Лабораторные работы по теории вероятностей
и математической статистке

Лабораторная работа № 1

«Элементы комбинаторики»

При подсчете количества комбинаций элементов чаще всего используют перестановки, сочетания, размещения.

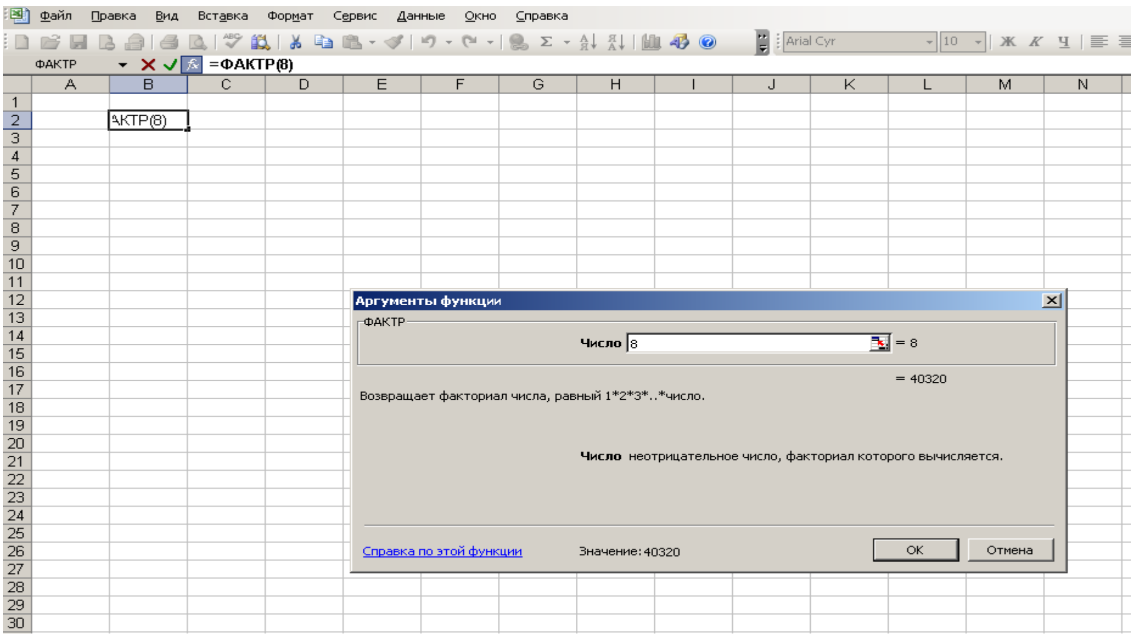
Перестановкой P_n из n элементов (например чисел 1,2,…,n) называется всякий упорядоченный набор из этих элементов.

$$P_n = n!$$

Для вычисления факториала в Excel используется функция ФАКТР(), относящаяся к математическим (Меню: Вставка — Функция — Математические). Аргументом функции является количество элементов n для которых нужно подсчитать перестановки.

Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе.

Решение: Нужно подсчитать сколько комбинаций можно составить из 8 элементов, отличающиеся друг от друга порядком следования элементов.



$$P_8 = 8! = 40320$$

Восемь человек могут стать в очередь к театральной кассе 40320 способами.

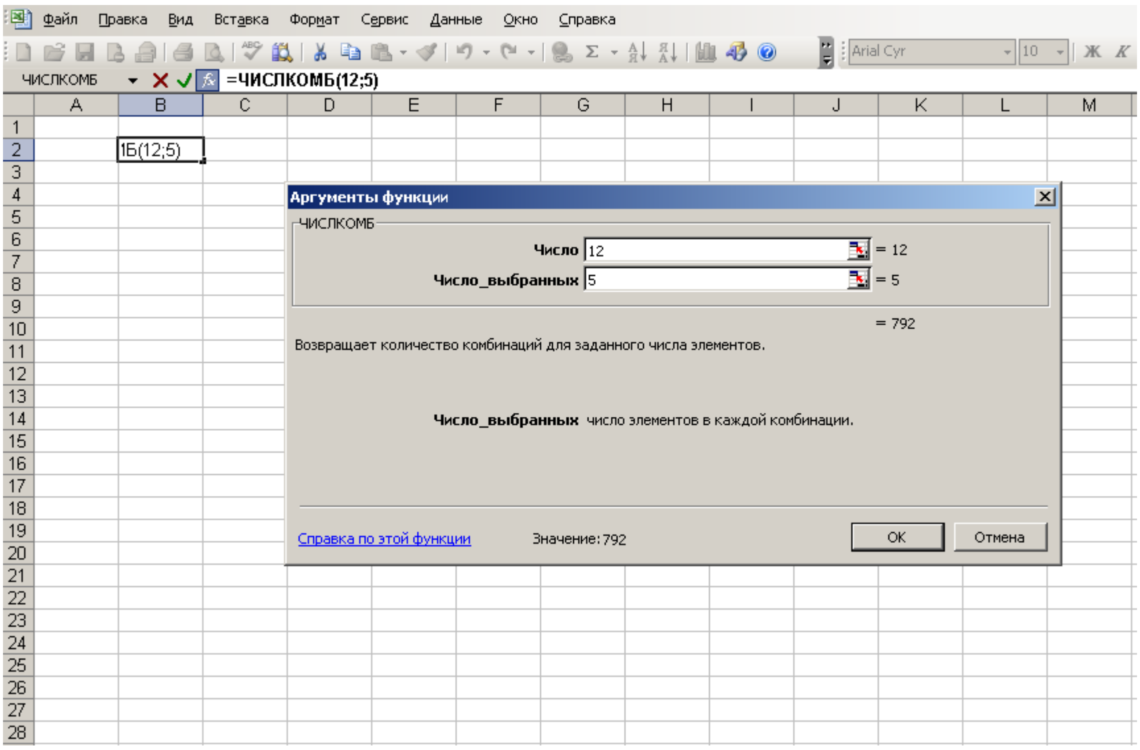
Сочетанием C_n^k из n элементов по k элементов называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы отличаются друг от друга составом элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Количество сочетаний в Excel можно вычислить с помощью функции ЧИСЛКОМБ(), также относящейся к математическим (Меню: Вставка — Функция — Математические). Аргументами функции является количество элементов n из которых выбирают наборы (Число) и количество элементов k, входящих в наборы (Число_выбранных) для которых нужно подсчитать сочетания.

Пример типовой задачи на сочетания: Сколькими способами из двенадцати человек можно создать комиссию из пяти членов.

Решение: Нужно подсчитать сколько комбинаций можно составить по 5 элементов из 12, отличающиеся друг от друга составом.



$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

Из 12 человек можно создать 792 варианта комиссии по 5 человек.

Размещением A_n^k из n элементов по k называется упорядоченный набор из k различных элементов некоторого n-элементного множества. Наборы отличаются друг от друга составом или порядком следования элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Для вычисления размещений записывают формулу в ручную, как отношение факториалов, используя функцию ФАКТР().

Пример типовой задачи на размещения. Алфавит некоторого языка содержит 30 букв. Сколько шестибуквенных «слов» (цепочка букв от пробела до пробела) можно составить из букв этого алфавита, если буквы в «словах» не повторяются.

Решение. Нужно подсчитать сколько комбинаций можно составить по 6 элементов из 30, отличающиеся друг от друга составом или порядком следования элементов.

$$A_{30}^6 = \frac{30!}{(30-6)!} = \frac{30!}{24!}$$

Отдельно вычислим 30!=ФАКТР(30)=$2{,}65252859812191 \cdot 10^{32}$ и 24! =ФАКТР(24)=$6{,}2044840173324 \cdot 10^{23}$ и найдем их отношение.

$$A_{30}^6 = \frac{30!}{24!} = 427518000$$

Рассмотрим пример вычисления вероятности по классической формуле, используя рассмотренные функции.

Комбинации с повторениями элементов:

Перестановки с повторениями из n элементов, где k_1 , k_2, ... , k_m количества повторяющихся элементов $\widetilde{P}_n = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1! k_2! ... k_m!}$ $(k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$.

Сочетания с повторениями из n элементов по k : $\widetilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Размещения с повторениями из n элементов по k : $\widetilde{A}_n^k = n^k$

Задачи.

1.У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин? Порядок важен.

2.У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех, чтобы отпустить на свободу?

3.В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

4.Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

5.Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

6.Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

7.Саша, Петя, Денис, Оля, Настя часто ходят в кафе. Каждый раз, обедая там, они рассаживаются по-разному. Сколько дней друзья смогут это сделать без повторения?

8.В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места?

9.Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

10.В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

11.В кабинете заведующего ювелирного магазина имеется код, состоящий из двух различных гласных букв русского алфавита, за которыми следуют 3 различные цифры. Сколько вариантов придется перебрать мошеннику, чтобы раздобыть драгоценности, которые там хранятся?

12.Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из 8 тканей?

13.В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

14.В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?

15.Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?

16.Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?

17.Секретный замок состоит из 4 барабанов, на каждом из которых можно выбрать цифры от 0 до 9. Сколько различных вариантов выбора шифра существует?

18.Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

19.Сколько различных музыкальных фраз (последовательность звуков) можно составить из 6 нот, если не допускать в одной фразе повторения звуков? (Всего нот на клавиатуре фортепьяно 88).

20.В группе 16 юношей и 14 девушек. Выбирают делегацию из 5 человек. Сколько комбинаций по 3 девушки и 2 юноши можно составить?

21.В мешке лежат 25 красных, 19 синих и 16 зелёных шарфов, одинаковых на ощупь. Сколько комбинаций по 4 красных, 3 синих и 2 зелёных шарфа можно составить?

22. Из 5 лётчиков, 7 штурманов и 5 стюардесс необходимо сформировать экипаж, в который должны войти 2 лётчика, 1 штурман и 3 стюардессы. Сколькими способами это можно сделать?

23.В пачке 30 пронумерованных карточек. Сколько комбинаций по 4 карточки можно составить?

24.Среди 25 участников розыгрыша лотереи находятся 10 девушек. Разыгрывается 5 призов. Сколькими способами в число призеров могут попасть две девушки?

25. В ящике лежат 8 чёрных и 12 синих перчаток. Сколько вариантов комплектов по две черных и две синих перчатки можно составить?

Задачи по вариантам

Номер варианта	Номер задачи							
1	1	2	4	7	11	18	21	24
2	3	5	8	9	14	16	19	25
3	4	6	10	12	13	17	22	23
4	1	5	9	14	17	19	21	24
5	3	6	9	13	15	18	21	25
6	2	4	7	12	19	20	22	23
7	5	6	9	11	16	17	21	24
8	2	7	10	15	17	19	22	25
9	3	4	6	8	12	16	21	23
10	5	9	12	13	15	19	22	25
11	1	4	7	10	16	17	21	24
12	3	5	9	14	15	18	20	23
13	4	8	11	16	17	19	21	25
14	7	9	12	15	19	20	22	23
15	2	3	6	12	14	18	21	24

Лабораторная работа № 2

«Классическая формула вероятности»

Вероятностью *P(A)* события *A* называется отношение числа благоприятствующих этому событию случаев (исходов опыта) *m* к числу всех возможных случаев (исходов опыта) *n*, образующих полную группу несовместных равновозможных событий:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Иногда вероятность события *A* удобно вычислять через вероятность противоположного события $\overline{A}$:

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Если *A* - вероятность наступления события хотя бы один раз, а

$\overline{A}$ - вероятность не наступления события ни разу, тогда

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Пример 1.

В коробке 6 красных и 4 синих кубика. Наудачу извлекается три кубика. Какова вероятность того, что хотя бы один кубик синий?

Решение:

Событие *A* - хотя бы один кубик из четырех извлеченных синий;

Противоположное событие $\overline{A}$ - ни одного синего кубика среди четырех извлеченных (все кубики красные).

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3}$

m = ЧИСЛКОМБ(6; 3) = 20

n = ЧИСЛКОМБ(10; 3) = 120

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{20}{120} \approx 0{,}83$

Пример 2.

В коробке лежат 8 чёрных и 6 белых шарфов. Наудачу извлекли 5 шарфов.

Какова вероятность того, что 3 из них белые, а 2 – чёрные?

Решение.

A – среди 5 извлеченных шарфов 3 - белые, а 2 – чёрные.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3\cdot C_8^2}{C_{14}^5}$$

m = ЧИСЛКОМБ(6; 3)* ЧИСЛКОМБ(8; 2) = 560

n = ЧИСЛКОМБ(14; 5) = 2002

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3\cdot C_8^2}{C_{14}^5}=\frac{560}{2002}\approx 0{,}28$$

Задачи

1.Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное число; б) случайно названное число, цифры которого различны.

