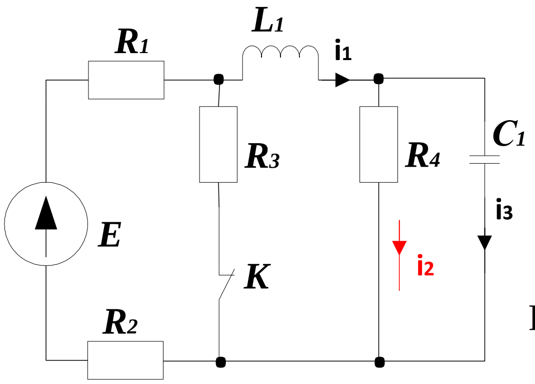
Пример расчёта задачи по переходным процессам классическим методом

(задание 4)

1. Постановка задачи

Выбираю задачу из таблицы 4.1. Пусть это будет вариант 17. Ваш вариант определяется по двум последним цифрам Вашего студенческого билета. Итак, постановка задачи:

Дано: Исходная схема – рис. 4.8 , как указано в табл. 4.1



$E = 120$ В, $L_1 = 10$ мГн, $C_1 = 10$ мкФ ,
$R_1 = 20$ Ом , $R_2 = 80$ Ом, $R_3 = 1000$ Ом,
$R_4 = 1000$ Ом

Найти: i_2 **- ?**

2. *Решение*

0. Определяем вид ключа **К** - ключ **К** - «нормально замкнут».

1. Находим независимые начальные условия (ННУ) из расчета установившегося режима до коммутации, то есть для времени ***t*** равное ***t***=(0-).

Для этого рисуем докоммутационную схему – с учётом того , что по постоянному току индуктивность L_1 превращается в ***к.з.***, а ёмкость C_1 в ***х.х.*** (разрыв). Для удобства расчёта пометим буквами узлы схемы.

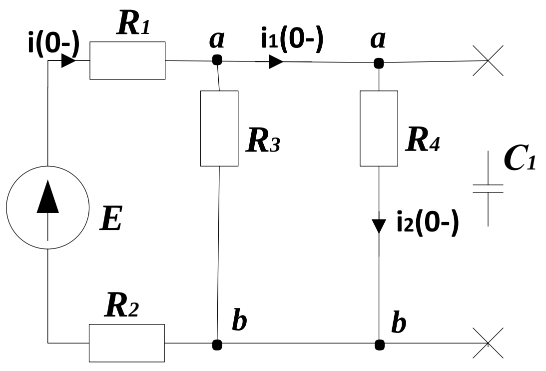


Рис. 4.1.1 -Докоммутационная схема
(t=0-)

Здесь: Независимые начальные условия это:

- ток через индуктивность L_1 : $i_1(0-) = i_2(0-)$;

- напряжение на ёмкости C_1 : $u_{C_1}(0-) = u_{ab}(0-)$;

Рассчитаем их по известным формулам (закон Ома, законы Кирхгофа, эквивалентное преобразование сопротивлений):

- $i_1(0-) = i_2(0-) = {u_{ab}(0-)}/{R_4} = \frac{100}{1000} = 0{,}1 \quad [A]$

Где $u_{ab}(0-) = i(0-) \cdot R_{34} = \frac{E}{R_1+R_2+R_{34}} \cdot R_{34} =$

$$= \frac{120}{20+80+\frac{1000\cdot1000}{1000+1000}} \cdot \frac{1000\cdot1000}{1000+1000} = \frac{120\cdot500}{100+500} = 100\ [B]$$

- $u_{C_1}(0-) = u_{ab}(0-) = i_2(0-) \cdot R_4 = 0{,}1 \cdot 1000 = 100\ [B]$

!!! Значения ННУ $i_1(0-)$, $u_{C_1}(0-)$ будут использованы в дальнейших расчётах, в частности, для определения постоянных интегрирования.

