\},\ x_n^* = \max_i \{x_i\},\ \ x_i^* \le x_{i+1}^*,\ \forall\ i = \overline{1, n-1}.$$

Этот вариационный ряд разбивается на l промежутков, обычно равной длины h. При этом $h = \dfrac{x_n^* - x_1^*}{l}$ – шаг разбиения, $a_0 = x_1^*$, $a_k = a_{k-1} + h$, $k = \overline{1, l}$ – граничные точки промежутков. В качестве частоты n_k принимается число вариант, попавших в k-й промежуток.

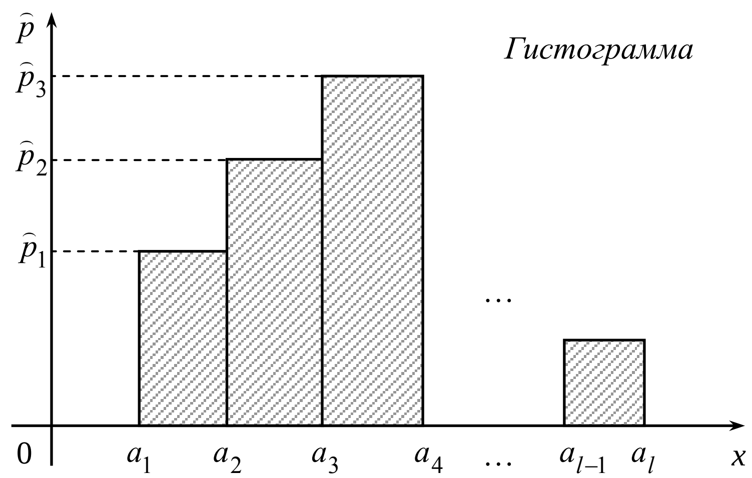
Для графического представления статистического распределения используется полигон и гистограмма.

Полигон – это ломаная, соединяющая точки (x_i^*, n_i) или (x_i^*, w_i), $i = \overline{1, n}$.



Для интервального статистического распределения вместо x_i^* берутся середины интервалов. Полигон является аналогом плотности распределения случайной величины, если она непрерывна.

Гистограмма – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются промежутки разбиения, а высотами частоты n_i или относительные частоты w_i или эмпирические вероятности



$$\widehat{p}_i = \frac{w_i}{h}.$$

В последнем случае площадь ступенчатой фигуры равна единице, действительно

$$S = \sum_i \widehat{p}_i h = h\sum_i \frac{w_i}{h} = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_i n_i = 1.$$

Если выбирается $\widehat{p}_i$, то гистограмма является аналогом плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Пусть n_x – число вариант в выборке, которые меньше, чем x.

Функция вида $\widehat{F}_n(x) = \dfrac{n_x}{n}$ называется **эмпирической** функцией распределения.

Эта функция обладает всеми свойствами функции распределения случайной величины, а именно:

1°. $\forall x: \quad 0 \le \widehat{F}_n(x) \le 1;$

2°. $\widehat{F}_n(x)$ – неубывающая функция;

3°. $\widehat{F}_n(x) = 0$ при $x \le x_1^*$, $\widehat{F}_n(x) = 1$ при $x > x_n^*$.

Все свойства легко выводятся непосредственно из определения.

Как функция многомерной случайной величины эмпирическая функция распределения $\widehat{F}_n(x)$, в свою очередь, тоже является случайной величиной.

Теорема 3.1. (Гливенко–Кантелли)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in R: \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\widehat{F}_n(x) - F_\mu(x)\right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ или } \widehat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F_\mu(x),$$

где $F_\mu(x)$ – теоретическая функция распределения количественного признака генеральной совокупности.

Доказательство. Для любого фиксированного x с каждой вариантой выборки x_k можно связать случайное событие $A_k = (x_k < x)$. Если появление события A_k назвать успехом, то n_x – число успехов в n независимых испытаниях схемы Бернулли, тогда

$$p_k = P(A_k) = P(x_k < x) = P(\mu < x) = F_\mu(x)$$

– вероятность успеха,

$$w_{A_k} = \frac{n_x}{n} = \widehat{F}_n(x)$$

– относительная частота успеха.

Следовательно, по теореме Бернулли:

$$\lim_{n\to\infty} P(|w_{A_k} - p_k| < \varepsilon) = 1, \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(|\widehat{F}_n(x) - F_\mu(x)| < \varepsilon) = 1.$$

Вывод: при $n \to \infty$ эмпирическая функция распределения утрачивает случайный характер и сколь угодно близко приближается к теоретической функции распределения.

График эмпирической функции распределения выглядит как график функции распределения дискретной случайной величины.

Таким образом, эмпирическая функция распределения – это аналог функции распределения случайной величины.

3.2. Точечные оценки параметров распределения

Предположим, что в результате наблюдений получена случайная выборка $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из генеральной совокупности с известной функцией распределения. $F_\mu(x)$. Относительно этой функции известно, что она принадлежит некоторому параметрическому семейству функций распределения, т.е.

$$F_\mu(x) = F(x; \theta),$$

где θ – параметр, который может быть как числовым, так и векторным. Как правило, если не оговорено противное, будем считать, что θ - числовой параметр.

Требуется только по данным случайной выборки найти значение параметра θ.

Произвольная функция $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}\,(x_1, \ldots, x_n)$, зависящая только от вариант выборки, значение которой приближенно равно параметру θ, называется **точечной оценкой** этого параметра.

Оценка $\widehat{\theta}$, как функция многомерной случайной величины, также является случайной величиной, функцию распределения которой можно найти, и эта функция распределения будет также зависеть от параметра θ.

Для непрерывной случайной величины μ:

$$f_{\widehat{\theta}}(x) = \int\limits_D \ldots \int f(t_1; \theta) \cdot \ldots \cdot f(t_n; \theta) dt_1 \ldots dt_n\,,$$

где D: $\widehat{\theta}(t_1, ..., t_n) < x$, $f(x; \theta)$ – плотность распределения случайной величины μ.

Для дискретной случайной величины строится закон распределения:

$$P(\widehat{\theta} < x) = \sum_{\widehat{\theta} < x} P(t_1;\ \theta) \ldots P(t_n;\ \theta)\,,$$

где $P(t_k; \theta) = P(\mu = t_k)$, t_k, $k = \overline{1, L}$ – возможные значения случайной величины μ, L – число различных возможных значений.

Пример 3.1. В последовательности n испытаний Бернулли $P(A) = p = \theta$. Построить закон распределения оценки параметра θ.

Решение. Пусть μ_i – число появлений события A в i–м испытании. Множество возможных значений μ_i: $\{0, 1\}$. Закон распределения μ_i:

μ_i	0	1
P	$1-\theta$	θ

В качестве оценки параметра θ рассмотрим относительную частоту появления события A в этих испытаниях, т.е.

$$\widehat{\theta} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события A в n испытаниях. Случайная величина m распределена по биномиальному закону, следовательно, искомое распределение будет иметь следующий вид:

$$p_k = P(\widehat{\theta} = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}.$$

$\widehat{\theta}$	0	$1/n$	...	k/n	...	1
P	$(1-\theta)^n$	$n\theta(1-\theta)^{n-1}$	...	$C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$	...	θ^n

Так как $\hat{\theta}$ – случайная величина и выборка тоже многомерная случайная величина в математической статистике, как правило, мы не гарантированы от сколь угодно больших ошибок. Значит, гарантировать достаточную близость оценки $\hat{\theta}$ к оцениваемому параметру можно лишь с некоторой вероятностью и, для того чтобы увеличить эту вероятность, приходится увеличивать объем выборки.

Главное свойство любой оценки, оправдывающее само название "оценка" – **возможность**, хотя бы ценой увеличения объема выборки до бесконечности, получить точное значение неизвестного параметра θ

Поэтому оценка $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}_n$ называется **состоятельной**, если с ростом объема выборки она сходится к оцениваемому параметру, т.е. при всех возможных значениях параметра θ:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta .$$

Выборочной средней – $\bar{x}$ называется среднее арифметическое вариант выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Выборочной дисперсией – $\hat{\sigma}^2 \equiv D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения вариант от выборочной средней

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 ,$$

Для любой случайной величины μ: $\bar{x}$ – точечная оценка для математического ожидания $M(\mu)$, $\hat{\sigma}^2$ – точечная оценка для дисперсии $D(\mu)$.

Получим полезную для дальнейшего изложения формулу, так как

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2 ,$$

то

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 ,$$

С помощью аналогичных выкладок можно показать справедливость равенства

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \left(\overline{x-m}\right)^2 = \overline{(x-m)^2} - \left(\overline{x-m}\right)^2 , \qquad (3.1)$$

где $m = M(\mu)$.

Покажем состоятельность этих оценок:

1) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \Rightarrow \quad M(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m = m .$

По теореме Чебышева

$$\frac{1}{n}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) \xrightarrow[n \to \infty]{P} \frac{1}{n}(M(\mu_1) + \ldots + M(\mu_n)) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \xrightarrow[n \to \infty]{P} m = M(\mu) \quad \Leftrightarrow$$

$\bar{x}$ – состоятельная оценка для $M(\mu)$.

2) $\hat{\sigma}^2 \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \left(\overline{x-m}\right)^2 .$

По теореме Чебышева, рассматривая случайные величины $\mu_i = (x_i - m)^2$, получаем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\mu_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = D(\mu).$$

второе слагаемое $\left(\overline{x-m}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma}^2 \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} D(\mu)$

– это и означает состоятельность оценки.

Величина $\delta(\hat{\theta}, \theta) = M(\hat{\theta}) - \theta$ называется смещением оценки $\hat{\theta}$ относительно параметра θ.

Оценка $\hat{\theta}$ называется **несмещённой**, если $\delta(\hat{\theta}, \theta) = 0 \Leftrightarrow M(\hat{\theta}) = \theta$.

Несмещённость выборочной средней $\bar{x}$:

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i) = \frac{1}{n}nm = m = M(\mu) = \theta \Rightarrow$$

оценка $\bar{x}$ является несмещенной для $M(\mu)$.

Смещенность выборочной дисперсии $\hat{\sigma}^2$**:**

$$M(\hat{\sigma}^2) \overset{(3.1)}{=} M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - \overline{(x-m)}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i - m)^2 - M(\bar{x} - m)^2. \quad (*)$$

Здесь использовано равенство

$$\overline{x-m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m = \bar{x} - m.$$

Рассматриваем первое слагаемое в равенстве (*). Здесь x_i – одинаково распределенные независимые случайные величины, следовательно,

$$M(x_i - m)^2 = D(x_i) = D(\mu), \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(\mu) = \frac{1}{n}nD(\mu) = D(\mu).$$

Второе слагаемое в равенстве (*):

$$M(\bar{x} - m)^2 = D(\bar{x}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(x_i) = \frac{1}{n^2}nD(\mu) = \frac{D(\mu)}{n}.$$

Таким образом,

$$M(\hat{\sigma}^2) = D(\mu) - \frac{1}{n}D(\mu) = \frac{n-1}{n}D(\mu) \neq D(\mu) \quad \Rightarrow$$

$\hat{\sigma}^2$ – смещённая оценка для дисперсии $D(\mu)$.

Исправленная выборочная дисперсия S^2 – это величина, равная

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \Rightarrow \quad M\left(S^2\right) = \frac{n}{n-1}M\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}D(\mu) = D(\mu) \quad \Rightarrow$$

S^2 – несмещённая оценка для дисперсии случайной величины.

На практике используется и $\hat{\sigma}^2$, и S^2, так как $\frac{n-1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

Очевидно, что для любого параметра можно рассматривать бесконечное множество оценок и из всех этих оценок желательно выбрать ту, которая имеет наименьший разброс. Мерой разброса случайной величины является дисперсия

$$D(\widehat{\theta}) \overset{def}{=} M\left(\widehat{\theta} - M(\widehat{\theta})\right)^2.$$

Но для смещённых оценок мы получаем меру отклонения не от оцениваемого параметра, а от математического ожидания $M(\widehat{\theta})$. Поэтому следующее требование предъявляется к несмещённым оценкам, тогда $M(\widehat{\theta}) = \theta$, и $D(\widehat{\theta}) = M(\widehat{\theta} - \theta)^2$.

Оценка $\widehat{\theta}_{\text{эфф}}$ называется эффективной, если при любом значении параметра θ дисперсия этой оценки минимальна, т.е. $\widehat{\theta}_{\text{эфф}}$ выбирается из условия:

$$D(\widehat{\theta}_{\text{эфф}}) = \min_{\widehat{\theta}} D(\widehat{\theta}).$$

Теорема 3.2. Для произвольной оценки $\widehat{\theta}$ параметра распределения θ выполняется неравенство:

$$D(\widehat{\theta}) \geq \frac{1}{nI},$$

где $I = I(\theta)$ – информация Фишера.

Информация Фишера для дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$I(\theta) = M\left((\ln P(\mu;\theta))'_\theta\right)^2 = \sum_{i=1}^{L} \left(\frac{P'_\theta(t_i;\theta)}{P(t_i;\theta)}\right)^2 P(t_i;\theta),\ P(t_i;\theta) = P(\mu = t_i).$$

Здесь, если закон распределения случайной величины μ имеет вид

μ	t_1	t_2	...	t_L
P	p_1	p_2	...	p_L

то закон распределения случайной величины $\eta = P(\mu;\ \theta)$ будет следующим

η	p_1	p_2	...	p_L
P	p_1	p_2	...	p_L

Для непрерывной случайной величины информация Фишера вычисляется по формуле

$$I(\theta) = M\left((\ln f(\mu,\theta))'_\theta\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'_\theta(t,\theta)}{f'(t,\theta)}\right) f'(t,\theta)dt.$$

Величина $e(\theta) = \dfrac{1}{nI(\theta)D(\widehat{\theta})}$ называется **эффективностью** оценки.

Очевидно, что $0 < e(\theta) \leq 1$, причём, если $e(\theta) = 1$, то дисперсия оценки $D(\widehat{\theta})$ будет минимальной, т.е. по определению эта оценка будет эффективной.

Оценка $\widehat{\theta}$ называется **эффективной по Рао-Крамеру**, если ее эффективность равна единице, т.е. $e(\theta) = 1$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.2. В схеме n последовательных испытаний Бернулли $\theta = p = P(A)$, μ_i – число появлений события A в i-м испытании. Закон распределения μ_i

μ_i	0	1
P	$1-\theta$	θ

Пусть $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, доказать, что эта оценка является эффективной.

Решение. Закон распределения случайной величины $\eta = P(\mu,\ \theta)$ имеет вид

η	$1-\theta$	θ
P	$1-\theta$	θ

тогда $P(0;\ \theta) = 1-\theta,\ P(1;\ \theta) = \theta,$

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{1}{n^2} n\left(0\cdot(1-\theta) + 1\cdot\theta - \theta^2\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n},$$

$$I(\theta) = \left(\frac{P'_\theta(0;\theta)}{P(0;\theta)}\right)^2 (1-\theta) + \left(\frac{P'_\theta(1;\theta)}{P(1;\theta)}\right)^2 \theta = \left(\frac{-1}{1-\theta}\right)^2 (1-\theta) + \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \theta =$$

$$= \frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{\theta} = \frac{\theta + 1 - \theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{1}{\theta(1-\theta)} \quad \Rightarrow \quad e(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)D(\hat{\theta})} = \frac{1}{n\frac{1}{\theta(1-\theta)}\cdot\frac{\theta(1-\theta)}{n}} = 1,$$

следовательно, данная оценка является эффективной для вероятности $p = P(A)$.

Пример 3.3. Рассмотрим нормальный закон распределения с параметрами $m,\ \sigma^2$, в котором дисперсия σ^2 известна, а неизвестен параметр $\theta = m$. Пусть $\hat{\theta} = \bar{x}$. Установить, является ли эта оценка эффективной.

Решение. Здесь

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},\ f(\mu;\ \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\mu-\theta)^2/2\sigma^2},$$

$$f'_\theta(\mu;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(\mu-\theta)^2/2\sigma^2}\left(-\frac{2(\mu-\theta)}{2\sigma^2}\right) = -f(\mu;\theta)\frac{\mu-\theta}{\sigma^2},$$

$$I(\theta) \overset{def}{=} M\left(\frac{f'_\theta(\mu;\theta)}{f(\mu;\theta)}\right)^2 = M\left(\frac{-f(\mu;\theta)\frac{\mu-\theta}{\sigma^2}}{f(\mu;\theta)}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} M(\mu-\theta)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2},$$

$$e(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)D(\hat{\theta})} = \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n}} = 1,$$

следовательно, данная оценка является эффективной.

Пример 3.4. В показательном распределении

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

неизвестен параметр λ. Убедиться, что $\frac{1}{\bar{x}}$ – эффективная оценка для этого параметра.

Решение. Из курса теории вероятностей известно, что для показательного распределения

$$M(\mu) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\mu) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Пусть $\theta = \frac{1}{\lambda} = M(\mu)$ тогда $f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$ и $\bar{x}$ является точечной оценкой для параметра θ

$$f'_\theta(\mu;\theta) = -\frac{1}{\theta^2} e^{-\mu/\theta} + \frac{1}{\theta} e^{-\mu/\theta} \frac{\mu}{\theta^2} = f(\mu;\theta)\left(\frac{\mu}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right) = f(\mu;\theta)\frac{\mu-\theta}{\theta^2} \quad \Rightarrow$$

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2} nD(\mu) = \frac{\theta^2}{n},\ I(\theta) = M\left(\frac{f(\mu;\theta)\frac{\mu-\theta}{\theta^2}}{f(\mu;\theta)}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4} M(\mu-\theta)^2 = \frac{1}{\theta^4} D(\mu) = \frac{\theta^2}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2},$$

$$e(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)D(\hat{\theta})} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^2}{n}} = 1,$$

значит оценка $\bar{x}$ является эффективной для $\theta = \frac{1}{\lambda}$, следовательно $\frac{1}{\bar{x}}$ – эффективная оценка для λ.

