

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»



Инженерная школа энергетики

Отделение электроэнергетики и электротехники

«Моделирование переходных процессов в электрических цепях»

Отчет по лабораторная работа №1

(ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ)

По курсу «Математическое моделирование в электротехнике»

Вариант (№ нужно заполнить)

Выполнил студент гр.№

Подпись

_____ ФИО

Дата

Проверил доцент (ОЭЭ, ИШЭ)

Подпись

Дата

Воронина Н.А.

Томск-2020

Цель работы:

Общий вариант для цепи первого порядка

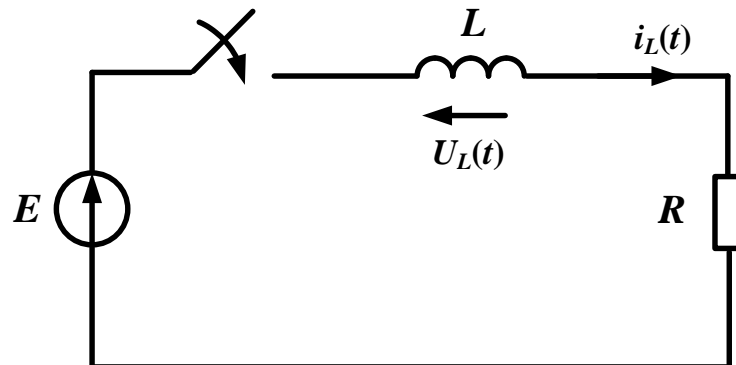


Рисунок 1. Схема включения цепи первого порядка на источник постоянного напряжения

Составим уравнение по 2 закону Кирхгофа:

$$E = U_L(t) + U_R(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t).$$

Представим в нормальной форме Коши, то есть разрешим математическое описание относительно производных:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} \cdot i_L(t).$$

Решение методом Эйлера первого порядка будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{i_{L\,k+1} - i_{L\,k}}{\Delta t} = \frac{E - R \cdot i_{L\,k}}{L};$$
$$i_{L\,k+1} = i_{L\,k} + \Delta t \cdot \left(\frac{E - R \cdot i_{L\,k}}{L} \right).$$

Для определения оптимального шага расчета воспользуемся постоянной времени цепи:

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Общее время переходного процесса в технических системах обычно принимают не более пяти постоянных времени системы: $t_{\text{пр}} = 5\tau$.

Рассмотрим применение метода Эйлера первого порядка в программной среде MathCAD (рисунок 2).

Задаем параметры RL-цепи (в примере произвольно):

Задаем параметры цепи RL-цепи

$$E := 10 \text{ В} \quad R := 5 \text{ Ом} \quad L := 0.001 \text{ Гн}$$

Постоянная времени цепи:

$$\tau := \frac{L}{R} \quad \tau = 2 \times 10^{-4}$$

Число точек расчета:

$$N := 500 \quad k := 0..N$$

Получим шаг расчета, разделим общее время переходного процесса ($t_{\text{пр}}=5\tau$) на число точек расчета:

$$\Delta t := \frac{5 \cdot \tau}{N} \quad \Delta t = 2 \times 10^{-6}$$

Задаем начальные условия (для случая замыкания ключа нулевые):

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ I_{e0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение ДУ методом Эйлера

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ I_{e_{k+1}} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + \Delta t \\ I_{e_k} + \Delta t \cdot \left(\frac{E - R \cdot I_{e_k}}{L} \right) \end{bmatrix} \quad +$$

Рисунок 2. Расчет численным методом Эйлера в программной среде MathCAD

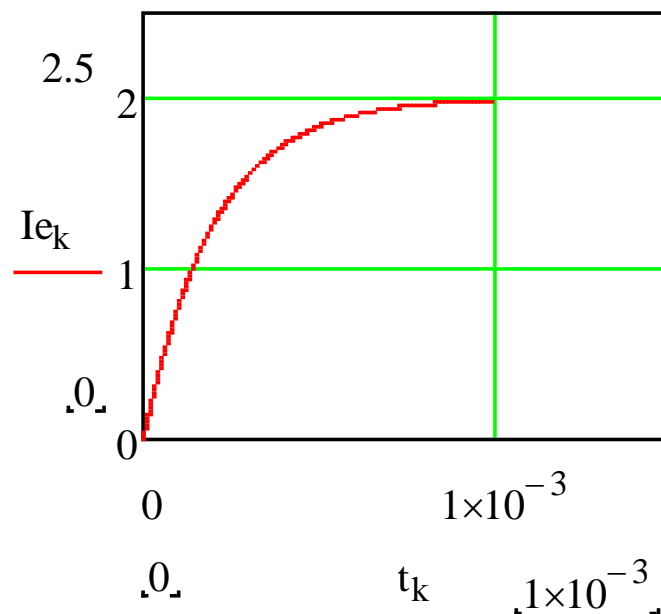


Рисунок 3. Переходная характеристика тока Метод Эйлера

Операторный метод решения дифференциальных уравнений

Применим прямое преобразование Лапласа к ДУ, описывающему RL-цепь, с учетом нулевых начальных условий $i_L(0) = 0$:

$$E = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t);$$

$$\frac{E}{p} = L \cdot [p \cdot I_L(p) - i_L(0)] + R \cdot I_L(p) = L \cdot p \cdot I_L(p) + R \cdot I_L(p).$$

Выразим из полученного операторного уравнения изображение тока:

$$\frac{E}{p} = I_L(p) \cdot (L \cdot p + R); \quad I_L(p) = \frac{E}{p \cdot (L \cdot p + R)}.$$

Применяя к этому выражению обратное преобразование Лапласа, можно получить оригинал тока – его зависимость от времени.

