

# Исследование операций 2020 г.

## Специальность «Прикладная математика», 3 курс.

### Лабораторная работа 1.

Решение некоторых задач планирования (управления) не требует знания специальных методов оптимизации, к примеру, выпуклого или линейного программирования. Для решения таких задач достаточно базовых университетских предметов, среди которых назовем дисциплины «Алгебра», «Математический анализ», «Геометрия», «Комбинаторные алгоритмы», «Дискретная математика» и некоторые другие.

Первая лабораторная работа по ИСО составляет исследование задач, решение которых можно выполнить без специальной подготовки. Основные отличия задач ИСО от задач других предметов — содержательная текстовая постановка, которую олимпиадники называют «легендой», а также требование начать исследование задачи с построения математической модели. Легенда представляет собой описание некоторой содержательной проблемы, описывающей исходную ситуацию и требования, предъявляемые к ее решению (критерий эффективности).

Индивидуальные задания первой ЛР составляют именно такие задачи. Разберитесь в условиях задачи, выберите управляемые факторы и сформулируйте математическую модель. Составьте программу решения задачи и отчет о выполнении задания.

Отчет о выполнении задания состоит из двух частей. Первая часть оформляется в виде текста в системе Tex и содержит описание задачи, постановку, исследование математической модели и метода решения. Вторая часть представляет собой описание программы решения задачи, которая включает функции ввода и вывода на экран необходимых данных, решения требуемой задачи оптимизации и вывода полученного решения на экран монитора в форме, удобной для проверки. Программа может быть составлена с использованием любого языка или любой подходящей системы программирования, однако она должна обеспечивать возможность модификации различных данных, включая размерность задачи.

Впоследствии ручное тестирование программы заменится решением задания специализированного контеста олимпиадного сервера, что позволит отладить и самостоятельно сдать программу, которая пройдет тесты в удобное время с любого компьютера. При этом работа с преподавателем потребует, преимущественно, для консультаций. Отметим, что автоматическое тестирование не заменит предъявление преподавателю программы в целях устранения плагиата, а также контроля понимания студентом структур данных и принципов работы представленной программы.

А может быть вы найдете свою интересную, умеренно сложную задачу оптимизации, которую можно истолковать как задачу планирования или управления? В таком случае составьте ее легенду, согласуйте с преподавателем и решайте именно ее. Ваша задача пополнит пока скромную базу этой работы. Мы приветствуем ваши инициативы и самостоятельность!

## Задания первой лабораторной работы.

1. **Два программиста.** Компания «Лучше раньше, чем никогда!» распределяет между двумя программистами задания, занумерованные индексами  $1 \leq i \leq n$ . Затраты времени на выполнение задания  $i$  оцениваются целым значением  $a_i > 0$  человеко-дней работы. Каждое задание должен выполнить один программист.

Как распределить задания между программистами, чтобы закончить выполнение всех работ как можно раньше? Как изменится задача, если в компании работают три и более программистов?

2. **Много программистов.** Фирма «Лучше больше, но задарма!» распределяет  $m$  заданий между  $n$  программистами — фрилансерами. Каждый программист при этом может получить не более одного задания, каждое задание предоставляется только одному программисту.

Задания и программисты занумерованы индексами  $1 \leq i \leq m$ . Затраты времени на выполнение задания  $i$  составляют целое значение  $a_i > 0$  дней работы независимо от его исполнителя. По условиям договора программист  $1 \leq j \leq n$  оплачивается из расчета  $b_j$  рублей за день работы. Требуется распределить наибольшее количество заданий между программистами, обеспечивая при этом наименьшие суммарные затраты.

3. **Суженый, ряженый...** Брачная контора «Туфельки и подтяжки» собрала анкеты от  $m$  юношей и  $n$  девушек, вдохновленных призывами профкома к скорейшему созданию семейных очагов. Каждый юноша с индексом  $1 \leq i \leq m$  и каждая девушка с индексом  $1 \leq j \leq n$  в этих анкетах указали числа  $0 \leq c_{ij} \leq 10$  и  $0 \leq d_{ij} \leq 10$ , которые отражают их предпочтения в выборе спутника жизни.

При формировании пары  $(i, j)$  ее участники заплатят конторе сумму  $c_{ij} \times d_{ij}$  у. е. за разумный (???) подбор партнера. Какие пары молодоженов обеспечат конторе наибольший возможный доход?

4. **Парад хвостистов.** Декан факультета Ничегоневедения приглашает к 9 часам утра  $n$  студентов — хвостистов для финального индивидуального собеседования, которое всегда предшествует глобальному отчислению накануне аккредитации. Известно, что беседа со студентом с индексом  $1 \leq i \leq n$  требует ровно  $a_i > 0$  минут разговора с деканом.