3.3. Основные методы получения точечных оценок

3.3.1. Метод моментов

По аналогии с определением начальных и центральных моментов k-го порядка случайной величины, по данным случайной выборки можно определить начальные и центральные выборочные моменты k-го порядка.

Начальным выборочным моментом k-го порядка $\hat{m}_k$ называется среднее арифметическое k-х степеней вариант выборки, т.е.

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \overline{x^k}$$

Центральным выборочным моментом k-го порядка $\hat{m}_k^\circ$ называется среднее арифметическое k-х степеней отклонения вариант выборки от выборочного среднего, т.е.

$$\hat{m}_k^\circ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k = \overline{(x-\bar{x})^k}.$$

Эти выборочные моменты являются точечными оценками соответствующих теоретических моментов случайной величины μ.

Если $F_\mu(x) = F(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \dots,\ \theta_r)$ зависит от r параметров, то естественно потребовать, чтобы моменты k-го порядка случайной величины μ совпадали с выборочными моментами этого же порядка, т.е.

$$m_k = \hat{m}_k,\ k = \overline{1, r} \quad \text{или} \quad m_k^\circ = \hat{m}_k^\circ \quad k = \overline{2, r+1}.$$

В частности, если μ – непрерывная случайная величина и $f_\mu(x) = f(x;\ \theta)$, то

$$\overline{x} = \widehat{m}_1 = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)dx = G(\theta),$$

отсюда формально находим $\widehat{\theta} = G^{-1}(\overline{x})$.

Пример 3.5. По данным случайной выборки найти точечную оценку для параметра λ показательного распределения.

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Решение. $\theta = \lambda$, $m_1 = \widehat{m}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \overline{x}, \quad \frac{1}{\lambda} = \overline{x} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}$.

Пример 3.6. Найти точечные оценки для границ a и b равномерного распределения на отрезке $[a, b]$.

Решение. Записываем равенства теоретических и выборочных начальных моментов двух первых порядков

$$\begin{cases} m_1 = \widehat{m}_1 \\ m_2 = \widehat{m}_2 \end{cases}.$$

$$m_1 = M(\mu) = \frac{a+b}{2},$$

$$m_2 = M(\mu^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{(b^2+ab+a^2)}{3},$$

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x} \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = \overline{x^2} \end{cases}, \qquad b = 2\overline{x} - a, \quad a^2 + 2a\overline{x} - a^2 + (2\overline{x} - a)^2 = 3\overline{x^2},$$

$$a^2 + 2a\overline{x} - a^2 + 4\overline{x}^2 - 4\overline{x}a + a^2 = 3\overline{x^2}, \quad a^2 - 2a\overline{x} + 4\overline{x}^2 - 3\overline{x^2} = 0,$$

$$a_{1,2} = \overline{x} \pm \sqrt{\overline{x}^2 - 4\overline{x}^2 + 3\overline{x^2}} = \overline{x} \pm \sqrt{3}\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \overline{x} \pm \sqrt{3}\sqrt{\widehat{\sigma}^2} = \overline{x} \pm \sqrt{3}\widehat{\sigma},$$

$$b_{1,2} = 2\overline{x} - (\overline{x} \pm \sqrt{3}\widehat{\sigma}) = \overline{x} \mp \sqrt{3}\widehat{\sigma},$$

так как по определению плотности равномерного распределения $a < b$, получаем

$$\widehat{a} = \overline{x} - \sqrt{3}\cdot\widehat{\sigma}; \qquad \widehat{b} = \overline{x} + \sqrt{3}\cdot\widehat{\sigma}.$$

3.3.2. Метод наибольшего правдоподобия

Пусть μ – дискретная случайная величина, заданная законом распределения:

μ	t_1	t_2	...	t_L
P	p_1	p_2	...	t_L

$$\sum_k p_k = 1.$$

Рассмотрим функцию вида $L = L(x_1, x_2, \ldots x_n; \theta) = P(x_1; \theta)P(x_2; \theta)\cdot\ldots\cdot P(x_n; \theta)$, которая называется функцией правдоподобия. Здесь $P(x_i; \theta) = P(\mu = x_i)$.

Функция правдоподобия представляет собой вероятность получения (реализации) выборки. А так как выборка уже имеется, т.е. реализована, то значение этой функции должно быть равно 1. Но в силу случайного характера, как правило, эта функция отлична от 1, но должна быть, по крайней мере, максимальной. Записав необходимое условие существования экстремума (max), получаем уравнение:

$$\frac{dL}{d\theta} = 0, \tag{3.2}$$

которое называется **уравнением правдоподобия.**

Решение этого уравнения – $\widehat{\theta}$ называется **оценкой наибольшего правдоподобия.**

Если закон распределения зависит не от одного, а от r параметров, рассуждая аналогично, получим систему уравнений (необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных).

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1, r}. \tag{3.3}$$

Функция L является произведением n функций, а n , как правило, очень велико. Поэтому левые части уравнений (3.2) и (3.3), как правило, будут вычисляться очень сложно. Поэтому часто рассматривается логарифмическая функция правдоподобия

$$l = \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln P(x_i; \theta)$$

теперь это уже сумма n слагаемых, производная которой вычисляется значительно проще.

В силу монотонности логарифмической функции, точки экстремума функций L и l будут совпадать. Поэтому (3.2) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dl}{d\theta} = 0$; а (3.4) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial l}{\partial \theta_k} = 0$, $k = \overline{1, r}$.

Пример 3.7. По имеющейся случайной выборке $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in N \cup \{0\}$ найти оценку наибольшего правдоподобия для параметра λ случайной величины μ, распределённой по закону Пуассона: $P(\mu = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Решение. Строим функцию правдоподобия:

$$L = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} ... \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{-\sum_i x_i}}{x_1! x_2! ... x_n!} e^{-n\lambda}; \qquad \sum_i x_i = n\bar{x}.$$

Обозначим $\dfrac{1}{x_1! \cdot ... \cdot x_n!} = c$, тогда

$$L = c\,\lambda^{n\bar{x}} e^{-n\lambda}, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c(n\bar{x}\lambda^{n\bar{x}-1} e^{-n\lambda} + \lambda^{n\bar{x}} e^{-n\lambda}(-n)) = ce^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}-1}(n\bar{x} - n\lambda),$$

$$(3.3) \quad \Leftrightarrow \quad n\bar{x} - n\lambda = 0, \text{ отсюда } \widehat{\lambda} = \bar{x}.$$

Если μ - непрерывная случайная величина, то в этом случае функция правдоподобия определяется из равенства:

$$L(x_1, ..., x_n; \theta)\Delta x_1 \ldots \Delta x_n = f(x_1; \theta)\Delta x_1 \ldots f(x_n; \theta)\Delta x_n,$$

в правой части которого вероятность того, что многомерная случайная величина $\vec{x}$ = $(x_1, ..., x_n)$ примет значение из параллелепипеда со сторонами: Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Из этого равенства находим $L = f(x_1; \theta) \ldots f(x_n; \theta)$, т.е. функция правдоподобия пропорциональна вероятности реализации выборки, значит и для непрерывной случайной величины справедливы ранее записанные уравнения (3.2), (3.3).

Пример 3.8. Найти оценки наибольшего правдоподобия m, σ нормального распределения.

Решение. Пусть $\theta_1 = m$, $\theta_2 = \sigma$, $f_\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

Функция правдоподобия имеет вид

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_1-m)^2/2\sigma^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_n-m)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\sum\limits_i (x_i-m)^2/2\sigma^2},$$

$$l = \ln L = \ln e^{-\sum\limits_i (x_i-m)^2/2\sigma^2} - \ln(2\pi)^{n/2} - \ln\sigma^n = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - m)^2 + c - n\ln\sigma,$$

$$\sum_i (x_i - m)^2 = \sum_i x_i^2 - 2m\sum_i x_i + nm^2 = \overline{x^2}n - 2mn\bar{x} + nm^2.$$

Таким образом,

$$l = \frac{n\overline{x^2} - 2mn\bar{x} + nm^2}{2\sigma^2} - n\ln\sigma + c,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial m} = \dfrac{-2n\bar{x} + 2nm}{2\sigma^2} = \dfrac{n\bar{x} - nm}{\sigma^2} = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma} = 2\dfrac{n\overline{x^2} - 2mn\bar{x} + nm^2}{2\sigma^3} - \dfrac{n}{\sigma} = 0 \end{cases}, \quad m = \bar{x}, \quad \frac{n\overline{x^2} - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 - n\sigma^2}{\sigma^3} = 0,$$

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 - \sigma^2 = 0 \quad , \; \theta_2^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \hat{\sigma}^2.$$

Таким образом, $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\sigma}$.

Оценки наибольшего правдоподобия всегда являются состоятельными и эффективными.

3.4. Проверка статистических гипотез

3.4.1. Основные понятия

Любое предположение, основанное на результатах анализа случайной выборки $\vec{x}$ относительно теоретической функции распределения, называется **статистической гипотезой (или гипотезой).**

Например, в схеме Бернулли:

1) вероятность появления события A в отдельном испытании равна 0,4,
2) вероятность появления события A в отдельном испытании $p > 0{,}7$,
3) вероятность появления события A в отдельном испытании $0{,}3 < p < 0{,}4$

или в общем случае;

4) случайная величина μ распределена по нормальному закону с параметрами: $m = 0$, $\sigma = 1$,
5) при нормальном законе распределения $D(\mu) = \sigma^2 \le M^2(\mu)$,
6) случайная величина μ распределена по показательному закону,

7) случайная величина распределена по показательному закону, параметр которого $1 \le \lambda \le 2$.

Основная задача – по результатам случайной выборки определить: справедлива или несправедлива выдвинутая гипотеза.

С любой гипотезой можно рассматривать непересекающуюся гипотезу. Одна из них называется **основной гипотезой** – H_0, вторая – **конкурирующей** или **альтернативной** – H_1.

Это разделение условно. Обычно в качестве основной гипотезы принимается та, которая несёт больше информации о теоретической функции распределения.

Все гипотезы разделяются на простые и сложные.

Гипотеза называется **простой**, если она полностью определяет теоретическую функцию распределения (в примере это гипотезы 1 и 4), все остальные гипотезы называются **сложными.**

Каждая из гипотез выделяет некоторый класс функций распределения.

Обозначим эти множества: $\mathbf{F_0}$ и $\mathbf{F_1}$, тогда:

H_0: $F_\mu(x) = F_0(x)$ – простая гипотеза,

H_0: $F_\mu(x) \subseteq \mathbf{F_0} \neq \{F_0(x)\}$ – сложная гипотеза.

Гипотезы разделяются также на параметрические и непараметрические.

Параметрическими называют гипотезы, сформулированные относительно параметров распределения (в примере это 4 и 7), все остальные – **непараметрические**.

Правило, с помощью которого устанавливается справедливость или несправедливость гипотезы, называется **критерием.**

Если выборку рассматривать как n-мерный вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или точку в n-мерном евклидовом пространстве R_n, то каждый из критериев разбивает это пространство на две части, при попадании выборки в одну из которых гипотеза H_0 принимается, а при попадании в другую, принимается альтернативная гипотеза H_1. Первая область – $W_д$ называется **допустимой,** вторая $W_к$ – **критической.**

$$R_n = W_д \bigcup W_к \quad \text{и} \quad W_д \bigcap W_к = \varnothing.$$

Теперь, если $\vec{x} \in W_д$, то принимается гипотеза H_0, если $\vec{x} \in W_к$, то гипотеза H_0 отвергается, т.е. принимается гипотеза альтернативная H_1.

В силу случайности выборки всегда возможны ошибки двух видов. Рассмотрим все возможные ситуации:

1) Справедлива гипотеза H_0, $\vec{x} \in W_д \Rightarrow$ гипотеза H_0 принимается.

2) Справедлива гипотеза H_0, $\vec{x} \in W_к \Rightarrow$ гипотеза H_0 отвергается, принимается альтернативная гипотеза H_1.

3) Справедлива гипотеза H_1, $\vec{x} \in W_д \Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

4) Справедлива гипотеза H_1, $\vec{x} \in W_к \Rightarrow$ гипотеза H_0 отвергается, принимается альтернативная гипотеза H_1.

1, 4 – нормальные ситуации. В ситуации 1 принимается справедливая гипотеза, в ситуации 4 отвергается несправедливая гипотеза, принимается справедливая гипотеза .

В ситуации 2 отвергается справедливая гипотеза и это называется **ошибкой первого рода.**

В ситуации 3 принимается неверная гипотеза – **ошибка второго рода.**

Вероятность ошибки первого рода – α называется **уровнем значимости критерия**, т.е. по определению

$$\alpha = P_{H_0}(\vec{x} \in W_к).$$

Вероятность ошибки второго рода – β' называется **оперативной характеристикой критерия.** Здесь по определению

$$\beta' = P_{H_1}(\vec{x} \in W_д).$$

В статистике предпочитают иметь дело с **мощностью критерия** – β:

$$\beta = 1 - \beta' = 1 - P_{H_1}(\vec{x} \in W_д) = P_{H_1}(\overline{\vec{x} \in W_д}) = P_{H_1}(\vec{x} \in W_к).$$

Желание любого исследователя получить такой критерий, при котором вероятности ошибок первого и второго рода были минимальны, в идеале – их не было вообще. Но это невозможно, так как уменьшение вероятности ошибки первого рода приводит к расширению допустимой области (сужению $W_к$) и, как следствие, к увеличению вероятности ошибки второго рода, а уменьшение вероятности ошибки второго рода приводит к расширению критической области (сужению $W_д$) и увеличению вероятности ошибки первого рода. В связи с этим, на практике поступают следующим образом: гипотеза проверяется по возможности большим числом критериев и среди них выбирается тот, мощность которого наибольшая. Уровень значимости при α, как правило, выбирается из ряда 0,001; 0,005; 0,01; 0,05; 0,1

Если уровень значимости критерия известен и равен α, то по случайной выборке $\vec{x}$ строится некоторая функция $\rho = \rho(\vec{x})$, характеризующая меру отклонения теоретической функции распределения от эмпирической. При этом допустимая область определяется из условия:

$$P(\rho > c) = \alpha.$$

В случае справедливости гипотезы H_0, данное равенство будет равносильно следующему:

$$\alpha = P(\rho > c) = 1 - F_\rho(c), \text{ или } F_\rho(c) = 1 - \alpha,$$

отсюда $c = F_\rho^{-1}(1-\alpha) = x_{1-\alpha}$, т.е. c – квантиль уровня $(1 - \alpha)$, и значит допустимая область определяется неравенством

$$W_д: \quad \rho(\vec{x}) < c$$

Величина c называется **критическим значением** критерия, будем обозначать ее $\rho_{кр}$.

Для проверки гипотезы по выборке вычисляется наблюдаемое значение критерия $\rho = \rho_{набл}$ и, если $\rho_{набл} < \rho_{кр}$, – принимается гипотеза H_0, если $\rho_{набл} \geq \rho_{кр}$, – принимается гипотеза H_1, соответственно гипотеза H_0 отвергается (рис. 3.1).

Обычно уровень значимости выбирается настолько малым, чтобы событие, вероятность которого равна α, можно было считать практически невозможным.

Если $\rho_{набл} \geq \rho_{кр}$, то это событие происходит (происходит событие, которое считается практически невозможным), значит в этом случае гипотеза H_0 скорее всего несправедлива. В противном случае, когда $\rho_{набл} < \rho_{кр}$, гипотеза H_0 возможно может быть принята.

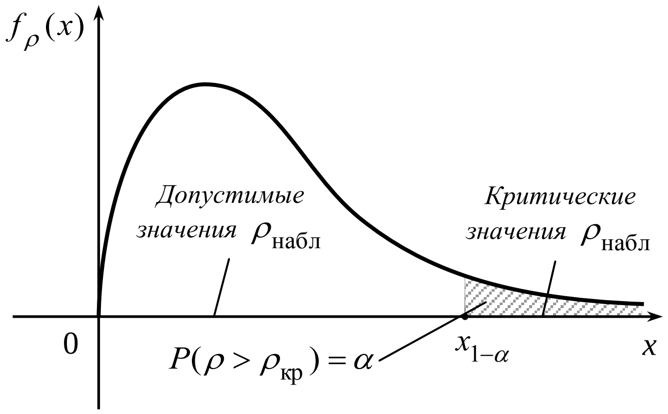


Рис. 3.1

3.4.2. Простые гипотезы

Предположим, что по выборке сформулированы две простые гипотезы:

$$H_0:\ F_\mu(x) = F_0(x),\ \ H_1:\ F_\mu(x) = F_1(x).$$

В этом случае, оказывается, существует наиболее мощный критерий, который называется **критерием отношения правдоподобия,** и имеет следующий вид:

$$\rho = \rho(\vec{x}) = \frac{L_1(x_1, x_2, ..., x_n)}{L_0(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

где в числителе - функция правдоподобия, вычисленная в предположении справедливости гипотезы H_1, а в знаменателе – H_0.

Если справедлива гипотеза H_0, то это отношение меньше единицы, если справедлива гипотеза H_1, это отношение больше единицы. Критическое отношение определяется по уровню значимости.

Теорема 3.3 (Неймана-Пирсона)

Из всех критериев, проверяющих простые гипотезы, критерий отношения правдоподобия является наиболее мощным.

3.4.3. Критерии согласия

Имеется случайная выборка $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Необходимо проверить гипотезу H_0: $F_\mu(x) = F_0(x)$, при альтернативной гипотезе H_1: $F_\mu(x) \neq F_0(x)$.

Здесь основная гипотеза является простой, и, в случае ее справедливости мы получаем полную информацию о распределении количественного признака генеральной совокупности. Альтернативная гипотеза - сложная и в случае ее справедливости не дает вообще никакой информации о генеральной совокупности.

