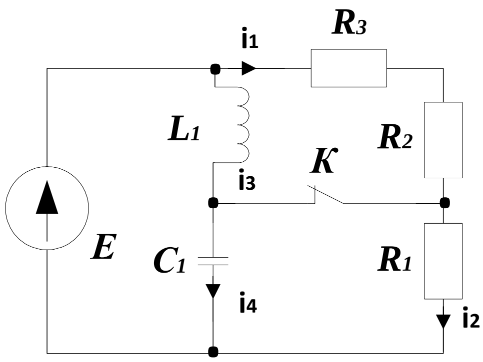
Пример расчёта задачи по переходным процессам операторным методом

(задание 4)

1. Постановка задачи

Выбираю задачу из таблицы 4.1. Пусть это будет вариант 33. Ваш вариант определяется по двум последним цифрам Вашего студенческого билета. Итак, постановка задачи:

Дано: Исходная схема – рис. 4.6 , как указано в табл. 4.1



$E = 30$ В, $L_1 = 1$ мГн, $C_1 = 2{,}5$ мкФ ,

$R_1 = 15$ Ом ,

$R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 5$ Ом,

Найти: i_4 - ?

2. *Решение*

0. ***Определяем вид ключа К*** - ключ **К** - «нормально замкнут».

1. ***Находим начальные условия (НУ) из расчета установившегося режима до коммутации, то есть для времени t равное t=(0-).***

Для этого рисуем докоммутационную схему – с учётом того , что по постоянному току индуктивность L_1 превращается в ***к.з.***, а ёмкость C_1 в ***х.х.*** (разрыв). Для удобства расчёта пометим буквами узлы схемы.

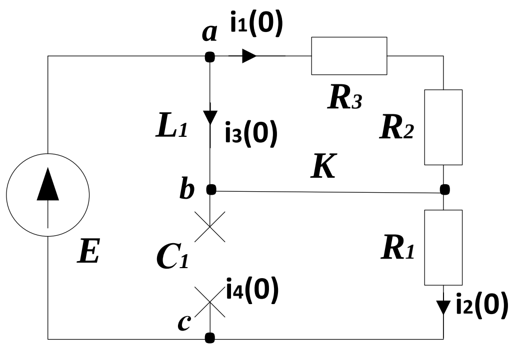


Рис. 4.2.1 Схема цепи до коммутации (по постоянному току)

Здесь: начальные условия это:

- ток через индуктивность ***L**1* : $i_3(0) = i_2(0)$;

- напряжение на ёмкости ***C**1* : $u_{C_1}(0) = u_{bc}(0)$;

Рассчитаем их по известным формулам (закон Ома, законы Кирхгофа, эквивалентное преобразование сопротивлений):

- $i_3(0) = i_2(0) = \frac{E}{R_1} = \frac{30}{15} = 2 \ \ [\text{A}]$

- $u_{C_1}(0) = u_{bc}(0) = i_2(0) \cdot R_1 = 2 \cdot 15 = 30\ [B] = E$

! При замкнутом ключе ***К*** через ветвь с ***R**3*, ***R**2* ток $\boldsymbol{i_1}$ не течёт –она закорочена через ключ!

Итак, мы можем рассчитать величины внутренних источников Э.Д.С. через $i_3(0)$ и $u_{C_1}(0)$.

2. ***все известные электрические величины и параметры изображаются в операторной форме (сложение функции – с помощью таблиц оригиналов и изображений) и осуществляется переход к операторной схеме замещения цепи.***

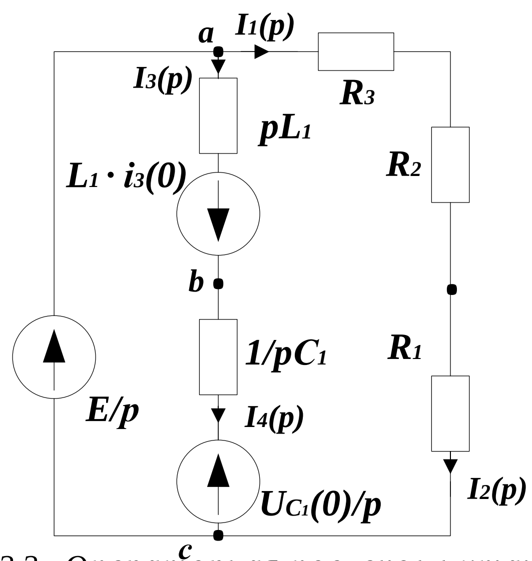


Рис. 4.2.2 - Операторная послекоммутационная схема замещения

Здесь: Оригинал источника ЭДС $\boldsymbol{E}$ заменяется на его операторное изображение $\boldsymbol{E / p}$, индуктивность ***L*1** заменяется на её операторное изображение $\boldsymbol{pL_1}$ с учётом внутренней ЭДС индуктивности $\boldsymbol{L_1 \cdot i_3(0)}$, учитывающей запас магнитной энергии, накопленный до коммутации,

