Задача 1

1 – 16. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Случайная величина η принимает значения от 0 до k, причём $P(\eta = m) = P(\xi = m)$ для всех значений m от 0 до $k-1$ включительно, $P(\eta = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(\xi = i)$ (т.е. сумме вероятностей того, что случайная величина ξ примет все остальные значения, начиная от k и до бесконечности). Требуется:

1. построить ряд распределения случайной величины η;
2. построить функцию распределения случайной величины η;
3. найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайных величин ξ и η, сравнить полученные значения.

№ варианта	p	k	№ варианта	p	k
1	0,1	8	9	0,5	8
2	0,15	7	10	0,55	9
3	0,2	9	11	0,6	7
4	0,25	7	12	0,65	8
5	0,3	8	13	0,7	7
6	0,35	9	14	0,75	9
7	0,4	8	15	0,8	8
8	0,45	7	16	0,85	9

17 – 26. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Случайная величина η принимает значения от 0 до k, причём $P(\eta = m) = P(\xi = m)$ для всех значений m от 0 до $k-1$ включительно, $P(\eta = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(\xi = i)$ (т.е. сумме вероятностей того, что случайная величина ξ примет все остальные значения, начиная от k и до бесконечности). Требуется:

1. построить ряд распределения случайной величины η;
2. построить функцию распределения случайной величины η;
3. найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайных величин ξ и η, сравнить полученные значения.

№ варианта	λ	k	№ варианта	λ	k
17	0,25	8	22	1,75	8
18	0,5	7	23	2	9
19	1	9	24	2,25	7
20	1,25	7	25	2,5	8
21	1,5	8	26	2,75	7

Задача 2

1 – 10. Задачи изучения Интернет-трафика привели к выводу о его фрактальном (самоподобном) характере. При этом в описании такого трафика используется распределение Парето, которое в общем виде задаётся плотностью распределения:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^{-(\alpha+1)}, & x \ge x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}, \qquad x_0 > 0,\ \alpha > 0.$$

Найдите значение c, функцию распределения, числовые характеристики: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $x_{1/2}$, вероятность $P(a<\xi<b)$ попадания значения случайной величины в интервал (a,b), постройте графики плотности и функции распределения, найдите плотность распределения случайной величины $\eta = -b\xi^2$.

Вариант	x_0	α	a	b	Вариант	x_0	α	a	b
1	2	3	1	4	6	2	4	1	3
2	1	3	0	2	7	1	4	0	3
3	1.5	4	0	3	8	1.5	3	0.5	4
4	2.5	4	1	4	9	2.5	3	0.5	3
5	0.5	4	0	2	10	0.5	3	0	3

11 – 20. Во многих системах эффективного кодирования изображений передаваемая информация содержит отличия значения сигнала в текущем пикселе от некоторых соседних. Для описания таких отличий используется распределение Лапласа, которое в общем виде задаётся плотностью распределения:

$$p_\xi(x) = ce^{-\lambda|x-\beta|}, \qquad \lambda > 0.$$

Найдите значение c, функцию распределения, числовые характеристики: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $x_{1/2}$, вероятность $P(a<\xi<b)$ попадания значения случайной величины в интервал (a,b), постройте графики плотности и функции распределения, найдите плотность распределения случайной величины $\eta = -b\xi^2$.

Вариант	β	λ	a	b	Вариант	β	λ	a	b
11	2.5	2	1	4	16	3	2	2	4
12	4	2	1	7	17	4.5	1.5	2	7
13	3.5	2	1	5	18	4	0.5	2	6
14	2	1.5	0	4	19	2.5	0.5	0	5
15	1.5	2	0.5	2.5	20	3	0.5	1	6

21 – 26. Время нахождения заявки в телекоммуникационном устройстве состоит из двух фаз: времени ожидания, которое имеет показательное распределение с параметром λ_1, и времени обслуживания, также распределённого по показательному закону с параметром λ_2. Результирующая случайная величина описывается обобщённым распределением Эрланга второго порядка, которое в общем виде задаётся плотностью распределения:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c\cdot\left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right), & x > 0, \\ 0, \quad x \le 0, \end{cases} \qquad \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_1 \ne \lambda_2 .$$

Найдите значение *c*, функцию распределения, числовые характеристики: $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$, $x_{1/2}$, вероятность $P(a < \xi < b)$ попадания значения случайной величины в интервал (a,b), постройте графики плотности и функции распределения, найдите плотность распределения случайной величины $\eta = a\xi^2$.

Вариант	λ_1	λ_2	a	b	Вариант	λ_1	λ_2	a	b
21	2	1.5	–2	4	24	4	2.5	–1.5	4
22	3.5	2	–3.5	2	25	1.5	2	–3	2
23	1.5	4	–1	3	26	2	2.5	–4.5	3

Задача 3

Дано совместное распределение двух случайных величин ξ и η.