Поэтому критерии, проверяющие гипотезу H_0 при альтернативной гипотезе H_1, называются **критериями согласия**, так как здесь мы отвечаем на вопрос, согласуются ли результаты наблюдений с выдвинутой гипотезой H_0.

Критерий Колмогорова

Здесь критерий строится на основе статистики вида

$$\rho_R = \rho(F_0(x), \widehat{F}_n(x)) = \max_{x_i^*}\left|F_0(x_i^*) - \widehat{F}_n(x_i^*)\right|.$$

Независимо от предполагаемой функции распределения $F_0(x)$ при $n \to \infty$ величина $\rho = \sqrt{n}\rho_R$ стремится к закону распределения Колмогорова $K(x)$, поэтому

$$P(\rho > c) = \alpha,\ 1 - P(\rho < c) = \alpha,\ 1 - K(c) = \alpha,\ K(c) = 1 - \alpha,$$

$c = K^{-1}(1 - \alpha) = x_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $(1 - \alpha)$ для распределения Колмогорова.

Критерий Колмогорова предписывает принять гипотезу H_0, если

$$\rho_{\text{набл}} \le x_{1-\alpha},$$

и отвергнуть ее в противном случае.

Критерий χ^2 (Пирсона)

Все возможные значения случайной величины μ разбиваются на l обычно равных интервалов: Δ_k, $k = \overline{1, l}$, покрывающих всю выборку …

Строится величина

$$\rho_{\chi^2} = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{k=1}^{l} \frac{n\left(n_k/n - p_k\right)^2}{p_k} = n\sum_{k=1}^{l} \frac{(w_k - p_k)^2}{p_k},$$

где $p_k = F_0(a_k) - F_0(a_{k-1})$ – вероятность попадания варианты в k-й интервал, $F_0(x)$ – предполагаемая теоретическая функция распределения.

Независимо от $F_0(x)$ случайная величина имеет χ^2-распределение с $(l - 1)$ степенями свободы. Если $F_0(x)$ зависит от одного или нескольких параметров и эти параметры оцениваются по данным случайной выборки, то число степеней свободы уменьшается на число этих параметров. Поэтому число степеней свободы определяется по формуле $s = l - r - 1$, где r – число параметров распределения, оцененных по выборке.

Критерий ω^2 (Мизеса)

Критерий Мизеса строится на основе статистики

$$\rho_{\omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_0(x) - \widehat{F}_n(x)\right]^2 f_0(x)dx,$$

здесь $f_0(x) = F_0'(x)$. При $n \to \infty$ величина $\rho = \rho_{\omega^2}$ распределена по закону ω^2

$$\rho_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{n} \left[F_0(x_i^*) - \widehat{F}_n(x_i^*)\right]^2.$$

3.5. Доверительные интервалы

По результатам случайной выборки $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда можно построить точечную оценку $\widehat{\theta}$. При точечном оценивании мы не застрахованы от сколь угодно больших ошибок. Требуется определить промежуток или интервал, которому принадлежит истинное значение параметра θ. Как правило, с вероятностью равной единице, можно утверждать лишь, что θ может быть любым из множества возможных значений, поэтому при построении промежутков изменения параметра θ задаются некоторой вероятностью – **доверительной вероятностью**, близкой к единице, и границы интервала (θ', θ'') выбирают из условия:

$$P(\theta' < \theta < \theta'') = \gamma,$$

где γ – доверительная вероятность (уровень доверия), (θ', θ'') – **доверительный интервал** вероятности γ. Доверительная вероятность выбирается так, чтобы событие с вероятностью появления γ можно было считать практически невозможным. В математической статистике обычно используются доверительные вероятности из ряда: 0,9; 0,95; 0,99; 0,995; 0,999. Выбор доверительной вероятности полностью зависит от исследователя, но с учетом физической сути изучаемого явления. Так, например, степень доверия авиапассажира к надежности самолета или парашютиста к надежности парашюта, несомненно, должна быть выше степени доверия покупателя к надежности электрической лампочки или даже утюга.

Границы доверительных интервалов будем определять, опираясь на точечные оценки. По построенной точечной оценке доверительные интервалы можно определять различными способами. Наиболее часто на практике встречаются **симметричные** и **односторонние доверительные** интервалы:

Рассмотрим схему построения симметричных доверительных интервалов, од-

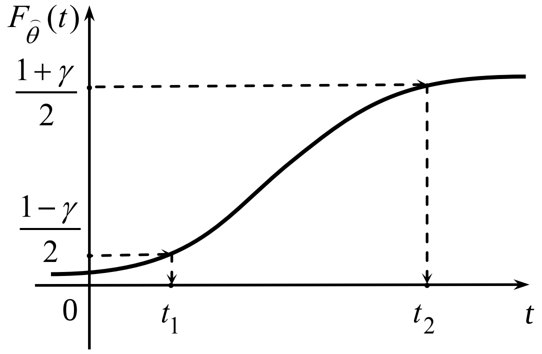


Рис. 3.2

носторонние получаются аналогично.

По данным выборки вычисляется "хорошая" точечная оценка $\hat\theta$, которая является случайной величиной. Для нее можно построить функцию распределения $F_{\hat\theta}(t;\theta)$.

Найдем $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$ из уравнений:

$$F_{\hat\theta}(t_1;\theta) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F_{\hat\theta}(t_2;\theta) = \frac{1+\gamma}{2}. \tag{3.4}$$

Таким образом, t_1 и t_2 – квантили уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$ (рис. 3.2).

При этом

$$P(t_1 < \hat\theta < t_2) = F_{\hat\theta}(t_2;\theta) - F_{\hat\theta}(t_1;\theta) = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{1-\gamma}{2} = \gamma;$$

$$F_{\hat\theta}(t_1;\theta) \overset{def}{=} P(\hat\theta < t_1) = \frac{1-\gamma}{2}, \quad F_{\hat\theta}(t_2;\theta) \overset{def}{=} P(\hat\theta < t_2) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \Rightarrow$$

$$P(\hat\theta > t_2) = 1 - P(\hat\theta < t_2) = 1 - F_{\hat\theta}(t_2;\theta) = 1 - \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

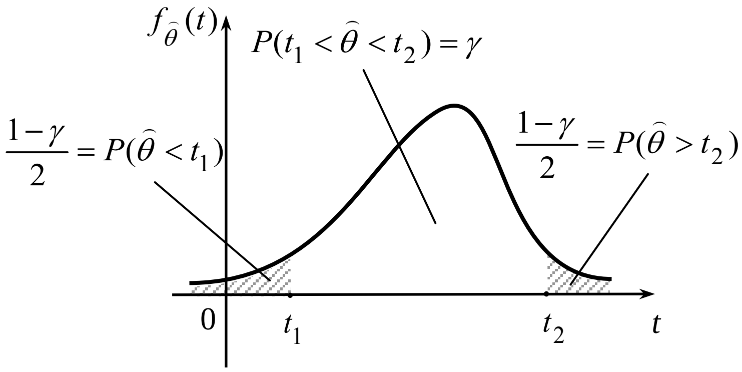


Рис. 3.3

Таким образом, при заданном θ оценка $\hat\theta$ с вероятностью γ заключена в интервале (t_1, t_2), причем вероятности попадания случайной величины $\hat\theta$, как левее, так и правее, одинаковы и равны $\frac{1-\gamma}{2}$ (отсюда происходит название – симметричный интервал, рис. 3.3). Так как $P(t_1 < \hat\theta < t_2) = \gamma \approx 1$, то, в силу принципа практической достоверности события $t_1 < \hat\theta < t_2$, все возможные пары $(\theta, \hat\theta)$ будут принадлежать области D между кривыми $t_1 = t_1(\theta)$ и $t_2 = t_2(\theta)$. Для окончания построения доверительного интервала остается заметить, что, получив по выборке оценку $\hat\theta$, мы вправе сделать вывод, что неизвестный параметр должен лежать внутри интервала (θ', θ''), где θ', θ'' определяются из уравнений:

– для возрастающих функций t_1, t_2

$$t_2(\theta') = \hat\theta; \quad t_1(\theta'') = \hat\theta, \tag{3.5}$$

формально $\theta' = t_2^{-1}(\hat\theta); \quad \theta'' = t_1^{-1}(\hat\theta)$.

– для убывающих функций t_1, t_2

$$t_1(\theta') = \hat\theta; \quad t_2(\theta'') = \hat\theta,$$

формально $\theta' = t_1^{-1}(\hat{\theta})$; $\theta'' = t_2^{-1}(\hat{\theta})$.

Схема построения доверительного интервала, геометрическая интерпретация уравнений (3.5) и их решений приведена на рис. 3.4.

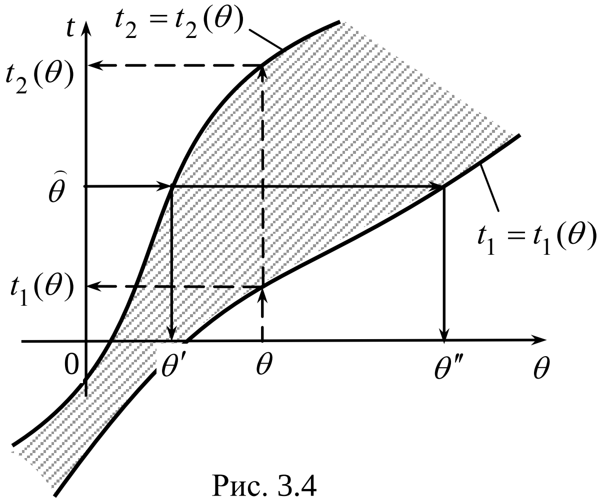


Рис. 3.4

Пример 3.9. Построить доверительный интервал доверительной вероятности γ для среднего $\theta = M(\mu)$ нормального распределения с известной дисперсией σ^2.

Решение. "Хорошая" оценка для параметра θ выборное среднее $\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Известно, что эта оценка распределена по нормальному закону с параметрами: $M(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \sigma^2/n$. Значит $F_{\hat{\theta}}(t,\theta) = F_0\left(\frac{t-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, где $F_0(x)$ – функция стандартного нормального распределения, которая, в свою очередь, выражается через интегральную функцию Лапласа $F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$.

Решим уравнения (3.4):

$$F_{\hat{\theta}}(t_1,\theta) = \frac{1-\gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad F_0\left(\frac{t_1-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{1-\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} = x_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{t_1 = \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где $x_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\frac{1-\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения, т.е. функция $t_1 = t_1(\theta)$ здесь является линейной. Аналогично

$$F_{\hat{\theta}}(t_2,\theta) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad F_0\left(\frac{t_2-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_2-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} = x_{\frac{1+\gamma}{2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{t_2 = \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

т.е. $t_2 = t_2(\theta)$ тоже линейная функция. Теперь из первого уравнения (3.5) находим θ'':

$$\bar{x} = \theta'' + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta'' = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1-\gamma}{2}},$$

а из второго уравнения (3.5) – θ':

$$\bar{x} = \theta' + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta' = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

Для стандартного нормального распределения

$$x_{\frac{1-\gamma}{2}} = -x_{\frac{1+\gamma}{2}} \text{ (рис. 3.5)} \quad \Rightarrow \quad \theta'' = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

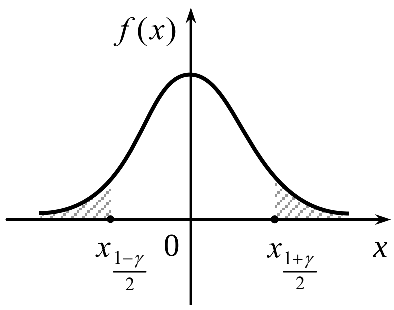


Рис. 3.5

Квантиль $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ определяется из уравнения

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) = \frac{1+\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{\frac{1+\gamma}{2}} = \Phi^{-1}(\gamma/2),$$

где, при заданной доверительной вероятности γ, значение $\Phi^{-1}(\gamma/2)$ находится по таблице интегральной функции Лапласа (приложение 2). Окончательно доверительный интервал имеет вид

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{\frac{1+\gamma}{2}}. \tag{3.6}$$

Пример 3.10. Построить доверительный интервал доверительной вероятности γ для дисперсии $\theta = \sigma^2$ нормального распределения с известным средним $m = M(\mu)$.

Решение. Рассмотрим оценку для дисперсии вида $\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$. Тогда случайная величина $\eta = \frac{n\widehat{\theta}}{\theta}$ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы (см. подразд. 2.14) и значит

$$F_{\widehat{\theta}}(t,\theta) = F_{\chi^2}\left(\frac{nt}{\theta}\right) \;\Rightarrow\; F_{\widehat{\theta}}(t_1,\theta) = \frac{1-\gamma}{2} \;\Leftrightarrow\; F_{\chi^2}\left(\frac{nt_1}{\theta}\right) = \frac{1-\gamma}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{nt_1}{\theta} = x_{\frac{1-\gamma}{2}} \;\Rightarrow\; \underline{t_1 = \frac{\theta}{n} x_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где $x_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\frac{1-\gamma}{2}$ χ^2-распределения с n степенями свободы.

Аналогично

$$F_{\widehat{\theta}}(t_2,\theta) = \frac{1+\gamma}{2} \;\Leftrightarrow\; F_{\chi^2}\left(\frac{nt_2}{\theta}\right) = \frac{1+\gamma}{2} \;\Rightarrow\; \frac{nt_2}{\theta} = x_{\frac{1+\gamma}{2}} \;\Rightarrow\; \underline{t_2 = \frac{\theta}{n} x_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

где $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ χ^2-распределения с n степенями свободы. Теперь из первого уравнения (3.5) находим θ'': $\widehat{\theta} = \frac{\theta''}{n} x_{\frac{1-\gamma}{2}} \;\Rightarrow\; \theta'' = n\widehat{\theta} \big/ x_{\frac{1-\gamma}{2}}$,

а из второго уравнения (3.5) – θ': $\widehat{\theta} = \frac{\theta'}{n} x_{\frac{1+\gamma}{2}} \;\Rightarrow\; \theta' = n\widehat{\theta} \big/ x_{\frac{1+\gamma}{2}}$. Доверительный интервал имеет вид

$$n\widehat{\theta} \big/ x_{\frac{1+\gamma}{2}} < \sigma^2 < n\widehat{\theta} \big/ x_{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

Пример 3.11. Построить доверительный интервал доверительной вероятности γ для параметров нормального распределения $\theta_1 = m$, $\theta_2 = \sigma^2$ (оба параметра неизвестны).

Решение. В качестве оценок неизвестных параметров выбираем $\widehat{\theta}_1 = \bar{x}$, $\widehat{\theta}_2 = S^2$ (исправленная выборочная дисперсия), тогда случайная величина $\tau = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_1 - \theta_1)}{\sqrt{\widehat{\theta}_2}}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы (см. подразд. 2.14), т.е.

$$F_{\widehat{\theta}_1}(t;\theta_1,\theta_2) = F_\tau\left(\frac{t-\theta_1}{\sqrt{\widehat{\theta}_2/n}}\right).$$

Далее доверительный интервал для m строится, как в примере 3.9, и имеет вид

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}} < m < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}},$$

только теперь здесь $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Доверительный интервал для σ^2 строится так же, как в примере 3.10, но с использованием χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы

$$(n-1)S^2 \Big/ x_{\frac{1+\gamma}{2}} < \sigma^2 < (n-1)S^2 \Big/ x_{\frac{1-\gamma}{2}},$$

где $x_{\frac{1-\gamma}{2}}$, $x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы.

3.6. Линейная регрессия

Пусть теперь количественный признак генеральной совокупности – двумерная случайная величина $(\mu,\ \eta)$. Таким образом, результаты наблюдений (выборка) представляется в виде n пар чисел (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, i – номер наблюдения.

Предположим, что между компонентами μ, η существует линейная зависимость, т.е. $\eta = a\mu + b$ (имеется в виду связь между всеми возможными значениями величин μ, η, т.е. для генеральной совокупности).

Наличие случайных отклонений, вызванных воздействием на случайную величину η множества неучтенных факторов и ошибок измерения, приводит к тому, что связь наблюдаемых значений x_i, y_i случайных величин μ, η приобретает вид

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i,$$

где ε_i – случайные ошибки (отклонения, возмущения).

Задача состоит в следующем: по имеющимся данным наблюдений (x_i, y_i) (двумерной выборке) оценить значения параметров a и b, обеспечивающих минимум отклонений наблюдаемых значений от точек прямой $y = ax + b$.

Если бы были известны точные значения ε_i, то параметры a и b можно было рассчитать. Однако значения ε_i в выборке неизвестны и по наблюдениям (x_i, y_i) можно получить лишь точечные оценки $\widehat{a}, \widehat{b}$ этих параметров, которые сами являются случайными величинами, поскольку соответствуют случайной выборке. Оцененное (выборочное) уравнение регрессии будет иметь вид

$$y_i = \widehat{a}x_i + \widehat{b} + e_i,$$

где e_i – наблюдаемые значения ошибок ε_i.

Как и в случае случайных величин, параметры $\widehat{a}, \widehat{b}$ находятся по методу наименьших квадратов (МНК) из условия

$$\delta(a, b) = \sum_i e_i^2 = \sum_i (y_i - Y_i)^2 \quad \to \quad \min,$$

где $Y_i = \widehat{a}x_i + \widehat{b}$ – значение признака вычисленное по выборочному уравнению регрессии. Для того чтобы оценки $\widehat{a}, \widehat{b}$, полученные по МНК, обладали желательными свойствами, делаются следующие естественные предположения о ε_i:

1) величины ε_i являются случайными;

2) $\forall i: \quad M(\varepsilon_i)=0$;

3) дисперсии ε_i постоянны, т.е. $\forall i,\, j: \quad D(\varepsilon_i)=D(\varepsilon_j)=\sigma^2$;

4) значения ε_i независимы между собой, т.е. $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=\begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ \sigma^2, & \text{при } i=j \end{cases}$.

