**Практическое занятие №1**

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

**БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА**

**Задача**

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif, определённая на множестве  https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image004.gif .

Требуется определить точки https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image006.gif её локальных минимумов и максимумов на https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image008.gif .

**Последовательность решения**

Вначале с помощью необходимых условий первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных) необходимо найти точки https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif , где могут быть локальные экстремумы. Затем в найденных точках проверяется выполнение достаточных условий безусловного экстремума. В точках экстремума вычисляются значения исследуемой функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image012.gif .

*1.1.Необходимые условия экстремума первого порядка*

Пусть https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image006.gif есть точка локального минимума (максимума) функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image008.gif и https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif дифференцируема в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif . Тогда градиент функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif равен нулю, т.е.

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image021.gif или  https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image023.gif (1)

Точки, удовлетворяющие условию (1), называются с***тационарными***.

*1.2. Необходимые условия экстремума второго порядка*

Пусть https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image025.gif есть точка локального минимума (максимума) функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image028.gif и https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif дважды дифференцируема в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image030.gif . Тогда матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image032.gif функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif , вычисленная в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image030.gif , является положительно (отрицательно) полуопределённой, т.е.

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image034.gif , ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image036.gif ) (2)

*1.3. Достаточные условия экстремума*

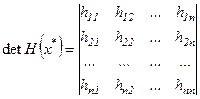
Функция https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image006.gif дважды дифференцируема, её градиент равен нулю (необходимое условие экстремума первого порядка), а матрица Гессе является положительно (отрицательно) определённой:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image021.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image041.gif , ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image043.gif ). (3)

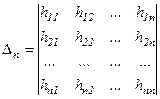
 Тогда точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image030.gif есть точка локального минимума (максимума) функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image008.gif .

**Определение 1**

Рассмотрим определитель матрицы Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif , вычисленный в стационарной точке

 . (4)

Определители

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image051.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image053.gif ,…, 

 называются ***угловыми минорами*** матрицы Гессе.

Определители *m* –го порядка ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image057.gif ), получающиеся из определителя матрицы https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif вычёркиванием каких-либо https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image060.gif строк и https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image060.gif столбцов с одними и теми же номерами, называются ***главными минорами.***

**Проверка достаточных условий экстремума**

 Достаточные условия экстремума и необходимые условия 2-го порядка могут быть проверены двумя способами.

**1-й способ** основан на исследовании угловых миноров.

Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была положительно определённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image041.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image065.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image067.gif , … , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image069.gif (5)

 Для того чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была отрицательно определённой (  https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image072.gif)  необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров этой матрицы чередовались, начиная с минуса:

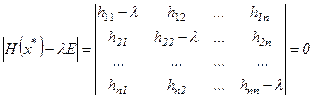
https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image074.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image067.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image077.gif ,… , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image079.gif (6)

 Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была положительно полуопределённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image034.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была отрицательно полуопределённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image036.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры чётного порядка этой матрицы были неотрицательны, а все главные миноры нечётного порядка – неположительны.

**Определение 2**

Составим уравнение

 . (7)

 Это алгебраическое уравнение называется ***характеристическим уравнением*** матрицы https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif . Корни этого уравнения называются ***собственными числами*** матрицы https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif .

**2-й способ** основан на проверке собственных чисел матрицы Гессе

Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была положительно определённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image041.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были положительны:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image091.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image093.gif , … , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image095.gif (8)

 Для того чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была отрицательно определённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image043.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были отрицательны

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image099.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image101.gif , … , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image103.gif (9)

 Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была положительно полуопределённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image034.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image047.gif была отрицательно полуопределённой ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image036.gif ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неположительны.

Алгоритм решения задачи нахождения безусловного экстремума функции отображён на рис.1. На рисунке ромб – означает проверку условия, описанного в этой фигуре, прямоугольник со скруглёнными углами– окончание исследования. В табл.1 приведены все способы проверки условий экстремума.

**Пример 1.**Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image109.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image111.gif .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image113.gif ; https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image115.gif (10)

 В результате решения системы уравнений (10) Получим одну стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image117.gif .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

**1-й способ**. Матрица Гессе имеет вид https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image119.gif . При этом https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image121.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image123.gif . Следовательно, в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image117.gif локальный минимум.

**2-й способ**. Найдём собственные числа матрицы Гессе. Для этого решим уравнение

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image126.gif . Отсюда https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image128.gif и https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image130.gif . Все собственные числа положительны, следовательно, в исследуемой точке функция имеет локальный минимум. Результаты исследования обоими способами совпадают.