2.Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится изображение герба.

3.В коробке семь одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу извлекают все кубики по очереди. Найти вероятность того, что номера кубиков появятся в убывающем порядке.

4.В пачке 30 пронумерованных карточек. Наудачу взяли 3 карточки. Какова вероятность того, что взяли карточки с номерами 12, 24, 30?

5.Среди 25 участников розыгрыша лотереи находятся 10 девушек. Разыгрывается 5 призов. Вычислить вероятность того, что обладателями двух призов окажутся девушки.

6.В коробке 4 белых и 5 чёрных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна из футболок белая, другая чёрная.

7.При подготовке к зачёту студент выучил 60 из необходимых 90 вопросов.

Какова вероятность того, он сдаст зачёт, если для этого нужно ответить не менее чем на два из трёх предложенных вопросов?

8.Из партии, состоящей из 20 плейеров, для проверки произвольно отбирают три плейера. Партия содержит 2 плейера с дефектами. Какова вероятность того, что в число отобранных плейеров попадут только два бракованных плейера?

9.Потребители сдали в ремонт 16 компьютеров. Из них 8 нуждаются в мелком ремонте. Мастер берет 6 компьютеров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в мелком ремонте?

10.В туристической группе 14 женщин и 9 мужчин. Среди них разыгрываются 6 билетов на бесплатное посещение театра. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся три женщины и трое мужчин?

11.В ящике лежат 6 чёрных и 6 синих перчаток. Наудачу извлекли 7 перчаток. Какова вероятность того, что 3 из них синие, а 4 – чёрные?

12.В коробке 12 мячиков, из которых 3 красных, 5 зелёных и 4 жёлтых. Наудачу взяли 3 мячика. Какова вероятность того, что все три мячика разного цвета?

13.В партии из 12 шкафов при транспортировке 4 получили повреждение. Наудачу выбрано 6 шкафов. Вычислить вероятность того, что 2 шкафа из них имеют повреждения.

14.В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Наугад вынимают двух котят. Какова вероятность того, что они разного цвета?

15.С блюда с 30 пирожками взяли наугад 3. Какова вероятность того, что хоть один пирожок окажется с грибами, если их на блюде лежало шесть.

16.Молодой человек забыл номер своего приятеля, но помнит из него первые 4 цифры. В телефонном номере 7 цифр. Какова вероятность, что молодой человек дозвонится до своего приятеля, если наберёт номер случайным образом?

17.Сейфовый замок имеет 4 диска с пятью секторами, на каждом из которых записана одна из цифр от 0 до 4 . Какова вероятность открыть замок сейфа, набрав 4 цифры наугад?

18.Владелец лотерейной карточки зачёркивает 6 номеров из 49. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже?

19.В группе 16 юношей и 14 девушек. Выбирают делегацию из 5 человек. Какова вероятность того, что при случайном выборе в состав делегации попадут 3 девушки и два юноши?

20.В мешке лежат 25 красных, 19 синих и 16 зелёных шарфов, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 9 шарфов. Вычислить вероятность того, что взяли 4 красных, 3 синих и 2 зелёных шарфа.

21.Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: а) тройка, семёрка, дама; б) тройка, семёрка, туз; в) три туза?

22.Трёх стюардесс для рейса выбирают по жребию из 25 девушек, среди которых 5 блондинок, 15 шатенок и 5 брюнеток. Какова вероятность того, что среди выбранных девушек все будут иметь разный цвет волос?

23.В ящике лежат 15 игрушек, среди которых 4 с дефектами. Найти вероятность того, что среди 7 наудачу вынутых игрушек одна окажется с дефектом.

24.Среди 17 желающих поехать на модный курорт 10 женщин. Определить вероятность того, что среди 12 случайным образом купивших путёвки оказались 7 женщин?

25.В непрозрачной шкатулке лежат 7 белых, 6 красных и 9 чёрных бусин. Мастерица берет 5 бусин наугад. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 чёрных и 1 красная бусины?

26.Из партии, состоящей из 22 пар ботинок, для проверки отбирают 6 пар. Партия содержит 3 бракованные пары. Какова вероятность того, что в число отобранных ботинок войдёт не более одной бракованной пары?

27.На прилавке лежат 15 дынь, среди которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди четырёх отобранных продавцом дынь будет хотя бы одна нестандартная?

28.Кодовый замок содержит 5 цифр, которыми могут быть числа от 0 до 9. Замок открывается при наборе только одной единственной комбинации из пяти цифр. Какова вероятность открыть этот замок, набрав случайным образом 5 цифр?

29.К празднику в фирме формируют наборы из 45 шейных платков, 30 булавок для галстука и 25 дезодорантов. Менеджеру нравится только по одному предмету из всего предложенного ассортимента − один платок, одна булавка и один дезодорант. Какова вероятность того, что случайным образом составленный набор будет содержать все три предмета, понравившиеся менеджеру?

30.Из 5 лётчиков, 7 штурманов и 5 стюардесс необходимо сформировать экипаж, в который должны войти 2 лётчика, 1 штурман и 3 стюардессы. Какова вероятность выбора одного конкретного экипажа?

Задачи по вариантам

Номер варианта	Номер задачи								
1	1	4	9	8	12	17	23	27	29	30
2	2	6	7	11	15	19	21	24	26	28
3	4	5	16	20	21	23	24	27	28	30
4	3	10	12	13	14	18	20	22	25	29
5	5	6	9	10	11	13	16	19	23	25
6	6	8	12	14	15	17	18	22	24	28
7	1	3	7	14	15	16	18	20	23	25
8	2	4	8	10	12	14	22	24	28	30
9	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
10	6	8	10	14	16	18	25	26	27	28
11	2	5	11	13	17	20	23	25	26	27
12	3	10	12	17	18	19	22	24	27	29
13	4	9	13	16	19	20	21	23	25	26
14	6	11	14	15	17	18	19	22	24	28
15	7	12	15	16	18	20	21	27	29	30

Лабораторная работа № 3.

Повторные независимые испытания

Пусть производится несколько испытаний, в каждом из которых может появиться событие A. Если вероятность события A в каждом испытании не зависит от того, появилось или не появилось это событие в других испытаниях, то такие испытания называются независимыми относительно события A.

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью $P(A) = p$. Вероятность того, что событие A не наступит, для каждого испытания равна

$$P(A) = 1 - p = q .$$

Вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A появится ровно k раз ($P_n(k)$), вычисляется по формуле, называемой формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k}$$

На практике формула Бернулли используется в случае когда n не превышает 10 ($n \leq 10$).

Если требуется вычислить вероятность того, событие А наступит не менее k_0 раз в n испытаниях, то используют формулу сложения вероятностей:

$$P_n(k \geq k_0) = P_n(k_0) + P_n(k_0+1) + P_n(k_0+2) + \ldots + P_n(n)$$

Формула Бернулли представляется функцией БИНОМРАСП(*k, n, p*, ЛОЖЬ) см. рис 1, где Число_успехов (*k*) – количество появления события, Число_испытаний (*n*) – число независимых испытаний; Вероятность_успеха (*p*) – вероятность появления события; Интегральная - "ЛОЖЬ" (или 0) – указание на то, что определяется вероятность появления ровно k событий. В случае, когда последний аргумент функции равен "ИСТИНА" (или 1), функция возвращает вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не более k_0 раз.

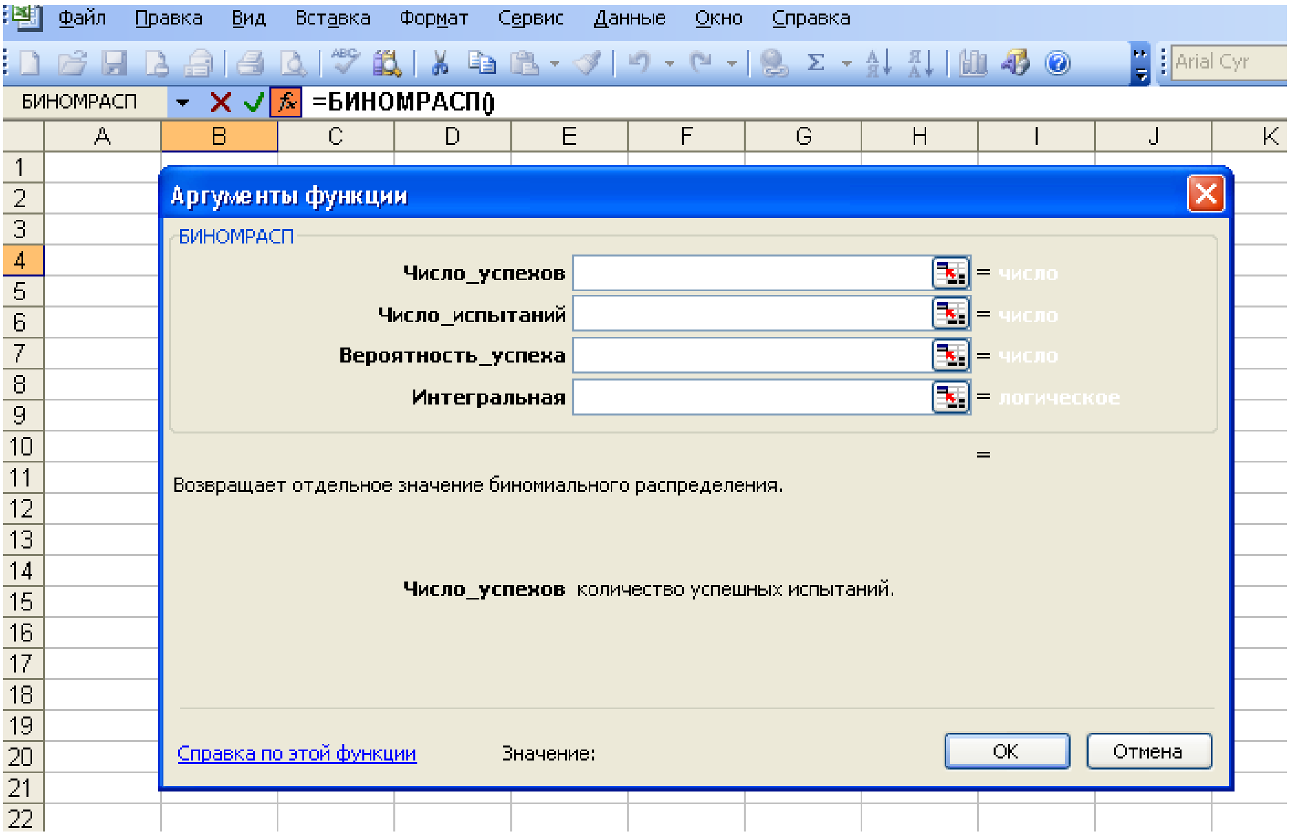


Рис. 1.

Варианты использования функции БИНОМРАСП() для вычисления вероятности события:

1)Событие наступит ровно *k* раз: = БИНОМРАСП(*k; n; p; 0*)

2)Событие наступит не более *k* раз (от 0 до *k*): = БИНОМРАСП(*k; n; p; 1*)

3)Событие наступит менее *k* раз (от 0 до *k-1*):

= БИНОМРАСП(*k-1; n; p; 1*)

4)Событие наступит не менее *k* раз (от *k* до *n*):

= 1-БИНОМРАСП(*k-1; n; p; 1*)

5)Событие наступит более *k* раз (от *k+1* до *n*):

=1- БИНОМРАСП(*k; n; p; 1*)

6)Событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз (от k_1 до k_2):

= БИНОМРАСП(k_2*; n; p; 1*)- БИНОМРАСП(k_1*-1; n; p; 1*)

Пример. В освещении помещения офиса используются 8 лампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение года останется исправными: а) половина лампочек; б) не менее половины лампочек.

Решение.