Известно, что, если условия 1 – 4 выполняются, то оценки, полученные с помощью МНК, являются несмещенными, состоятельными и эффективными. Перечисленные свойства не зависят от конкретного вида распределения ε_i, но обычно предполагается, что они имеют нормальное распределение – $N(0, \sigma^2)$.

Найдем оценки параметров a и b по МНК. Запишем необходимое условие существования экстремума функции $\delta(a,b)=\sum\limits_i (y_i - Y_i)^2 = \sum\limits_i (y_i - ax_i - b)^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\delta}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial\delta}{\partial b}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = n\overline{x^2}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = n\overline{xy}$, система преобразуется к виду $\begin{cases} \bar{x}^2 a + \bar{x}b = \overline{xy} \\ \bar{x}a \; + \; b = \bar{y} \end{cases}$, откуда $b = \bar{y} - \bar{x}a$, $\quad \bar{x}^2 a + \bar{x}(\bar{y} - \bar{x}a) = \overline{xy}$, $a(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$,

$a = \dfrac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}, \quad b = \bar{y} - \bar{x}\cdot\dfrac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}$.

В результате выборочное уравнение линейной регрессии y на x будет

$$Y_i = \frac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x} x_i + \bar{y} - \bar{x}\frac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}, \quad Y_i = \bar{y} + \frac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x^2}(x_i - \bar{x})\cdot\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_y} \quad Y_i = \bar{y} + \frac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y}\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}(x_i - \bar{x}).$$

Обозначим $\hat{\rho}_{xy} = \dfrac{\widehat{\operatorname{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y}$ – **выборочный коэффициент корреляции**, тогда окончательно получим

$$Y = \bar{y} + \hat{\rho}_{xy}\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}(x - \bar{x}),$$

где Y – условное выборочное среднее, вычисляемое по выборочному уравнению регрессии.

Данные наблюдений представляются в виде корреляционной таблицы.

y / x	y_1	y_2	. . .	y_m	n_x
x_1	n_{11}	n_{12}	. . .	n_{1m}	n_{x1}
x_2	n_{21}	n_{22}	. . .	n_{2m}	n_{x2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_l	n_{l1}	n_{l2}	. . .	n_{lm}	n_{xl}
n_x	n_{y1}	n_{y2}	. . .	n_{ym}	n

В первом столбце указываются варианты, соответствующие первой компоненте, в первой строке – варианты, соответствующие второй компоненте, в поле таблицы указываются n_{ij} – частоты появления пар (x_i, y_j). Затем таблица дополняется еще одной строкой "n_x" и столбцом "n_y", где указываются n_{xi} – частота появления варианты x_i, n_{yj} – частота появления варианты y_j.

При этом (n – объём выборки):

l, m – число различных вариант x_i, y_j соответственно, $n_{xi} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$ – сумма элементов i-й строки корреляционной таблицы, $n_{yj} = \sum_{i=1}^{l} n_{ij}$ – сумма элементов j-го столбца корреляционной таблицы, $n = \sum_{i,j} n_{ij} = \sum_{i} n_{xi} = \sum_{j} n_{yj}$.

Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

– выборочные средние

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_{xi}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{yj}, \tag{3.7}$$

– выборочные дисперсии

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}(x_i - \bar{x})^2 n_{xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_{xi} - \bar{x}^2, \quad \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})^2 n_{yj} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 n_{yj} - \bar{y}^2, \tag{3.8}$$

– выборочная ковариация

$$\widehat{\mathrm{cov}}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i,j} x_i y_j n_{ij} - \bar{x}\cdot\bar{y}, \tag{3.9}$$

– выборочный коэффициент корреляции

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{\mathrm{cov}}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y}. \tag{3.10}$$

Если данных очень много, т.е. выборка большого объема, то их группируют и представляют в виде двумерного интервального распределения. Размах выборки по первой компоненте разбивается на l промежутков $[a_{i-1}, a_i)$, а по второй – на m промежутков $[b_{j-1}, b_j)$. Тогда интервальное статистическое распределение представляется в виде следующей таблицы.

$x \backslash y$	$[b_0, b_1)$	$[b_1, b_2)$	...	$[b_{m-1}, b_m)$	n_x
$[a_0, a_1)$	n_{11}	n_{12}	...	n_{1m}	n_{x1}
$[a_1, a_2)$	n_{21}	n_{22}	...	n_{2m}	n_{x2}
...	...	...	...	...	...
$[a_{l-1}, a_l)$	n_{l1}	n_{l2}	...	n_{lm}	n_{xl}
n_y	n_{y1}	n_{y2}	...	n_{ym}	n

Теперь в таблице: l, m – число промежутков разбиения по первой и второй компоненте соответственно, n_{ij} – число наблюдений (вариант выборки), попавших в прямоугольник со сторонами $[a_{i-1}, a_i)$; $[b_{j-1}, b_j)$.

Формулы (3.7) – (3.10) для вычисления выборочных характеристик остаются в силе, но теперь: x_i – середины интервалов $[a_{i-1}, a_i)$, y_j – середины интервалов $[b_{j-1}, b_j)$.

Фактические условные средние (выборочные средние второй компоненты, вычисленные в предположении, что первая компонента равна x_i) находятся по формулам

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{1}{n_{xi}} \sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}, \quad i = \overline{1, l}.$$

В том случае, когда варианты выборки являются равноотстоящими, т.е.

$$\forall\, i = \overline{2, l}: \quad x_i - x_{i-1} = h_1 - \text{const}; \qquad \forall\, j = \overline{2, m}: \quad y_j - y_{j-1} = h_2 - \text{const},$$

удобно числовые характеристики вычислять через условные варианты

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, \quad i = \overline{1, l}; \qquad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}, \quad j = \overline{1, m};$$

где u_i, v_j – условные варианты, h_1, h_2 – расстояния между соседними вариантами, c_1, c_2 – ложные нули – варианты с наибольшей частотой.

Нетрудно убедиться в том, что условные варианты принимают только целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при этом справедливы равенства:

$$\bar{x} = h_1 \bar{u} + c_1, \quad \bar{y} = h_2 \bar{v} + c_2, \quad \hat{\sigma}_x = h_1 \hat{\sigma}_u, \quad \hat{\sigma}_y = h_2 \hat{\sigma}_v, \quad \hat{\rho}_{xy} = \hat{\rho}_{uv},$$

где $n_{ui} \equiv n_{xi}$, $n_{vj} \equiv n_{yj}$;

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} u_i n_{ui}, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} v_j n_{vj},$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} u_i^2 n_{ui} - \bar{u}^2, \quad \hat{\sigma}_u = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2}, \qquad \hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} v_j^2 n_{vj} - \bar{v}^2, \quad \hat{\sigma}_v = \sqrt{\hat{\sigma}_v^2},$$

$$\widehat{\text{cov}}_{uv} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} u_i v_j n_{ij} - \bar{u}\,\bar{v}, \quad \hat{\rho}_{uv} = \frac{\widehat{\text{cov}}_{uv}}{\hat{\sigma}_u \hat{\sigma}_v}.$$

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

4.1. Задачи к главе 1

4.1.1. Действия над событиями

Пример 4.1. Что означают события $A \cdot B$ и $A + B$?

Ответ. Событие $A \cdot B$ означает наступление обоих событий *A* и *B*. Событие $A + B$ означает один из трех вариантов:

а) наступление события *A*,

б) наступление события *B*,

в) наступление и события *A*, и события *B*.

Пример 4.2. Пусть события A_1, A_2, A_3 – климатические факторы, снижающие урожайность: A_1 – поздняя весна; A_2 – летняя засуха; A_3 – дождливая осень; $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ – наилучшие климатические условия для созревания урожая. Найти выражения для событий: а) *A* – ни одного фактора, снижающего урожай; б) *B* – только один фактор; в) *C* – только два фактора; г) *D* – три фактора, снижающих урожай; д) *E* – хотя бы один фактор; е) *F* – хотя бы два фактора из трех.

Ответ. а) $A = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; б) $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$, где произведения $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$; $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$; $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$ – попарно несовместные события; в) $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, где произведения $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$; $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$; $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – попарно несовместные события; г) $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; д) $E = B + C + D$; е) $F = C + D$.

4.1.2. Классическое и статистическое определения вероятности

Классическое определение вероятности

Вероятность события *A* принято обозначать символом *P*(*A*) (от слова probabilitas – вероятность).

По классическому определению **вероятностью события *P*(*A*)** называется величина, определяемая по формуле (1.5):

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где *m* – число исходов опыта, благоприятствующих событию *A*, *n* – общее число всех несовместных равновозможных элементарных исходов.

Статистическое определение вероятности

Относительной частотой *W*(*A*) события *A* называется величина, определяемая по формуле

$$W(A) = \frac{M}{N},$$

где *M* – число испытаний, в которых событие произошло, *N* – общее число испытаний.

Установлено, что относительная частота обладает свойством устойчивости, состоящим в том, что в различных опытах, проводимых при неизменных условиях, *W*(*A*) изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа, равного численному значению вероятности *P*(*A*).

Пример 4.3. Лотерейные билеты выпущены на общую сумму *a* руб. Цена одного билета *b* руб. Ценные выигрыши выпадают на *k* билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

Решение. Обозначим событие A – выигрыш по лотерейному билету. Всего билетов $n = \frac{a}{b}$.

Число билетов, благоприятствующих наступлению события A, $m = k$. Искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{bk}{a}.$$

Пример 4.4. Монета подброшена пять раз. Герб выпал два раза. Какова вероятность и относительная частота выпадения герба?

Решение. Обозначим событие A – выпадение герба. Вероятность:

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

так как при подбрасывании монеты выпадению герба из двух равновозможных исходов $n = 2$ благоприятствует один $m = 1$.

Относительная частота выпадения герба равна:

$$W(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

так как событие наступило два раза $M = 2$ в пяти испытаниях $N = 5$.

Примечание. При увеличении числа подбрасываний монеты относительная частота $W(A)$ будет приближаться к численному значению $P(A)$.

4.1.3. Элементы комбинаторики в теории вероятностей

Комбинаторикой называется раздел математики, исследующий множества и правила составления комбинаций из элементов этих множеств. В зависимости от правил составления можно выделить три основных типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания.

n – **факториалом** называется произведение первых n натуральных чисел. Обозначается:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Перестановками называются комбинации, состоящие из n элементов, которые отличаются друг от друга порядком следования элементов.

Число перестановок обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!.$$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой комбинации, отличающиеся друг от друга или самими элементами, или порядком следования элементов в комбинации.

Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой комбинации, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 4.5. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$.

Решение. $\frac{6!-4!}{3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!-4!}{3!}=\frac{4!\cdot(6\cdot 5-1)}{3!}=\frac{4\cdot 3!\cdot(30-1)}{3!}=4\cdot 29=116$.

Пример 4.6. Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$.

Решение. $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n(n-1)$.

Пример 4.7. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, чтобы ни одна из них не повторилась?

Решение. Так как двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или порядком их следования, то искомое количество двузначных чисел равно числу размещений A_n^m из пяти цифр n = 5 по две m = 2 в каждой комбинации:

$$A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!}=5\cdot 4=20.$$

Итак, можно составить 20 различных двузначных чисел из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, так, чтобы они не повторялись в числах.

Пример 4.8. Сколькими способами можно заполнить билет лотереи "Спортлото 5 из 36" ?

Решение. Так как варианты заполнения должны отличаться хотя бы одним числом, то искомое количество способов заполнения равно числу сочетаний из n = 36 чисел по m = 5 чисел в каждой комбинации (здесь порядок следования элементов, очевидно, не учитывается).

$$C_{36}^5=\frac{36!}{5!\cdot(36-5)!}=\frac{36!}{5!\cdot 31!}=\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31!}{5!\cdot 31!}=\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=376992.$$

4.1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример 4.9. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решение. Обозначим события: A – из ящика изъяты 3 неокрашенные детали, $\overline{A}$ – из ящика изъяты 3 детали, из которых хотя бы одна окрашена (противоположно событию A).

Найдем $P(A)$. Общее число исходов n равно числу комбинаций по 3 детали, выбираемых из 10 деталей. Число таких комбинаций характеризуется числом сочетаний C_{10}^3, т.е. в классической формуле вероятности $n=C_{10}^3$.

Число исходов m, благоприятствующих наступлению события A, равно числу комбинаций по 3 детали, выбираемых из 6 неокрашенных. Число таких комбинаций характеризуется числом сочетаний C_6^3, т.е. $m=C_6^3$.

Вероятность $P(A)$ находится по формуле $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{6!\cdot 3!\cdot 7!}{3!\cdot 3!\cdot 10!}=\frac{1}{6}$.

Искомая вероятность: $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Пример 4.10. В партии из 80 изделий – 6 изделий бракованных. Наугад проверяются 40 изделий. Определить вероятность того, что партия будет принята, если допускается не более двух бракованных изделий на 40 проверенных.

Решение. Обозначим события, характеризующие результаты проверки: *A* – среди 40 проверенных изделий нет ни одного бракованного, *B* – на 40 проверенных изделий приходится одно бракованное, *C* – на 40 проверенных изделий приходится два бракованных. События *A, B, C* – несовместны, так как проверка осуществляется только один раз, результатом которой, в соответствии с исходными условиями, могут быть события *A* или *B*, или *C*, отличающиеся друг от друга количеством выявленных бракованных деталей.

Искомое событие можно охарактеризовать формулой $A+B+C$. Поэтому по теореме сложения вероятностей искомая вероятность:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

Найдем $P(A)$. Общее число исходов *n* равно числу комбинаций по 40 изделий, выбираемых из партии в 80 изделий. Число таких комбинаций характеризуется числом сочетаний $n=C_{80}^{40}$.

Число исходов *m*, благоприятствующих наступлению события *A*, равно числу комбинаций, каждая из которых состоит из 40 изделий, выбираемых среди 74 изделий (80 изделий минус 6 бракованных изделий). Используя число сочетаний C_{74}^{40}, получаем $m=C_{74}^{40}$. Следовательно, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_{74}^{40}}{C_{80}^{40}}$.

По аналогичной схеме: $P(B)=\dfrac{C_{74}^{39}\cdot C_6^1}{C_{80}^{40}}$,

где C_{74}^{39}, C_6^1 – число исходов, благоприятствующих наступлению события *B*, характеризующего результат проверки: 39 качественных изделий плюс 1 бракованное изделие. Причем, C_{74}^{39} – число сочетаний по 39 изделий, выбираемых из 74 качественных изделий; C_6^1 – число сочетаний, состоящих из 1 изделия, выбираемого из 6 бракованных.

Аналогично, $P(C)=\dfrac{C_{74}^{38}\cdot C_6^2}{C_{80}^{40}}$.

В результате:

$$P(A+B+C)=\frac{C_{74}^{40}}{C_{80}^{40}}+\frac{C_{74}^{39}\cdot C_6^1}{C_{80}^{40}}+\frac{C_{74}^{38}\cdot C_6^2}{C_{80}^{40}}=\frac{40!\cdot 40!\cdot 74!}{80!\cdot 38!\cdot 74!}\cdot\left(\frac{1}{40\cdot 39}+\frac{6}{39\cdot 35}+\frac{15}{36\cdot 35}\right)=0{,}337.$$

Пример 4.11. 30 учащихся спортивной школы занимаются одним или несколькими видами спорта. Из них 12 человек занимаются баскетболом, 15 волейболом, причем 5 – и волейболом и баскетболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наугад выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом ?

Решение. Обозначим события, характеризующие вид спорта, которым занимается выбранный наугад спортсмен: *A* – занимается баскетболом, *B* – занимается волейболом. Общее число спортсменов *n* = 30. Число исходов, благоприятствующих событию *A*: $m_A=12$; событию *B*: $m_B=15$ спортсменов.

Соответственно,

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5},\ \ P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$$

Группу спортсменов, занимающихся одновременно волейболом и баскетболом m_{AB} = 5, можно охарактеризовать событием $A\cdot B$, вероятность которого равна:

$$P(A\cdot B)=\frac{m_{AB}}{n}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Искомая вероятность:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{11}{15}.$$

Пример 4.12. В экзаменационный билет включены два теоретических вопроса и одна задача. Составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что студент, способный ответить на 50 теоретических вопросов и решить 22 задачи, ответит по наугад выбранному билету в полном объеме.

Решение. Обозначим события: *A* – студент ответит на два теоретических вопроса, *B* – решит задачу. Вычислим вероятности этих событий. Число всех возможных комбинаций из 56 теоретических вопросов по два составляет: $n=C_{56}^2$.

Так как студент готов ответить только на 50 вопросов, то число исходов, благоприятствующих событию *A*, есть: $m=C_{50}^2$.

Вероятность события *A*:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{50}^2}{C_{56}^2}=\frac{50!\cdot 2!\cdot 54!}{2!\cdot 48!\cdot 56!}=\frac{245}{308}=\frac{35}{44}.$$

Вероятность события *B* определяется тем, что студент способен решить 22 задачи из 28:

$$P(B)=\frac{22}{28}=\frac{11}{14}.$$

Искомое событие характеризуется произведением событий $A\cdot B$. Так как *A* и *B* – независимые события, то требуемая вероятность находится по формуле

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{245}{308}\cdot\frac{11}{14}=0{,}625.$$

Пример 4.13. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0.8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия будут высшего сорта.