ёмкость ***C*1** заменяется на её операторное изображение $^1/_{\boldsymbol{p \cdot C_1}}$ с

учётом внутренней ЭДС емкости $\boldsymbol{\frac{U_{C1}(0)}{p}}$, учитывающей запас

энергии статического поля (заряд), накопленный до коммутации, оригиналы токов $\boldsymbol{i(t)}$ и $\boldsymbol{u(t)}$ заменяются на их операторные изображения ***I(p)*** и ***U(p)***, сопротивления $\boldsymbol{R}$ сохраняют свои значения.

3. на основе законов Ома, Кирхгофа в операторной форме в соответствии с выбранным методом расчета цепи после ее коммутации составляется система операторных уравнений с учетом начальных условий, которая решается относительно изображений искомых переходных токов и напряжений

Нам необходимо по условию нашей задачи найти $\boldsymbol{i_4}$, а следовательно, надо найти в схеме замещения ***I*4*(p)***. Каким способом это удобней сделать? Самый простой способ: по 2му закону Кирхгофа составить для левого контура ***авса*** уравнение:

$$\boldsymbol{I_4(p) \cdot \left(p \cdot L_1 + \frac{1}{p \cdot C_1}\right) = \frac{E}{p} + L_1 \cdot i_3(0) - \frac{U_{C_1}(0)}{p}}\text{; отсюда}$$

$$\boldsymbol{I_4(p) = \frac{\frac{E}{p} + L_1 \cdot i_3(0) - \frac{U_{C_1}(0)}{p}}{p \cdot L_1 + \frac{1}{p \cdot C_1}} = \frac{\frac{E + p \cdot L_1 \cdot i_3(0) - U_{C_1}(0)}{p}}{\frac{p^2 \cdot L_1 \cdot C_1 + 1}{p \cdot C_1}} =}$$

$$= \frac{C_1 \cdot E + C_1 \cdot p \cdot L_1 \cdot i_3(0) - C_1 \cdot U_{C_1}(0)}{p^2 \cdot L_1 \cdot C_1 + 1}$$

Получилась простейшая рациональная дробь.

Важно: в Ваших задачах в зависимости от выбранного способа нахождения искомой величины могут получаться и более сложные рациональные дроби, может в знаменателе будет многочлен третьей степени. Не стоит впадать в ступор, много сократится, всё будет решено красиво, если не допущено ошибки в преобразованиях.

---

4. ***полученное изображение искомых переходных токов и напряжений преобразуются либо к табличным, либо к виду, удобному для применения теоремы разложения, и определяются оригиналы (переходные токи и напряжения)***

Итак, мы имеем рациональную дробь. Используя теорему разложения, разложим её на простые дроби для последующего перехода от изображения к оригиналу.

4.а Подставим численные значения:

$$I_4(p) = \frac{C_1 \cdot E + C_1 \cdot p \cdot L_1 \cdot i_3(0) - C_1 \cdot U_{C_1}(0)}{p^2 \cdot L_1 \cdot C_1 + 1} =$$

$$= \frac{2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 + 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot p \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 - 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30}{p^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} + 1} =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot p}{2,5 \cdot 10^{-9} \cdot p^2 + 1}$$

4.2 Найдём корни многочлена ***F₂(p)***: $2,5 \cdot 10^{-9} \cdot p^2 + 1 = 0$:

$\boldsymbol{p}^2 = -\frac{1}{2{,}5\cdot 10^{-9}} = -0{,}4\ \cdot \mathbf{10^9}$, $\boldsymbol{p}_1 = \sqrt{-4\ \cdot \mathbf{10^8}}$ =20000 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{p}_2$ = -20000 $\boldsymbol{i}$

Ого! Корни получились комплексно - сопряжённые! Это достаточно редкий случай, в большинстве задач корни будут действительные и отрицательные. Ничего страшного, продолжаем расчет.