а) $P = C_8^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^4 = \text{БИНОМРАСП}(4;8;0{,}8;0) = 0{,}045875$

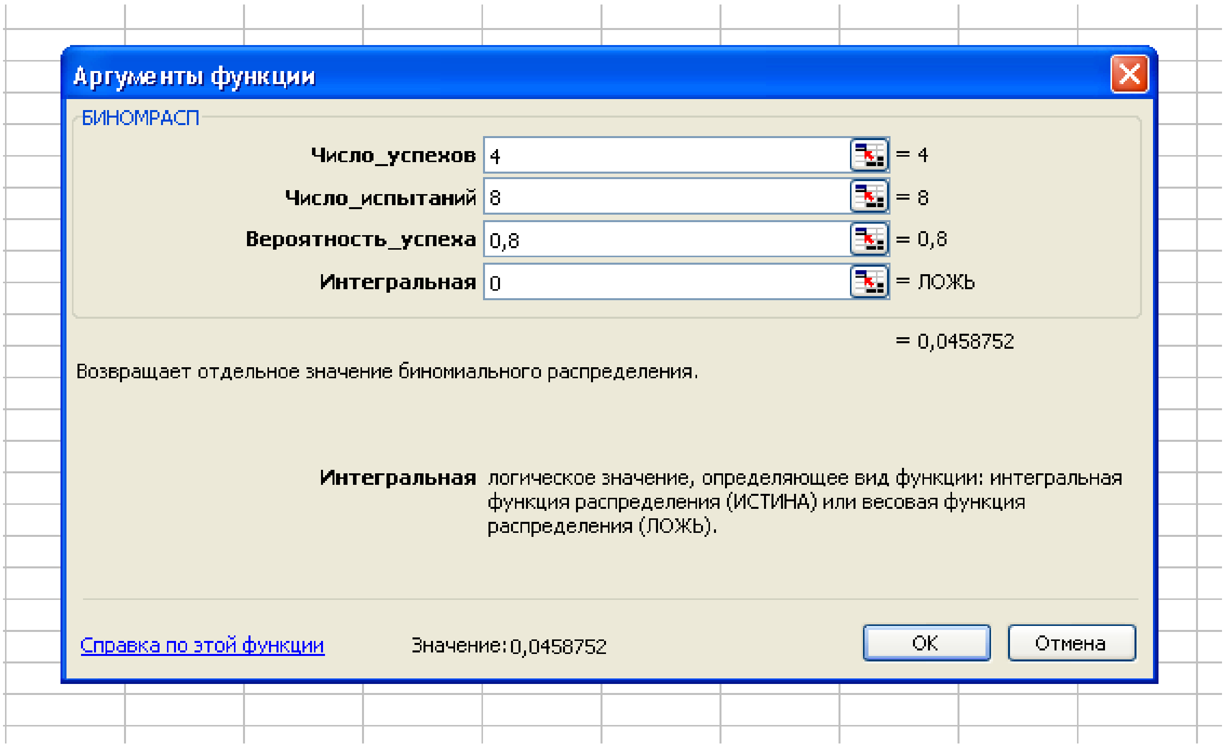


Рис. 2

б) $P = 1 - \text{БИНОМРАСП}(3;8;0{,}8;1) = 1 - 0{,}010406 = 0{,}989594$

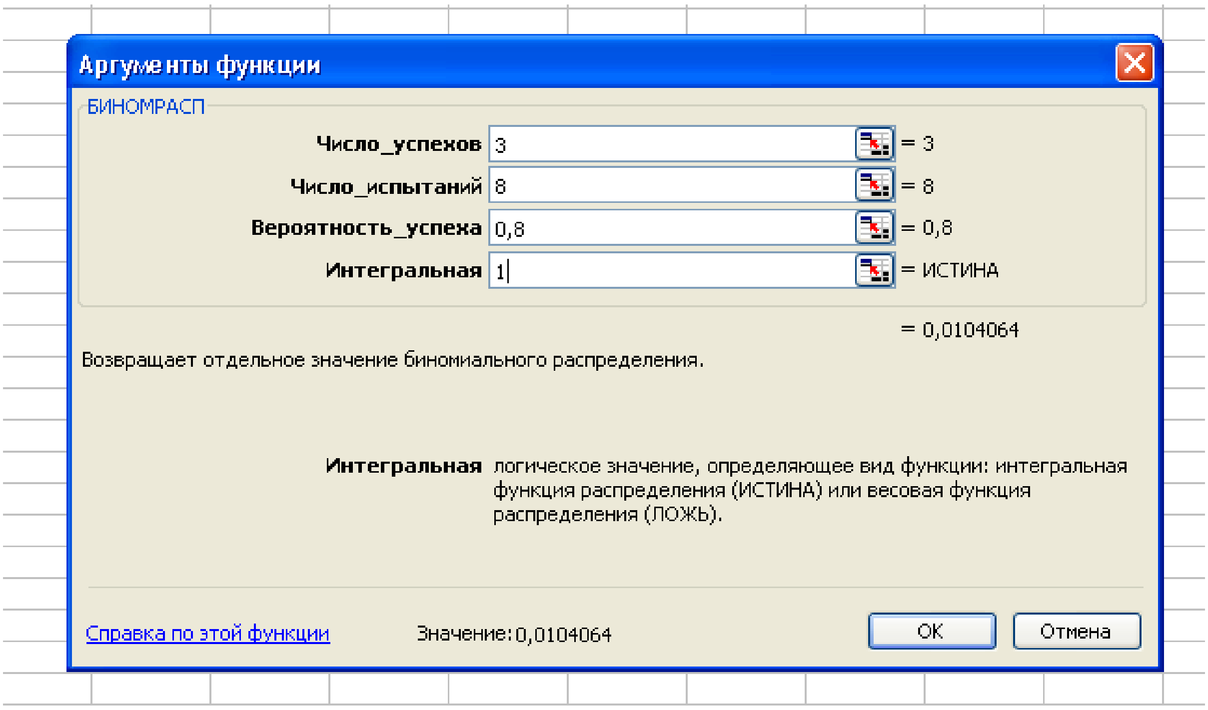


Рис. 3

Если число испытаний n достаточно велико ($n > 10$), то для вычисления вероятности того, что событие А наступит ровно k раз, используется локальная теорема Лапласа.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x) ,$$

где $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Для определения вероятности применяется функция НОРМРАСП(). Аргументами функции являются количество появлений события k, среднее (математическое ожидание количества появлений события в n испытаниях) $n \cdot p$, стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонение количества появлений события в n испытаниях) $\sqrt{npq}$ ($q = 1 - p$), логическая переменная Интегральная, принимающая значение «ЛОЖЬ» (или 0) если определяется вероятность появления ровно k событий или «ИСТИНА» (или 1), если определяется вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не менее k раз.

Пример. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение.

n = 243, k = 70, p = 0,25, q = 1- p = 1- 0,25 = 0,75

Среднее $n \cdot p = 243 \cdot 0{,}25 = 60{,}75$

Отклонение $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = КОРЕНЬ(243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75) = 6{,}75$

P = НОРМРАСП(70*; 60,75; 6,75; 0*) = 0,023111

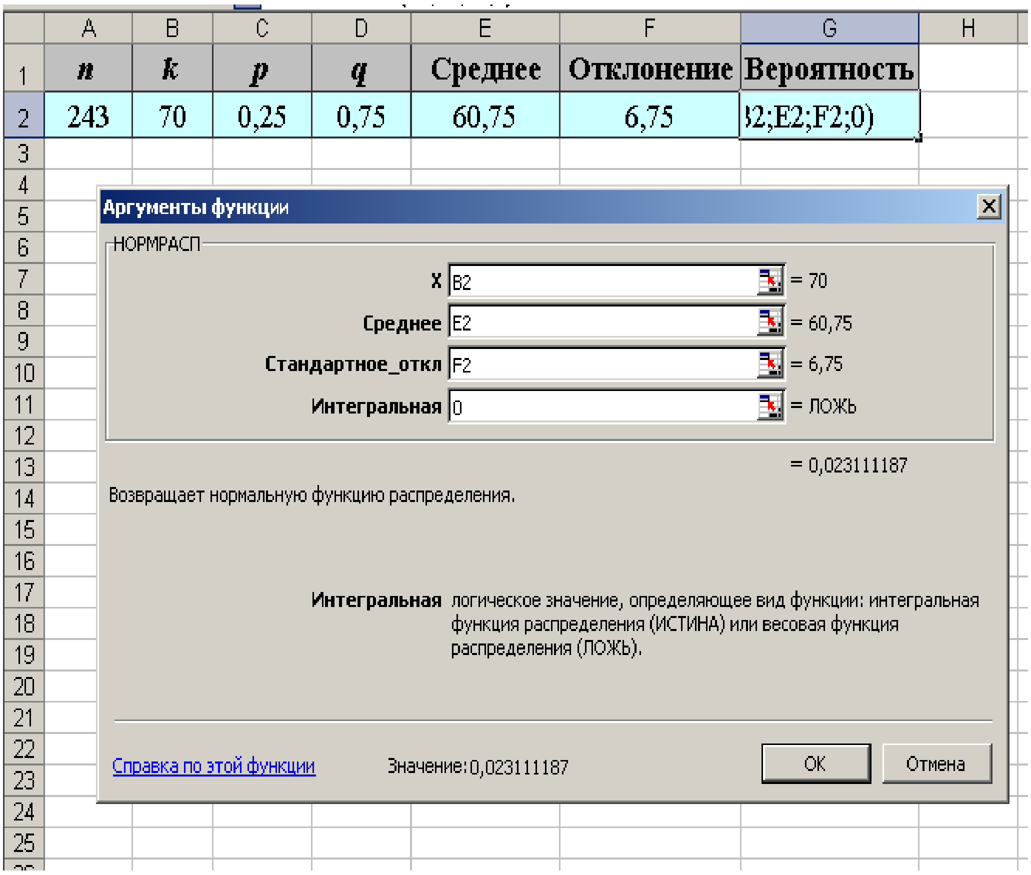


Рис. 4

Ответ: $P = 0{,}023111$

Если, при достаточно большом числе испытаний, необходимо вычислить вероятность наступления события от k_1 до k_2 раз ($P_n(k_1,k_2)$), используют интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

При вычислении данной вероятности в Excel используют формулу:

$$P_n(k_1,k_2) \approx P_n(k \geq k_2) - P_n(k \geq k_1 - 1)$$

Варианты применения функции НОРМРАСП():

1) Событие наступит ровно k раз: = НОРМРАСП(k; $n \cdot p$; $\sqrt{npq}$; 0)

2) Событие наступит не более k раз (от 0 до k):

$= \text{НОРМРАСП}(k;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)$

3) Событие наступит менее *k* раз (от 0 до *k-1*):

$= \text{НОРМРАСП}(k\text{-}1;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)$

4) Событие наступит не менее *k* раз (от *k* до *n*):

$= 1\text{-НОРМРАСП}(k\text{-}1;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)$

5) Событие наступит более *k* раз (от *k+1* до *n*):

$=1\text{- НОРМРАСП}(k;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)$

6) Событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз (от k_1 до k_2):

$= \text{НОРМРАСП}(k_2;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)\text{- НОРМРАСП}(k_1\text{-}1;\ n\cdot p\ ;\ \sqrt{npq}\ ;\ 1)$

Пример. Вероятность появления на занятиях студента равна 0,2. В семестре всего 385 занятий. Какова вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 76 занятиях?

Решение.