2. Нахождение принужденной составляющей из расчета установившегося режима в послекоммутационной цепи,, то есть для времени t равному t=(0+).

Для этого рисуем послекоммутационную схему – опять же с учётом того , что по постоянному току индуктивность ***L₁*** превращается в ***к.з.***, а ёмкость ***C₁*** в ***х.х.*** (разрыв).

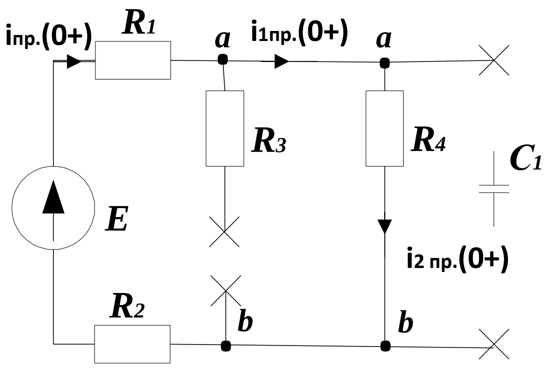


Рис. 4.1.2 - Послекоммутационная схема (t=0+)

После коммутации ключ ***К*** будет разомкнут, поэтому ветвь с ***R₃*** исключается из послекоммутационной схемы.

Здесь: - ток через индуктивность ***L₁***: $i_{1\text{ пр.}}(0+) = i_{2\text{ пр.}}(0+)$;

- напряжение на ёмкости ***C₁*** : $u_{\text{пр.}C_1}(0+) = u_{\text{пр. }ab}(0+)$;

Рассчитаем их: $i_{1\text{ пр.}}(0+) = i_{2\text{ пр.}}(0+) = \frac{E}{R_1+R_2+R_4} = \frac{120}{20+80+1000} =$

$= \frac{120}{1100} = 0{,}109\ \ [\text{A}]$;

$u_{\text{пр.}C_1}(0+) = u_{\text{пр. }ab}(0+) = i_{2\text{ пр.}}(0+) \cdot R_4 = 0{,}109 \cdot 1000 =$

$109\ [B]$;

!!! Эти значения $i_{1\text{ пр.}}(0-)$, $u_{\text{пр.}C_1}(0-)$ так же будут использованы в дальнейших расчётах для определения постоянных интегрирования.

3. Составление характеристического уравнения и определение его корней.

Способ составления характеристического уравнения (ХУ) подробно описан в лекции 5 часть 1.

Характеристическое уравнение составляется для послекоммутационной цепи.

Один из методов составления ХУ представлен ниже:

1. Записать выражение для входного комплексного сопротивления со стороны любой из ветвей в послекоммутационной схеме – <u>на переменном токе, даже если дана цепь постоянного тока!</u>
2. Произвести замену конструкции $\boldsymbol{j \cdot \omega = p}$ где p – величина, обратная постоянной времени переходного процесса $\boldsymbol{\tau}$.

3. Приравниваем это выражение к 0 и далее находим корни характеристического уравнения p_i.

Итак, составляем ХУ для послекоммутационной цепи - рис. 4.1.3 с учётом вышеизложенных соображений.

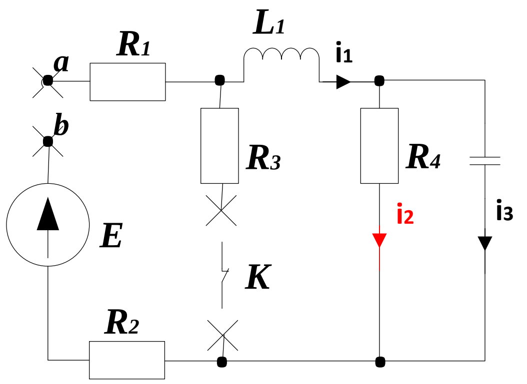


Рис. 4.1.3 - Послекоммутационная схема (t=0+) по переменному току

$$Z_{ab} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega L_1 + \frac{R_4 \cdot {}^{1}/_{j \cdot \omega C_1}}{R_4 + {}^{1}/_{j \cdot \omega C_1}} =$$