Рассмотрим применение операторного метода для цепи первого порядка в программной среде MathCAD (рисунок 4)

Задаем параметры цепи RL-цепи

$$E := 10 \text{ В} \quad R := 5 \text{ Ом} \quad L := 0.0001 \text{ Гн}$$

$$I_L(p) := \frac{E}{p \cdot (L \cdot p + R)}$$

$$i_L(t) := I_L(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 2.0 - 2.0 \cdot e^{-50000.0 \cdot t}$$

Для построения графика найдем постоянную времени цепи, которая обратно пропорциональна модулю корня характеристического уравнения:

$$\tau := \frac{1}{|-50000|} \quad \tau = 2 \times 10^{-5}$$

Задаем интервал времени для построения графика и получаем результат:

$$t := 0, \frac{\tau}{1000} .. 5 \cdot \tau$$

Рисунок 4. Расчет цепи операторным методом в программной среде MatCAD

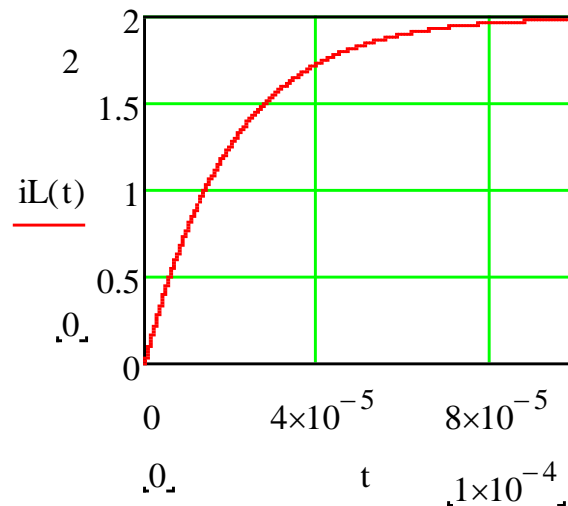


Рисунок 5. Характеристика тока

Преобразование Лапласа также позволяет найти передаточную функцию (ПФ) системы – отношение изображения выходной величины к изображению входной при нулевых начальных условиях. Если применить прямое преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению, описывающему цепь, не раскрывая изображение входного напряжения, получим:

$$E = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + R \cdot i_L(t);$$

$$E(p) = L \cdot p \cdot I_L(p) + R \cdot I_L(p);$$

$$E(p) = I_L(p) \cdot (L \cdot p + R);$$

$$W(p) = \frac{I_L(p)}{E(p)} = \frac{1}{L \cdot p + R}.$$

Произведём моделирование RL-цепи в программной среде MATLAB Simulink (рисунок 6)

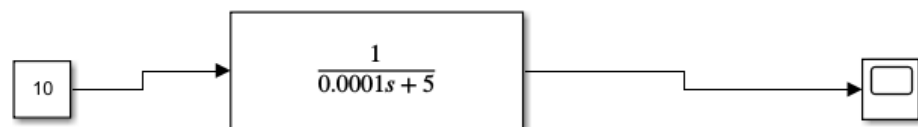


Рисунок 6. Моделирование структурной схемы в программной среде MATLAB Simulink

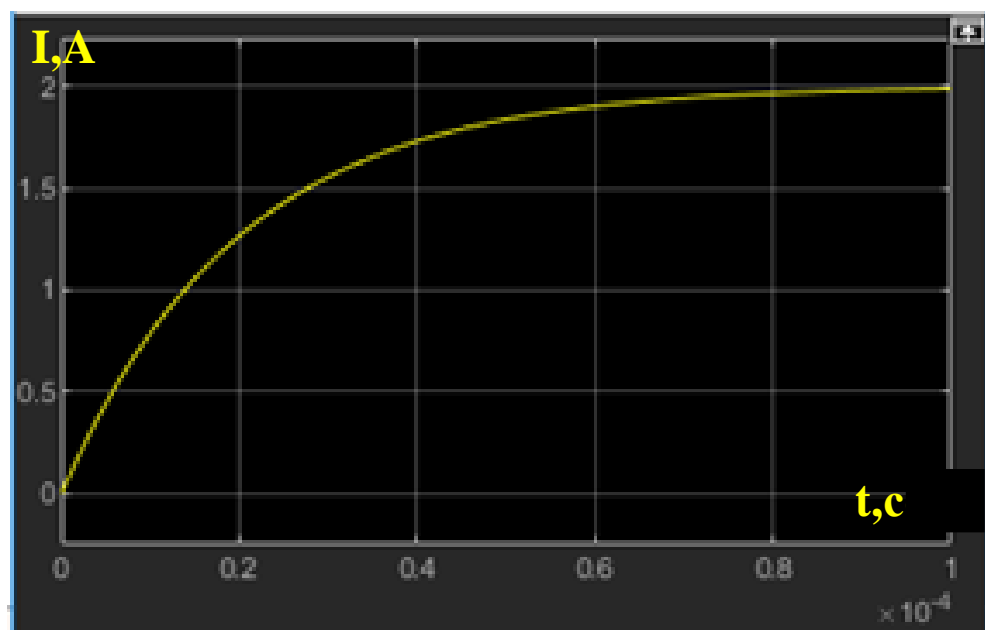


Рисунок 7. Переходная характеристика тока

Общий вариант для цепи второго порядка

Метод Эйлера

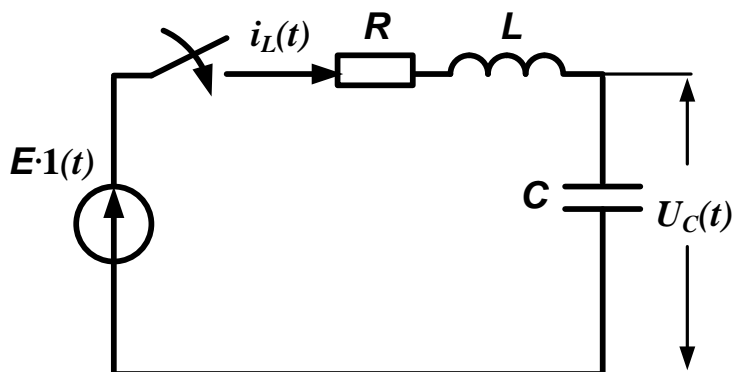


Рисунок 8. Схема коммутации RLC -цепи на источник постоянного напряжения

RLC -цепь представляет собой динамический объект второго порядка, так как содержит два накопителя энергии.