$n = 385,\ k_1 = 76,\ k_2 = 385\ ,\ p = 0{,}2,\ q = 1\text{-}\ p = 1\text{-}\ 0{,}2 = 0{,}8$

Среднее $n\cdot p=385\cdot 0{,}2=77$

Отклонение $\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{385\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=КОРЕНЬ(385\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8)=7{,}85$

P =1- НОРМРАСП(76; 77; 7,85; 1) = 1- 0,44930724 = 0,55069276

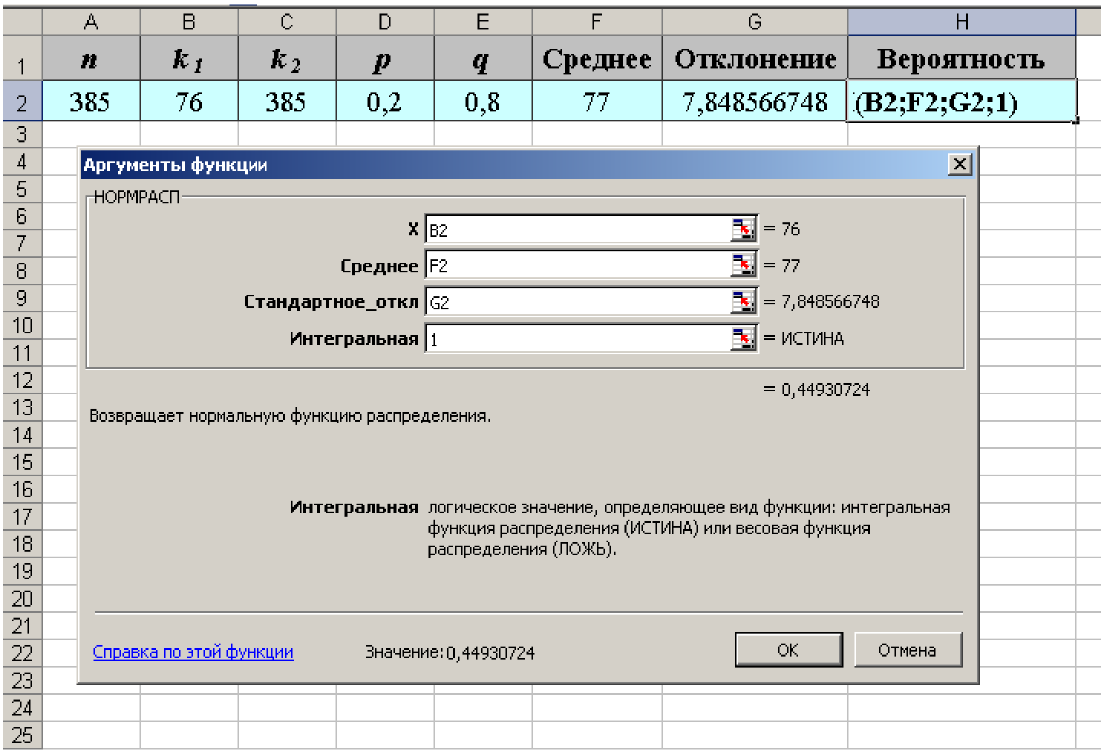


Рис. 5

Ответ: $P = 0{,}55069276$

Если вероятность наступления события p достаточно мала, и при этом число испытаний n достаточно велико, то для вычисления вероятности того, что событие A наступит ровно k раз, используется формула Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},\ \text{где}\ \lambda=n\cdot p$$

Для вычисления вероятности применяется функция ПУАССОН() (рис. 6). Аргументами функции являются количество появлений события k (в функции X), среднее (математическое ожидание количества появлений события в n испытаниях) $n\cdot p$, логическая переменная Интегральная, принимающая значение «ЛОЖЬ» (0) если определяется вероятность появления ровно k событий или «ИСТИНА» (1), если определяется вероятность того, что в n испытаниях событие наступит не более k раз.

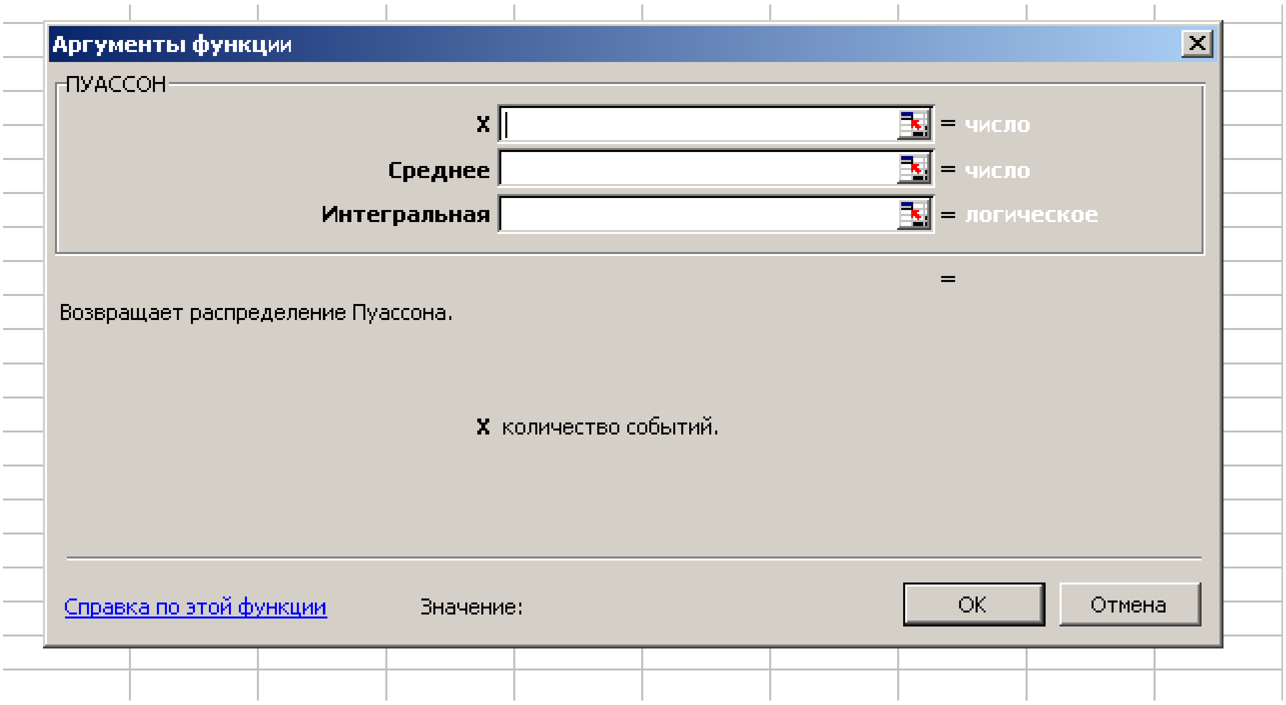


Рис. 6

Варианты применения функции ПУАССОН():

1)Событие наступит ровно k_0 раз в n испытаниях:

= ПУАССОН(k_0; $n\cdot p$; 0)

2)Событие наступит не более k_0 раз в n испытаниях:

$= \text{ПУАССОН}(k_0\ ;\ n \cdot p\ ;\ 1)$

3)Событие наступит более k_0 раз в n испытаниях:

$= 1 - \text{ПУАССОН}(k_0\ ;\ n \cdot p\ ;\ 1)$

4)Событие наступит не менее k_0 раз в n испытаниях:

$= 1 - \text{ПУАССОН}(k_0 - 1\ ;\ n \cdot p\ ;\ 1)$

5)Событие наступит менее k_0 раз в n испытаниях:

$= \text{ПУАССОН}(k_0 - 1;\ n \cdot p\ ;\ 1)$

6)Событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз (от k_1 до k_2):

$= \text{ПУАССОН}(k_2;\ n \cdot p\ ;\ 1) - \text{НОРМРАСП}(k_1 - 1;\ n \cdot p\ ;\ 1)$

Пример. Вероятность выигрыша в лотерее равна 0,001. Какова вероятность

того, что среди 1 000 наугад купленных билетов: а) ровно 5 выигрышных; б) не менее 5 выигрышных?

Решение.

а) $p = 0{,}001$; $n = 1000$; $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$; $k_0 = 5$

$P_{1000}(5)$ = ПУАССОН(5; 1; 0) = 0,003065662

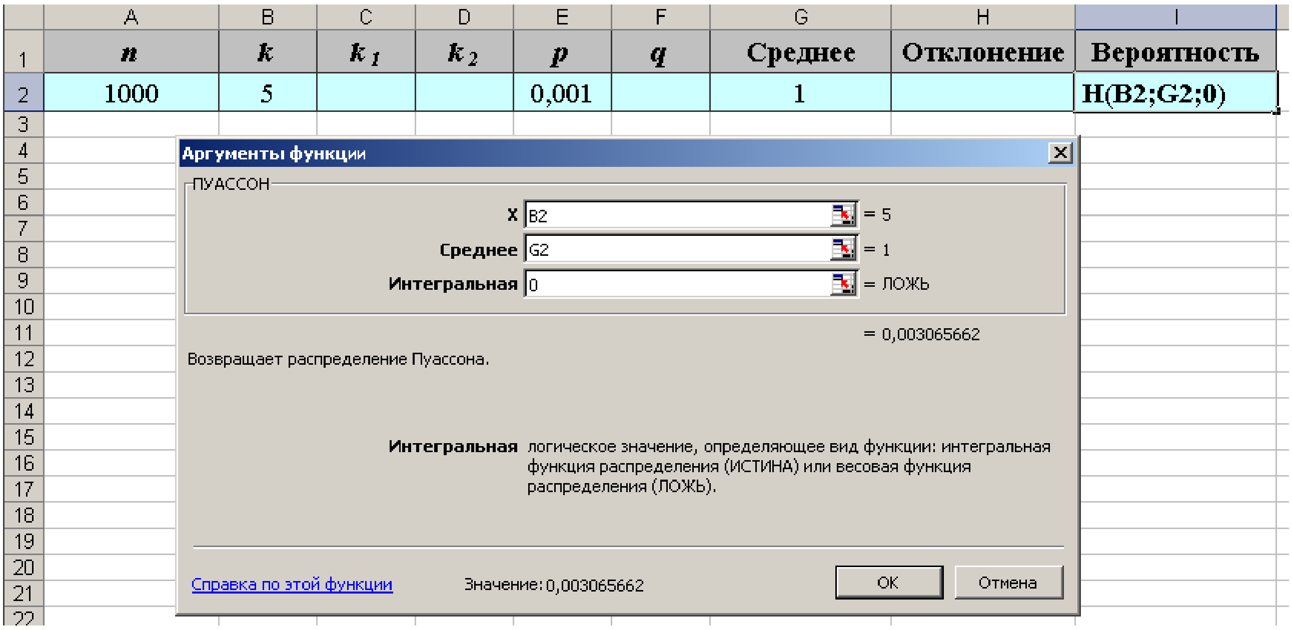


Рис. 7

Ответ: $P = 0{,}003065662$

б) $p = 0{,}001$; $n = 1000$; $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$; $k_0 = 5$

$P_n(k \geq 5) = 1$ - ПУАССОН($4;\ 1;\ 1$) = 1- 0,999405815 = 0,00594185

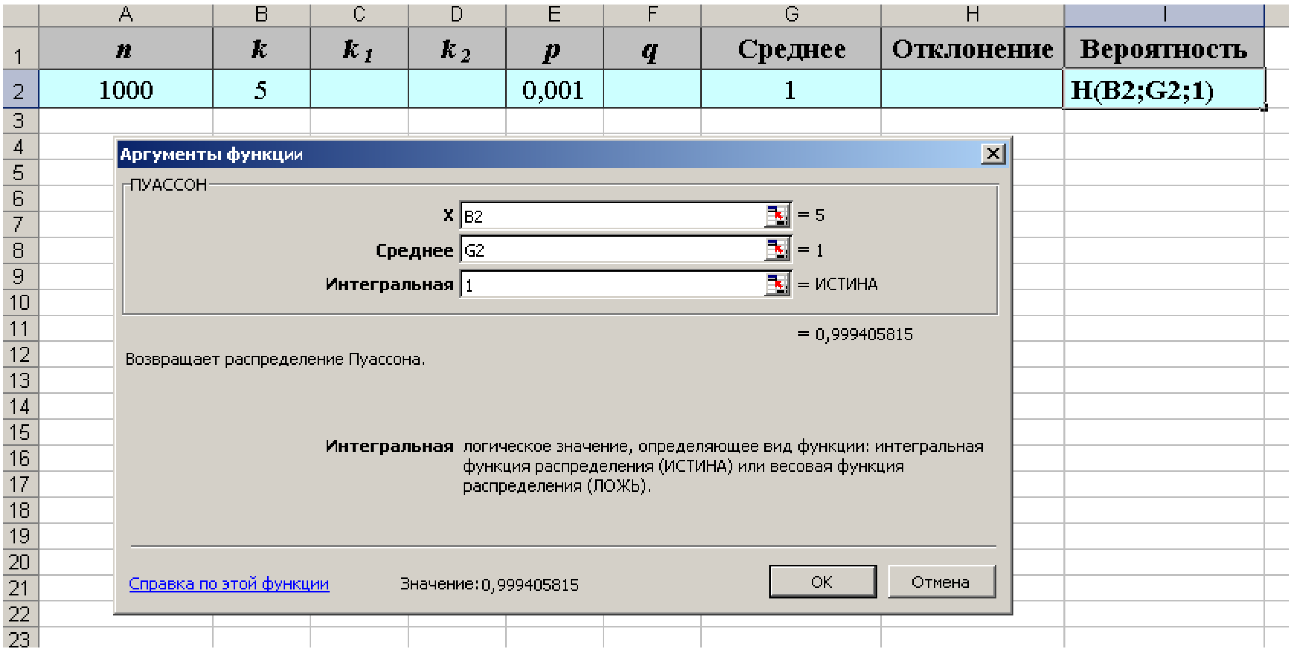


Рис. 8.

Ответ: $P = 0{,}00594185$

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число наступлений события оценивается с помощью неравенства:

$$n \cdot p - q \leqslant k_0 < n \cdot p + p$$

Из полученного интервала выбирают натуральное число.

Пример.

Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Какое число элементов вероятнее всего выдержат испытание?

