Вариант 217.
1. Постройте графики функций
$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;
$f(x)=(x+2)e^{1/x}$.
2. Постройте кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x=(t-1)^2(t-2); \\ y=(t-1)^2(t-3). \end{cases}$
3. Постройте кривую, заданную полярным уравнением $r^2=\operatorname{tg}\varphi$.
4. На гиперболе $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ найдите точку, ближайшую к точке $(3;0)$.

Вариант 218.
1. Постройте графики функций
$f(x)=\frac{4x^3+1}{x^4}$;
$f(x)=\sqrt[5]{x^5+5x^4}$.
2. Постройте кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t; \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$
3. Постройте кривую, заданную полярным уравнением $r^2=\cos\varphi\sin\varphi$.
4. Найдите наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего объем V.

Вариант 219.
1. Постройте графики функций
$f(x)=\sqrt[3]{x^2-x-2}$;
$f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.
2. Постройте кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x=\frac{3t(1-t)^2}{3t^2-3t+1}; \\ y=\frac{3t^2(1-t)}{3t^2-3t+1}. \end{cases}$
3. Постройте кривую, заданную полярным уравнением $r=1+\cos\varphi$.
4. Среди прямоугольников площади S найдите прямоугольник с наименьшим периметром.

Вариант 220.
1. Постройте графики функций
$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-5x+6)^2}$;
$f(x)=x\operatorname{arctg}x$.
2. Постройте кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x=\sin 2t; \\ y=\sin 3t \end{cases}$
3. Постройте кривую, заданную полярным уравнением $r^2(\cos^4\varphi-\sin^4\varphi)=\cos\varphi\sin\varphi$.
4. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

Н-р:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

1) Видим, что ф-ии $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны для $t \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$

2) Выясним вопрос о существовании асимптот (разбор по точкам)

1. Имеем:

-1

$$\lim_{t\to -1-0} x(t) = \lim_{t\to -1-0} \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{t\to -1+0} x(t) = \lim_{t\to -1+0} \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to -1-0} y(t) = \lim_{t\to -1-0} \frac{1}{(t-1)(t+1)} = -\infty; \quad \lim_{t\to -1+0} y(t) = +\infty$$

вертикальная ас-та $x = -\frac{1}{2}$

2. Имеем:

$$\lim_{t\to -\infty} x(t) = \lim_{t\to -\infty} \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{1-\frac{1}{t}} = -\infty$$

$\pm\infty$

$$\lim_{t\to -\infty} y(t) = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{t^2-1} = \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to -\infty \\ (t\to -\infty)}} y = 0$$

Вывод: прямая $y=0$ – горизонтальная асимптота графика ф-ии при $x\to-\infty$

Имеем, далее,

$$\lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{1-\frac{1}{t}} = +\infty$$

$$\lim_{t\to +\infty} y(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{t^2-1} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to +\infty} y = 0$$

Вывод: прямая $y=0$ – горизонтальная асимптота графика ф-ии при $x\to+\infty$

3. Имеем:

1

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{t^2}{t-1} = -\infty, \quad \lim_{t\to 1+0} x(t) = \lim_{t\to 1+0} \frac{t^2}{t-1} = +\infty$$

$$\lim_{t\to 1-0} y(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{t}{t^2-1} = -\infty, \quad \lim_{t\to 1+0} y(t) = \lim_{t\to 1+0} \frac{t}{t^2-1} = +\infty$$

(возможно существование наклон. ас-ты)

Значит, следует искать $\lim\limits_{t\to 1-0}\frac{y(t)}{x(t)}$ и $\lim\limits_{t\to 1+0}\frac{y(t)}{x(t)}$. Имеем

$$\lim_{t\to 1-0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1-0}\frac{t(t-1)}{(t-1)(t+1)\cdot t^2}=\lim_{t\to 1-0}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2}(=k)\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to-\infty\\(t\to 1-0)}}\frac{y(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 1+0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1+0}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2}(=k)\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(t\to 1+0)}}\frac{y(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

Станем искать теперь $\lim\limits_{t\to 1-0}[y(t)-\bar{k}x(t)]\ (=\bar{b})$ и $\lim\limits_{t\to 1+0}[y(t)-kx(t)]=b$

Имеем:

- $$\lim_{t\to 1-0}[y(t)-\bar{k}x(t)]=\lim_{t\to 1-0}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t-1}\right]=\lim_{t\to 1-0}\frac{-2-t}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}\Longleftrightarrow$$
  $$\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to-\infty\\(t\to 1-0)}}(y(x)-\bar{k}x)=-\frac{3}{4}(=\bar{b});$$
- $$\lim_{t\to 1+0}[y(t)-kx(t)]=\lim_{t\to 1+0}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t-1}\right]=\lim_{t\to 1+0}\frac{-2-t}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}\Longleftrightarrow$$
  $$\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(t\to 1+0)}}(y(x)-kx)=-\frac{3}{4}(=b)$$