4.3 Найдём ***F₂(p)***: $(2{,}\mathbf{5}\cdot\mathbf{10^{-9}}\cdot\boldsymbol{p}^2+1)' = \mathbf{5}\cdot\mathbf{10^{-9}}\cdot\ \boldsymbol{p}$

Подставляем $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$: $F_2'(p_1) = \ \mathbf{5}\cdot\mathbf{10^{-9}}\cdot 20000\ \boldsymbol{i} = 0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}$

$$F_2'(p_2) = \ -0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}$$

4.4 В многочлен $\boldsymbol{F_1(p)}$ $\mathbf{5}\cdot\mathbf{10^{-9}}\cdot\boldsymbol{p}$ подставляем $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$:

$F_1(p_1) = \mathbf{5}\cdot\mathbf{10^{-9}}\cdot 20000\ \boldsymbol{i} = 0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}$, $F_1(p_2) = -0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}$

4.4 Подставляем значения $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{F_1(p_1)}, \boldsymbol{F_1(p_2)}, \boldsymbol{F_2'(p_1)}, \boldsymbol{F_2'(p_2)}$

в формулу разложения:

$$F(p) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}\cdot\frac{1}{p-p_1} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}\cdot\frac{1}{p-p_2} =$$

$$= \frac{0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}}{0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{p}-20000\ \boldsymbol{i}} + \frac{-0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}}{-0{,}1\cdot\mathbf{10^{-3}}\cdot\boldsymbol{i}}\cdot\cdot\frac{1}{\boldsymbol{p}+20000\ \boldsymbol{i}} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{p}-20000\ \boldsymbol{i}} + \frac{1}{\boldsymbol{p}+20000\ \boldsymbol{i}} = \boldsymbol{I_4(p)}$$

4.5 Переходим от изображения к оригиналу, используя табличное преобразование:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\alpha}} \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\alpha t}}$$

$$\boldsymbol{I_4(p)} = \frac{1}{\boldsymbol{p}-20000\ \boldsymbol{i}} + \frac{1}{\boldsymbol{p}+20000\ \boldsymbol{i}} \Rightarrow i_4(t) = 1\cdot e^{-20000it} + 1\cdot e^{20000it}$$

Преобразуем экспоненты в тригонометрическую функцию, используя известную формулу из <u>теории функций комплексного переменного</u>:

$$\mathbf{\cos}\,\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{e^{+iz}}+\boldsymbol{e^{-iz}}}{\mathbf{2}} \ \Rightarrow\ i_4(t) = e^{-20000it} + e^{20000it} = \mathbf{2\ cos}(20000t)$$

5. ***производится анализ характера переходного процесса и строится график найденной функции времени.***

В данном случае после коммутации мы имеем **незатухающий колебательный процесс.**

График найденного тока $i_4(t) = \mathbf{2}\,\mathbf{cos}(20000t)$ приведён на рис. 4.2.3

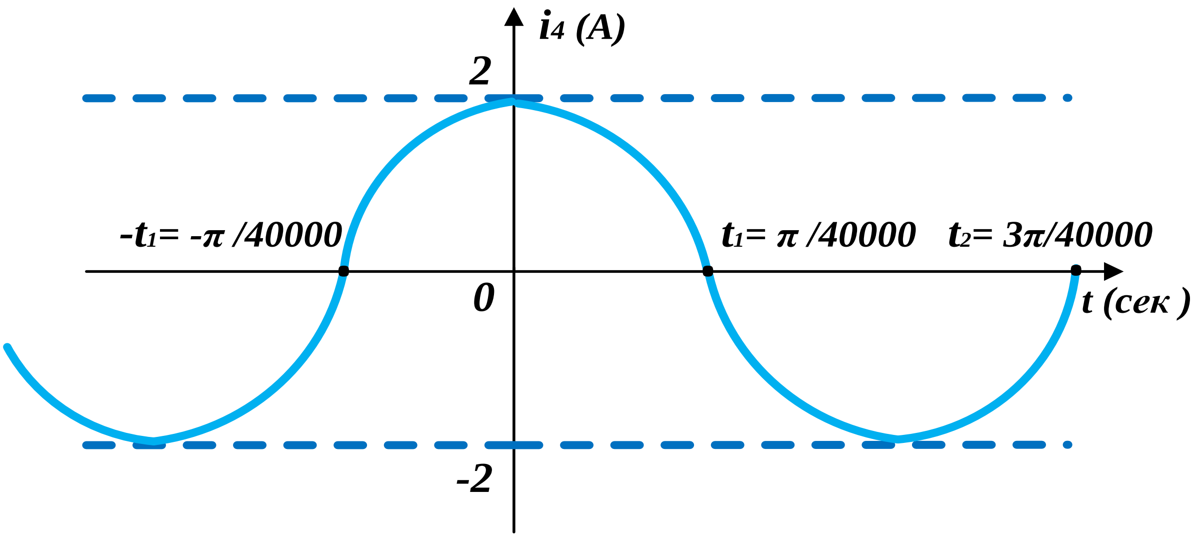


Рис. 4.1.3 - График переходного процесса искомой фунции (***i4 (t)***)

Замечание 1 В большинстве задач корни будут действительные и отрицательные, и форма переходного процесса будет апериодической.

Замечание 2 Решения, полученные операторным методом, должны совпадать с решением, полученным ранее классическим методом.