Решение.

$n = 15$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$$n \cdot p - q \leqslant k_0 < n \cdot p + p$$

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \leqslant k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$$

$$13{,}5 \leqslant k_0 < 14{,}4$$

$k_0 = 14$

Ответ: $k_0 = 14$

Задачи.

1.Мастер обслуживает шесть однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания мастера в течение дня, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение дня мастеру придется вмешаться в работу станков: а) меньше одного раза; б) больше двух раз; в) от двух до пяти раз.

2.В освещении помещения фирмы используются 20 лампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна 3/5. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не меньше половины всех лампочек?

3.Вероятность того, что студент забросит мяч в корзину, равна 0,4. Студент произвел 24 броска. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

4.Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного охотника равна 0,9 и не зависит от номера выстрела. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 7 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

5.Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Найти вероятность того, что у стрелка останется хотя бы один неизрасходованный патрон, если он получил 7 патронов и вероятность попадания в цель при одиночном выстреле равна 1/7.

6.Вероятность встретить на улице знакомого равна 0,1. Сколько среди первых 100 случайных прохожих можно надеяться встретить знакомых?

7. Игральная кость брошена 5 раз. Чему равна вероятность выпадения единицы хотя бы один раз?

8.Какова вероятность того, что при 18 бросаниях монеты герб выпадет ровно 10 раз?

9.Всхожесть семян астры данного сорта оценивается вероятностью 0,85. Какова вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут не менее четырёх?

10.Монета брошена 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет от 4 до 6 раз?

11.В мастерской работают 8 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найти вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются 4 мотора.

12.Саженцы сосны приживаются с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посаженных саженцев число прижившихся будет заключено между 348 и 368.

13.Вероятность выздоровления больных при применении нового лекарства составляет 85%. В больницу на лечение положили 125 больных. Какова вероятность того, что 117 из них вылечатся?

14.Игральную кость бросаем 15 000 раз. Какова вероятность того, что шестёрка появится не менее 2 000 и не более 2 500 раз?

15.Мебельная фабрика производит продукцию, среди которой 90 % высшего качества. Какова вероятность того, что среди 200 изделий этой фабрики высшего сорта будет: а) не меньше 160; б) не больше 170?

16.Было посажено 800 деревьев. Чему равна вероятность того, что прижившихся деревьев больше 350, если вероятность приживания для одного дерева равна 0,85?

17.Вероятность выигрыша по облигациям займа за всё время его действия равна 0,25. Какова вероятность человеку, купившему 6 облигаций, выиграть по четырём из них?

18.Игральную кость бросают 180 раз. Сколько раз, вероятнее всего, выпадет шесть очков? Найти вероятность этого события.

19.Вероятность появления на занятиях студента равна 0,2. В семестре всего 385 занятий. Какова вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 76 занятиях?

20.Монету бросают 387 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет не менее 195 раз, но не более 207 раз?

21.Вероятность опоздать на электричку для студента ежедневно равна 0,15. Студент ездит на учёбу 236 дней в году. Найти наивероятнейшее число опозданий в течение года. Какова вероятность этого числа?

22.Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,03. Найти вероятность того, что из 10 телевизоров хотя бы один потребует ремонта в течение гарантийного срока.

23.Вероятность изготовления детали высшего качества на данном станке равна 0,43. Найти наивероятнейшее число деталей высшего качества среди 250 деталей. Чему равна вероятность этого события?

24.Вероятность того, что телевизор в течение гарантийного срока потребует ремонта, равна 0,003. Найти вероятность того, что из 1000 телевизоров хотя бы один потребует ремонта в течение гарантийного срока.

25.Вероятность сбоя в программе в течении одного запуска равна 0,002. Какова вероятность того, что при 3000 запусков сбой произойдет не более 10 раз?

26.Вероятность потери банковской пластиковой карты равна 0,001. Какова вероятность того, что среди 5000 тысяч карт находящихся в пользовании будет потеряно более 20?

27.Вероятность повреждения одной детали при перевозке равна 0,003. Какова вероятность того, что при перевозке 1000 деталей будет повреждено 5 деталей?

28.Для освещения города используются 5000 лампочек. Для каждой лампочки вероятность того, что она перегорит в течение года, равна 0,002. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить не меньше 100 всех лампочек?

29.Риск невыплаты одного кредита составляет 0,005. Какова вероятность, что среди 2000 взятых кредитов будет не выплачено более 10?

30.Вероятность выигрыша в лотерее равна 0,001. Какова вероятность того, что среди 1000 наугад купленных билетов не менее 30?

Задачи

Номер варианта	Номер задачи							
1	1	4	9	8	12	17	29	30
2	2	6	7	11	15	19	26	28
3	4	5	16	20	21	23	28	30
4	3	10	12	13	14	18	25	24
5	5	6	9	10	11	13	27	25
6	6	8	12	14	15	17	24	28
7	1	3	7	14	15	16	29	25
8	2	4	8	10	12	14	28	30
9	5	7	9	11	13	15	29	24
10	6	8	10	14	16	18	27	28
11	2	5	11	13	17	20	26	27
12	3	10	12	17	18	19	27	29
13	4	9	13	16	19	20	25	26
14	6	11	14	15	17	18	24	28
15	7	12	15	16	18	20	29	30

Лабораторная работа № 4

Дискретная случайная величина.

Дискретной случайной величиной (*X)* называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения ($x_1, x_2, \ldots$) с определёнными вероятностями ($p_1, p_2, \ldots$). Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения дискретной случайной величины:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Закон (ряд) распределения можно изобразить графически, в виде точек с координатами (x_i, p_i), соединённых отрезками. Получим многоугольник распределения вероятностей (полигон распределения).

Дискретная случайная величина может быть задана функцией распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x:

$$F(x)=p\ (X<x)$$

Пример. Закон распределения случайной величины X :

X	0	1	2	3
P	0,198	0,457	0,293	0,052

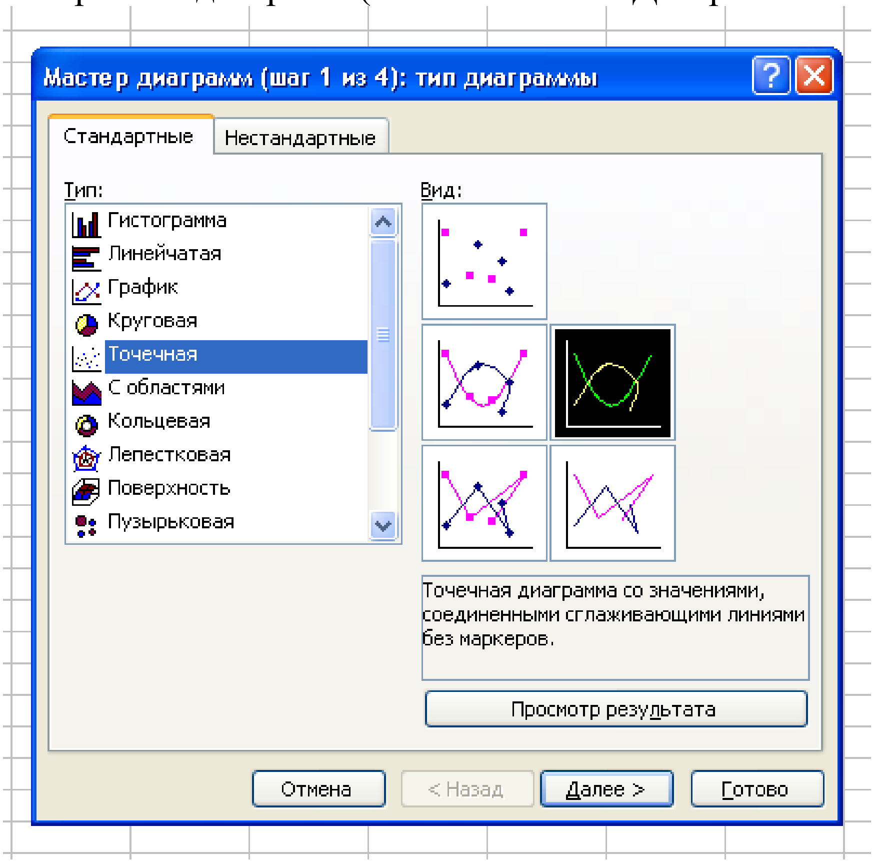
Проверка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}198+0{,}457+0{,}293+0{,}052=1$

Функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины *X:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}198, & 0<x\le 1 \\ 0{,}198+0{,}457=0{,}655, & 1<x\le 2 \\ 0{,}198+0{,}457+0{,}293=0{,}948, & 2<x\le 3 \\ 0{,}198+0{,}457+0{,}293+0{,}052=1, & x>3 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ 0{,}198, & 0<x\le 1\\ 0{,}655, & 1<x\le 2\\ 0{,}948, & 2<x\le 3\\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Для построения графика функции распределения используется функция мастер построения диаграмм (меню Вставка – Диаграмма – Точечная)



(Далее – Ряд – Добавить) Добавляется столько рядов, на скольких интервалах задана функция распределения.

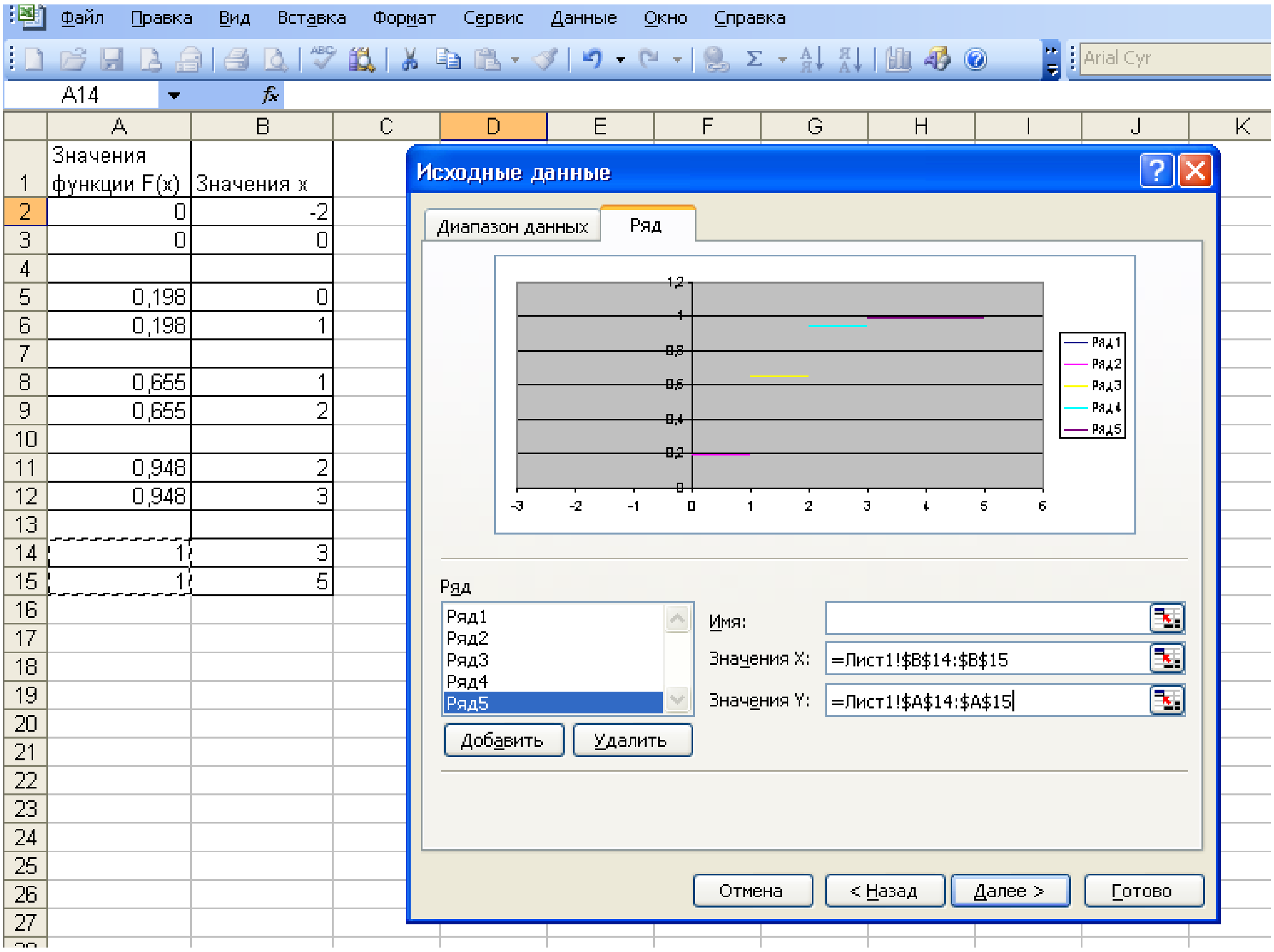
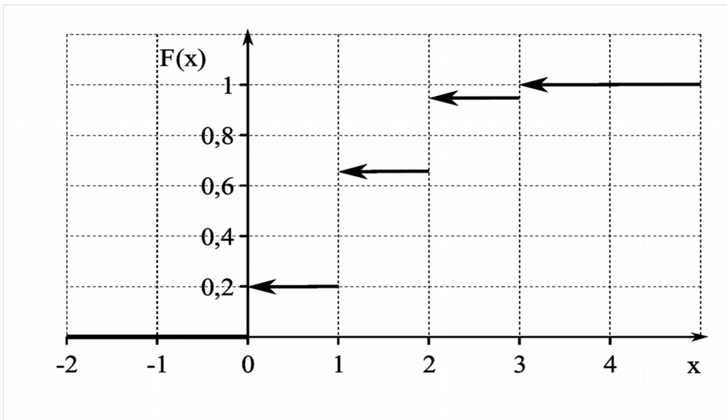


График функции распределения:



Числовые характеристики дискретной случайной величины.
Математическое ожидание случайной величины *X*.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

Дисперсия случайной величины *X*.

