

составления баланса мощностей для рассмотренной схемы будет приведён ниже.

При анализе процессов в электрических цепях, содержащих магнитосвязанные элементы, не обязательно записывать для них математическую модель в виде системы дифференциальных уравнений (3.11.5). Если известно, что токи, ЭДС и напряжения в рассматриваемой схеме изменяются по синусоидальному закону, необходимо сразу переходить к математической модели рассматриваемой схемы на основе математического аппарата комплексных чисел.

**Пример 2.** Рассмотрим схему, представленную на рис. 3.11.4. Предположим, что для данной схемы известны все параметры, входящих в неё пассивных элементов, а также известны законы изменения с течением времени всех источников электрической энергии. Известно, что все источники электрической энергии переменные, изменяются с течением времени по синусоидальному закону с одинаковой частотой  $\omega$ . Кроме этого, известно, что между катушками 1 и 2 существует магнитная связь, характеризующаяся величиной взаимной индуктивности  $M$ . Требуется определить токи, протекающие во всех ветвях схемы.

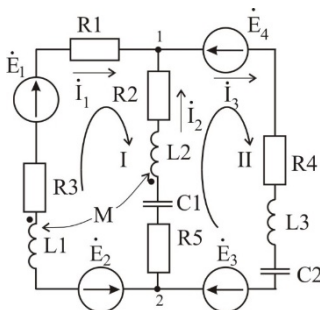


Рис. 3.11.4. Расчёт электрической цепи, содержащей магнитосвязанные элементы

Решение данной задачи будем производить на основании законов Кирхгофа. Поскольку в схеме содержится три ветви, в которых отсутствуют источники тока, необходимо в ходе решения задачи определить три тока, протекающие в данных ветвях, и система составляемых уравнений должна иметь размерность 3. Цепь содержит 2 узла, поэтому по первому закону Кирхгофа составляем одно

уравнение, оставшиеся два уравнения составляем по второму закону Кирхгофа для двух независимых контуров схемы.

Кроме этого, определим вид включения катушек 1 и 2. В данном случае он будет встречный, поскольку, как следует из рис. 3.11.4, ток  $\dot{I}_1$  входит в конец 1-й катушки, ток  $\dot{I}_2$  – в начало 2-й катушки.

Таким образом, система уравнений для схемы, представленной на рис. 3.11.4., будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{U}_{R3} + \dot{U}_{R1} - \dot{U}_{R2} - \dot{U}_{L2} - \dot{U}_{C1} - \dot{U}_{R5} + \dot{U}_{L1} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{R5} + \dot{U}_{R4} + \dot{U}_{L3} + \dot{U}_{C2} = \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \end{cases} \quad (3.11.22)$$

Каждое падение напряжения в последней системе распишем более подробно:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ R3 \cdot \dot{I}_1 + R1 \cdot \dot{I}_1 - R2 \cdot \dot{I}_2 - (j(\omega L2)\dot{I}_2 - j(\omega M)\dot{I}_1) + j\left(\frac{1}{\omega C1}\right)\dot{I}_2 - \\ - R5 \cdot \dot{I}_2 + (j(\omega L1)\dot{I}_1 - j(\omega M)\dot{I}_2) = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ R2 \cdot \dot{I}_2 + (j(\omega L2)\dot{I}_2 - j(\omega M)\dot{I}_1) - j\left(\frac{1}{\omega C1}\right)\dot{I}_2 + R5 \cdot \dot{I}_2 + \\ + R4 \cdot \dot{I}_3 + j(\omega L3)\dot{I}_3 - j\left(\frac{1}{\omega C2}\right)\dot{I}_3 = \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \end{cases} \quad (3.11.23)$$

Выполним перегруппировку в последней системе:

$$\begin{cases} 1 \cdot \dot{I}_1 + 1 \cdot \dot{I}_2 + (-1) \cdot \dot{I}_3 = 0 \\ (R3 + R1 + j(\omega L1 + \omega M)) \cdot \dot{I}_1 + \left( - \left( R2 + R5 + j\left( \omega L2 - \frac{1}{\omega C1} + \omega M \right) \right) \right) \cdot \dot{I}_2 \\ + 0 \cdot \dot{I}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ - j(\omega M)\dot{I}_1 + \left( R2 + R5 + j\left( \omega L2 - \frac{1}{\omega C1} \right) \right) \cdot \dot{I}_2 + \\ + \left( R4 + j\left( \omega L3 - \frac{1}{\omega C2} \right) \right) \cdot \dot{I}_3 = \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \end{cases} \quad (3.11.24)$$

Запишем последнюю систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (R3 + R1 + j(\omega L1 + \omega M)) & 0 \\ -j(\omega M) & \left(R4 + j\left(\omega L3 - \frac{1}{\omega C2}\right)\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \end{bmatrix} \quad (3.11.25)$$

Полученную систему уравнений решают относительно токов  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  по аналогии с решением системы уравнений (3.6.29). Для этого могут широко использоваться средства, имеющиеся в специализированных пакетах прикладных программ, таких как Microsoft Excel, MathCad, MatLab, Mathematica..., а также средства, имеющиеся в свободном доступе в сети Интернет.