Решение. Обозначим события: A_i – выбор изделия высшего сорта, где $i=1,2,3$ – номер проверенного изделия. $\overline{A}_i$ – выбор изделия не высшего сорта (событие противоположное событию A_i). Из условия задачи $P(A_i)=0{,}8$ – вероятность события A_i, т.е. $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0{,}8$. Так как A_i и $\overline{A}_i$ – противоположные события, то:

$$P(A_i)+P(\overline{A}_i)=1.$$

Отсюда: $P(\overline{A}_i)=1-P(A_i)=1-0{,}8=0{,}2$, т.е. $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=P(\overline{A}_3)=0{,}2$.

Искомое событие является результатом совместного наступления двух событий A_i и одного $\overline{A}_i$. При этом возможны 3 варианта чередования A_i и $\overline{A}_i$ в искомом событии: $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3, A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3, \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Так как составленные варианты являются несовместными событиями, то искомое событие можно представить как их сумму: $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, результатом которой будет наступление только одного из слагаемых. Вероятность искомого события:

$$P(A_1 A_2 \overline{A}3 + A_1 \overline{A}2 A_3 + \overline{A}1 A_2 A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A}3) + P(A_1 \overline{A}2 A_3) + P(\overline{A}1 A_2 A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}2) \cdot P(A_3) + P(\overline{A}1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 3(P(A_i))^2 \cdot P(\overline{A}i) = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384.$$

Пример 4.14. На игральной кости грани 1, 2, 3 окрашены в красный цвет, а грани 4, 5, 6 – в черный. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на ней четное число?

Решение. Обозначим события: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ – выпадение, соответственно, 1, 2, 3, 4, 5, 6 граней кости, *B* – выпадение черной грани. События $A_1, A_2, ..., A_6$ образуют полную группу несовместных событий. Событие *B* можно представить как сумму: $B = A_4 + A_5 + A_6$. Вероятность события *B*:

$$P(B) = P(A_4 + A_5 + A_6) = P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

где $P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$ – вероятность одного из шести равновозможных событий, составляющих полную группу событий, сумма вероятностей которых равна 1.

Искомое событие можно представить как сумму двух слагаемых, каждое из которых представляет совместное наступление событий *B* и A_4, *B* и A_6: $B \cdot A_4 + B \cdot A_6$.

Тогда вероятность искомого события можно представить в виде:

$$P(B \cdot A_4 + B \cdot A_6) = P(B \cdot A_4) + P(B \cdot A_6) = P(B)P_B(A_4) + P(B)P_B(A_6) = P(B)(P_B(A_4) + P_B(A_6)).$$

Найдем условные вероятности $P_B(A_4), P_B(A_6)$ на основе анализа связей между событиями. Событие *B* является суммой равновозможных событий A_4, A_5, A_6 (см. начало решения). При наступлении события *B* условные вероятности наступления событий A_4, A_5, A_6 одинаковы: $P_B(A_4) = P_B(A_5) = P_B(A_6)$.

Так как сумма этих условных вероятностей равна 1: $P_B(A_4) + P_B(A_5) + P_B(A_6) = 1$, то

$$P_B(A_4) = P_B(A_5) = P_B(A_6) = \frac{1}{3}.$$

Вероятность искомого события:

$$P(B \cdot A_4 + B \cdot A_6) = P(B) \cdot (P_B(A_4) + P(B) \cdot P_B(A_6)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.1.5. Формула полной вероятности и формулы Байеса

Пример. 4.15. Имеются две партии обуви по 12 и 10 пар, в каждой из которых одна пара бракованная. Из первой партии перекладывают во вторую одну пару обуви. Затем из второй партии наудачу извлекают пару обуви. Определить вероятность извлечения бракованной пары обуви.

Решение. Обозначим события: *A* – из второй партии обуви извлечена бракованная пара. Гипотезы: B_1 – из первой партии во вторую переложена качественная пара обуви, B_2 – из первой партии во вторую переложена бракованная пара обуви.

Найдем вероятности гипотез B_1 и B_2:

$$P(B_1)=\frac{11}{12},\ \ P(B_2)=\frac{1}{12}.$$

Вычислим условные вероятности $P_{B_1}(A)$ и $P_{B_2}(A)$:

$$P_{B_1}(A)=\frac{1}{11},\ \ P_{B_2}(A)=\frac{2}{11}.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{13}{132}\approx 0{,}098.$$

Пример 4.16. Имеется 3 урны: в первой – 3 белых и 7 черных шаров; во второй – 6 белых и 4 черных; в третьей – 8 черных (белых нет). Некто выбирает наугад одну урну и вынимает из нее шар. Этот шар оказался черным. Найти вероятность того, что он вынут из третьей урны.

Решение. Обозначим через A событие – из наугад выбранной урны извлечен черный шар. Гипотезы: B_1 – выбрана первая урна, B_2 – выбрана вторая урна, B_3 – выбрана третья урна.

Найдем вероятности гипотез B_1, B_2 и B_3:

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}.$$

Вычислим условные вероятности:

$$P_{B_1}(A)=\frac{7}{10},\ \ \ P_{B_2}(A)=\frac{4}{10},\ \ \ P_{B_3}(A)=1.$$

По условию задачи требуется найти условную вероятность $P_A(B_3)$. По формуле Байеса находим

$$P_A(B_3)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{10}{21}.$$

4.1.6. Формула Бернулли

Пример 4.17. Вероятность хотя бы одного наступления события A в четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если в каждом опыте эта вероятность одинакова.

Решение. Обозначим q – вероятность события противоположного к A в каждом опыте, n = 4 – число опытов, B – событие A произошло хотя бы один раз, $P(B)=0{,}59$ – из условия задачи. Тогда по известной формуле: $P(B)=1-q^n$ можем составить уравнение: $0{,}59=1-q^4$.

Найдем из него q: $q=\sqrt[4]{0{,}41}=0{,}8$.

Искомая вероятность: $P(A)=p=1-q=1-0{,}8=0{,}2$

Пример 4.18. Известно, что 20 % большой партии обуви, поступившей в магазин, составляет обувь 39-го размера. Найти наивероятнейшее число пар обуви 39-го размера среди пяти упаковок, отобранных наугад из этой партии, и вычислить соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Введем обозначения: событие A – в отобранной упаковке находится пара обуви 39-го размера, $P(A)=p$ – вероятность наступления события A. Из условия задачи находим p:

$$p=\frac{20\%}{100\%}=0{,}2,$$

где $q=1-p=0{,}8$ – вероятность противоположного события, $n=5$ – число отобранных упаковок.

Вычислим наивероятнейшее число m_0 наступления события A. Для этого найдем m:

$$m=(n+1)\cdot p=(5+1)\cdot 0{,}2=1{,}2$$

В соответствии со схемой определения m_0 (см. 1.4.3) принимаем m_0 = 1.

По формуле Бернулли найдем вероятность события A, соответствующую m_0.

$$P_5(1)=C_5^1\cdot p\cdot q^4=5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4=0{,}41.$$

4.1.7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Пример 4.19. При массовой штамповке пуговиц вероятность их деформации равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых пуговиц 50 будут бракованными?

Решение. Обозначим: событие A – брак при штамповке пуговицы; $p=0{,}1$ – вероятность события A при изготовлении пуговицы; $n=400$ – общее число пуговиц; $k=50$ – число бракованных пуговиц.

Применяя формулу Бернулли, можем записать:

$$P_{400}(50)=C_{400}^{50}p^{50}q^{350},$$

где $q=1-p=1-0{,}1=0{,}9$ – вероятность противоположного события.

Вычисление точного значения $P_{400}(50)$ по полученной формуле вызывает технологические сложности, так как требует использования инженерного калькулятора.

Решим поставленную задачу приближенным способом с помощью локальной теоремы Лапласа (см. формулу (1.16)):

$$P_{400}(50)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}=\dfrac{5}{3}$.

Тогда

$$P_{400}(50)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\cdot\varphi(5/3)=\frac{1}{6}\cdot 0{,}0989\approx 0{,}0165,$$

где $\varphi(5/3)=0{,}0989$ (приложение 1).

Пример 4.20. Вероятность появления события A в одном испытании равна p = 0,7. Найти вероятность того, что в 100 независимых испытаниях событие A произойдет: от 60 до 90 раз.

Решение. Решим поставленную задачу приближенным способом с помощью интегральной теоремы Лапласа (см. формулу (1.17)):

$$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Находим:

$$x_1 = \frac{60-70}{\sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -\frac{10}{10\sqrt{0{,}21}} \approx -2{,}18, \quad x_2 = \frac{90-70}{\sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{20}{10\sqrt{0{,}21}} \approx 4{,}36.$$

Таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ для положительных x приведена в приложении 2. Причем функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для всех значений $x > 4$ принимают $\Phi(x) = 0{,}5$. В нашем случае:

$$\Phi(-2{,}18) = -0{,}4854, \quad \Phi(4{,}36) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(60 \le m \le 90) = 0{,}5 + 0{,}4854 = 0{,}9854.$$

4.2. Задачи к главе 2

4.2.1. Распределение случайных величин

Пример 4.21. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, для проверки качества выбраны случайным образом 5 изделий. Построить закон распределения и функцию распределения случайной величины μ, равной числу дефектных изделий в выборке.

Решение. Случайная величина μ принимает значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5.$$

Вероятность $P(\mu = x_i)$ того, что среди пяти отобранных изделий окажется ровно x_i $(x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ дефектных, вычисляется по формуле

$$P(\mu = x_i) = \frac{C_{10}^{x_i} \cdot C_{90}^{5-x_i}}{C_{100}^{5}}.$$

В результате, по данной формуле с точностью до 0,001 получаем:

$$p_1 = P(\mu = 0) = 0{,}584;\ p_2 = P(\mu = 1) = 0{,}339;\ p_3 = P(\mu = 2) = 0{,}070;$$

$$p_4 = P(\mu = 3) = 0{,}006;\ p_5 = P(\mu = 4) = 0{,}001;\ p_6 = P(\mu = 5) = 0.$$

Следует заметить, что равенство $P(\mu = x_6) = 0$ не означает невозможности события $x_6 = 5$. Это равенство указывает только на то, что событие $x_6 = 5$ является практически невозможным, т.е. маловероятным.

Используя для проверки равенство $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 0{,}584 + 0{,}339 + 0{,}070 + 0{,}006 + 0{,}001 + 0 = 1,$$

убеждаемся, что расчеты произведены правильно.

По полученным данным строим закон распределения

μ	0	1	2	3	4	5
p_i	0,584	0,339	0,070	0,006	0,001	0

Найдем значения функции распределения $F(x)$ для значений x_i:

$F(x_1) = F(0) = p_1 = 0{,}584$;

$F(x_2) = F(1) = p_1 + p_2 = 0{,}584 + 0{,}339 = 0{,}923$;

$F(x_3) = F(2) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}923 + 0{,}070 = 0{,}993$;

$F(x_4) = F(3) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}993 + 0{,}006 = 0{,}999$;

$F(x_5) = F(4) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}999 + 0{,}001 = 1$;

$F(x_6) = F(5) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 + 0 = 1$;

График функции распределения $F(x)$ имеет вид (рис. 4.1):

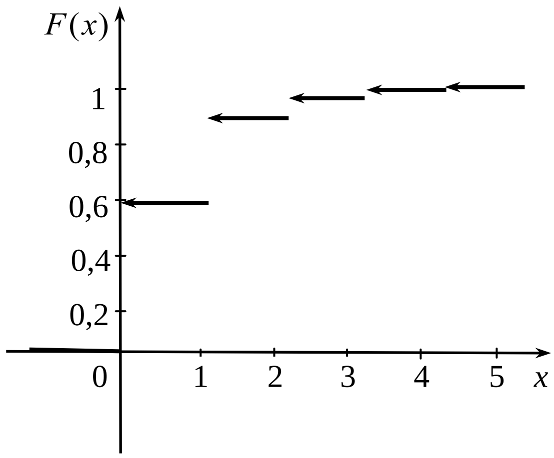


Рис. 4.1

Пример 4.22. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины задается равенством:

$f(x) = cx^2 e^{-kx}$, где $k > 0,\ 0 \le x < \infty$.

Найти: а) коэффициент c; б) функцию распределения случайной величины $F(x)$; в) вычислить вероятность попадания случайной величины μ в интервал $(0; 1/k)$.

Решение. а) Коэффициент c определяется из следующего свойства плотности распределения вероятностей $f(x)$ (условие нормировки):

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Для нашего случая $a = 0,\ b = \infty,\ f(x) = cx^2 e^{-kx}$, следовательно:

$$\int_0^\infty cx^2 e^{-kx} dx = 1, \text{ откуда } c = \frac{1}{\int_0^\infty x^2 e^{-kx} dx}.$$

Интегрируя знаменатель по частям два раза, получаем:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-kx} dx = \frac{2}{k^3}.$$

Следовательно, $c = \dfrac{k^3}{2}$ и плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}.$$

б) Функция распределения $F(x)$ случайной величины μ на основании свойств $f(x)$ определяется равенством:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Для заданных условий:

$$F(x)=\int_0^x \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx = 1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx},$$

где $F(x)=\int_0^x \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}\cdot dx$ вычисляется путем двукратного интегрирования по частям;

в) Вероятность $P(0<\mu<1/k)$ попадания случайной величины в заданный интервал $(0;1/k)$ определяется на основании 3-го свойства $f(x)$:

$$P(\alpha<\mu<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx, \text{ где } \alpha=0,\ \beta=\frac{1}{k}$$

или при известной $F(x)$:

$$P(\alpha<\mu<\beta)=F(\beta)-F(\alpha), \text{ т.е. } P(0<\mu<1/k)=F(1/k)-F(0).$$

Используя найденную функцию распределения, получаем

$$F(1/k)=1-\frac{5}{2e}, F(0)=0 \text{ и } P(0<\mu<1/k)=1-\frac{5}{2e}\approx 0{,}086.$$

4.2.2. Числовые характеристики случайных величин

Пример. 4.23. Из партии в 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины μ, равной числу нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Случайная величина μ принимает значения:

$$x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3.$$

Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно x_i нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i=P(\mu=x_i)=\frac{C_6^{x_i}C_{19}^{3-x_i}}{C_{25}^3}, \text{ где } i=1,2,3,4,$$

с помощью которой находим: $p_1=0{,}41; p_2=0{,}43; p_3=0{,}11; p_4=0{,}05$.

Закон распределения μ:

μ	0	1	2	3
p_i	0,41	0,43	0,11	0,05

Математическое ожидание:

$$M(\mu)=\sum_{i=1}^4 x_ip_i = 0\cdot 0{,}41+1\cdot 0{,}43+2\cdot 0{,}11+3\cdot 0{,}05=0{,}8.$$

Составим закон распределения μ^2:

μ^2	0	1	4	9
p_i	0,41	0,43	0,11	0,05

Тогда

$$M(\mu^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i = 0\cdot 0{,}41 + 1\cdot 0{,}43 + 2\cdot 0{,}11 + 3\cdot 0{,}05 = 1{,}32.$$

Дисперсия $D(\mu)$:

$$D(\mu)=M(\mu^2)-[M(\mu)]^2 = 1{,}32-0{,}8^2 = 0{,}68.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(\mu)=\sqrt{D(\mu)}=\sqrt{0{,}68}\approx 0{,}82.$$

4.2.3. Нормальное распределение

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины μ от своего математического ожидания меньше любого положительного числа ε равна:

$$P(|\mu-m|<\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon/\sigma), \qquad (*)$$

где $\Phi(\varepsilon/\sigma)$ значение интегральной функции Лапласа.

При $m=0$ имеем:

$$P(|\mu|<\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon/\sigma).$$

Вероятность отклонения относительной частоты w от постоянной вероятности p появления некоторого события в n независимых испытаниях:

$$P(|w-p|<\varepsilon)=2\Phi(x),$$

где $x=\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, q – вероятность противоположного события, $w=\dfrac{m}{n}$ – относительная частота.

Правило трех сигм. Если случайная величина μ распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения.

Обозначив $\varepsilon=3\sigma$ из уравнения (*) получаем выражение:

$$P(|\mu-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Лишь в 0,27 % случаев абсолютная величина отклонения может превысить 3σ. Значения $f(x)$, отличные от нуля, практически расположены на интервале $(m-3\sigma, m+3\sigma)$.

Пример 4.24. Навигационный прибор GPS Traiblazer с помощь спутника связи измеряет координаты местоположения объекта на местности с точностью до минус 1м. Случайные погрешности измерения подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=2$ м. Найти: а) вероятность измерения координаты с погрешностью не превосходящей ± 3 м; б) вероятность того, что измеренная координата не превысит истинной.

Решение. Введем обозначения: μ – суммарная погрешность измерения координаты; $m=-1$ м – математическое ожидание μ (систематическая погрешность прибора). Плотность распределения вероятностей будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}}.$$

а) Согласно общей формуле имеем:

$$P(|\mu|<3)=P(-3<\mu<3)=\Phi\left(\frac{3+1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-3+1}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1).$$

Так как $\Phi(-1)=-\Phi(1)$, то $P(|\mu|<3)=\Phi(2)+\Phi(1)$

Используя приложение 2, находим:

$$\Phi(2)=0{,}4773;\ \Phi(1)=0{,}3414.$$

Окончательно:

$$P(|\mu|<3)=0{,}8187.$$

б) Вероятность того, что измеренная координата не превысит истинной:

$$P(-\infty<\mu<0)=\Phi(0{,}5)+\Phi(\infty)=0{,}6915,$$

где $\Phi(0{,}5)=0{,}1915$, а $\Phi(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=0{,}5$.

4.2.4. Многомерные случайные величины

Пример 4.25. Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ,η).