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2-\left(M(X)\right)^2$$

Среднее квадратическое отклонение.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Обобщёнными числовыми характеристиками для случайных величин в теории вероятностей, а также математической статистике являются начальные и центральные моменты.

Начальным моментом *k*-го порядка случайной величины *X* называют математическое ожидание от величины в *k*-ой степени:

$$\alpha_k = M\left(X^k\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Начальный момент первого порядка: $\alpha_1 = M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$

Начальный момент второго порядка: $\alpha_2 = M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2$

Начальный момент третьего порядка: $\alpha_3 = M\left(X^3\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^3$

Центральным моментом *k*-го порядка случайной величины *X* называют математическое ожидание от величины $\left(X - M\left(X\right)\right)^k$:

$$\mu_k = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^k\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M\left(X\right)\right)^k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Центральный момент первого порядка: $\mu_1 = M\left(X - M\left(X\right)\right) = M\left(X\right) - M\left(X\right) = 0$

Центральный момент второго порядка:

$$\mu_2 = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M\left(X\right)\right)^2 = D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - \left(M\left(X\right)\right)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^3\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M\left(X\right)\right)^3$$

Все расчеты оформляются в виде таблицы.

				Сумма	
X		...			
P					
X*P		...			*M(X)* = α_1 - Математическое ожидание (начальный момент первого порядка)
X²*P		...			α_2 - Начальный момент второго порядка
X³*P		...			α_3 - Начальный момент третьего порядка
X-M(X)					Отклонение случайной величины от ее математического ожидания
(X-M(X))*P		...			μ_1 - Центральный момент первого порядка
(X-M(X))²*P		...			*D(X)* = μ_2 - Дисперсия (центральный момент второго порядка)
(X-M(X))³*P		...			μ_3 - Центральный момент третьего порядка

Проверка осуществляется по следующим формулам:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_1^3$$

Задание.

1.Построить многоугольник распределения.

2.Составить функцию распределения и построить её график.

3.Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядка. Выполнить проверку расчетов.

4.Найти числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение).

Вариант № 1

X	23	28	34	45	47	52	56	67	69	73
P	0,01	0,03	0,04	0,13	0,15	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06

Вариант № 2

X	35	40	46	57	59	64	68	79	81	85
P	0,05	0,07	0,14	0,31	0,18	0,11	0,05	0,04	0,03	0,02

Вариант № 3

X	65	115	175	285	305	355	395	505	525	565
P	0,02	0,03	0,04	0,11	0,13	0,15	0,16	0,24	0,09	0,03

Вариант № 4

X	64	79	97	130	136	151	163	196	202	214
P	0,01	0,04	0,08	0,13	0,34	0,18	0,12	0,07	0,02	0,01

Вариант № 5

X	61	71	83	105	109	119	127	149	153	161
P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03

Вариант № 6

X	14	18	25	36	42	54	63	69	75	82
P	0,02	0,03	0,04	0,12	0,15	0,26	0,15	0,09	0,08	0,06

Вариант № 7

X	26	30	37	48	54	66	75	81	87	94
P	0,05	0,07	0,12	0,26	0,18	0,14	0,07	0,05	0,04	0,02

Вариант № 8

X	5	25	60	115	145	205	250	280	310	345
P	0,02	0,03	0,05	0,12	0,14	0,15	0,17	0,19	0,09	0,04

Вариант № 9

X	37	49	70	103	121	157	184	202	220	241
P	0,01	0,03	0,06	0,13	0,24	0,22	0,15	0,09	0,04	0,03

Вариант № 10

X	43	51	65	87	99	123	141	153	165	179
P	0,03	0,04	0,08	0,23	0,17	0,14	0,12	0,09	0,06	0,04

Вариант № 11

X	55	58	64	71	77	83	89	92	97	103
P	0,01	0,03	0,04	0,13	0,15	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06

Вариант № 12

X	67	70	76	83	89	95	101	104	109	115
P	0,05	0,07	0,14	0,31	0,18	0,11	0,05	0,04	0,03	0,02

Вариант № 13

X	0	9	27	48	66	84	102	111	126	144
P	0,02	0,03	0,04	0,11	0,13	0,15	0,16	0,24	0,09	0,03

Вариант № 14

X	160	169	187	208	226	244	262	271	286	304
P	0,01	0,04	0,08	0,13	0,34	0,18	0,12	0,07	0,02	0,01

Вариант № 15

X	125	131	143	157	169	181	193	199	209	221
P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03

Лабораторная работа № 5

«Первичная обработка эмпирических данных»

Имеющийся набор эмпирических данных является выборкой из генеральной совокупности.

Набор данных расположенный в порядке возрастания, называется вариационным рядом. Если набор данных достаточно большой, то удобнее всего представить его в виде интервального вариационного ряда.

Для построения интервального вариационного ряда необходимо выполнить следующие действия:

1.Имеющиеся данные располагают в порядке возрастания.

2.В выборке определяют самое большое x_{max} и самое маленькое x_{min} значение изучаемого признака.

3.Определяют размах варьирования $R = x_{max} - x_{min}$.

4.Определяют ширину частичных интервалов $h = \frac{R}{k}$, где k — число частичных интервалов (целое число). Число интервалов приблизительно можно определить с помощью формулы Стержеса: $k = 1 + 3{,}32 \cdot lg\, n$ (n — объем выборки).

5.Нижняя граница первого интервала x_0 выбирается так, чтобы минимальная варианта выборки x_{min} попадала примерно в середину этого интервала:

$x_0 = x_{min} - \frac{1}{2} \cdot h$. Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h: $x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \ldots$.

Построение шкалы интервалов на основе вычисления границ интервалов продолжается до тех пор, пока величина x_i удовлетворяет соотношению:

$$x_i \le x_{max} + \frac{1}{2} \cdot h$$.

6.Подсчитывается количество значений признака, попадающих в каждый частичный интервал (частоты n_i).

7.Результаты формируются в виде таблицы, которая и является интервальным вариационным рядом:

$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_{i-1}; x_i)$	…	$[x_{k-1}; x_k]$
n_1	n_2	n_3	…	n_i	…	n_k

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ (Проверка: сумма частот должна совпадать с объёмом выборки).

Задание.

Построить интервальный вариационный ряд.

Вариант № 1.

Пораженность отливок точечными поверхностными дефектами (ТПД).

№ п/п	ТПД, %	№ п/п	Пораженность ТПД, %
1	10,56	*41*	20,71
2	10,98	*42*	20,89
3	12,45	*43*	21,24
4	12,47	*44*	21,67
5	13,37	*45*	21,72
6	13,38	*46*	21,96
7	13,81	*47*	21,96
8	13,91	*48*	22,31
9	14,3	*49*	22,5
10	14,79	*50*	22,68
11	14,84	*51*	22,79
12	15,24	*52*	23,03
13	15,29	*53*	23,06
14	16,31	*54*	23,26
15	16,39	*55*	23,54
16	16,41	*56*	23,6
17	16,52	*57*	23,92
18	17,19	*58*	24,19
19	17,21	*59*	24,25
20	17,27	*60*	24,71
21	17,3	*61*	24,71
22	17,39	*62*	24,73
23	17,6	*63*	25,1
24	17,62	*64*	25,4
25	17,75	*65*	25,56
26	17,92	*66*	25,61
27	18,58	*67*	25,64
28	18,62	*68*	26,81
29	18,69	*69*	26,86
30	18,72	*70*	27,07
31	19,4	*71*	27,58
32	19,4	*72*	27,58
33	19,57	*73*	27,69
34	19,89	*74*	28,6
35	20,06	*75*	29,08
36	20,17	*76*	30,26
37	20,2	*77*	30,74
38	20,41	*78*	30,86
39	20,48	*79*	30,86
40	20,62	*80*	33,76

Вариант № 2.

Цены на однокомнатные квартиры в Москве (2001 год).

№ п/п	Цена, тыс. усл. ед.	№ п/п	Цена, тыс. усл. ед.
1	28	*36*	37
2	28	*37*	37
3	28	*38*	38
4	28	*39*	39
5	29	*40*	40
6	30	*41*	40
7	30	*42*	40
8	30	*43*	40
9	30	*44*	40
10	30	*45*	40
11	30	*46*	41
12	31	*47*	41
13	31	*48*	42
14	31	*49*	42
15	32	*50*	43
16	32	*51*	43
17	33	*52*	43
18	33	*53*	43
19	33	*54*	43
20	33	*55*	43
21	33	*56*	43
22	33	*57*	45
23	33	*58*	48
24	33	*59*	51
25	34	*60*	51
26	35	*61*	52
27	35	*62*	53
28	35	*63*	53
29	35	*64*	54
30	35	*65*	57
31	36	*66*	58
32	37	*67*	59
33	37	*68*	60
34	37	*69*	70
35	37	*70*	75

Вариант № 3.
Цены на автомобиль Opel Astra на вторичном рынке (2008 год).

№ п/п	Цена, руб.	№ п/п	Цена, руб.
1	212000	*41*	283620
2	215000	*42*	285000
3	230000	*43*	285000
4	230000	*44*	290000
5	235000	*45*	293400
6	239610	*46*	298290
7	240000	*47*	300000
8	242055	*48*	300735
9	244500	*49*	300735
10	245000	*50*	305000
11	245000	*51*	305625
12	250000	*52*	310000
13	250000	*53*	310000
14	250000	*54*	315000
15	250000	*55*	316500
16	251835	*56*	317825
17	253000	*57*	320000
18	254280	*58*	320000
19	256725	*59*	322740
20	256725	*60*	323370
21	256725	*61*	330075
22	260000	*62*	332520
23	260000	*63*	335000
24	265000	*64*	340000
25	266505	*65*	342275
26	268950	*66*	350000
27	268950	*67*	350000
28	270000	*68*	354000
29	270000	*69*	354525
30	275000	*70*	356000
31	275000	*71*	359300
32	275000	*72*	359415
33	275000	*73*	360000
34	275000	*74*	366750
35	278730	*75*	366750
36	280000	*76*	369000
37	280000	*77*	380000
38	281175	*78*	380000
39	282000	*79*	402416
40	283620	*80*	452325

Вариант № 4.

Число фермерских хозяйств по субъектам российской федерации на конец 2005 года.

№ п/п	Число хозяйств	№ п/п	Число хозяйств
1	13	*41*	1993
2	30	*42*	2037
3	65	*43*	2097
4	202	*44*	2101
5	236	*45*	2107
6	289	*46*	2118
7	310	*47*	2161
8	407	*48*	2195
9	412	*49*	2232
10	422	*50*	2376
11	462	*51*	2463
12	579	*52*	2518
13	704	*53*	2575
14	722	*54*	2722
15	758	*55*	2726
16	868	*56*	2985
17	937	*57*	2993
18	1030	*58*	3005
19	1062	*59*	3050
20	1078	*60*	3050
21	1108	*61*	3251
22	1110	*62*	3346
23	1140	*63*	3550
24	1183	*64*	3856
25	1202	*65*	4035
26	1204	*66*	4081
27	1322	*67*	4591
28	1343	*68*	4699
29	1350	*69*	4811
30	1391	*70*	4990
31	1395	*71*	5487
32	1448	*72*	6097
33	1497	*73*	6574
34	1511	*74*	6965
35	1715	*75*	7481
36	1788	*76*	10844
37	1870	*77*	14431
38	1880	*78*	15033
39	1893	*79*	16846
40	1894	*80*	37911

Вариант № 5.
Рейтинг по математическому анализу студентов потока ИВП, ВС (2008-2009 уч. год).