$$= R_1 + R_2 + p \cdot L_1 + \frac{R_4 \cdot \dfrac{1}{pC_1}}{R_4 + \dfrac{1}{pC_1}} = R_1 + R_2 + p \cdot L_1 + \frac{R_4}{p \cdot R_4 \cdot C_1 + 1} =$$

$$= \frac{(p \cdot R_4 \cdot C_1 + 1) \cdot (R_1 + R_2 + p \cdot L_1) + R_4}{p \cdot R_4 \cdot C_1 + 1} = 0$$

Далее: $p \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2) + p^2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot L_1 + p \cdot L_1 + R_4 =$

$$= p^2 \cdot R_4 \cdot C_1 \cdot L_1 + \ p \cdot (R_4 \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2) + L_1) + R_4 = 0$$

$\boldsymbol{A} = \mathrm{R_4 \cdot C_1 \cdot L_1} = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 100 \cdot 10^{-6}$

$\boldsymbol{B} = \ R_4 \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2) + L_1 =$

$$= 1000 \cdot \ 10 \cdot 10^{-6} \cdot (20 + 80) + 10 \cdot 10^{-3} = 1010 \cdot 10^{-3}$$

$\boldsymbol{C} = \ R_4 = 1000;$

$$\sqrt{\boldsymbol{D}} = \sqrt{\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{4} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}} = \sqrt{(1010 \cdot 10^{-3})^2 - 4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} =$$

$$= \sqrt{1020100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} - 400000 \cdot 10^{-6}} = 787{,}47 \cdot 10^{-3}\ ;$$

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{-B + \sqrt{\boldsymbol{D}}}{2 \cdot A} = \frac{-1010 \cdot 10^{-3} + 787{,}47 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -3937 \left({}^{\text{рад}}/_{c}\right)$$

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{-B-\sqrt{\boldsymbol{D}}}{2\cdot A} = \frac{-1010\cdot 10^{-3} - 787{,}47\cdot 10^{-3}}{2\cdot 100\cdot 10^{-6}} = -8987\ \left({}^{рад}/_{c}\right)$$

Итак, получены корни ХУ, они отрицательные и действительные.

4. Запись выражения свободной составляющей искомой функции в форме, определяемой видом найденных корней.

Для нашего искомого тока $\boldsymbol{i_2}$ имеем решение ОДУ второй степени:

$$\boldsymbol{i_{2\ св} = A_1\cdot e^{-3937t} + A_2\cdot e^{-8987t}}$$

5. Определение постоянных интегрирования $\boldsymbol{A_1, A_2}$ с помощью начальных условий и законов Кирхгофа.

Так как у нас лве неизвестных $\boldsymbol{A_1, A_2}$, то получаем второе уравнение из первого (для $\boldsymbol{i_{2\ св}}$), дифференцируя его:

$$\boldsymbol{i'_{2\ св} = -3937\cdot A_1\cdot e^{-3937t} - 8987A_2\cdot e^{-8987t}}$$

Подставляем в обе формулы (для $\boldsymbol{i_{2\ св}}$ и $\boldsymbol{i'_{2\ св}}$) время ***t = 0*** и получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i_{2\ св}}(0) = \boldsymbol{A_1 + A_2} \\ \boldsymbol{i'_{2\ св}}(0) = \boldsymbol{-3937\cdot A_1 - 8987A_2} \end{cases}$$

Найдем $\boldsymbol{i_{2\ св}}(0)$, используя начальные условия, найденные в п. п. 1 и 2, и формулу для полного (общего) решения линейного дифференциального уравнения : $\boldsymbol{i}_{2\ п}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{i}_{2\ св.}(\boldsymbol{t})$