Требуется: 1) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; 2) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; 3) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–1	1	3
1	0,18	0,10	0,02
2	0,10	0,36	0,06
3	0,02	0,04	0,12

Решение. Дополним таблицу столбцом p_μ и строкой p_η и получим законы распределения случайных величин. Первый и последний столбцы – закон распределения случайной величины μ, первая и последняя строки – закон распределения случайной величины η**.**

μ \ η	–1	1	3	p_μ
1	0,18	0,10	0,02	0,30
2	0,10	0,36	0,06	0,52
3	0,02	0,04	0,12	0,18
p_η	0,3	0,5	0,2	1

Находим основные числовые характеристики:

$M(\mu)=1\cdot0{,}3+2\cdot0{,}52+3\cdot0{,}18=1{,}88;\quad M(\eta)=-1\cdot0{,}3+1\cdot0{,}5+3\cdot0{,}2=0{,}8;$

$$M(\mu^2)=1^2\cdot0{,}3+2^2\cdot0{,}52+3^2\cdot0{,}18=4{,}0;\quad D(\mu)=4{,}0-(1{,}88)^2=0{,}4656;$$

$$M(\eta^2)=(-1)^2\cdot0{,}3+1^2\cdot0{,}5+3^2\cdot0{,}2=2{,}6;\quad D(\mu)=2{,}6-(0{,}8)^2=1{,}96;$$

$$\sigma_\mu=\sqrt{0{,}4656}=0{,}6832;\quad \sigma_\eta=\sqrt{1{,}96}=1{,}4;$$

$$M(\mu\eta) = (-1)\cdot 1\cdot 0{,}18 + (-1)\cdot 2\cdot 0{,}10 + (-1)\cdot 3\cdot 0{,}02 + 1\cdot 1\cdot 0{,}10 + 1\cdot 2\cdot 0{,}36 + 1\cdot 3\cdot 0{,}04 + $$
$$+ 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 3\cdot 2\cdot 0{,}06 + 3\cdot 3\cdot 0{,}12 = 2{,}0; \quad \mathrm{cov}(\mu,\eta) = 2{,}0 - 1{,}88\cdot 0{,}8 = 0{,}496.$$

Находим коэффициент корреляции

$$\rho(\mu,\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\mu,\eta)}{\sigma_\mu\sigma_\eta} = \frac{0{,}496}{0{,}6832\cdot 1{,}4} = 0{,}52.$$

Небольшая величина коэффициента корреляции говорит о том, что связь между случайными величинами скорее слабая, чем тесная.

Составим условный закон распределения (см. подразд. 2.11):

$\mu \backslash \eta$	–1	1	3	p_μ
1	0,6	0,20	0,1	0,30
2	0,33	0,72	0,3	0,52
3	0,07	0,08	0,6	0,18
p_η	0,3	0,5	0,2	1

Находим условные математические ожидания:

$$M(\mu|\eta=-1) = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}33 + 3\cdot 0{,}07 = 1{,}47; M(\mu|\eta=1) = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}72 + 3\cdot 0{,}08 = 1{,}88;$$
$$M(\mu|\eta=3) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}6 = 2{,}5.$$

Запишем уравнение линейной регрессии (см. формулу (2.25))

$$\nu = M(\mu) + \rho(\mu,\eta)\frac{\sigma_\mu}{\sigma_\eta}(\eta - M(\eta)),$$

где $\nu = M(\mu|\eta)$. Подставляя в это уравнение найденные числовые характеристики, получаем

$$\nu = 1{,}88 + 0{,}52\frac{0{,}6832}{1{,}4}(\eta - 0{,}8) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \nu = 1{,}68 + 0{,}25\eta.$$

График полученной прямой строим по двум точкам. Если $\eta = -1$, то $\nu = 1{,}43$, если $\eta = 3$, то $\nu = 2{,}43$ (рис. 4.2).

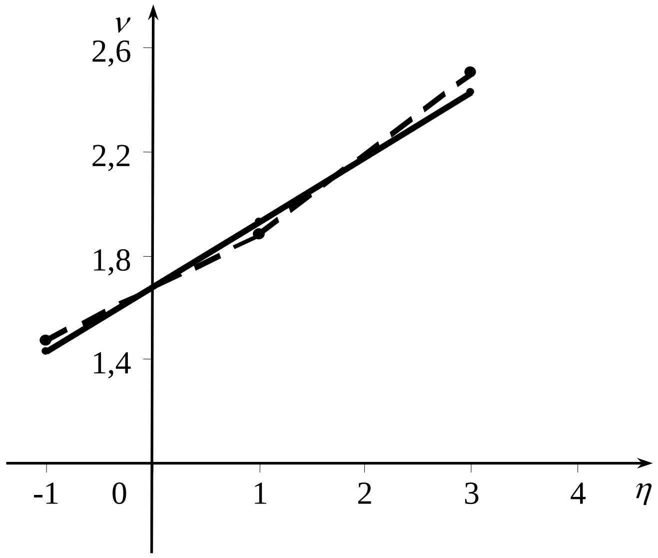


Рис.

4.2.5. Закон больших чисел

Пример 4.26. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что в 10000 испытаниях отклонение относительной частоты события от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

Решение. Введем обозначения: n = 10000; p = 0,3; $q = 1 - p = 0{,}7$; $\varepsilon = 0{,}01$. Используя неравенство Чебышева

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

можем записать:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}3\right| < 0{,}01\right) = 1 - \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{10000 \cdot 0{,}0001} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79 \ .$$

4.3. Задачи к главе 3

Пример 4.27. В сборочном цехе завода было произведено выборочное обследование зарплаты рабочих и получены следующие результаты (в тыс. р.):

13,6	15,5	16,0	16,9	17,5	17,5	18,0	18,8	18,9	19,2	19,5	20,0	20,2
20,5	20,5	20,5	20,8	21,2	21,5	22,0	22,5	23,4	24,2	24,5	26,0	

Требуется: 1) найти выборочную среднюю; 2) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; 3) построить полигон и гистограмму частот; 4) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности - имеет нормальное распределение; 5) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}95$; $\sigma = 3{,}1$; $h = 2$; $x_0 = 13$.

Решение. Объем выборки $n = 25$. Выборочная средняя вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}\sum_k x_k^* n_k \ ,$$

где x_i – элемент выборки; n_j – эмпирические частоты; x_j^* – середина j-го интервала.

Сначала составим интервальное распределение выборки с шагом $h = 2$, взяв за начало первого интервала $x_0 = 13$. Границы интервалов разбиения определяются по формулам:

$$a_0 = x_0, \quad a_k = a_{k-1} + h, \quad k = \overline{1, 7};$$

$$a_0 = 13, \quad a_1 = 15, \quad a_2 = 17, \quad a_3 = 19, \quad a_4 = 21, \quad a_5 = 23, \quad a_6 = 25, \quad a_7 = 27.$$

Интервальное статистическое распределение

x	[13; 15)	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)	[21; 23)	[23; 25)	[25; 27)
n_k	1	3	5	8	4	3	1

Теперь посчитаем выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{(14\cdot 1 + 16\cdot 3 + 18\cdot 5 + 20\cdot 8 + 22\cdot 4 + 24\cdot 3 + 26\cdot 1)}{25} = \frac{498}{25} = 19{,}9\,.$$

Построим полигон и гистограмму частот (рис. 4.3).

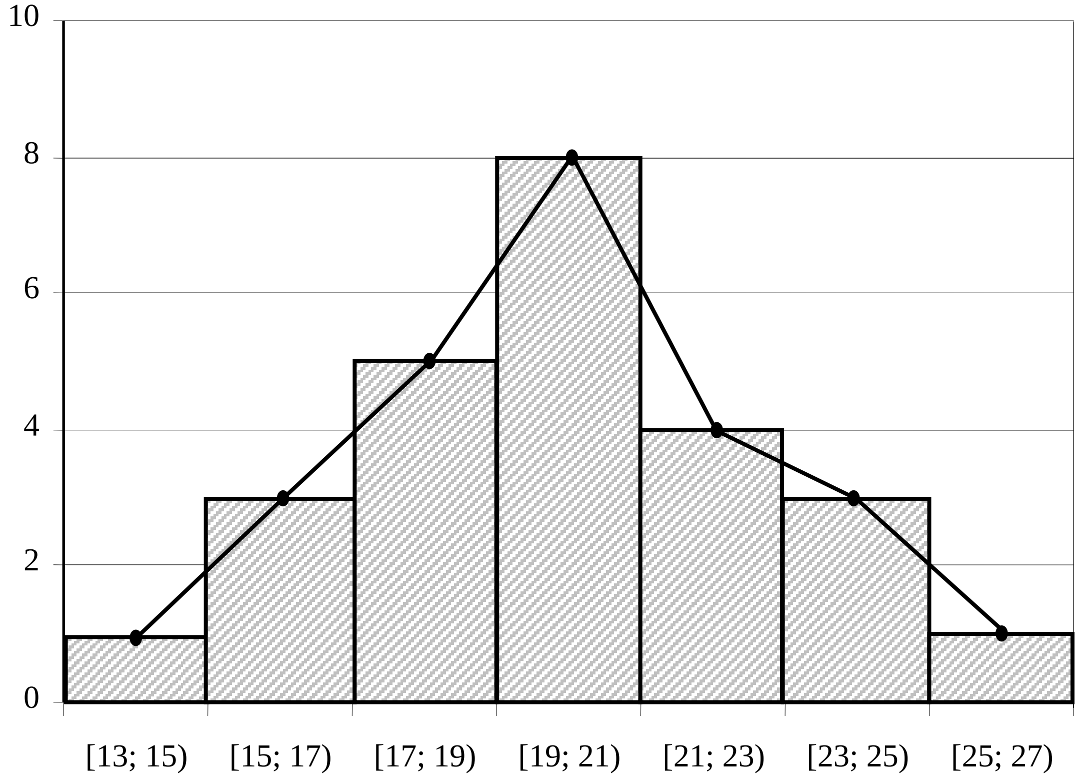


Рис.

По виду полигона и гистограммы можно сказать, что мы имеем нормальный закон распределения.

Проверим справедливость выдвинутой гипотезы. Для этого воспользуемся критерием Пирсона.

Составим вспомогательную таблицу для подсчета вероятностей попадания вариант выборки в интервалы разбиения:

$$p_k = F_0(a_k) - F_0(a_{k-1}) = \Phi(u_k) - \Phi(u_{k-1})\,,\ k = \overline{1,7}\,;$$

где $u_k = \dfrac{a_k - \bar{x}}{\sigma}$, $\Phi(u_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{u_k} e^{-x^2/2} dx$.

<table>
<tr><th>Границы интервалов</th><th>$u_k = \frac{a_k - \bar{x}}{\sigma}$</th><th>$\Phi(u_k)$</th><th>$p_k$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_0 = 13$</td><td rowspan="2">–2,23</td><td rowspan="2">–0,4871</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,0441</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_1 = 15$</td><td rowspan="2">–1,58</td><td rowspan="2">–0,4430</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,1166</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_2 = 17$</td><td rowspan="2">–0,94</td><td rowspan="2">–0,3264</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,2123</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_3 = 19$</td><td rowspan="2">–0,29</td><td rowspan="2">–0,1141</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,2509</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_0 = 21$</td><td rowspan="2">0,35</td><td rowspan="2">0,1368</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,2046</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_5 = 23$</td><td rowspan="2">1,00</td><td rowspan="2">0,3414</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,1091</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_6 = 25$</td><td rowspan="2">1,65</td><td rowspan="2">0,4505</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0,0385</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_7 = 27$</td><td rowspan="2">2,29</td><td rowspan="2">0,4890</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Теперь вычисляем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{k=1}^{7} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Границы интервалов $[a_{k-1}, a_k)$	Эмпирические частоты n_k	Вероятности p_k	Теоретические частоты np_k	Отклонения $n_k - np_k$	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
[13; 15)	1	0,0441	1,10	–0,10	0,009
[15; 17)	3	0,1166	2,92	0,08	0,002
[17; 19)	5	0,2123	5,31	–0,31	0,018
[19; 21)	8	0,2509	6,27	1,73	0,477
[21; 23)	4	0,2046	5,12	–1,12	0,245
[23; 25)	3	0,1091	2,73	0,27	0,027
[25; 27)	1	0,0385	0,96	0,04	0,002

$\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}78.$

Определим число степеней свободы: $s = l - r - 1$ = 7 – 1 – 1 = 5, здесь $r = 1$, так как по выборке оценивался только один параметр – $\bar{x}$.

По таблице χ^2-распределения при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим (см. приложение 3) $\chi^2_{\text{кр}}$ = 11,07.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}78 < \chi^2_{\text{кр}}$ =11,07, то нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу, т.е. количественный признак генеральной совокупности имеет нормальное распределение.

Для построения доверительного интервала воспользуемся формулой (3.6) (см. пример 3.9), так как среднее квадратическое отклонение известно

$$\bar{x} - \Delta \le M(\mu) \le \bar{x} + \Delta,$$

где $\Delta = t_{\frac{1+\gamma}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, n – объём выборки, σ – среднее квадратическое отклонение. Значение квантили $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ находится из уравнения

$$\Phi(t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma/2, \quad \Rightarrow \quad t_{\frac{1+\gamma}{2}} = \Phi^{-1}(\gamma/2),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа, $\Phi^{-1}(y)$ – функция обратная к ней .

$$\Phi(t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \quad \Rightarrow \quad t_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1{,}96 \text{ (см. приложение 2)},$$

$$\Delta = 1{,}96 \cdot \frac{3{,}1}{\sqrt{25}} = 1{,}96 \cdot 0{,}62 = 1{,}22, \quad 19{,}9 - 1{,}22 \le M(\mu) \le 19{,}9 + 1{,}22,$$

окончательно имеем

$$\underline{18{,}78 \le M(\mu) \le 21{,}12}.$$

Пример 4.28. В таблице дано распределение 100 магазинов по величине товарооборота μ (млн. р.) и размеру торговой площади магазина η (м^2):

x	y					n_x
	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	
1,0-1,5	4	12	2			18
1,5-2,0		4	9	9		22
2,0-2,5		2	10	18		30
2,5-3,0			4	9	11	24
3,0-3,5				3	3	6
n_y	4	18	25	39	14	100

Требуется: 1) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; 2) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; 3) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Решение. Находим условные выборочные средние по формулам

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{1}{n_{xi}} \sum_{j=1}^{m} y_j n_{ij}, \quad i = \overline{1, l}.$$

$$\bar{y}_{1,25} = \frac{125 \cdot 4 + 175 \cdot 12 + 225 \cdot 2}{18} = \frac{3050}{18} \approx 169; \quad \bar{y}_{1,75} = \frac{175 \cdot 4 + 225 \cdot 9 + 275 \cdot 12}{22} = \frac{5200}{22} \approx 236;$$

$$\bar{y}_{2,25} = \frac{175 \cdot 2 + 225 \cdot 10 + 275 \cdot 18}{30} = \frac{7550}{30} \approx 252;$$

$$\bar{y}_{2,75} = \frac{225 \cdot 4 + 275 \cdot 9 + 325 \cdot 11}{24} = \frac{6950}{24} \approx 290; \quad \bar{y}_{3,25} = \frac{275 \cdot 3 + 325 \cdot 3}{6} = \frac{1800}{6} = 300.$$

Переходим к условным вариантам

$$h_1 = 1{,}75 - 1{,}25 = 0.5; \; c_1 = 2{,}25; \; h_2 = 175 - 125 = 50; \; c_2 = 275;$$

$$u_1=\frac{x_1-c_1}{h_1}=\frac{1{,}25-2{,}25}{0{,}5}=-\frac{1}{0{,}5}=-2;\ u_2=\frac{x_2-c_1}{h_1}=\frac{1{,}75-2{,}25}{0{,}5}=-\frac{0{,}5}{0{,}5}=-1;$$

$$u_3=\frac{x_3-c_1}{h_1}=\frac{2{,}25-2{,}25}{0{,}5}=\frac{0}{0{,}5}=0;\ u_4=\frac{x_4-c_1}{h_1}=\frac{2{,}75-2{,}25}{0{,}5}=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1;$$

$$u_5=\frac{x_4-c_1}{h_1}=\frac{3{,}25-2{,}25}{0{,}5}=\frac{1}{0{,}5}=2;\ v_1=\frac{x_1-c_2}{h_2}=\frac{125-275}{50}=-\frac{150}{50}=-3;$$

$$v_2=\frac{x_2-c_2}{h_2}=\frac{175-275}{50}=-\frac{100}{50}=-2;\ v_3=\frac{x_3-c_2}{h_2}=\frac{225-275}{50}=-\frac{50}{50}=-1;$$

$$v_4=\frac{x_4-c_2}{h_2}=\frac{275-275}{50}=\frac{0}{50}=0;\ v_5=\frac{x_5-c_2}{h_2}=\frac{325-275}{50}=\frac{50}{50}=1.$$

u	v					n_u
	-3	-2	-1	0	1	
-2	4	12	2			18
-1		4	9	9		22
0		2	10	18		30
1			4	9	11	24
2				3	3	6
n_v	4	18	25	39	14	100

Вычисляем выборочные характеристики и коэффициент корреляции

$$\bar{u}=\frac{1}{100}\sum_i u_i n_{ui}=\frac{-2\cdot 18+(-1)\cdot 22+0\cdot 30+1\cdot 24+2\cdot 6}{100}=\frac{-36-22+24+12}{100}=-\frac{22}{100}=-0{,}22$$

;

$$\bar{v}=\frac{1}{100}\sum_j v_j n_{vj}=\frac{-3\cdot 4+(-2)\cdot 18+(-1)\cdot 25+0\cdot 39+1\cdot 14}{100}=\frac{-12-36-25+14}{100}=-0{,}59;$$

$$\bar{x}=h_1\bar{u}+c_1=0{,}5\cdot(-0{,}22)+2{,}25=-0{,}11+2{,}25=2{,}14;$$

$$\bar{y}=h_2\bar{v}+c_2=50\cdot(-0{,}59)+275=-29{,}5+275=245{,}5.$$

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{1}{n}\sum_i u_i^2 n_{ui}-\bar{u}^2=\frac{(-2)^2\cdot 18+(-1)^2\cdot 22+0^2\cdot 30+1^2\cdot 24+2^2\cdot 6}{100}-(-0{,}22)^2=$$

$$=\frac{142}{100}-0{,}0484=1{,}42-0{,}0484=1{,}3716;$$

$$\hat{\sigma}_u=\sqrt{1{,}3716}\approx 1{,}17,\qquad \hat{\sigma}_x=h_1\hat{\sigma}_u=0{,}5\cdot 1{,}17=0{,}585;$$

$$\hat{\sigma}_v^2=\frac{1}{n}\sum_j v_j^2 n_{vj}-\bar{v}^2=\frac{(-3)^2\cdot 4+(-2)^2\cdot 18+(-1)^2\cdot 25+0^2\cdot 39+1^2\cdot 14}{100}-(-0{,}59)^2=$$

$$=\frac{147}{100}-0{,}3481=1{,}47-0{,}3481=1{,}1219;\ \hat{\sigma}_v=\sqrt{1.1219}\approx 1.06;\ \hat{\sigma}_y=h_2\hat{\sigma}_v=50\cdot 1.06=53;$$

$$\widehat{\operatorname{cov}}_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{i,j} u_i v_j n_{ij} - \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{100}\cdot((-2)\cdot(-3)\cdot 4 + (-2)\cdot(-2)\cdot 12 + (-1)\cdot(-2)\cdot 4 +$$

$$+ (-2)\cdot(-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)\cdot 9 + 1\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 11 + 2\cdot 1\cdot 3) - (-0{,}22)\cdot(-0{,}59) =$$

$$= \frac{24+48+8+4+9-4+11+6}{100} - 0{,}1298 = \frac{106}{100} - 0{,}1298 = 0{,}9302\,;$$

$$\widehat{\rho} = \frac{\widehat{\operatorname{cov}}_{uv}}{\widehat{\sigma}_u \widehat{\sigma}_v} = \frac{0{,}9302}{1{,}17\cdot 1{,}06} = \frac{0{,}9302}{1{,}2402} \approx 0{,}75\,.$$

Вывод: так как $\widehat{\rho} = 0{,}75$, т.е. попадает в интервал $0{,}5 < |\widehat{\rho}| \le 0{,}75$, то мы делаем вывод, что связь между μ и η тесная.