Уравнение для представленного контура по 2 закону Кирхгофа:

$$E = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + U_C(t).$$

Уравнение по 1 закону Кирхгофа:

$$i_L(t) = i_C(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt}.$$

Представим полученную систему уравнений в нормальной форме Коши (разрешим относительно производных):

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} \cdot i_L(t) - \frac{1}{L} \cdot U_C(t) \\ \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_L(t) \end{cases}.$$

Используя математическое описание RLC -цепи в нормальной форме Коши, можно записать решение методом Эйлера первого порядка (по аналогии с RL -цепью):

$$\begin{cases} \frac{i_{Lk+1} - i_{Lk}}{\Delta t} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} \cdot i_{Lk} - \frac{1}{L} \cdot U_{Ck} \\ \frac{U_{Ck+1} - U_{Ck}}{\Delta t} = \frac{1}{C} \cdot i_{Lk} \end{cases}; \begin{cases} i_{Lk+1} = i_{Lk} + \Delta t \cdot \left(\frac{E - R \cdot i_{Lk} - U_{Ck}}{L} \right) \\ U_{Ck+1} = U_{Ck} + \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{Lk} \end{cases}.$$

В программной среде MathCAD задаем параметры цепи (рисунок 9)

Параметры цепи

$$E := 10 \text{ В} \quad R := 5 \text{ Ом} \quad L := 0.001 \text{ Гн} \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

Число точек расчета

$$N := 5000 \quad k := 0..N$$

Шаг расчета (интегрирования)

$$\Delta t := 10^{-6}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ I_{L0} \\ U_{C0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода Эйлера:

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ I_{Lk+1} \\ U_{Ck+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_k + \Delta t \\ I_{Lk} + \Delta t \cdot \left(\frac{E - R \cdot I_{Lk} - U_{Ck}}{L} \right) \\ U_{Ck} + \frac{\Delta t}{C} \cdot I_{Lk} \end{pmatrix}$$

Рисунок 9. Расчет численного метода в программной среде MatCAD

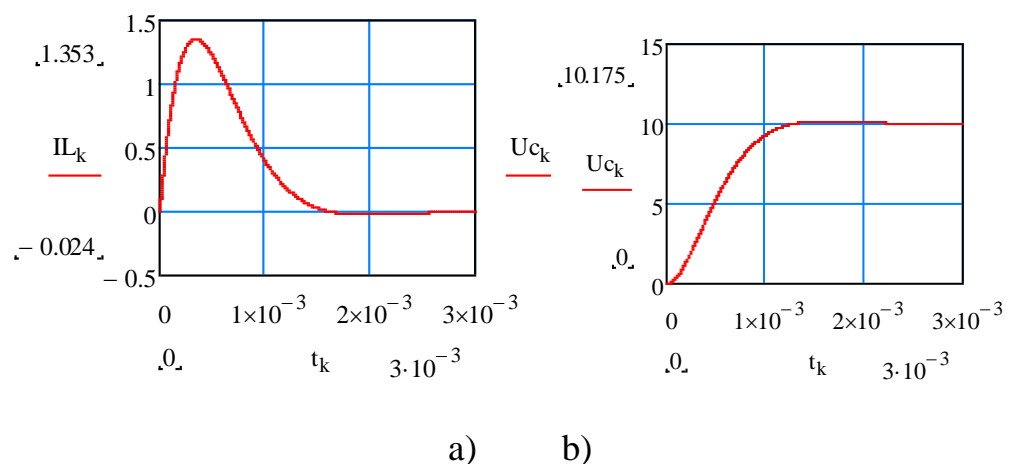


Рисунок 10. График переходных процессов в RLC-цепи при использовании метода Эйлера, а) ток; б) напряжение

Операторный метод

Для решения уравнений операторным методом, представим ее в векторно-матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} = x(t)$ – вектор переменных состояния;

$$\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} = A - \text{матрица коэффициентов перед неизвестными};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix} = B - \text{вектор свободных членов.}$$

Применяя к системе уравнений в векторно-матричной форме преобразование Лапласа, получим:

$$p \cdot \begin{bmatrix} I_L(p) \\ U_C(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_L(0) \\ U_C(0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_L(p) \\ U_C(p) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L \cdot p} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сгруппируем слагаемые с неизвестными:

$$\begin{pmatrix} p + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & p \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_L(p) \\ U_C(p) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{L \cdot p} + i_L(0) \\ U_C(0) \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы легко найти методом обратной матрицы:

$$X(p) = A(p)^{-1} \cdot B(p).$$

В программной среде MathCAD (рисунок 11):

$E := 10 \text{ В}$ $R := 5 \text{ Ом}$ $L := 0.001 \text{ Гн}$ $C := 100 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$
 $iL0 := 0$ $uC0 := 0$

$$A(p) := \begin{pmatrix} p + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & p \end{pmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} \frac{E}{L \cdot p} + iL0 \\ uC0 \end{pmatrix}$$

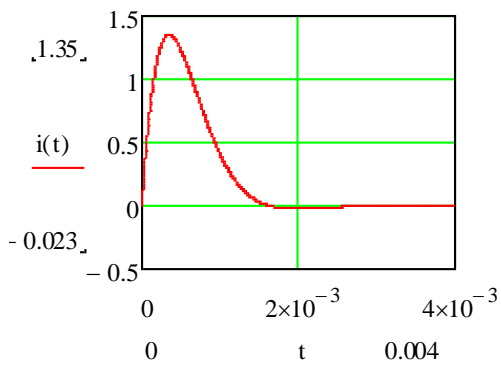
$$X(p) := A(p)^{-1} \cdot B(p)$$

$$X(p) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{10000.0}{5000.0 \cdot p + p^2 + 1.0e7} \\ \frac{10000.0}{p \cdot (0.5 \cdot p + 0.0001 \cdot p^2 + 1000.0)} \end{bmatrix} \quad +$$

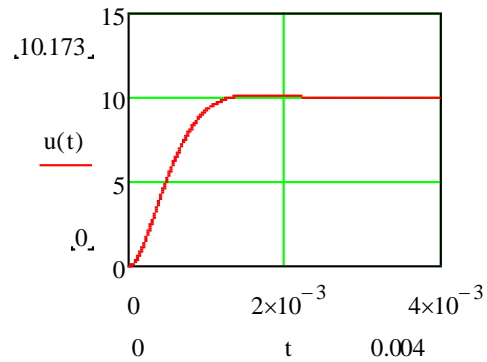
$$i(t) := X(p)_0 \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(500 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot t) \cdot e^{-2500 \cdot t}}{3}$$

$$u(t) := X(p)_1 \text{ invlaplace, } p \rightarrow 10.0 + (-5.0 + 6.454972243679028142i) \cdot e^{(-2500.0 + 1936.4916731037084426i)t}$$

Рисунок 11. Расчет операторным методом



a)



b)

Рисунок 12. Графики переходных процессов в RLC-цепи при использовании операторного метода; а) переходная характеристика тока; б) переходная характеристика напряжения

Приравняв вектор производных к нулю, можно получить систему алгебраических уравнений для анализа установившегося режима:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L_{уст}} \\ U_{C_{уст}} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L_{уст}} \\ U_{C_{уст}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} i_{L_{уст}} \\ U_{C_{уст}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

То есть для системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме $\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B$, значения установившихся значений вектора переменных состояния $x(t)$ находятся по формуле $x_{уст} = A^{-1} \cdot (-B)$.