Баланс мощностей в цепях синусоидального тока, содержащего магнитосвязанные элементы, записывается аналогично балансу мощностей в цепях синусоидального тока (3.9.1), (3.9.2). Существует отличие только в записи выражения (3.9.2), которое в общем случае имеет вид:

$$\sum_{j=1}^N E_j I_j \sin(\varphi_{ej} - \varphi_{ij}) + \sum_{j=1}^M U_j I_j \sin(\varphi_{uj} - \varphi_{ij}) = \sum_{j=1}^L X_{Lj} I_j^2 - \sum_{j=1}^A X_{Cj} I_j^2 \pm \sum_{j=1}^B 2\omega M_j I_{pj} I_{sj} \quad (3.11.25)$$

Предположим, что в рассматриваемой схеме содержится  $B$  катушек, имеющих магнитные связи, и что рассматриваемая  $j$ -я связь  $j=1, \dots, B$  существует между ветвями, в которых протекают токи  $I_{pj}$  и  $I_{sj}$ , и которая характеризуется величиной взаимной индуктивности  $M_j$ . Если катушки в ветвях  $p$  и  $s$  имеют согласное включение, тогда перед последним слагаемым записывается знак «+», в противном случае – знак «-».

Для схемы, представленной на рис. 3.11.3., баланс мощностей запишется в виде:

$$E_1 I_1 \cos(\varphi_{e1} - \varphi_{i1}) - E_2 I_2 \cos(\varphi_{e2} - \varphi_{i2}) = R1 \cdot I_1^2 + R2 \cdot I_2^2 \quad (3.11.26)$$

$$E_1 I_1 \sin(\varphi_{e1} - \varphi_{i1}) - E_2 I_2 \sin(\varphi_{e2} - \varphi_{i2}) = (\omega \cdot L1) I_1^2 + (\omega \cdot L2) I_2^2 + 2\omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \quad (3.11.27)$$

Для схемы, представленной на рис. 3.11.4. баланс мощностей будет иметь вид:

$$E_1 I_1 \cos(\varphi_{e1} - \varphi_{i1}) - E_2 I_1 \cos(\varphi_{e2} - \varphi_{i1}) + E_3 I_3 \cos(\varphi_{e3} - \varphi_{i3}) - E_4 I_3 \cos(\varphi_{e4} - \varphi_{i3}) = (R1 + R3) \cdot I_1^2 + (R2 + R5) \cdot I_2^2 + R4 \cdot I_3^2 \quad (3.11.28)$$

$$E_1 I_1 \sin(\varphi_{e1} - \varphi_{i1}) - E_2 I_1 \sin(\varphi_{e2} - \varphi_{i1}) + E_3 I_3 \sin(\varphi_{e3} - \varphi_{i3}) - E_4 I_3 \sin(\varphi_{e4} - \varphi_{i3}) = (\omega \cdot L1) \cdot I_1^2 + (\omega \cdot L2) \cdot I_2^2 + (\omega \cdot L3) \cdot I_3^2 - \left( \frac{1}{\omega \cdot C1} \right) \cdot I_2^2 - \left( \frac{1}{\omega \cdot C2} \right) \cdot I_3^2 - 2\omega \cdot M \cdot I_1 \cdot I_2 \quad (3.11.29)$$

### 3.12. Трёхфазные цепи, общие положения

**Трёхфазная симметричная система ЭДС** – совокупность трёх синусоидальных ЭДС имеющих одинаковую амплитуду и частоту, и сдвинутых по фазе друг относительно друга на угол, равный  $120^\circ$ . Закон изменения ЭДС в трёхфазной симметричной системе имеет вид:

$$\begin{cases} e_A(t) = E_m \sin(\omega t) \\ e_B(t) = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right), \\ e_C(t) = E_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases} \quad (3.12.1)$$

Графики изменения ЭДС с течением времени и векторная диаграмма представлены на рис. 3.12.1.