Вывод: прямая $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$ - является наклонной ас-той при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$

3) Найдём промежутки возрастания и убывания ф-ии и точки экстремума. Для этого найдём x'_t, y'_t, а, следовательно y'_x и x'_y

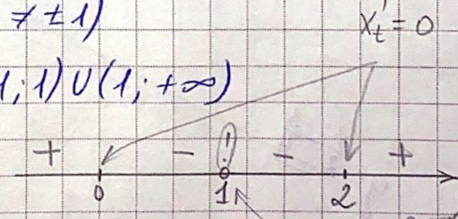
формулы: $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$

Имеем $x'_t=\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}\ (t\neq 1)$

$x'_t=0$ при $t=0$ и $t=2$

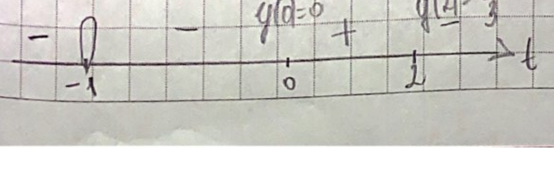
$y'_t=\frac{t^2-1-2t}{(t^2-1)^2}=\frac{-(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\ (t\neq\pm1)$

$y'_t<0$ при $t\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$



А тогда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{(t^2+1)(t-1)}{(t^2-1)^2\cdot t(t-2)}=-\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1}\ (t\neq\pm1)$$



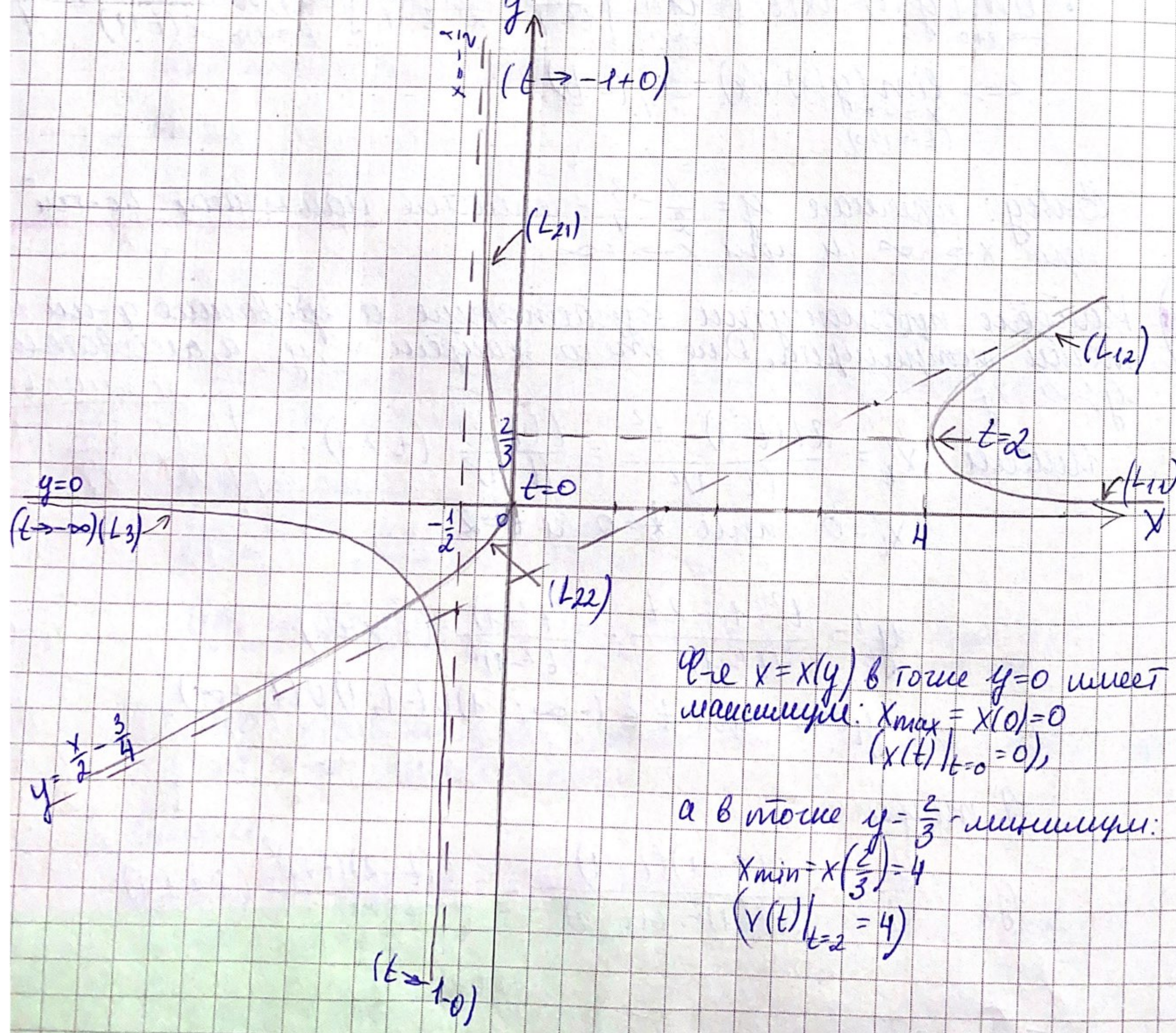
т.к. y'_t не меняет знак (все время <0), то y'_x и x'_y меняют знак вместе с x'_t (y'_x и x'_y имеют противоположный знак с x'_t).