В программной среде MathCAD:

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (-B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad +$$

Полученные установившиеся значения совпадают с найденными ранее графиками рисунок 12.

Составление структурной схемы RLC-цепи

Вернёмся к первоначальной системе уравнений для цепи:

$$\begin{cases} E = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + U_C(t) \\ i_L(t) = i_C(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} \end{cases}.$$

Применим к ней прямое преобразование Лапласа с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} E(p) = R \cdot I_L(p) + L \cdot p \cdot I_L(p) + U_C(p) \\ I_L(p) = C \cdot p \cdot U_C(p) \end{cases}.$$

Сгруппируем слагаемые в первом уравнении:

$$\begin{cases} E(p) = I_L(p) \cdot (R + L \cdot p) + U_C(p) \\ I_L(p) = C \cdot p \cdot U_C(p) \end{cases}.$$

Для составления структурной схемы выражаем из одного операторного уравнения изображение тока, а из второго – напряжение на емкости

$$\begin{cases} I_L(p) = \frac{E(p) - U_C(p)}{R + L \cdot p} = [E(p) - U_C(p)] \cdot \frac{1}{R + L \cdot p} \\ U_C(p) = \frac{I_L(p)}{C \cdot p} = I_L(p) \cdot \frac{1}{C \cdot p} \end{cases}.$$

Начнём составлять структурную схему RLC-цепи, начиная с первого уравнения, в котором присутствует изображение входного напряжения.

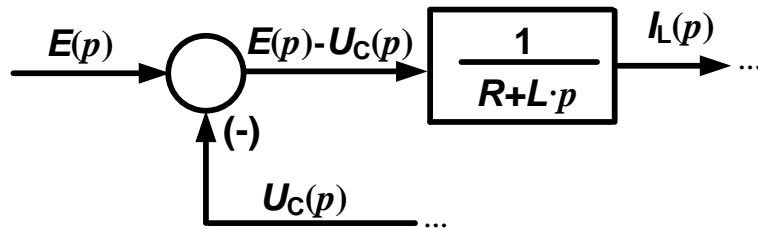


Рисунок 13. Структурная схема для первого уравнения системы

Используя второе оставшееся уравнение, строим окончательный вариант структурной схемы.

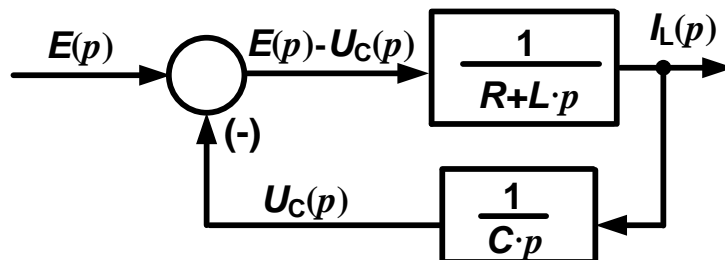


Рисунок 14. Структурная схема для системы уравнений

Производим имитационное моделирование полученной структурной схемы в программной среде MATLAB Simulink, используя произвольные параметры электрической цепи, принятые ранее при моделировании в MathCAD.

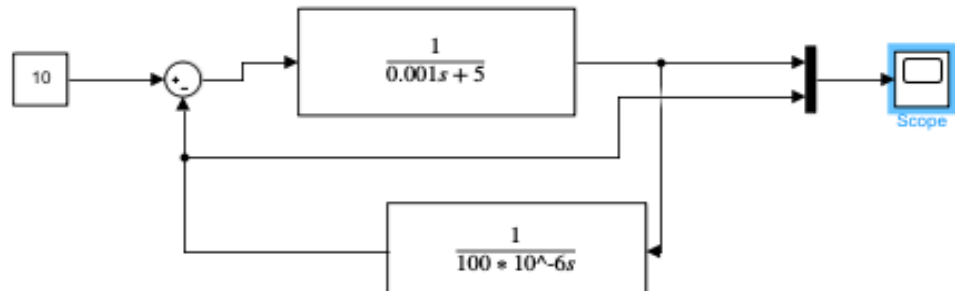


Рисунок 15. Моделирование RL-цепи структурная схема в программной среде MATLAB Simulink

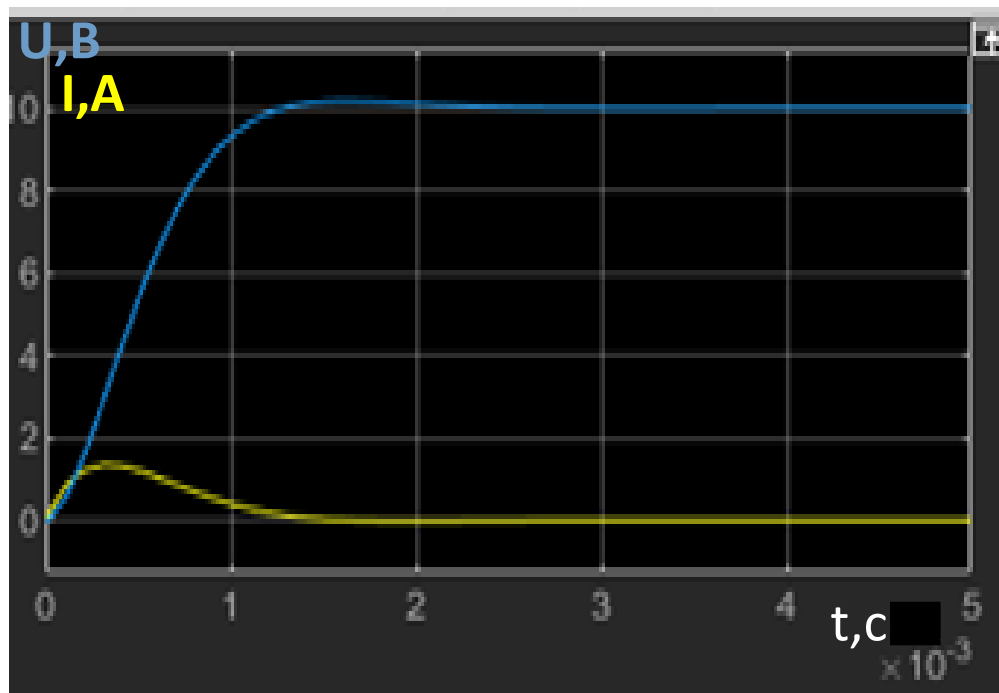


Рисунок 16. Переходная характеристика тока и напряжение

Результаты имитационного моделирования полностью совпадают с решением дифференциальных уравнений в среде MathCAD, что позволяет утверждать о правильности составленной структурной схемы RLC-цепи.

