**Практическое занятие №1**

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

**БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА**

**Задача**

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция , определённая на множестве   .

Требуется определить точки  её локальных минимумов и максимумов на  .

**Последовательность решения**

Вначале с помощью необходимых условий первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных) необходимо найти точки  , где могут быть локальные экстремумы. Затем в найденных точках проверяется выполнение достаточных условий безусловного экстремума. В точках экстремума вычисляются значения исследуемой функции  .

*1.1.Необходимые условия экстремума первого порядка*

Пусть  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве  и  дифференцируема в точке  . Тогда градиент функции  в точке  равен нулю, т.е.

  или   (1)

Точки, удовлетворяющие условию (1), называются с***тационарными***.

*1.2. Необходимые условия экстремума второго порядка*

Пусть  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве  и  дважды дифференцируема в точке  . Тогда матрица Гессе  функции  , вычисленная в точке  , является положительно (отрицательно) полуопределённой, т.е.

  , (  ) (2)

*1.3. Достаточные условия экстремума*

Функция  в точке  дважды дифференцируема, её градиент равен нулю (необходимое условие экстремума первого порядка), а матрица Гессе является положительно (отрицательно) определённой:

  ,  , (  ). (3)

 Тогда точка  есть точка локального минимума (максимума) функции  на множестве  .

**Определение 1**

Рассмотрим определитель матрицы Гессе  , вычисленный в стационарной точке

  . (4)

Определители

 ,  ,…, 

 называются ***угловыми минорами*** матрицы Гессе.

Определители *m* –го порядка (  ), получающиеся из определителя матрицы  вычёркиванием каких-либо  строк и  столбцов с одними и теми же номерами, называются ***главными минорами.***

**Проверка достаточных условий экстремума**

 Достаточные условия экстремума и необходимые условия 2-го порядка могут быть проверены двумя способами.

**1-й способ** основан на исследовании угловых миноров.

Для того, чтобы матрица Гессе  была положительно определённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны:

  ,  , … ,  (5)

 Для того чтобы матрица Гессе  была отрицательно определённой (  )  необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров этой матрицы чередовались, начиная с минуса:

  ,  ,  ,… ,  (6)

 Для того, чтобы матрица Гессе  была положительно полуопределённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе  была отрицательно полуопределённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры чётного порядка этой матрицы были неотрицательны, а все главные миноры нечётного порядка – неположительны.

 **Определение 2**

Составим уравнение

 . (7)

 Это алгебраическое уравнение называется ***характеристическим уравнением*** матрицы  . Корни этого уравнения называются ***собственными числами*** матрицы  .

**2-й способ** основан на проверке собственных чисел матрицы Гессе

Для того, чтобы матрица Гессе  была положительно определённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были положительны:

  ,  , … ,  (8)

 Для того чтобы матрица Гессе  была отрицательно определённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были отрицательны

  ,  , … ,  (9)

 Для того, чтобы матрица Гессе  была положительно полуопределённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неотрицательны.

Для того, чтобы матрица Гессе  была отрицательно полуопределённой (  ) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа этой матрицы были неположительны.

Алгоритм решения задачи нахождения безусловного экстремума функции отображён на рис.1. На рисунке ромб – означает проверку условия, описанного в этой фигуре, прямоугольник со скруглёнными углами– окончание исследования. В табл.1 приведены все способы проверки условий экстремума.

**Пример 1.**Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

  ;  (10)

 В результате решения системы уравнений (10) Получим одну стационарную точку  .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

**1-й способ**. Матрица Гессе имеет вид  . При этом  ,  . Следовательно, в точке  локальный минимум.

**2-й способ**. Найдём собственные числа матрицы Гессе. Для этого решим уравнение

 . Отсюда  и  . Все собственные числа положительны, следовательно, в исследуемой точке функция имеет локальный минимум. Результаты исследования обоими способами совпадают.

Вычислим значение функции в точке минимума:

  .

 **Пример 2.**Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

  ;  (11)

В результате решения системы уравнений (11) получим одну стационарную точку  .

Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

**1-й способ***.* Матрица Гессе имеет вид  .

****

 ,  ,

следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого (  )порядка получаются из  в результате вычёркивания  строк и столбцов с одинаковыми номерами и равны  и *2.*Главный минор второго порядка (  ) получается из  в результате вычёркивания  строк и столбцов , т.е совпадает с  . Отсюда следует, что необходимые условия второго порядка не выполняются. Т.к. матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод, что в точке  нет экстремума.

**2-й способ**. Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения

  .

 Получим  , т.е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому точка  не является точкой минимума или максимума.

Функция  не имеет экстремумов.

 **Пример 3.** Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

  ; 

 В результате решения системы получаем стационарную точку 

Матрица Гессе имеет вид  .  ,  следовательно, достаточные условия экстремума не выполняются.

Проверяем необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого порядка равны *2*и*0*соответственно. Главный минор второго порядка – *0.*Т.к. все главные миноры неотрицательны, то в точке  может быть минимум и требуется дополнительное исследование.

Вычислим значение функции в точке  :  и рассмотрим поведение функции  на множестве  . При любых   , поэтому точка  является точкой глобального минимума.

 **Пример 4.** Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

  ;  .

 В результате решения системы получаем стационарную точку 

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид

  .  ,

следовательно, точка  является точкой локального минимума. Поскольку  , то в точке  функция строго выпуклая, поэтому точка  - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке  :  .

 **Пример 5.** Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

 ;  .

 В результате решения системы получаем стационарную точку 

Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид  . Т.к.  ,  , то в точке  локальный минимум. Поскольку  , то в точке  функция строго выпуклая, поэтому точка  - точка глобального минимума. Вычислим значение функции в точке  :  .

**Пример 6.** Найти экстремум функции  на множестве  .

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка: 

  ,  ,  .

 В результате решения системы получаем стационарную точку 

 Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

**1-й способ.** Матрица Гессе имеет вид

 .

 Т.к.  ,

т.е знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, то точка  - точка локального максимума.

**2-й способ.**Найдём собственные значения матрицы Гессе в соответствии с (7) из уравнения:

  .

 Отсюда

 и

 .

 Т.к. все собственные числа матрицы Гессе отрицательны, то в точке  локальный максимум. Вычислим значение функции в точке  :  .

**Задачи для самостоятельного решения**

**Решить свой вариант задачи и прислать для проверки**

Если номер зачетной книжки заканчивается нечетной цифрой:

Вариант1. Найти безусловный экстремум функции .

Если номер зачетной книжки заканчивается четной цифрой:

Вариант2. Найти безусловный экстремум функции  .

Если номер зачетной книжки заканчивается нулем:

Вариант3. Найти безусловный экстремум функции  .