Уравнение прямой регрессии имеет вид

$$Y = \bar{y} + \widehat{\rho}\frac{\widehat{\sigma}_y}{\widehat{\sigma}_x}(x - \bar{x}),$$

подставляя в него найденные данные, получим

$$Y = 245{,}5 + 0{,}75\frac{53}{0{,}585}(x - 2{,}14)\,; \quad Y = 245{,}5 + 67{,}95(x - 2{,}14)\,;$$

$$Y = 245{,}5 + 67{,}95x - 145{,}4\,; \quad \underline{Y = 67{,}95x + 100{,}1}\,.$$

График прямой регрессии строим по двум точкам, если $x = 1{,}25$, то $Y \approx 185$, если $x = 3{,}25$, то $Y \approx 321$ (рис. 4.4). На этом же рисунке строим ломаную по условным средним, вычисленным по выборке.

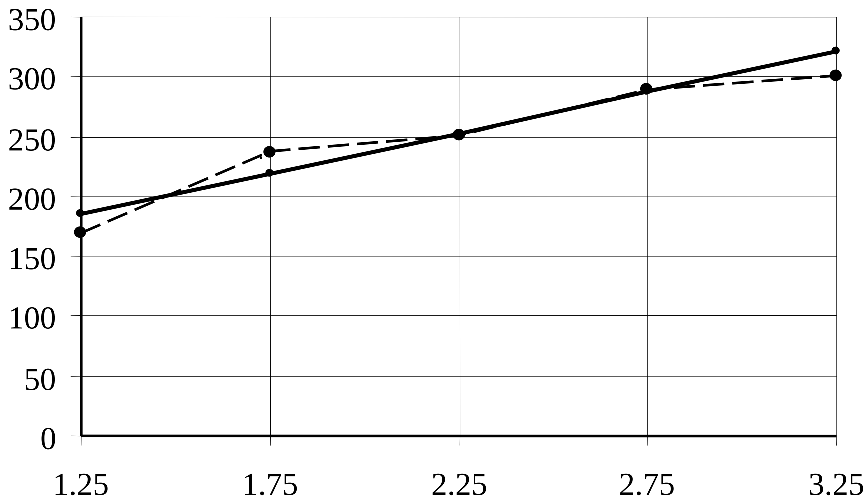


Рис. 4.4

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1) Из 10 билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что из 5 взятых наудачу билетов два выигрышных.

2) В электрическую цепь включены последовательно два предохранителя. Вероятность выхода из строя первого предохранителя равна 0,6, а второго – 0,2. Определить вероятность того, что питание прекратится в результате выхода из строя хотя бы одного предохранителя.

3) В продажу поступают телевизоры 3 заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 %, третьего – 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % с первого завода, 20 % – со второго и 50 % – с третьего?

4) Имеются 10 одинаковых урн, в девяти из которых находятся по 2 черных и по два белых шара, а в одной – 5 белых и один черный. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

5) Вероятность поломки компьютера в течение гарантийного срока равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести компьютеров: а) не более одного потребуют ремонта; б) хотя бы один потребует ремонта.

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}14$; $n = 600$; $m = 80$; б) $n = 100$; $p = 0{,}3$; $k_2 = 20$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ cx^2 + 2x, & \text{при } 0 < x \le 1/3 \\ 1, & \text{при } x > 1/3 \end{cases} ; \qquad \alpha = 1/4;\ \beta = 4 .$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–1	0	1
1	0,10	0,10	0,10
2	0,20	0,40	0,01
3	0,03	0,04	0,02

9) Получены результаты выборочного обследования по выполнению плана выработки на одного рабочего (в %):

90,0 96,0 98,0 98,0 98,5 99,0 101,5 102,0 102,0 102,5 103,0 103,0 103,5
104,0 104,0 104,0 104,5 105,5 106,0 108,0 108,2 108,7 109,0 112,0 113,5

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}98$; $\sigma = 4{,}7$; $h = 5$; $x_0 = 90$.

10) В таблице дано распределение 100 заводов по объёму валовой продукции η (млн р.) и среднесписочной численности работающих μ (тыс. чел.).

x	y					n_x
	10	20	30	40	50	
2	8	2				10
4	12	20	8			40
6			11	10		21
8			9	6	2	17
10				4	8	12
n_y	20	22	28	20	10	100

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 2

1) Слово "КЕРАМИТ" составлено из букв разрезной азбуки. Из них извлекают по очереди четыре карточки. Какова вероятность того, что эти четыре карточки в порядке выбора составят слово "РЕКА"?

2) Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое – 0,8, для второго и третьего – 0,9 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что при аварии сработает только одно устройство.

3) Имеется 2 партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность того, что из второй партии извлечено бракованное изделие.

4) Имеется 3 урны: в первой – 5 белых и 10 черных шаров; во второй – 7 белых и 3 черных; в третьей – 8 черных (белых нет). Некто выбирает наугад одну урну и вынимает из нее шар. Этот шар оказался черным. Найти вероятность того, что он вынут из третьей урны.

5) Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наивероятнейшее число опоздавших из 1000 пассажиров и вычислить соответствующую этому числу вероятность.

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}15$, $n = 600$, $m = 85$; б) $n = 100$, $p = 0{,}3$, $k_1 = 5$, $k_2 = 30$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей

$f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -1 \\ c(x+1), & \text{при } -1 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	1	2	3
–1	0,20	0,10	0,10
0	0,05	0,15	0,05
1	0,03	0,07	0,25

9) Выборочным путём получены следующие данные об урожайности подсолнечника (в ц/га):

16,8 17,2 17,6 17,6 17,9 18,0 18,2 18,4 18,6 18,9 18,9 19,0 19,1
19,2 19,2 19,3 19,7 19,9 20,0 20,0 20,2 20,3 20,4 20,8 21,5.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности - имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}95$; $\sigma = 1$; $h = 1$; $x_0 = 16{,}5$.

10) В таблице дано распределение 100 проб руды по содержанию окиси железа η (%) и закиси железа μ (%):

x	y						n_x
	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	
0-6					4	6	10
6-12			6	6	8		20
12-18	1	2	14	3			20
18-24	6	18	2				26
24-30	4	10	2				16
30-36	6	2					8
n_y	17	32	24	9	12	6	100

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 3

1) В группе из 30 учеников на контрольной работе получили оценку "отлично" – 6 учеников, "хорошо" – 10 учеников, "удовлетворительно" – 9. Какова вероятность того, что все три ученика, вызванные к доске наугад, имеют по контрольной работе неудовлетворительные оценки.

2) В партии из 100 одинаковых по внешнему виду изделий смешаны 40 штук 1-го сорта и 60 штук – 2-го сорта. Найти вероятность того, что взятые наудачу 2 изделия окажутся одного сорта.

3) Из 1000 ламп 100 принадлежат первой партии, 250 – второй, остальные – третьей. В первой партии 6 %, во второй – 5 %, в третьей – 4 % бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа не бракованная.

4) Пассажир может обратиться для получения билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их месторасположения и равны соответственно 0,5; 0,2; 0,3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, для каждой кассы соответственно равны 0,8; 0,6; 0,7. Пассажир отправился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что билет приобретен в первой кассе.

5) Вероятность того, что разменный автомат при опускании одной монеты сработает неправильно, равна 0,07. Сколько нужно опустить монет, чтобы наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата было равно 100?

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}16$, $n = 600$, $m = 90$; б) $n = 100$, $p = 0{,}3$, $k_1 = 5$, $k_2 = 40$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 4 \\ cx - 2, & \text{при } 4 \le x \le 6; \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases} \qquad \alpha = -10; \beta = 6.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–1	0	1
1	0,20	0,10	0,05
2	0,10	0,20	0,02
3	0,08	0,10	0,15

9) В районной сберегательной кассе проведено выборочное обследование

25 вкладов, которое дало следующие результаты (в тыс. р.):

75	210	350	350	400	520	540	560	590	680	700	700	720
750	780	790	810	850	875	890	1000	1000	1100	1200	1250.	

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности - имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}95$; $\sigma = 280$; $h = 250$; $x_0 = 50$.

10) Данные о живом весе η (кг) и молочной продуктивности μ (кг) 80 коров приведены в таблице.

x	y					n_x
	325-375	375-425	425-475	475-525	525-575	
1250-1750	3					3
1750-2250	2	8	2			12
2250-2750		7	5	13		25
2750-3250		1	10	10	7	28
3250-3750				7	5	12
n_y	5	16	17	30	12	80

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 4

1) Из пяти карточек *А, Б, В, Г, Д*, наугад одна за другой выбираются 3 и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово "два"?

2) Два охотника стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка (хотя бы при одном выстреле), если охотники делают по два выстрела.

3) В цехе работают 20 станков. Из них марки A – 10, марки B – 6, марки C – 4. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна – 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется отличного качества.

4) На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5 %, 4 %, 2 %. Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он сделан на третьей машине.

5) Вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата было 100?

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}17$, $n = 600$, $m = 90$; б) $n = 100$, $p = 0{,}85$, $k_1 = 25$, $k_2 = 80$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0\\ cx^3, & \text{при } 0<x\le 2\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}; \qquad \alpha=0;\ \beta=1.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	2	3	4
1	0,10	0,10	0,10
2	0,20	0,30	0,01
3	0,03	0,04	0,12

9) При промывке 25 кубометров песка драгой было намыто золота (в миллиграммах):

331 346 362 385 404 411 419 429 435 437 441 445 458
468 469 477 481 491 507 518 536 542 543 544 544.

Требуется: 1) найти выборочную среднюю; 2) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; 3) построить полигон и гистограмму частот; 4) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности - имеет нормальное распределение; 5) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}59$; $\sigma = 55$; $h = 50$; $x_0 = 325$.

10) В таблице дано распределение 50 заводов по объёму валовой продукции η (млн р.) и себестоимости μ (р.).

x	y					n_x
	1500	2500	3500	4500	5500	
2,0				1	6	7
2,5			4	6	3	13
3,0		3	6	4		13
3,5	2	6	3	1		12
4,0	3	2				5
n_y	5	11	13	12	9	50

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 5

1) В коробке имеется пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных двух изделий одно окрашено.

2) Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки для первого станка равна 0,9, для второго – 0,8 и для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что за этот час лишь один станок потребует внимания рабочего.

3) В каждой из двух урн содержится 2 белых и три черных шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наудачу извлечен шар. Найти вероятность того, что этот шар черный.

4) Прибор состоит из двух узлов, работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго – p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

5) Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти наивероятнейшее число бракованных среди 1000 деталей и вероятность такого количества их в партии.

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}13$, $n = 500$, $m = 30$; б) $n = 100$, $p = 0{,}7$, $k_1 = 60$, $k_2 = 85$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 9/4 \\ c\sqrt{x} + x, & \text{при } 9/4 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}; \qquad \alpha = 3;\ \beta = 5.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–3	–2	–1
1	0,20	0,15	0,05
2	0,10	0,30	0,01
3	0,03	0,04	0,12

9) Были испытаны 25 ламп на продолжительность горения и получены следующие результаты (в часах):

773 792 815 827 843 861 869 877 886 889 892 895 901
903 905 911 918 919 923 929 937 941 955 981 990.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}92$; $\sigma = 50$; $h = 40$; $x_0 = 760$.

10) В таблице дано распределение 100 предприятий по производительности труда одного рабочего η (тыс. р.) и валовой продукции μ (млн р.).

x	y					n_x
	8	9	10	11	12	
100	2	3	5			10
110	2	6	20	7		35
120	1	3	10	9	5	28
130	1	2	5	4	7	19
140			2	3	3	8
n_y	6	14	42	23	15	100

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 6

1) В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разного цвета.

2) Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом станке, будет первосортной, равна 0,7, при изготовлении такой же детали на втором станке равна 0,8. На первом станке изготовлено две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

3) Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0,25, 0,5; 0,25. Вероятность того, что лампа из первой партии проработает заданное число часов равна 0,1, для двух других эта вероятность равна 0,2 и 0,4 соответственно. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

4) Прибор состоит из двух узлов, работа каждого узла, безусловно, необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла – 0,9, второго – 0,8. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только второй узел, а первый исправен.

5) Вероятность того, что в магазине очередной будет продана пара мужской обуви 45-го размера, равна 0,02. Сколько нужно продать пар обуви, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, ожидать, что среди них будет хотя бы одна пара 45-го размера?

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}16$, $n = 500$, $m = 72$; б) $n = 100$, $p = 0{,}6$, $k_1 = 65$, $k_2 = 75$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1\\ c(x^2-x), & \text{при } 1<x\le 2\\ 1, & \text{при } x>2\end{cases}; \qquad \alpha=0{,}5;\ \beta=1.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	0	1	2
2	0,20	0,10	0,05
3	0,12	0,30	0,16
4	0,03	0,04	0,10

9) При сравнении энергии роста новой породы крупного рогатого скота со стандартом оказалось, что у 25 обследованных особей этой породы энергия роста превышала стандарт в процентном соотношении на:

22,3 23,7 24,3 25,9 26,1 26,6 27,3 27,9 28,2 28,5 28,8 29,1 29,2 29,9 30,5 30,7 31,4 32,2 32,3 33,5 34,2 34,4 34,9 35,7 38,9.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha=0{,}05$; $\gamma=0{,}95$; $\sigma=4$; $h=5$; $x_0=20$.

10) В таблице дано распределение 50 однотипных предприятий по основным фондам (млн р.) и себестоимости единицы продукции μ (р.):

x	y					n_x
	8	13	18	23	28	
1,25				2	6	8
1,50			4	7	4	15
1,75	1	1	7	5		14
2,00	2	4	1			7
2,75	3	3				6
n_y	6	8	12	14	10	50

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 7

1) Одновременно бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми?

2) Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва в цепи, если элементы выходят из строя с вероятностями 0,3; 0,4 и 0,6.

3) Группа студентов состоит из a отличников, b – хорошо успевающих и c – занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные или хорошие оценки, хорошо успевающие с равной вероятностью могут получить отличные, хорошие и удовлетворительные оценки, занимающиеся слабо с равной вероятностью могут получить хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

4) Противотанковая батарея состоит из 10 орудий, причем для первой группы из 6 орудий вероятность того, что при одном выстреле произойдет недолет, попадание или перелет, равна соответственно 0,1; 0,7; 0,2. Для каждого из остальных четырех орудий вероятности тех же событий равны соответственно – 0,2; 0,6; 0,2. Наудачу выбранное орудие произвело три выстрела по цели, в результате чего было зафиксировано одно попадание, один недолет и один перелет. Какова вероятность того, что стрелявшее орудие принадлежит к первой группе?

5) Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти дней из семи перерасхода электроэнергии не произойдет?

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}17$, $n = 500$, $m = 68$; б) $n = 100$, $p = 0{,}6$, $k_1 = 75$, $k_2 = 400$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2 \\ c(x-2)^2, & \text{при } 2 \le x \le 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases} ; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 5.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	5	6	7
1	0,20	0,10	0,01
2	0,02	0,20	0,10
3	0,03	0,14	0,20

9) В течение 35 лет наблюдался подъём уровня воды в реке во время паводков. Получены следующие значения (в см):

266	278	315	336	347	354	368	368	391	408	411	416	427
437	444	448	457	462	481	483	895	512	518	536	576.	

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}96$; $\sigma = 65$; $h = 50$; $x_0 = 250$.