В каком порядке следует вызывать хвостистов, чтобы минимизировать суммарное время их пребывания в очереди?

5. **Оптимизация плана работ.** Компания «Вяжем не веники» формирует годовой план инвестиций из проектов имеющегося портфеля заявок. По оценкам экономистов, включение проекта с индексом  $1 \leq i \leq n$  в состав годового плана связано с финансовыми затратами в объеме  $a_i > 0$  в начале периода

планирования, но обеспечивает по окончании периода ожидаемый доход в объеме  $c_i$ . К моменту начала периода компания располагает финансовыми средствами в объеме  $b$  (все числа целые).

Помогите директору компании выбрать проекты, которые к моменту завершения периода планирования обеспечат наибольший доход.

6. **Финансово-промышленная группа.** Финансово-промышленная группа «Век денег не видать!» также формирует годовой план инвестиций из числа проектов имеющегося портфеля заявок. Включение проекта с индексом  $1 \leq i \leq n$  в годовой план связано с финансовыми затратами в объеме  $a_i > 0$  в начале периода планирования и обеспечивает доход в размере  $c_i$  к моменту завершения периода. Все числа целые.

Как обеспечить наибольший ожидаемый доход группы к моменту завершения периода планирования, если в начале периода компания располагает финансовыми средствами в объеме  $b$  и, кроме того, имеет возможность дополнительно получить заемную сумму под установленный процент  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Получив ссуду в размере  $y$  в начале периода, компании придется вернуть к завершению периода деньги в сумме  $y(1 + \kappa/100)$  из полученного дохода.

7. **Оптимизация производственного цикла.** Ремонтно-механическое производство «Болт с левой резьбой» выполняет заявки на изготовление  $n$  деталей, каждая из которых проходит операции обработки сначала на фрезерном, затем — на токарном станках. После оптимизации состава оборудования на производстве остались только два станка: один фрезерный и один токарный, которые работают круглосуточно. Время обработки детали  $1 \leq i \leq n$  на первом станке составляет  $a_i > 0$ , на втором —  $b_i > 0$  часов, время переналадки оборудования пренебрежимо мало. Какоре наименьше время необходимо для выполнения всех работ? В каком порядке начинать выполнение заявок и через сколько часов закончится выполнение каждой из них?

8. **Два станка с контролем ОТК.** После ухода на пенсию опытных профессиональных фрезеровщиков и токарей ремонтно-механическое производство «Болт и шайба» (см. задачу оптимизации производственного цикла) использует доблестный труд практикантов местного университета, в связи с чем существенно участилось появление брака.

В целях активизации контроля технолог производства активизировал работу отдела технического контроля (ОТК) для оценки качества выполнения каждой операции. Производство не испытывает недостатка в контролерах для одновременного выполнения всех требуемых проверок. Контроль операции, выполненной на фрезерном станке занимает  $a'_i > 0$  часов, на токарном —  $b'_i > 0$  часов. Расчитайте очередность начала, сроки и график выполнения каждой из работ решения предшествующей заадчи в условиях кадрового дефицита.

9. **Аренда спортивного зала.** Подзаборскому университету приходится арендовать спортивный зал для проведения занятий по физвоспитанию студентов на срок  $T = 12$  месяцев. Такая возможность есть. Разные компании предлагают аренду зала на срок от одного или нескольких месяцев подряд, вплоть до целого года. Аренда зала на срок от месяца с номером  $1 \leq i \leq T$  до месяца с номером  $i \leq j \leq T$  составляет  $c_{i,j}$ . Например,  $c_{1,1}$  — стоимость аренды спортивного зала на январь,  $c_{3,5}$  — с 1 марта до конца мая,  $c_{1,12}$  — на весь год.

Расчитайте минимальные затраты, необходимые вузу для аренды зала и способ их реализации.

10. **СНиП превыше всего!** Ресторан «Чистота — залог здоровья!» нежно заботится о своих посетителях. В частности, каждому посетителю ресторана предоставляется белоснежная накрахмаленная салфетка.

С этой целью в ресторане имеется определенный запас чистых салфеток, чистота каждой из которых обеспечивается прачечной, осуществляющей как срочную стирку — за одну ночь по цене  $c_1^t$ , так и повседневную по цене  $c_2^t > c_1^t$  — через двое суток в зависимости от дня недели  $t = 0, 1, \dots, 6$ . Можно покупать новые салфетки по цене  $c_3^t > c_2^t$  а также накапливать стирку в бельевой ресторана.

Для каждого дня недели известно  $b_t$  — ожидаемое количество посетителей. Каким образом менеджменту ресторана с наименьшими затратами обеспечить всех посетителей чистыми салфетками?