Вычислим значение функции в точке минимума:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image132.gif .

**Пример 2.**Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image134.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image136.gif .

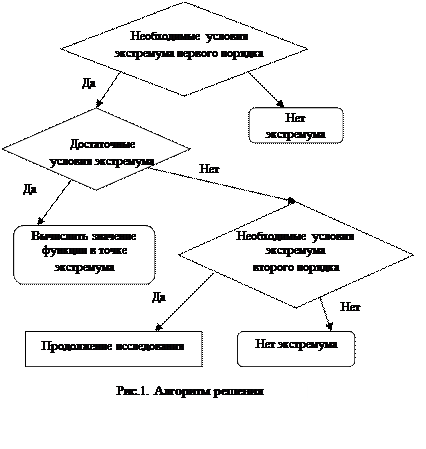
Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image113.gif ; https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image139.gif (11)

В результате решения системы уравнений (11) получим одну стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image117.gif .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

**1-й способ***.* Матрица Гессе имеет вид https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image142.gif .

****

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image145.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image147.gif ,

следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image149.gif )порядка получаются из https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image151.gif в результате вычёркивания https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image153.gif строк и столбцов с одинаковыми номерами и равны  и *2.*Главный минор второго порядка ( https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image157.gif ) получается из https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image151.gif в результате вычёркивания https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image160.gif строк и столбцов , т.е совпадает с https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image162.gif . Отсюда следует, что необходимые условия второго порядка не выполняются. Т.к. матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод, что в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image164.gif нет экстремума.

**2-й способ**. Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image166.gif .

 Получим https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image168.gif , т.е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image164.gif не является точкой минимума или максимума.

Функция https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif не имеет экстремумов.

**Пример 3.** Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image171.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image173.gif .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image113.gif ; https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image176.gif

 В результате решения системы получаем стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image178.gif

Матрица Гессе имеет вид https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image180.gif . https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image182.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image184.gif следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого порядка равны *2*и*0*соответственно. Главный минор второго порядка – *0.*Т.к. все главные миноры неотрицательны, то в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif может быть минимум и требуется дополнительное исследование.

Вычислим значение функции в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif : https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image188.gif и рассмотрим поведение функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image002.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image173.gif . При любых https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image192.gif https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image194.gif , поэтому точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image196.gif является точкой глобального минимума.

**Пример 4.** Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image198.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image173.gif .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image201.gif ; https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image203.gif .

 В результате решения системы получаем стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image178.gif

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image206.gif . https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image208.gif ,

следовательно, точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif является точкой локального минимума. Поскольку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image041.gif , то в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif функция строго выпуклая, поэтому точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image164.gif : https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image188.gif .

**Пример 5.** Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image216.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image173.gif .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image221.gif ; https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image223.gif .

 В результате решения системы получаем стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image225.gif

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image227.gif . Т.к. https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image229.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image231.gif , то в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image233.gif локальный минимум. Поскольку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image041.gif , то в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif функция строго выпуклая, поэтому точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif : https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image188.gif .

**Пример 6.** Найти экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image240.gif на множестве https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image173.gif .

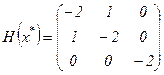
Запишем необходимые условия экстремума первого порядка: https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image219.gif

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image244.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image246.gif , https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image248.gif .

 В результате решения системы получаем стационарную точку https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image250.gif

 Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

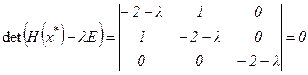
**1-й способ.** Матрица Гессе имеет вид

 .

 Т.к. https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image254.gif ,

т.е знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, то точка https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image164.gif - точка локального максимума.

**2-й способ.**Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения:

 .

 Отсюда

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image258.gif и

https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image260.gif .

 Т.к. все собственные числа матрицы Гессе отрицательны, то в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image164.gif локальный максимум. Вычислим значение функции в точке https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image010.gif : https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image263.gif .

**Задачи для самостоятельного решения**

**Решить свой вариант задачи и прислать для проверки**

Если номер зачетной книжки заканчивается нечетной цифрой:

Вариант1. Найти безусловный экстремум функцииhttps://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image265.gif .

Если номер зачетной книжки заканчивается четной цифрой:

Вариант2. Найти безусловный экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image271.gif .

Если номер зачетной книжки заканчивается нулем:

Вариант3. Найти безусловный экстремум функции https://konspekta.net/poisk-ruru/baza1/2915311243352.files/image283.gif .