№ п/п	Рейтинг, %	№ п/п	Рейтинг, %
1	0	*38*	63
2	7	*39*	64
3	13	*40*	65
4	24	*41*	65
5	30	*42*	67
6	31	*43*	70
7	32	*44*	70
8	33	*45*	70
9	35	*46*	70
10	37	*47*	70
11	37	*48*	73
12	38	*49*	74
13	38	*50*	74
14	40	*51*	75
15	42	*52*	76
16	43	*53*	76
17	45	*54*	77
18	47	*55*	78
19	48	*56*	78
20	48	*57*	80
21	49	*58*	80
22	49	*59*	80
23	50	*60*	80
24	51	*61*	81
25	52	*62*	82
26	53	*63*	84
27	55	*64*	85
28	55	*65*	85
29	56	*66*	88
30	56	*67*	89
31	57	*68*	92
32	58	*69*	93
33	60	*70*	94
34	61	*71*	95
35	61	*72*	95
36	62	*73*	98
37	62	*74*	99

Вариант № 6.
Цены на автомобиль **T O Y O T A** на вторичном рынке (2008 год).

№ п/п	Цена, тыс. долларов	№ п/п	Цена, тыс. долларов
1	8	*36*	21,2
2	9	*37*	21,3
3	9,5	*38*	22
4	9,5	*39*	23
5	10	*40*	23
6	10,5	*41*	24
7	11	*42*	24
8	11	*43*	25
9	11,5	*44*	25,5
10	11,6	*45*	25,7
11	12	*46*	26
12	12	*47*	27
13	12	*48*	27
14	12,3	*49*	27
15	12,4	*50*	28
16	13,5	*51*	28
17	13,5	*52*	29
18	14	*53*	29
19	14	*54*	31
20	14,5	*55*	32,3
21	15	*56*	33
22	15,6	*57*	33
23	16	*58*	35,4
24	16	*59*	37
25	16	*60*	38
26	16	*61*	40
27	17	*62*	42
28	18	*63*	45
29	18	*64*	45,2
30	19	*65*	45,6
31	19,4	*66*	45,7
32	20	*67*	49
33	21	*68*	55,3
34	21	*69*	56
35	21	*70*	56,2

Вариант № 7.

Рейтинг по линейной алгебре студентов потока РО, ЭО (2009-2010 уч. год).

№ п/п	Рейтинг, %	№ п/п	Рейтинг, %
1	0	*36*	67
2	12	*37*	69
3	15	*38*	69
4	15	*39*	69
5	15	*40*	69
6	22	*41*	69
7	23	*42*	69
8	30	*43*	69
9	33	*44*	70
10	33	*45*	71
11	33	*46*	72
12	38	*47*	72
13	38	*48*	72
14	39	*49*	75
15	39	*50*	75
16	41	*51*	75
17	41	*52*	75
18	47	*53*	78
19	49	*54*	81
20	52	*55*	81
21	53	*56*	82
22	53	*57*	85
23	53	*58*	86
24	54	*59*	86
25	58	*60*	86
26	58	*61*	87
27	59	*62*	89
28	61	*63*	94
29	62	*64*	94
30	64	*65*	94
31	64	*66*	95
32	64	*67*	95
33	64	*68*	100
34	64	*69*	100
35	67	*70*	100

Вариант № 8.
Интервал времени (в минутах) между заявками, поступающими на телефонную станцию

Счетчик заявок, *i*	Интервал времени между заявками	Счетчик заявок, *i*	Интервал времени между заявками
1	0,03	*38*	7,99
2	0,16	*39*	8,03
3	0,22	*40*	8,04
4	0,27	*41*	8,35
5	0,30	*42*	8,42
6	0,54	*43*	8,45
7	0,54	*44*	9,06
8	0,57	*45*	9,16
9	0,63	*46*	9,22
10	0,70	*47*	9,65
11	0,92	*48*	10,22
12	0,93	*49*	11,89
13	1,10	*50*	12,53
14	1,19	*51*	13,27
15	1,56	*52*	13,94
16	1,65	*53*	15,21
17	1,87	*54*	15,52
18	2,05	*55*	16,00
19	2,29	*56*	16,47
20	2,30	*57*	16,48
21	2,41	*58*	18,02
22	2,63	*59*	18,23
23	2,66	*60*	18,58
24	2,75	*61*	19,00
25	3,35	*62*	19,03
26	4,01	*63*	19,29
27	4,32	*64*	21,19
28	4,79	*65*	22,99
29	4,80	*66*	23,10
30	4,86	*67*	23,40
31	5,32	*68*	26,81
32	5,47	*69*	27,40
33	6,43	*70*	29,14
34	6,43	*71*	30,53
35	6,85	*72*	31,38
36	6,88	*73*	40,89
37	7,38	*74*	49,25

Вариант № 9.

Пробег автомобилей Opel Astra, продающихся на вторичном рынке (2008 год).

№ п/п	Пробег, км		№ п/п	Пробег, км
1	188000		*41*	84000
2	150000		*42*	45000
3	110000		*43*	43107
4	79000		*44*	60000
5	200000		*45*	62000
6	147000		*46*	70000
7	137000		*47*	19600
8	118000		*48*	67040
9	140000		*49*	60000
10	143000		*50*	107000
11	130000		*51*	40000
12	130000		*52*	58000
13	209000		*53*	46500
14	117000		*54*	89000
15	170000		*55*	130000
16	100000		*56*	85800
17	75000		*57*	146000
18	200000		*58*	199000
19	101000		*59*	130000
20	90000		*60*	230000
21	250000		*61*	105000
22	134000		*62*	130000
23	164000		*63*	108000
24	104000		*64*	75000
25	85000		*65*	160000
26	100000		*66*	114000
27	103000		*67*	170000
28	118000		*68*	189000
29	99000		*69*	170000
30	96000		*70*	71000
31	62000		*71*	75000
32	160000		*72*	82000
33	43900		*73*	148000
34	80000		*74*	145000
35	92000		*75*	86000
36	153000		*76*	105000
37	65000		*77*	78000
38	70000		*78*	88000
39	117500		*79*	89000
40	69000		*80*	91000

Вариант № 10.

В таблице представлены данные - низшая отметка индекса Доу Джонса на торгах на период с 17 сентября по 13 декабря 2001г. Показания являются ежедневными, в неделе 5 дней торгов.

Дата	Данные		Дата	Данные
17.09.2001	87,5546		31.10.2001	90,1826
18.09.2001	87,4391		1.11.2001	89,8761
19.09.2001	84,5301		2.11.2001	91,5291
20.09.2001	83,7572		5.11.2001	93,2659
21.09.2001	79,2693		6.11.2001	93,1579
24.09.2001	82,4232		7.11.2001	94,5799
25.09.2001	84,3556		8.11.2001	95,0691
26.09.2001	84,5737		9.11.2001	94,7875
27.09.2001	83,9814		12.11.2001	93,4776
28.09.2001	86,3375		13.11.2001	95,5143
1.10.2001	86,599		14.11.2001	96,8397
2.10.2001	87,3761		15.11.2001	97,4543
3.10.2001	88,0099		16.11.2001	97,5407
4.10.2001	89,8228		19.11.2001	98,2696
5.10.2001	88,9447		20.11.2001	98,2506
8.10.2001	89,3786		21.11.2001	97,4645
9.10.2001	89,2734		22.11.2001	98,0953
10.10.2001	89,7515		23.11.2001	98,0437
11.10.2001	92,0404		26.11.2001	98,6222
12.10.2001	91,4634		27.11.2001	97,7607
15.10.2001	91,8107		28.11.2001	96,628
16.10.2001	92,3968		29.11.2001	96,2972
17.10.2001	91,9989		30.11.2001	97,5226
18.10.2001	90,6101		3.12.2001	96,5187
19.10.2001	90,8081		4.12.2001	97,0024
22.10.2001	91,0108		5.12.2001	98,7592
23.10.2001	92,4902		6.12.2001	99,9798
24.10.2001	92,1829		7.12.2001	99,3854
25.10.2001	91,4308		10.12.2001	98,6803
26.10.2001	93,6935		11.12.2001	97,9448
29.10.2001	92,3283		12.12.2001	97,4542
30.10.2001	90,1196		13.12.2001	96,913

Вариант № 11

Данные о пассажирских перевозках на международных авиалиниях США
(месячные итоги в тысячах пассажиров) с января 1949 по декабрь 1955 годов.

№ месяца, t	Месяц	y_t	№ месяца, t	Месяц	y_t
1	Январь-49	112	*43*	Июль-52	230
2	Февраль-49	118	*44*	Август-52	242
3	Март-49	132	*45*	Сентябрь-52	209
4	Апрель-49	129	*46*	Октябрь-52	191
5	Май-49	121	*47*	Ноябрь-52	172
6	Июнь-49	135	*48*	Декабрь-52	194
7	Июль-49	148	*49*	Январь-53	196
8	Август-49	148	*50*	Февраль-53	196
9	Сентябрь-49	136	*51*	Март-53	236
10	Октябрь-49	119	*52*	Апрель-53	235
11	Ноябрь-49	104	*53*	Май-53	229
12	Декабрь-49	118	*54*	Июнь-53	243
13	Январь-50	115	*55*	Июль-53	264
14	Февраль-50	126	*56*	Август-53	272
15	Март-50	141	*57*	Сентябрь-53	237
16	Апрель-50	135	*58*	Октябрь-53	211
17	Май-50	125	*59*	Ноябрь-53	180
18	Июнь-50	149	*60*	Декабрь-53	201
19	Июль-50	170	*61*	Январь-54	204
20	Август-50	170	*62*	Февраль-54	188
21	Сентябрь-50	158	*63*	Март-54	235
22	Октябрь-50	133	*64*	Апрель-54	227
23	Ноябрь-50	114	*65*	Май-54	234
24	Декабрь-50	140	*66*	Июнь-54	264
25	Январь-51	145	*67*	Июль-54	302
26	Февраль-51	150	*68*	Август-54	293
27	Март-51	178	*69*	Сентябрь-54	259
28	Апрель-51	163	*70*	Октябрь-54	229
29	Май-51	172	*71*	Ноябрь-54	203
30	Июнь-51	178	*72*	Декабрь-54	229
31	Июль-51	199	*73*	Январь-55	242
32	Август-51	199	*74*	Февраль-55	233
33	Сентябрь-51	184	*75*	Март-55	267
34	Октябрь-51	162	*76*	Апрель-55	269
35	Ноябрь-51	146	*77*	Май-55	270
36	Декабрь-51	166	*78*	Июнь-55	315
37	Январь-52	171	*79*	Июль-55	364
38	Февраль-52	180	*80*	Август-55	347
39	Март-52	193	*81*	Сентябрь-55	312
40	Апрель-52	181	*82*	Октябрь-55	274
41	Май-52	183	*83*	Ноябрь-55	237
42	Июнь-52	218	*84*	Декабрь-55	278

Лабораторная работа № 6

«Числовые характеристики вариационного ряда»

Числовые характеристики выборки (вариационного ряда):

Выборочная средняя: $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot n_i}{n}$, где $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ - середина частичного интервала

Выборочная дисперсия: $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^*\right)^2 \cdot n_i}{n} - \left(\overline{x_в}\right)^2$

Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_в = \sqrt{D_B}$

Исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i}{n-1}$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение (эмпирический стандарт): $S = \sqrt{S^2}$.

Задание.

Для вариационного ряда, полученного в лабораторной работе № 5, вычислить выборочные числовые характеристики. По полученным расчетам сделать выводы о величине среднего значения признака и его отклонении.