Вариант (свой вариант)

Исходные данные:

Параметры цепи приведены в таблице 1:

Таблица 1. Параметры цепи

E1	E2	R	L1	L2	C
В	В	Ом	мГн	мГн	мкФ
900	800	65	400	200	40

Схема цепи согласно данному варианту изображена на рисунке 1.

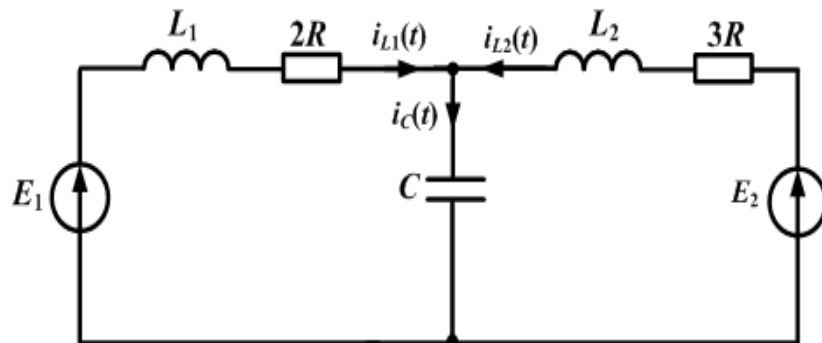


Рисунок 17. Схема цепи

Составим уравнение по первому и второму закону Кирхгофа

$$\begin{cases} i_{L1}(t) + i_{L2}(t) - i_C(t) = 0 \\ E_1 = 2R \cdot i_{L1}(t) + U_C(t) + L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} \\ E_2 = 3R \cdot i_{L2}(t) + L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} + U_C(t) \end{cases}$$

Представим полученную систему уравнений в нормальной форме Коши (разрешим относительно производных):

$$\begin{cases} \frac{di_{L1}(t)}{dt} = \frac{E_1}{L_1} - \frac{2R \cdot i_{L1}(t)}{L_1} - \frac{U_C(t)}{L_1} \\ \frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{E_2}{L_2} - \frac{3R \cdot i_{L2}(t)}{L_2} - \frac{U_C(t)}{L_2} \\ \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{i_{L1}(t)}{C} + \frac{i_{L2}(t)}{C} \end{cases}$$

Используя математическое описание RLC-цепи в нормальной форме Коши, можно записать решение методом Эйлера первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{i_{L1k+1} - i_{L1k}}{\Delta t} = \frac{E_1}{L_1} - \frac{2R \cdot i_{L1k}}{L_1} - \frac{U_{Ck}}{L_1} \\ \frac{i_{L2k+1} - i_{L2k}}{\Delta t} = \frac{E_2}{L_2} - \frac{3R \cdot i_{L2k}}{L_2} - \frac{U_{Ck}}{L_2} \\ \frac{U_{Ck+1} - U_{Ck}}{\Delta t} = \frac{i_{L1k}}{C} + \frac{i_{L2k}}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{L1k+1} = i_{L1k} + \Delta t \left(\frac{E_1 - 2R \cdot i_{L1k} - U_{Ck}}{L_1} \right) \\ i_{L2k+1} = i_{L2k} + \Delta t \left(\frac{E_2 - 3R \cdot i_{L2k} - U_{Ck}}{L_2} \right) \\ U_{Ck+1} = U_{Ck} + \Delta t \frac{i_{L1k} + i_{L2k}}{C} \end{cases}$$

В программной среде MathCAD задаем параметры цепи (рисунок 18)

Исходные данные

$E1 := 900 \text{ В}$ $E2 := 800 \text{ В}$ $L2 := 200 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$

$R := 65 \text{ Ом}$ $L1 := 400 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ $C := 40 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

Число точек Шаг расчета (интегрирования)

$N := 70000$ $k := 0..N$ $\Delta t := 10^{-6}$

Начальные условия

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ \Pi1_0 \\ \Pi2_0 \\ U_{C0} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода Эйлера

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ \Pi1_{k+1} \\ \Pi2_{k+1} \\ U_{Ck+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + \Delta t \\ \Pi1_k + \Delta t \cdot \left(\frac{E1 - 2 \cdot R \cdot \Pi1_k - U_{Ck}}{L1} \right) \\ \Pi2_k + \Delta t \cdot \left(\frac{E2 - 3 \cdot R \cdot \Pi2_k - U_{Ck}}{L2} \right) \\ U_{Ck} + \Delta t \cdot \left(\frac{\Pi1_k + \Pi2_k}{C} \right) \end{bmatrix} +$$

Рисунок 18. Расчет цепи численным методом Эйлера в программной среде MatCAD

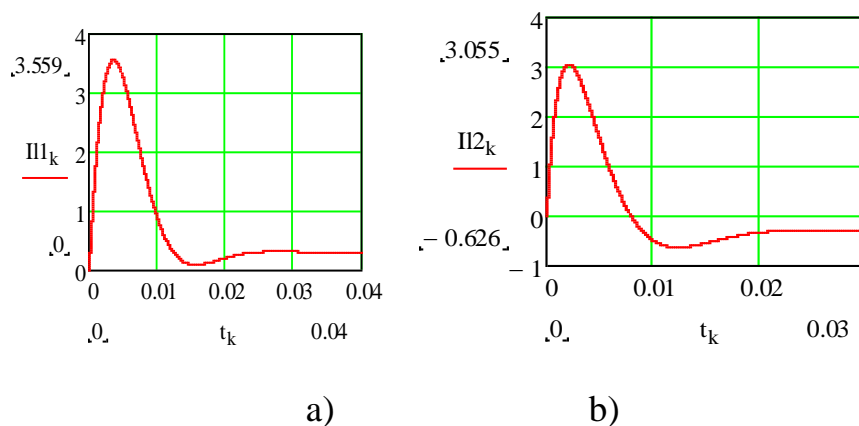


Рисунок 19. Переходный процесс а) тока I_{L1} , б) тока I_{L2}

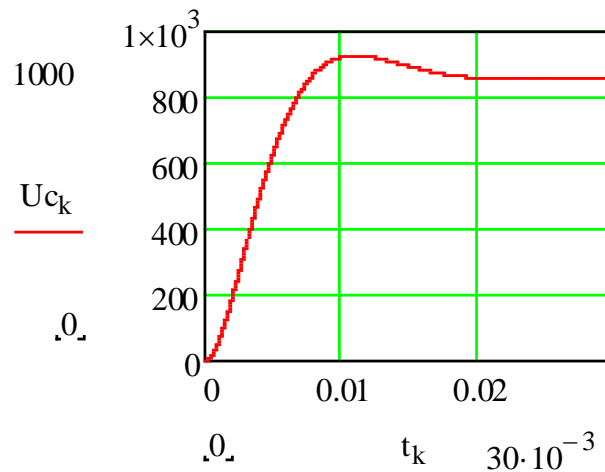


Рисунок 20. Переходный процесс напряжения

Для решения уравнений операторным методом, представим ее в векторно-матричной форме:

Вектор переменных состояний
$$\begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} = x(t)$$

Матрица коэффициентов перед неизвестными
$$\begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = A$$

Вектор свободных членов
$$\begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

Применяя к системе уравнений в векторно-матричной форме преобразование Лапласа, получим:

$$p \cdot \begin{bmatrix} I_{L1}(p) \\ I_{L2}(p) \\ U_c(p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \\ U_c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{L1}(p) \\ I_{L2}(p) \\ U_c(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1 \cdot p} \\ \frac{E_2}{L_2 \cdot p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Сгруппируем слагаемые с неизвестными:

$$\begin{bmatrix} I_{L1}(p) \\ I_{L2}(p) \\ U_C(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p - \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1 \cdot p} + i_{L1}(0) \\ \frac{E_2}{L_2 \cdot p} + i_{L2}(0) \\ U_C(0) \end{bmatrix}$$

Тогда решение системы легко найти методом обратной матрицы:

$$X(p) = A(p)^{-1} \cdot B(p).$$

Произведем расчеты в программной среде MathCAD

$$E1 := 900 \text{ В} \quad E2 := 800 \text{ В} \quad R := 65 \text{ Ом}$$

$$L1 := 400 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \quad L2 := 200 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \quad C := 40 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$i10 := 0 \quad i20 := 0 \quad uC0 := 0$$

$$A(p) := p - \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{R}{L1} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & -3 \cdot \frac{R}{L2} & -\frac{1}{L2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad B(p) := \begin{pmatrix} \frac{E1}{L1 \cdot p} + i10 \\ \frac{E2}{L2 \cdot p} + i20 \\ uC0 \end{pmatrix}$$

+

$$A(p) \rightarrow \begin{pmatrix} p + 325 & p & p + \frac{5}{2} \\ p & p + 975 & p + 5 \\ p - 25000 & p - 25000 & p \end{pmatrix}$$

$$X(p) := A(p)^{-1} \cdot B(p)$$

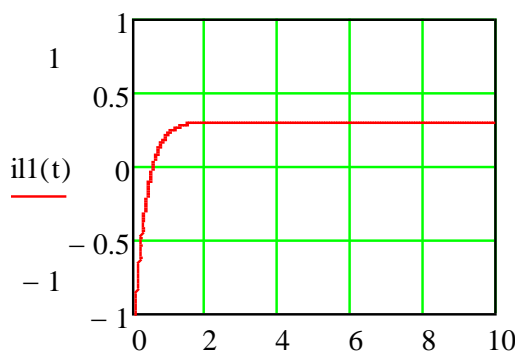
$$X(p) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{23373000 \cdot p + 112500000}{p \cdot (13125125 \cdot p + 40625000)} - \frac{39996000 \cdot p + 100000000}{p \cdot (13125125 \cdot p + 40625000)} \\ \frac{40516000 \cdot p + 100000000}{p \cdot (13125125 \cdot p + 40625000)} - \frac{22495500 \cdot p + 112500000}{p \cdot (13125125 \cdot p + 40625000)} \\ - \frac{21500 \cdot p - 537500000}{p \cdot (201925 \cdot p + 625000)} \end{bmatrix}$$

$$i1(t) := X(p)_0 \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{4}{13} - \frac{165292 \cdot e^{-\frac{25000 \cdot t}{8077}}}{105001}$$

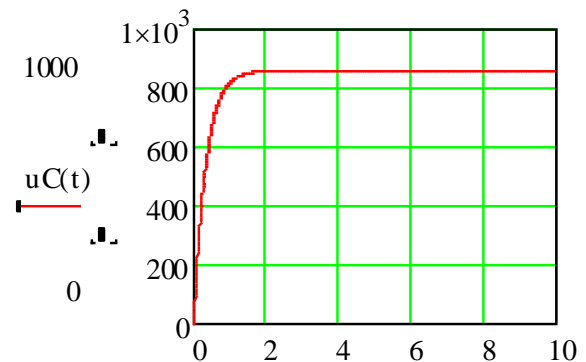
$$i2(t) := X(p)_1 \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{176472 \cdot e^{-\frac{25000 \cdot t}{8077}}}{105001} - \frac{4}{13}$$

$$uC(t) := X(p)_2 \text{ invlaplace, } p \rightarrow 860 - \frac{6947080 \cdot e^{-\frac{25000 \cdot t}{8077}}}{8077}$$

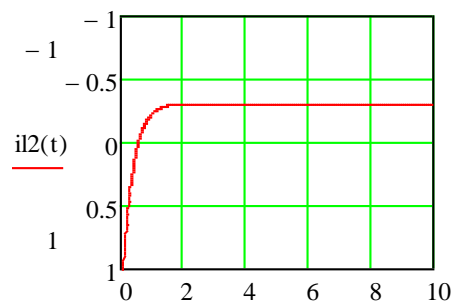
Рисунок 21. Расчет схемы операторным методом в программной среде MatCAD



a)



b)



c)

Рисунок 22. Графики переходных процессов в RLC-цепи при использовании операторного метода а) переходный процесс тока, б) напряжения на конденсаторе, с) тока

Приравняв вектор производных к нулю, можно получить систему алгебраических уравнений для анализа установившегося режима:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{L1\text{уст}} \\ I_{L2\text{уст}} \\ U_{\text{Суст}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{L1\text{уст}} \\ I_{L2\text{уст}} \\ U_{\text{Суст}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{L1\text{уст}} \\ I_{L2\text{уст}} \\ U_{\text{Суст}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{3R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

То есть для системы дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме $\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B$, значения установившихся значений вектора переменных состояния $x(t)$ находятся по формуле $x_{\text{уст}} = A^{-1} \cdot (-B)$.