11. **Коронавирус в Италии.** По возвращению из Италии в группе из  $n$  человек, возможно, присутствуют  $m$  инфицированных коронавирусом. Внешние признаки заболевания пока отсутствуют. Для диагностики инфекции у каждого из них взяты пробы крови. Используемая система тестирования позволяет не только выявить больных, но и, смешивая не более, чем  $k$  проб, установить присутствие инфицированных среди этих людей.

Как организовать обследование, чтобы определить всех больных с минимальным расходом тестовых материалов?

12. **Коронавирус в Китае.** По возвращению из Китая участники группы из  $n$  человек, с вероятностью  $p > 0$  инфицированы коронавирусом. Внешних признаков заболевания пока не наблюдается. Для диагностики инфекции у них взяты пробы крови. Система тестирования позволяет выявить больных, а также, смешивая пробы, установить присутствие в смеси инфицированной крови.

Как организовать обследование, чтобы определить больных с минимальным расходом тестовых материалов?

13. **Проблема автомобилиста.** Автолюбитель столкнулся с проблемой — отремонтировать свой старый или купить новый автомобиль. Конечно, новый

автомобиль стоит довольно дорого  $c_0$ . Однако и ремонт старого обходится с каждым годом все дороже  $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_t < \dots$ , где  $t \geq 0$  — возраст автомобиля.

Как поступить автолюбителю, чтобы минимизировать свои расходы на эксплуатацию автомобиля в течение ближайших  $T$  лет?

14. **Логистика погрузки бумаги.** В этой задаче требуется в один слой разместить наибольшее возможное количество круглых рулонов бумаги одинакового радиуса  $R > 0$  метров на дне контейнера, который представляет собой прямоугольник размерами  $a \times b$ .

15. **Разные колеса.** Качество покрышки колеса автомобиля определяется величиной  $h$  — толщиной ее протектора. Если толщина протектора  $h$  меньше заданной величины  $\delta < 0$ , покрышка подлежит замене. Трудно сказать почему, однако колеса автомобиля снашиваются неодинаково.

И если толщина протектора самого тонкого колеса автомобиля  $h_{\min}$  значительно меньше толщины протектора самого толстого  $h_{\max}$

$$h_{\max} - h_{\min} > \theta,$$

то какое-то из колес придется менять. В гараже автопарка стоят на ремонте  $n$  автомобилей, покрышки колес которых имеют толщину  $h_{ij}$ , где  $i = 1, 2, 3, 4$  — номер колеса автомобиля  $1 \leq j \leq n$ .

Сколько потребуется новых колес с толщиной ее протектора  $h$ ? Какое минимальное количество перестановок колес потребуется для приведения в порядок ремонтируемых автомобилей?

16. **Городим огород.** Определите наибольшую площадь огорода, которую удастся огородить блоками забора длины  $a_j > 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

17. **Дорога будущего.** Компания «АСУ в лесу» получила подряд на строительство транспортной магистрали из Позаборска в Старостолбовск. Трассой магистрали должна быть прямая, как струна, дорога, без малейших поворотов ни влево, ни вправо. По вертикали также не допускается ни малейшего уклона.

Чтобы выравнять вертикальный профиль полотна дороги, компании придется перемещать грунт с возвышенностей, где его избыток, в низины, где его недостаток.

Установить наименьшие возможные затраты на перемещение грунта вдоль трассы, если известно, что затраты на перемещение каждой единицы грунта пропорциональны расстоянию ее перемещения.

18. **Боязливый Вася.** Вася планирует, двигаясь по улицам родного города, совершить прогулку из главного корпуса ПетрГУ в студенческое общежитие.

План города представляет собой граф, длины дуг которого — целые числа. Для поиска кратчайшего пути он может использовать, к примеру, известный ему метод Дейкстра.

Однако по ряду причин Вася опасается, что его не устроит оптимальный (кратчайший) путь. Помогите на всякий случай ему найти второй и третий по длине — субоптимальные пути из главного корпуса ПетрГУ в общежитие.

19. **Нас не догонишь!** По двум прямолинейным дорогам  $L_1$   $L_2$ , которые скрещиваются под углом  $\alpha$  движутся два автомобиля. Зная их скорости  $v_1$  и  $v_2$ , а также координаты  $x_1$  и  $x_2$  — каждой на своей дороге в момент 0 определить время, когда расстояние между автомобилями будет наименьшим.

20. **Безалкогольное, не жалко ...** Как, располагая двумя пустыми емкостями  $a$  литров  $b$  и лоханью, заполненной  $a + b$  литрами безалкогольного пива с наименьшим количеством переливаний отмерить ровно  $c$  литров?

Известно, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа, а также  $0 \leq c \leq a + b$ . Разрешается наполнять любую емкость из лохани, опустошать емкость обратно, а также переливать жидкость из какой-либо емкости в другую. В результате переливания из емкости в емкость какая-либо из них обязательно должна полностью опустошиться или наполниться до краев.