Функция определена на: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

Критические точки: $t=0$, $t=2$

Составляем таблицу:

интервалы значений t	знак x'_t	поведение ф-ии $x(t)$	знак y'_t	поведение ф-ии $y(t)$	знак y'_x	знак x'_y	ветви графика
$(-\infty;-1)$	+	возрастает от $-\infty$ до $-1/2$	−	убывает от 0 до $-\infty$	−	−	(L_3)
$(-1;0)$	+	возрастает от $-1/2$ до 0	−	убывает от $+\infty$ до 0	−	−	(L_{21})
$(0;1)$	−	убывает от 0 до $-\infty$	−	убывает от 0 до $-\infty$	+	+	(L_{22})
$(1;2)$	−	убывает от $+\infty$ до 4	−	убывает от $+\infty$ до $2/3$	+	+	(L_{12})
$(2;+\infty)$	+	возрастает от 4 до $+\infty$	−	убывает от $2/3$ до 0	−	−	(L_{11})



Ф-я $x=x(y)$ в точке $y=0$ имеет максимум: $x_{max}=x(0)=0$ $\left(x(t)\big|_{t=0}=0\right)$,

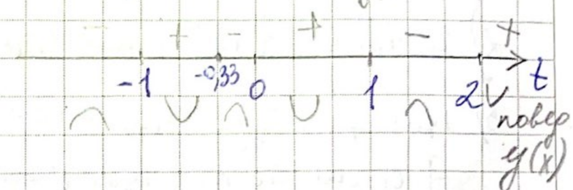
а в точке $y=\frac{2}{3}$ минимум:

$x_{min}=x\left(\frac{2}{3}\right)=4$ $\left(x(t)\big|_{t=2}=4\right)$

4) Найдём промежутки, в которых сохраняется направление выпуклости графика ф-ии, и точки перегиба

Найдём y''_{x^2}:

$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3}$ $(t \neq \pm 1)$ Знаки y''_{x^2}



$y''_{x^2} = 0$ при $t^3+3t+1=0$

$y''_{x^2} = \infty$ при $t=0,\ t=2$

Пусть $\varphi(t) = t^3+3t+1$

$\varphi'(t) = 3t^2+3 > 0$ для $t \in R \Rightarrow$ ф-я $\varphi(t)$ строго возрастающ.

Имеем:

$\left.\begin{matrix}\varphi(-1)<0 \\ \varphi(0)>0\end{matrix}\right\}$ ур-ние $t^3+3t+1=0$ имеет единств. корень $t_0 \in (-1;0)$

более точно: $\varphi(-0,33)<0$, $\varphi(-0,32)>0$

Положим $x_0 = \frac{t_0^2}{t_0-1}$, $y_0 = \frac{t_0}{t_0^2-1}$ $(x_0 = -0,08,\ y_0 = 0,37)$

t	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1, t_0)$	$(t_0, 0)$	$(0;1)$	$(1,2)$	$(2;+\infty)$
x	$(-\infty;-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, x_0)$	$(x_0, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(4;+\infty)$	$(4;+\infty)$
y	$(-\infty, 0)$	∞	$(y_0, +\infty)$	$(y_0; 0)$	$(-\infty; 0)$	$(\frac{2}{3};+\infty)$	$(0, \frac{2}{3})$
y''_{x^2}	<0		>0	<0	>0	<0	>0
направл. выпуклости	вверх (L_3)		вниз (L_{21})	вверх (L_{21})	вниз (L_{22})	вверх (L_{12})	вниз (L_{11})
			точка (x_0, y_0) — точка перегиба (L_{21})				