В программной среде MathCAD:

$$A := \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -3 \cdot \frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (-B) = \begin{pmatrix} 0.308 \\ -0.308 \\ 860 \end{pmatrix}$$

Рисунок 23. Установившиеся значения найдены в программной среде MatCAD

Полученные установившиеся значения совпадают с найденными ранее графиками, следовательно, расчеты проведены верно

Составление структурной схемы RLC-цепи

Вернёмся к первоначальной системе уравнений для цепи:

$$\begin{cases} i_{L1}(t) + i_{L2}(t) - i_C(t) = 0 \\ E_1 = 2R \cdot i_{L1}(t) + U_C(t) + L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} \\ E_2 = 3R \cdot i_{L2}(t) + L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} + U_C(t) \end{cases}$$

Применим к ней прямое преобразование Лапласа с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} I_{L1}(p) + I_{L2}(p) - C \cdot p \cdot U_C(p) = 0 \\ E_1(p) = 2R \cdot I_{L1}(p) + U_C(p) + L_1 \cdot p \cdot I_{L1}(p) \\ E_2(p) = 3R \cdot I_{L2}(p) + L_2 \cdot p \cdot I_{L2}(p) + U_C(p) \end{cases}$$

Сгруппируем слагаемые в первом уравнении:

$$\begin{cases} U_C(p) = \frac{1}{C \cdot p} (I_{L1}(p) + I_{L2}(p)) \\ E_1(p) = I_{L1}(p)(2R + L_1 \cdot p) + U_C(p) \\ E_2(p) = I_{L2}(p)(3R + L_2 \cdot p) + U_C(p) \end{cases}$$

Для составления структурной схемы выражаем из одного операторного уравнения изображение тока, а из второго – напряжение на емкости, при этом в полученных уравнениях должны фигурировать операции **деления** на оператор Лапласа:

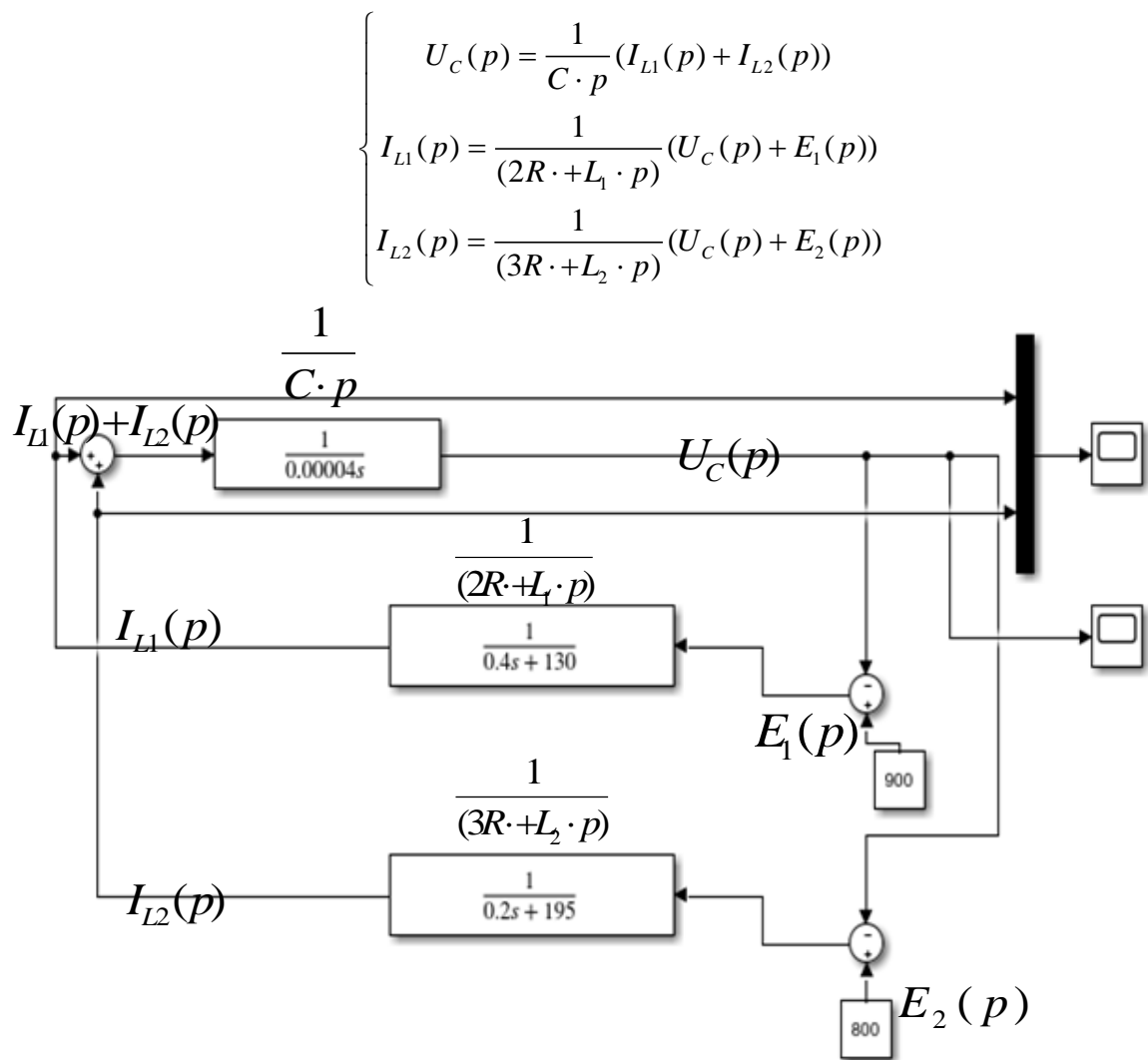


Рисунок 24. Моделирование структурной схемы в программной среде MATLAB Simulink

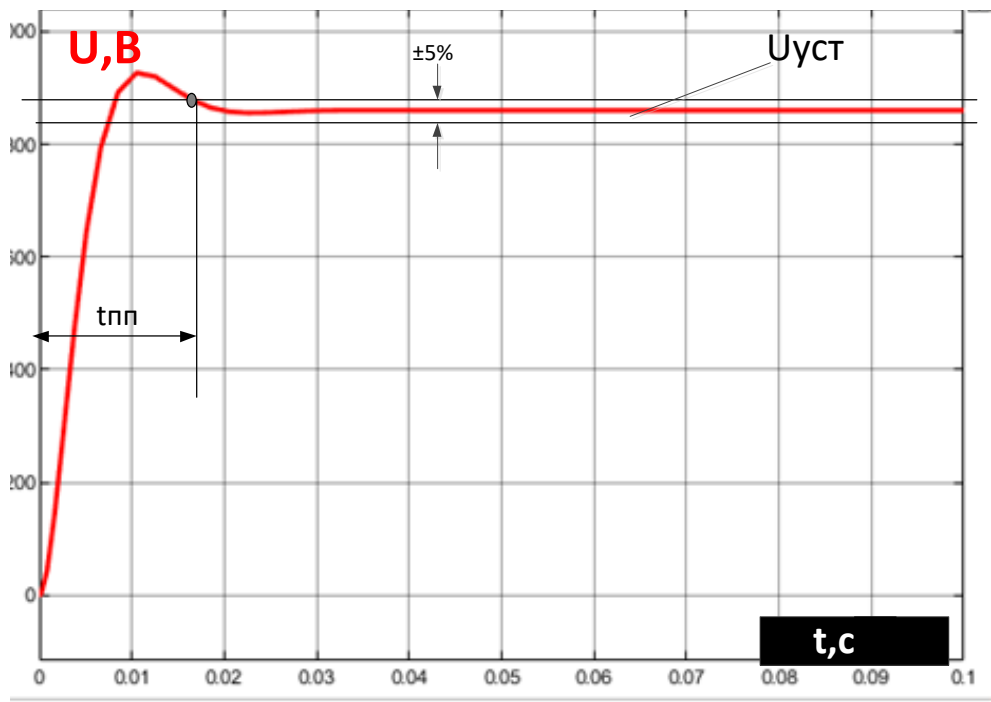


Рисунок 25. Переходный процесс напряжения U_c смоделированный в программной среде MATLAB

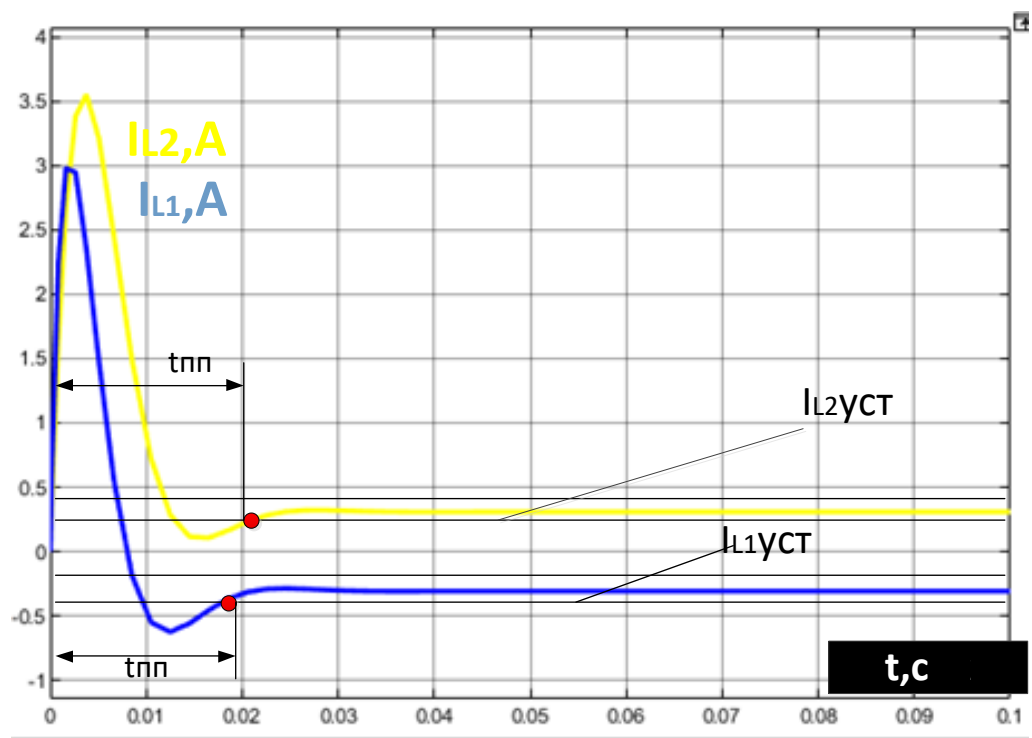


Рисунок 26. Переходный процесс токов

Результаты имитационного моделирования полностью совпадают с решением дифференциальных уравнений в среде MathCAD, что позволяет утверждать о правильности составленной структурной схемы RLC-цепи.

Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены три метода расчета электрической схемы (рисунок 17) согласно варианту и общий вариант. Проведя расчет численным методом Эйлера в программной среде MatCAD, получили переходные характеристики токов I_{L1} и I_{L2} (рисунок 19), напряжения U_C (рисунок 20). Время переходных процессов: $t_{IL1} = 0.025\text{с}$, $t_{IL2} = 0.02\text{с}$, $t_{Uc} = 0.02\text{с}$. Установившиеся значения токов и напряжения: $I_{L2} = -0.3\text{А}$, $I_{L1} = 0.3\text{А}$, $U_C = 860\text{В}$.

Проведя расчет операторным методом в программной среде MatCAD, получили переходные характеристики токов I_{L1} и I_{L2} , напряжения U_C (рисунок 22). Время переходных процессов: $t_{IL1} = 1.2\text{с}$, $t_{IL2} = 1.1\text{с}$, $t_{Uc} = 1\text{с}$. Установившиеся значения токов и напряжения: $I_{L2} = -0.3\text{А}$, $I_{L1} = 0.3\text{А}$, $U_C = 860\text{В}$.

Составив структурную схему цепи и смоделировав ее в программной среде MATLAB/Simulink (рисунок 24) получили переходные характеристики токов (рисунок 26) и напряжения (рисунок 25).

Время переходных процессов: $t_{IL1} = 0.019\text{с}$, $t_{IL2} = 0.02\text{с}$, $t_{Uc} = 0.018\text{с}$. Установившиеся значения токов и напряжения: $I_{L2} = -0.3\text{А}$, $I_{L1} = 0.3\text{А}$, $U_C = 860\text{В}$.

Проанализировав полученные результаты видим, что установившиеся значения во всех трех методах одинаковые, расчет произведен верно.