Для момента коммутации ***t = 0*** : $\boldsymbol{i}_{2\ п}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{i}_{2\ св.}(\boldsymbol{0})$

и, согласно 1му закону коммутации, наш искомый полный ток $\boldsymbol{i_{2\ n}\ (0\ -)}$ был равен току $\boldsymbol{i_1\ (0\ -)}$, а это ток через индуктивность ***L₁***, то , следовательно и в момент коммутации ***t = 0*** он сохраняет это значение: $\boldsymbol{i_{2\ п}\ (0) = i_1\ (0\ -)} = 0{,}1\ \ [А]$ - это ННУ по п.1 нашего расчёта. Далее, после коммутации, $\boldsymbol{i_{2\ п}\ (0\ +)}$ равен сумме принужденной $\boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{0}+)$ и свободных составляющих $\boldsymbol{i}_{2\ св.}(\boldsymbol{0}+)$.

Ток $\boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{t})$ = 0,109 [A] был найден в п. 2 нашего расчета и является неизменным в установившемся режиме. Отсюда, подставляя эти ННУ в нашу формулу для $\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{0}\,)$ получаем:

$\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{0}\,) = \boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{0}\,) + \boldsymbol{i}_{2\,св.}(\boldsymbol{0}\,) \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}109 + \boldsymbol{i}_{2\,св.}(\boldsymbol{0}\,)$, откуда получаем $\boldsymbol{i}_{2\,св.}(\boldsymbol{0}\,) = 0{,}1 - 0{,}109 = -0{,}009$

Важно: используйте вышеприведённое рассуждение для нахождения свободной составляющей тока или напряжения для момента времени t=0 в Ваших задачах.

Далее, подставляем найденное значение $\boldsymbol{i}_{2\,св.}(\boldsymbol{0}\,)$ в систему уравнений и находим постоянные интегрирования $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$:

$$\boldsymbol{i}_{2\,св}(0) = -0{,}009 = \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2}$$
$$\boldsymbol{i}'_{2\,св}(0) = (-0{,}009)' = -\boldsymbol{3937}\cdot\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{8987}\boldsymbol{A_2}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{\boldsymbol{i}'_{2\,св}(\boldsymbol{0}+) - \boldsymbol{p_2}\boldsymbol{i}_{2\,св}(\boldsymbol{0}+)}{\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_2}} = \frac{0-(-\boldsymbol{8987})\cdot(-0{,}009)}{-\boldsymbol{3937}-(-\boldsymbol{8987})} = \frac{-80{,}883}{5050} = -0{,}016\,;$$

$$\boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{i}_{св}(\boldsymbol{0}+) - \boldsymbol{A_1} = -0{,}009 - (-0{,}016) = 0{,}007;$$

6. Нахождение искомой величины как суммы принужденной и свободной составляющих.

Запишем наше окончательное решение для $\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{t}\,)$:

$$\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{t}\,) = \boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{i}_{2\,св.}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{i}_{2пр.}(\boldsymbol{t}\,) + \boldsymbol{A_1}\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{p_1 t}} + \boldsymbol{A_2}\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{p_2 t}} =$$
$$= 0{,}109 - 0{,}016 \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{3937t}} + 0{,}007 \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{8987t}} \quad [\boldsymbol{A}]$$

6. Построение графика найденной функции во времени.

Для <u>грамотного</u> построения графика переходного процесса для тока $\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{t}\,)$, используется следующий приём: $\boldsymbol{t_i} = \boldsymbol{i}\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{p_1}|}$:

Для $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ $\quad \boldsymbol{t_0} = \boldsymbol{0}\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{p_1}|} = 0 \quad \boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{0}) = 0{,}109 - 0{,}016 + 0{,}007 = 0{,}1$

! Отметим, что $\boldsymbol{i}_{2\,п}(\boldsymbol{0})$ действительно совпадает с $\boldsymbol{i_1}\,(\boldsymbol{0}\,-) = 0{,}1$!