1. Найти константу *c*.
2. Найти совместную функцию распределения случайных величин ξ и η.
3. Найти одномерные распределения случайных величин ξ и η.
4. Найти центр рассеяния и матрицу корреляций случайных величин ξ и η.
5. Найти вероятность события *A*.
6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $\zeta_1 = 2\xi - 3\eta$ и $\zeta_2 = \xi + 2\eta$ и $\operatorname{cov}(\zeta_1, \zeta_2)$.
7. Определить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

Вариант № 1

ξ \ η	-1	0	1
0	0.15	0.1	0.2
1	0.2	0.2	c

$A=\{\xi>0,\eta\le 0\}$

Вариант № 2

ξ \ η	-1	1
-1	0.2	c
0	0.15	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi<1,\eta\ge 1\}$

Вариант № 3

ξ \ η	1	2	3
-1	0.2	c	0.15
1	0.15	0.1	0.3

$A=\{\xi<1,\eta\ge 2\}$

Вариант № 4

ξ \ η	1	2
-1	0.25	c
0	0.1	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi<1,\eta\ge 1\}$

Вариант № 5

ξ \ η	-1	0	1
0	0.1	0.15	0.2
1	0.05	0.2	c

$A=\{\xi>0,\eta\le 0\}$

Вариант № 6

ξ \ η	0	1
1	0.15	c
2	0.2	0.15
3	0.1	0.25

$A=\{\xi\le 1,\eta>1\}$

Вариант № 7

ξ \ η	1	2	3
-1	0.15	c	0.3
1	0.2	0.1	0.15

$A=\{\xi<1,\eta\ge 2\}$

Вариант № 8

$\xi \backslash \eta$	1	2
-1	0.15	c
0	0.2	0.1
1	0.15	0.3

$A=\{\xi<1, \eta\geq 1\}$

Вариант № 9

$\xi \backslash \eta$	–1	0	1
0	0.2	0.1	0.15
1	0.15	0.25	c

$A=\{\xi>0, \eta\leq 0\}$

Вариант № 10

$\xi \backslash \eta$	–1	0	1
0	0.15	0.1	0.2
1	0.2	0.2	c

$A=\{\xi>0, \eta\leq 0\}$

Вариант № 11

$\xi \backslash \eta$	-1	1
-1	0.2	c
0	0.15	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi<1, \eta\geq 1\}$

Вариант № 12

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
-1	0.2	c	0.15
1	0.15	0.1	0.3

$A=\{\xi<1, \eta\geq 2\}$

Вариант № 13

$\xi \backslash \eta$	1	2
-1	0.25	c
0	0.1	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi<1, \eta\geq 1\}$

Вариант № 14

$\xi \backslash \eta$	–1	0	1
0	0.1	0.15	0.2
1	0.05	0.2	c

$A=\{\xi>0, \eta\leq 0\}$

Вариант № 15

$\xi \setminus \eta$	0	1
1	0.15	c
2	0.2	0.15
3	0.1	0.25

$A=\{\xi \le 1, \eta > 1\}$

Вариант № 16

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
-1	0.15	c	0.3
1	0.2	0.1	0.15

$A=\{\xi < 1, \eta \ge 2\}$

Вариант № 17

$\xi \setminus \eta$	1	2
-1	0.15	c
0	0.2	0.1
1	0.15	0.3

$A=\{\xi < 1, \eta \ge 1\}$

Вариант № 18

$\xi \setminus \eta$	–1	0	1
0	0.2	0.1	0.15
1	0.15	0.25	c

$A=\{\xi > 0, \eta \le 0\}$

Вариант № 19

$\xi \setminus \eta$	–1	0	1
0	0.15	0.1	0.2
1	0.2	0.2	c

$A=\{\xi > 0, \eta \le 0\}$

Вариант № 20

$\xi \setminus \eta$	-1	1
-1	0.2	c
0	0.15	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi < 1, \eta \ge 1\}$

Вариант № 21

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
-1	0.2	c	0.15
1	0.15	0.1	0.3

$A=\{\xi < 1, \eta \ge 2\}$

Вариант № 22

$\xi \backslash \eta$	1	2
-1	0.25	c
0	0.1	0.2
1	0.2	0.15

$A=\{\xi<1,\eta\geq 1\}$

Вариант № 23

$\xi \backslash \eta$	–1	0	1
0	0.1	0.15	0.2
1	0.05	0.2	c

$A=\{\xi>0,\eta\leq 0\}$

Вариант № 24

$\xi \backslash \eta$	0	1
1	0.15	c
2	0.2	0.15
3	0.1	0.25

$A=\{\xi\leq 1,\eta>1\}$

Вариант № 25

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
-1	0.15	c	0.3
1	0.2	0.1	0.15

$A=\{\xi<1,\eta\geq 2\}$

Вариант № 26

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
0	0.25	0.1	0.15
1	0.35	0.05	c

$A=\{\xi>0,\eta\leq 2\}$

Задача 4

Дана совместная плотность распределения двух случайных величин $p_{\xi\eta}(x,y)$. Требуется найти:

1. Константу *c*;
2. Одномерные плотности распределения случайных величин ξ и η;
3. Центр рассеяния и матрицу корреляций случайных величин ξ и η;
4. Проверить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми.

1. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

2. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(2x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

3. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+2y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

4. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+3y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

5. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$.

6. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(2x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$.

7. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+2y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$.

8. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(3x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$.

9. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x^2+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

10. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(2x+y^2\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$.

11. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(x^2+2y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

12. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(3x^2+y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

13. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(x^2+y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

14. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(2x+y^2\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{x\ge 0, y\ge 0, 2x+y\le 1\}$.

15. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(x^2+2y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

16. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(x^2+3y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

17. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(x+y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

18. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c\left(2x+y\right), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

19. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+2y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

20. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(3x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

21. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

22. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(2x+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

23. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+2y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

24. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+3y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$.

25. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x^2+y), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{-1\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$.

26. $p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases} c(x+y^2), \{x,y\}\in G, \\ 0, иначе, \end{cases}$

область $G=\{1\le x\le 2, -1\le y\le 1\}$.