Лабораторная работа № 7

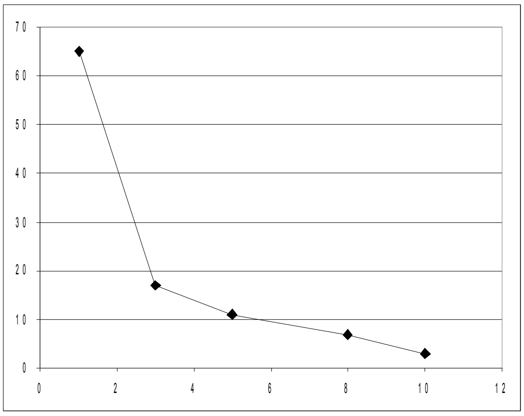
«Проверка статистической гипотезы

о виде распределения. Критерий согласия Пирсона»

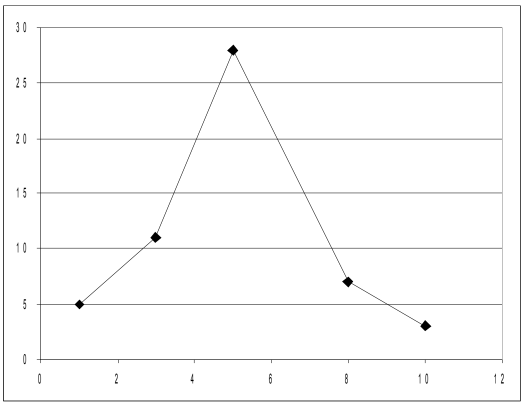
Критерий согласия Пирсона или $\chi 2$ — наиболее часто используемый статистический критерий для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины. Во многих практических задачах закон распределения неизвестен и требует определения. Для достоверного выбора того или иного закона формулируется гипотеза, которая требует подтверждения.

По выборочным данным строится полигон частот и рассчитываются параметры распределения. Гипотеза о предполагаемом законе распределения изучаемого признака выдвигается на основе исследования выборки.

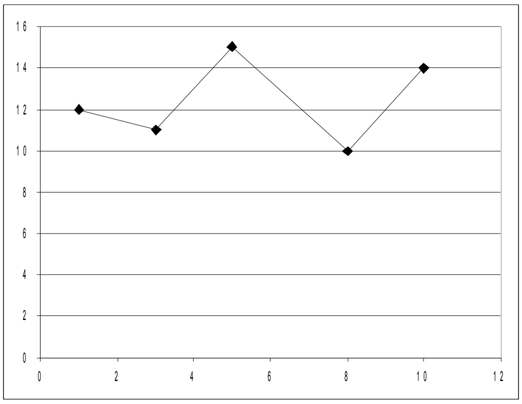
Примеры возможных полигонов и соответствующих им предположений о виде распределения:



а) показательное распределение;



б) нормальное распределение;



в) равномерное распределение.

Нулевая гипотеза несет информацию о законе распределения выборки. Например, H_0: $F(x) = N(x, a, \sigma^2)$. Это обозначает, что выборочная совокупность имеет нормальное распределение с параметрами *a* и σ^2. *Конкурирующая гипотеза* H_1: выборочная совокупность имеет распределение, отличное от нормального.

Критерий Пирсона является алгоритмом, позволяющим сделать вывод о достоверности выдвинутой гипотезы. Последовательность действий для определения критерия χ2 описана ниже.

1.Построить таблицу частот опытного распределения в выбранных интервалах.

Если среди опытных частот имеются малочисленные ($n_i \le 5$), то объединить их с соседними!

2.Определить теоретические частоты при помощи выбранного закона распределения.

Теоретическая частота при выдвинутой гипотезе о нормальном законе распределения для *i*-го интервала определяется по формуле:

$n_i' = n\cdot\left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right) = n\cdot\left(\Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - a}{\sigma}\right)\right)$, где n — объем выборки; x_{i-1}, x_i - границы *i*-го интервала; теоретические параметры нормального распределения *a* и σ^2 оцениваются по выборке ($a \approx \overline{x_в}$, $\sigma \approx \sqrt{S^2}$ см. лабораторную работу № 6); значение *Ф(t)* вычисляется с помощью функции НОРМРАСП().

Теоретическая частота при выдвинутой гипотезе о показательном законе распределения для *i*-го интервала определяется по формуле:

$$n_i^* = n \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) = n \cdot (e^{-\lambda \cdot x_{i-1}} - e^{-\lambda \cdot x_i})$$

, где *n* — объем выборки; x_{i-1}, x_i - границы *i*-го интервала; теоретический параметр показательного распределения оценивается по выборке ($\lambda \approx \frac{1}{\bar{x}_в}$);

Теоретическая частота при выдвинутой гипотезе о равномерном законе распределения для *i*-го интервала определяется по формуле:

$$n_i^* = n \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) = n \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{max} - x_{min}}$$

Расчет теоретических частот оформляется в виде таблицы:

Номер интервала, *i*	Начало интервала, x_{i-1}	Конец интервала, x_i	Значение функции распределения $F(x_{i-1})$	Значение функции распределения $F(x_i)$	Теоретическая частота, n_i^*
1					
2					
...					
k					

3.Вычисляется наблюдаемое значение критерия Пирсона: $\chi^2_{наб} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$.

Вычисления оформляются в виде таблицы:

Номер интервала, *i*	Теоретическая частота, n_i^*	Эмпирическая частота, n_i	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1			
2			
...			
k			
		Сумма	$\chi^2_{наб} =$

4.Находится табличное значение критерия Пирсона $\chi^2_{таб}(\alpha, \nu)$, которое зависит от уровня значимости α (0,05; 0,01; 0,001) и числа степеней свободы $\nu = k - m - 1$ (*m* — число параметров закона распределения).

5.Если табличное значение оказалось больше наблюдаемого, то в этом случае нулевая гипотеза принимается, поскольку отклонения экспериментальных частот от теоретических являются несущественными. В противном случае нулевая гипотеза отклоняется в пользу конкурирующей.

Задание.

Для интервального ряда, построенного в лабораторной работе № 5 проверить гипотезу о виде распределения.

Лабораторная работа № 8

«Метод наименьших квадратов»

Для аналитического описания статистических данных используют регрессионные модели.

$Y = f(x) + \varepsilon$ или $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varepsilon$ - регрессионные модели

Самый простой вид функции *f(x)* — линейная.

$y = b_0 + b_1 x + e$ - эмпирическое уравнение парной линейной регрессии

$\tilde{y} = b_0 + b_1 x$ - расчётная часть уравнения регрессии

$b_0;\ b_1$ - эмпирические оценки теоретических параметров уравнения регрессии

e - эмпирическая оценка величины случайного отклонения

Эмпирические оценки параметров уравнения регрессии находятся по выборке с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

$$\varepsilon^2 \approx e^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i)^2 = S(b_0; b_1) \quad \to \quad min$$

Найдём минимум функции нескольких переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i - b_0 - b_1 \cdot x_i) = 0 \end{cases}$$

Решение системы:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x},$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

Наличие и силу линейной связи между переменными *X* и *Y* можно оценить с помощью коэффициента корреляции.

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

В Eecel для расчета коэффициента корреляции используется функция КОРРЕЛ(… ; …).

Свойства коэффициента корреляции:

$-1 \le r_{xy} \le 1$

Если $r_{xy} \to 1$, то между переменными x и y присутствует тесная прямая линейная связь

Если $r_{xy} \to -1$, то между переменными x и y присутствует тесная обратная линейная связь

Если $|r_{xy}| \to 0$, то между переменными x и y отсутствует линейная связь (вообще отсутствует связь или присутствует нелинейная связь)

Интервал значений модуля коэффициента корреляции	Интерпретация
$0 \le r_{xy} < 0{,}2$	Отсутствует корреляция
$0{,}2 \le r_{xy} < 0{,}5$	Слабая корреляция
$0{,}5 \le r_{xy} < 0{,}7$	Средняя корреляция
$0{,}7 \le r_{xy} < 0{,}9$	Высокая корреляция
$0{,}9 \le r_{xy} \le 1$	Очень высокая корреляция

Для вычисления коэффициента корреляции можно использовать функцию КОРРЕЛ().

Оценка статистической значимости уравнения парной линейной регрессии

осуществляется как оценка значимости коэффициента b_1, с помощью критерия

Стьюдента.

Если $T_{расч} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}} > T_{таб} = T_{\frac{\alpha}{2},k}$, то коэффициент b_1, а значит и уравнение регрессии

статистически значимо.

$S_{b_1} = \sqrt{\frac{S^2}{D_x}}$ - отклонение коэффициента b_1

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{n-2}$ - дисперсия случайного отклонения

$D_x = n \cdot (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)$ - дисперсия переменной x

$k = n-2$ - число степеней свободы; α - уровень значимости (α = 0,05; 0,01)

Задание.

1.Построить корреляционное поле (Диаграмма – Точечная).

2.Оценить тесноту связи между переменными с помощью коэффициента корреляции;
3.Найти уравнение регрессии *Y* по *X*.
4.Построить линию регрессии на корреляционном поле.
5.Оценить статистическую значимость полученного уравнения регрессии.

Расчеты удобно оформлять в виде таблицы:

i	*1*	*2*	…	*n*	*Сумма*	*Среднее*
X	x_1	x_2	…	x_n	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
Y	y_1	y_1	…	y_1	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$
X^2	x_1^2	x_2^2	…	x_n^2	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\overline{x^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$
$X*Y$	$x_1 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$	…	$x_n \cdot y_n$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$	$\overline{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$
$Y_{расч}$	$\tilde{y}_1=b_0+b_1 \cdot x_1$	$\tilde{y}_2=b_0+b_1 \cdot x_2$	…	$\tilde{y}_n=b_0+b_1 \cdot x_n$	-	-
e^2	$e_1^2=(y_1-\tilde{y}_1^2$	$e_2^2=(y_2-\tilde{y}_2^2$	…	$e_n^2=(y_n-\tilde{y}_n^2$	$\sum_{i=1}^{n} e_i^2$	

Вариант № 1. В следующей выборке представлены данные по цене X некоторого товара и количеству (Y) данного товара, приобретаемому домохозяйством ежемесячно в течение года.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	10	20	15	25	30	35	40	35	25	40	45	40
Y	110	75	100	80	60	55	40	80	60	30	40	30

Вариант № 2. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X(%) и производительности труда Y(т/ч) для 14 однотипных предприятий:

X	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
Y	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Вариант № 1. В следующей выборке представлены данные по цене (X) некоторого товара и количеству (Y) данного товара, приобретаемому домохозяйством ежемесячно в течение года.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	22	32	27	37	42	47	52	47	37	52	57	52
Y	118	83	108	88	68	63	48	88	68	38	48	38

Вариант № 3. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X (%) и производительности труда Y(т/ч) для 14 однотипных предприятий:

X	38	36	42	46	47	53	62	60	66	61	67	73	75	82
Y	22	26	30	32	33	35	36	39	40	42	43	45	47	50

Вариант № 4. В следующей таблице приведены статистические данные по располагаемому доходу домохозяйств (X) и затратам домохозяйств на розничные покупки(Y) за 15 лет:

X	9,098	9,137	9,095	9,280	9,230	9,348	9,525	9,755
Y	5,490	5,540	5,305	5,505	5,420	5,320	5,540	5,690

X	10,280	10,665	11,020	11,305	11,430	11,450	11,697
Y	5,870	6,157	6,342	5,905	6,125	6,185	6,225

Вариант № 5. Известны данные в (у.е.) по доходам (X) и расходам (Y) на непродовольственные товары 20 домохозяйств:

X	26,2	33,1	42,5	47,0	48,5	49,0	49,1	50,9	52,4	53,2
Y	10,0	11,2	15,0	20,5	21,2	19,5	23,0	19,0	19,5	18,0
X	54,0	54,8	59,0	61,3	62,5	63,1	64,0	66,2	70,0	71,5
Y	24,5	21,5	35,4	25,0	17,3	21,6	15,3	32,6	34,0	23,8

Вариант № 7. В следующей выборке представлены данные по цене (X) некоторого товара и количеству (Y) данного товара, приобретаемому домохозяйством ежемесячно в течение года.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

X	22	32	27	37	42	47	52	47	37	52	57	52
Y	118	83	108	88	68	63	48	88	68	38	48	38

Вариант № 8. Имеются следующие данные об уровне механизации работ *X*(%) и производительности труда *Y*(т/ч) для 14 однотипных предприятий:

X	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
Y	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Вариант № 9. Имеются следующие данные об уровне механизации работ *X* (%) и производительности труда *Y*(т/ч) для 14 однотипных предприятий:

X	38	36	42	46	47	53	62	60	66	61	67	73	75	82
Y	22	26	30	32	33	35	36	39	40	42	43	45	47	50

Вариант № 10. В следующей выборке представлены данные по цене (*X*) некоторого товара и количеству (*Y*) данного товара, приобретаемому домохозяйством ежемесячно в течение года.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	22	32	27	37	42	47	52	47	37	52	57	52
Y	118	83	108	88	68	63	48	88	68	38	48	38