Для $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}$ $\quad \boldsymbol{t}_1 = 1\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{|-\boldsymbol{3937}|} = \frac{1}{\boldsymbol{3937}}$ [с] и

$$i_{2\,п}(t_1) = 0{,}109 - 0{,}016\cdot e^{-3937\cdot\frac{1}{3937}} + 0{,}007\cdot e^{-8987\cdot\frac{1}{3937}} =$$

$$= 0{,}109 - 0{,}016\cdot e^{-1} + 0{,}007\cdot e^{-2{,}28} =$$

$$= 0{,}109 - 0{,}0059 + 0{,}000714 = \mathbf{0{,}103814}\ ;$$

Для $i = 2$ $\quad t_2 = 2\cdot\frac{1}{|-3937|} = \frac{2}{3937}$ [c] и

$$i_{2\,п}(t_2) = 0{,}109 - 0{,}016\cdot e^{-3937\cdot\frac{2}{3937}} + 0{,}007\cdot e^{-8987\cdot\frac{2}{3937}} =$$

$$= 0{,}109 - 0{,}016\cdot e^{-2} + 0{,}007\cdot e^{-4{,}56} = 0{,}109 - 0{,}0021 ==$$

$\mathbf{0{,}1069}$; и так далее для $i = 3, 4, \ldots$

$$i_{2\,п}(\infty) = 0{,}109 - 0{,}016\cdot e^{-\infty} + 0{,}007\cdot e^{-\infty} = \mathbf{0{,}109}\ ;$$

! Отметим, что $i_{2\,п}(\infty)$ совпадает с $i_{2пр}(t) = 0{,}109$!

Строим график $i_{2\,п}(t)$ по точкам $t_0, t_1, t_2, t = \infty$ (рис. 4.1.4)

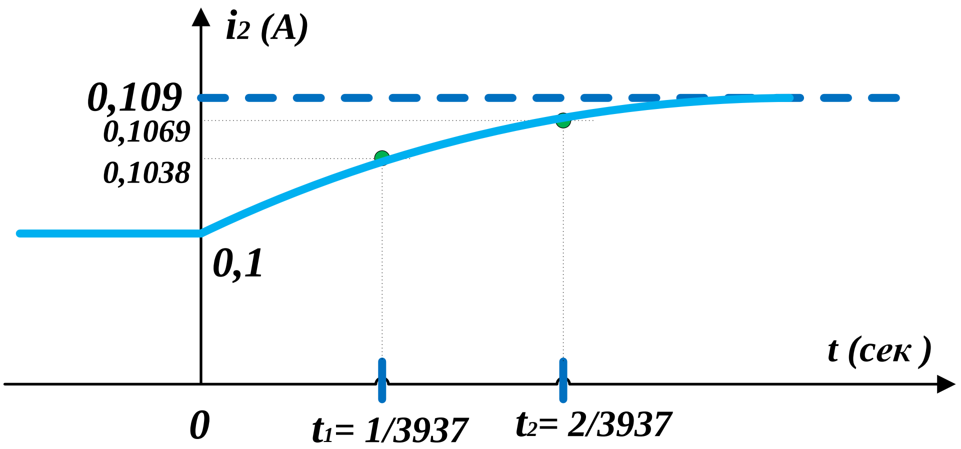


Рис. 4.1.3 - График переходного процесса искомой фунции (i_2 (t))

Замечание 1 Если в ходе Вашего решения были получены комплексно-сопряжённые корни характеристического уравнения, то следует воспользоваться методикой, указанной в лекции 5 часть 1. Форма переходного процесса - Затухающий колебательный процесс (звон).

Замечание 2 Если в ходе Вашего решения были получены действительные и равные корни характеристического уравнения, то

форма переходного процесса может иметь «экстремум».
Попробуйте рассчитать его самостоятельно.