10) В таблице дано распределение 100 заводов по объёму валовой продукции η (млн р.) и среднесписочной численности работающих μ (тыс. чел.).

x	y					n_x
	20	30	40	50	60	
1	8	2				10
3	12	20	8			40
5			10	1		11
7			9	6	2	17
9			4	10	8	22
n_y	20	22	31	17	10	100

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 8

1) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответил не менее, чем на три вопроса из 4 поставленных. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

2) Набор трехзначного номера выигравшей облигации выполняется трехкратным автоматическим выбрасыванием из урны подряд трех жетонов из общего числа пяти жетонов с номерами 1 – 5. Найти вероятность того, что набранный таким образом номер не содержит цифры 3.

3) Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из двух заготовительных цехов: 70 % из первого цеха имеет 10 % брака, а материал второго цеха – 20 %. Найти вероятность того, что одна взятая наудачу болванка не имеет дефектов.

4) Имеется три урны с шарами. В первой 4 белых и 3 черных, во второй – 5 белых и 2 черных, в третьей – 2 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что извлеченный белый шар – шар из второй урны.

5) В расчетно-кассовом зале банка с посетителями работают независимо друг от друга три оператора-кассира. Вероятность работы с клиентом в данный момент для каждого оператора-кассира составляет 0,2. Какова вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один оператор-кассир?

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}18$, $n = 500$, $m = 80$; б) $n = 100$, $p = 0{,}6$, $k_1 = 50$, $k_2 = 90$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1 \\ c(x-1), & \text{при } 1 \le x \le 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}; \qquad \alpha = 3;\ \beta = 4.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–1	0	1
2	0,15	0,10	0,07
3	0,06	0,24	0,07
4	0,04	0,06	0,21

9) По данным пчеловодческого хозяйства от 25 наудачу взятых пчелиных семей было получено мёда (в кг):

69 76 77 79 83 86 87 88 89 89 90 91 91
92 93 93 94 94 96 96 99 101 103 107 108.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}98$; $\sigma = 9{,}5$; $h = 10$; $x_0 = 65$.

10) В таблице дано распределение 80 совхозов по числу рабочих на 100 га сельскохозяйственных угодий η (человек) и объёму валовой продукции μ (тыс. р.).

x	y					n_x
	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	
30-70	2	3				5
70-110	3	4	8	1		16
110-150	1	5	16	8	1	31
150-190			12	3	2	17
190-230			1	4	6	11
n_y	6	12	37	16	9	80

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 9

1) Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из тех 40, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

2) Рабочий обслуживает одновременно четыре станка, из которых на первом вероятность нарушения нормальной работы в течение часа после проверки составляет 0,1, на втором – 0,15, на третьем – 0,2, на четвертом – 0,25. Какова вероятность бесперебойной работы всех четырех станков на протяжении часа?

3) Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим осуществляется в 80 % всего времени полета, условия перегрузки – 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равно 0,1; в условиях перегрузки – 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

4) Имеется 3 урны: в первой – 3 белых и 5 черных шаров; во второй – 4 белых и 5 черных, в третьей – 7 белых (черных нет). Некто выбирает наугад одну урну и вынимает один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из второй урны.

5) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность двух попаданий при трех выстрелах.

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}12$, $n = 600$, $m = 70$; б) $n = 100$, $p = 0{,}8$, $k_1 = 90$, $k_2 = 100$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей $f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3/2 \\ x^2 + cx, & \text{при } 3/2 \le x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}; \quad \alpha = 0;\ \beta = 1{,}8.$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	–2	0	2
1	0,16	0,12	0,04
2	0,12	0,34	0,04
3	0,02	0,04	0,12

9) Произведено выборочное обследование роста 25 студентов и получены следующие результаты (в см):

159 162,5 164 164,5 165,5 166 168,5 169 169 170,5 171 171 171
173 174,5 174,5 176 176,5 178 179 182 183,5 184 185 188.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}95$; $\sigma = 7$; $h = 5$; $x_0 = 155$.

10) В таблице дано распределение 50 гастрономических магазинов области по уровню издержек обращения η (%) и годовому объёму товарооборота μ (млн р.):

x	y					n_x
	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	
0,5-2,0			2	3	1	6
2,0-3,5		4	5	1		10
3,5-5,0		8	5	5		18
5,0-6,5	3	8	2			13
6,5-8,0	2	1				3
n_y	5	21	14	9	1	50

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

Вариант 10

1) ОТК проверяют изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным.

2) Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной непригодной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей?

3) В двух ящиках имеются радиолампы. В первом – 12, из них одна лампа нестандартная, во втором – 10, из них одна нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

4) Некоторое изделие в случайном порядке может поступить для обработки на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными 0,2; 0,3; 0,5. При обработке на первом станке вероятность брака 0,02, на втором – 0,03, а на третьем – 0,05. Изделие после обработки оказалось бракованным. Чему равна вероятность того, что изделие фактически обрабатывалось на первом станке?

5) Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что "герб" выпадет менее двух раз.

6) Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет: а) m раз; б) от k_1 до k_2 раз. а) $p = 0{,}13$, $n = 400$, $m = 65$; б) $n = 100$, $p = 0{,}8$, $k_1 = 70$, $k_2 = 95$.

7) Случайная величина μ задана функцией распределения $F_\mu(x)$.

Требуется найти: а) постоянную c; б) плотность распределения вероятностей

$f_\mu(x)$; в) основные числовые характеристики $M(\mu), D(\mu), \sigma_\mu$; г) вычислить вероятность того, что случайная величина μ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); д) построить графики функций $f_\mu(x), F_\mu(x)$.

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ c\sqrt{x}, & \text{при } 0 < x \le 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases} \quad ; \quad \alpha = 1; \beta = 4 .$$

8) Дан закон распределения системы двух случайных величин (μ, η).

Требуется: а) вычислить коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между μ и η; б) составить условный закон распределения случайной величины μ и найти условное математическое ожидание; в) составить уравнение прямой регрессии μ на η и построить ее график.

μ \ η	2	4	6
1	0,31	0,11	0,02
2	0,11	0,22	0,03
3	0,03	0,07	0,10

9) Для определения себестоимости строительно-монтажных работ было произведено обследование 25 строительно-монтажных управлений и получены следующие результаты (млн р.):

1250 1450 1550 1700 1760 1820 1880 1960 2100 2175 2190 2200 2220 2275 2280 2310 2400 2550 2580 2600 2670 2800 2950 3000 3075.

Требуется: а) найти выборочную среднюю; б) составить интервальное распределение выборки с шагом h, взяв за начало первого интервала x_0; в) построить полигон и гистограмму частот; г) проверить с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α гипотезу о том, что случайная величина μ – количественный признак генеральной совокупности – имеет нормальное распределение; д) найти с надёжностью γ доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания признака μ генеральной совокупности. $\alpha = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}94$; $\sigma = 446$; $h = 400$; $x_0 = 1100$.

10) В таблице дано распределение 200 совхозов по затратам труда η (человеко-дней на 1 ц зерна) и себестоимости зерна μ (р. за 1 ц зерна).

x	y						n_x
	0,4-0,8	0,8-1,2	1,2-1,6	1,6-2,0	2,0-2,4	2,4-2,8	
7,25-9,25	14	22					36
9,5-11,25		10	38	6			54
11,25-13,25			30	30	4		64
13,25-15,25					20	26	46
n_y	14	32	68	36	24	26	200

Требуется: а) вычислить условные средние $\bar{y}_x$; б) вычислить выборочный коэффициент корреляции и проанализировать тесноту связи между признаками η и μ; в) составить выборочное уравнение прямой регрессии и построить ее график.

6. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольной работы следует строго придерживаться указанных ниже правил.

1) Выбор задач для контрольной работы осуществляется по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра (номера зачетной книжки) студента.

2) Контрольная работа оформляется в тонкой тетради чернилами любого цвета (кроме красного). Для замечаний рецензента необходимо оставить поля. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество студента, его учебный шифр (серия и номер зачетной книжки), домашний адрес, а также наименование дисциплины и номер контрольной работы.

3) Решение задач следует располагать в порядке следования номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач и записывая исходные условия. Если несколько задач имеют общую формулировку, то при оформлении решения общие условия заменяют конкретными данными.

4) Приступая к выполнению контрольных работ, необходимо изучить теоретический материал и ознакомиться с практической частью пособия. Решения задач контрольной работы оформляют аккуратно, подробно объясняя ход решения. В конце работы необходимо привести список использованной литературы, указать дату выполнения работы и поставить подпись исполнителя.

5) После получения проверенной работы студент обязан исправить в ней отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. Работа над ошибками, как правило, делается в той же тетради, что и контрольная работа. При необходимости, работу над ошибками допускается выполнять в новой тетради, но при отсылке на повторное рецензирование необходимо приложить первоначальный вариант рецензии.

7. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1) Сумма, произведение и разность случайных событий. Противоположные события. Алгебра событий. Число элементов в алгебре событий с конечным пространством элементарных исходов.

2) Вероятность случайного события. Конечное вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.

3) Вероятность случайного события. Геометрическое и статистическое определения вероятности. Задача о встрече.

4) Условная вероятность и ее свойства. Вероятность произведения событий (теорема умножения).

5) Простейшие свойства вероятностей: вероятность противоположного события, вероятность суммы событий (теорема сложения).

6) Условная вероятность. Формула полной вероятности.

7) Условная вероятность. Формулы Байеса.

8) Последовательность независимых испытаний. Полиномиальная схема. Схема Бернулли.

9) Предельные теоремы в схеме Бернулли. Формулы Пуассона и Муавра-Лапласа (без доказательства теоремы Муавра-Лапласа).

10*) Доказательство локальной теоремы Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа.

11) Понятие случайной величины. Равномерное, биномиальное, геометрическое

и гипергеометрическое распределения дискретной случайной величины. Распределение Пуассона.

12) Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения. График функции распределения для дискретной и непрерывной случайной величин.

13) Плотность распределения непрерывной случайной величины. Свойства плотности распределения и вероятностный смысл.

14) Функции от случайных величин (одномерных и многомерных). Плотность распределения суммы двух случайных величин.

15) Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины и их свойства.

16) Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины и их свойства.

17) Числовые характеристики основных законов распределения дискретных случайных величин: равномерного, геометрического, биномиального и Пуассона.

18) Нормальный закон распределения. Интеграл Пуассона. Вероятностный смысл параметров распределения.

19) Многомерные случайные величины. Дискретная двумерная случайная величина.

20) Многомерные случайные величины. Непрерывная двумерная случайная величина.

21) Условное распределение и условное математическое ожидание случайной величины. Уравнения линейной регрессии.

22) Неравенство и теорема Чебышева (закон больших чисел). Теорема Бернулли.

23) Начальные и центральные моменты порядка $\boldsymbol{k}$, коэффициенты асимметрии и эксцесса, квантили. Ковариация случайных величин и ее свойства. Коэффициент корреляции случайных величин и его свойства.

24*) Характеристическая функция и ее свойства.

25*) Центральная предельная теорема. Распределения, связанные с нормальным распределением.

26) Основные понятия математической статистики: генеральная совокупность, выборка, вариационный ряд, полигон и гистограмма.

27) Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Теорема Гливенко-Кантелли.

28. Точечные оценки параметров распределения. Состоятельность и несмещенность точечных оценок. Примеры.

29) Точечные оценки параметров распределения. Неравенство Рао-Крамера. Эффективность точеных оценок. Примеры.

30) Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок параметров распределения.

31) Статистическая гипотеза. Критерий проверки. Уровень значимости и мощность критерия.

32) Критерии согласия: Колмогорова, Пирсона (критерий χ^2), Мизеса (критерий ω^2).

33) Интервальные оценки для параметров распределения. Общая схема построения симметричных доверительных интервалов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ЛОКАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3201	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1536
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1228	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	00960	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0073	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0015	0015	0014	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790	1,56	0,4406
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810	1,57	0,4418
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2882	1,19	0,3830	1,58	0,4430
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849	1,59	0,4441
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869	1,60	0,4452
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3888	1,61	0,4463
0,06	0,0239	0,45	0,1737	0,84	0,2996	1,23	0,3907	1,62	0,4474
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925	1,63	0,4485
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944	1,64	0,4495
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3079	1,26	0,3962	1,65	0,4505
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980	1,66	0,4515
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997	1,67	0,4525
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015	1,68	0,4535
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032	1,69	0,4545
0,14	0,0557	0,53	0,2020	0,92	0,3212	1,31	0,4049	1,70	0,4554
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066	1,71	0,4564
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082	1,72	0,4573
0,17	0.0675	0,56	0,2123	0,95	0,3290	1,34	0,4099	1,73	0,4582
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115	1,74	0,4591
0,19	0,0754	0,58	0,2191	0,97	0,3340	1,36	0,4131	1,75	0,4599
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147	1,76	0,4608
0,21	0,0832	0,60	0,2258	0,99	0,3389	1,38	0,4162	1,77	0,4616
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3414	1,39	0,4177	1,78	0,4625
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192	1,79	0,4633
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207	1,80	0,4641
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222	1,81	0,4649
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236	1,82	0,4656
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251	1,83	0,4664
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265	1,84	0,4671
0,29	0,1141	0,68	0,2518	1,07	0,3577	1,46	0,4279	1,85	0,4678
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292	1,86	0,4686
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306	1,87	0,4693
0,32	0,1255	0,71	0,2612	1,10	0,3643	1,49	0,4319	1,88	0,4699
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332	1,89	0,4706
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345	1,90	0,4713
0,35	0,1368	0,74	0,2704	1,13	0,3708	1,52	0,4357	1,91	0,4719
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370	1,92	0,4726
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382	1,93	0,4732
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394	1,94	0,4738

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,95	0,4744	2,18	0,4854	2,46	0,4931	2,74	0,4969	3,20	0,49931
1,96	0,4750	2,20	0,4861	2,48	0,4934	2,76	0,4971	3,40	0,49966
1,97	0,4756	2,22	0,4868	2,50	0,4938	2,78	0,4973	3,60	0,499841
1,98	0,4767	2,24	0,4875	2,52	0,4941	2,80	0,4974	3,80	0,499928
1,99	0,4773	2,26	0,4881	2,54	0,4945	2,82	0,4976	4,00	0,499968
2,00	0,4783	2,28	0,4887	2,56	0,4948	2,84	0,4977	4,50	0,499997
2,02	0,4793	2,30	0,4893	2,58	0,4951	2,86	0,4979	5,00	0,499997
2,04	0,4793	2,32	0,4898	2,60	0,4953	2,88	0,4980		
2,06	0,4803	2,34	0,4904	2,62	0,4956	2,90	0,4981		
2,08	0,4812	2,36	0,4909	2,64	0,4959	2,92	0,4982		
2,10	0,4821	2,38	0,4913	2,66	0,4961	2,94	0,4984		
2,12	0,4830	2,40	0,4918	2,68	0,4963	2,96	0,4985		
2,14	0,4838	2,42	0,4922	2,70	0,4965	2,98	0,4986		
2,16	0,4846	2,44	0,4927	2,72	0,4967	3,00	0,49865		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ЗНАЧЕНИЯ $\chi^2_{\text{кр}}$, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ВЕРОЯТНОСТИ $\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}})$

Число степеней свободы	Вероятность					
	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,01
1	0,0002	0,004	0,02	2,71	3,84	6,64
2	0,02	0,10	0,21	4,61	5,99	9,21
3	0,12	0,35	0,58	6,25	7,82	11,34
4	0,30	0,71	1,06	7,78	9,49	13,28
5	0,55	1,15	1,61	9,24	11,07	15,09
6	0,87	1,64	2,20	10,65	12,59	16,81
7	1,24	2,17	2,83	12,02	14,06	18,48
8	1,65	2,73	3,49	13,36	15,51	20,09
9	2,09	3,33	4,17	14,68	16,92	21,67
10	2,56	3,94	4,87	15,99	18,31	23,21
11	3,05	4,58	5,58	17,28	19,68	24,72
12	3,57	5,23	6,30	18,55	21,03	26,22
13	4,11	5,89	7,04	19,81	22,36	27,68
14	4,66	6,57	7,79	21,06	23,69	29,14
15	5,23	7,26	8,55	22,31	25,00	30,58
16	5,81	7,96	9,31	23,54	26,30	32,00
17	6,41	8,67	10,09	24,77	27,59	33,41
18	7,02	9,39	10,86	25,99	28,87	34,81
19	7,63	10,12	11,65	27,20	30,14	36,19
20	8,26	10,85	12,44	28,41	31,41	37,57
21	8,90	11,59	13,24	29,62	32,67	38,93
22	9,54	12,34	14,04	30,81	33,92	40,29
23	10,20	13,09	14,85	32,01	35,17	41,64
24	10,86	13,85	15,66	33,19	36,42	43,98
25	11,52	14,61	16,47	34,38	37,65	44,31
26	12,20	15,37	17,29	35,56	38,89	45,64
27	12,88	16,15	18,11	36,74	40,11	46,96
28	13,56	16,93	18,94	37,92	41,34	48,28
29	14,26	17,71	19,77	39,09	42,56	49,59
30	14,95	18,49	20,60	40,26	43,77	50,89
40	22,16	26,51	29,05	51,81	55,76	63,69
50	29,71	34,76	37,69	63,17	67,51	76,15
100	70,07	77,93	82,36	118,50	124,34	135,81

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. – М.: Дружба народов, 1994.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Математическая статистика. – М.: Дружба народов, 1994.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1999.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
6. Гнеденко Б.В, Хинчин А..Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1976.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.
8. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для экономических специальностей вузов. – М.: Статистика, 1979.
9. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ИНФРА-М, 1997.
10. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1979.
11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970.
12. Чистяков Б.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987.

Василий Николаевич Логинов

МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-практическое пособие

Редактор Е.О. Колесникова

ЛР № 020825 от 21.09.93

Подписано в печать 10.02.2002
Формат 60 х84 1/8. Бумага 80 г/м^2. Отпечатано на ризографе.
Усл.печ.л. 14,9. Уч.-изд.л. 9,8. Тираж 1400.

Институт новых информационных технологий
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»
681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.