

Дано: $R_1 = 14 \text{ Ом}$; $R_2 = 24 \text{ Ом}$; $R_3 = 8 \text{ Ом}$; $R_4 = 18 \text{ Ом}$; $R_5 = 30 \text{ Ом}$;
 $R_6 = 16 \text{ Ом}$; $E_2 = 40 \text{ В}$, $E_3 = 12 \text{ В}$; $J_{k2} = 0 \text{ А}$; $J_{k3} = 1 \text{ А}$. Рис. 20

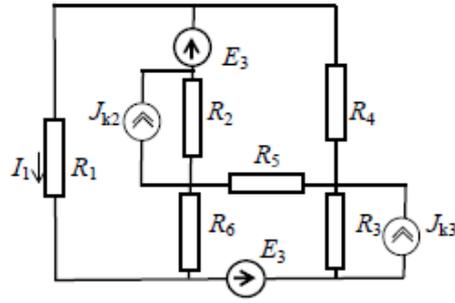


Рис. 20

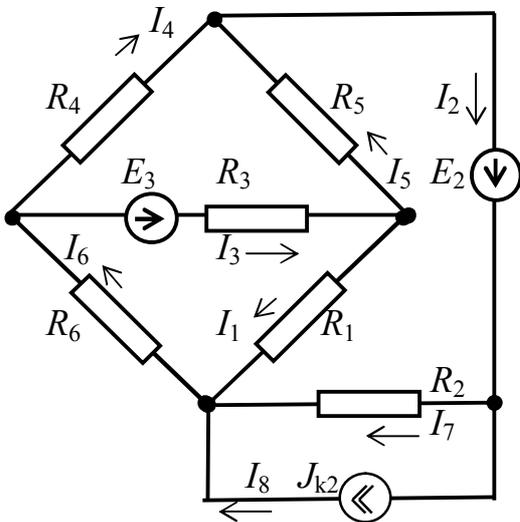


Рис. 21

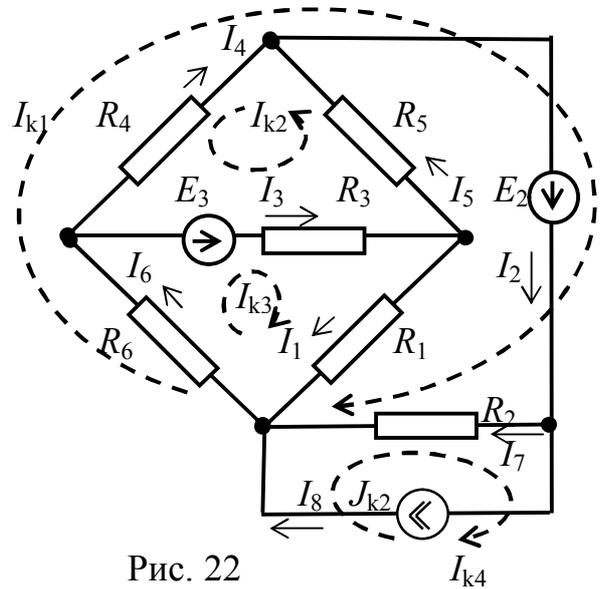


Рис. 22

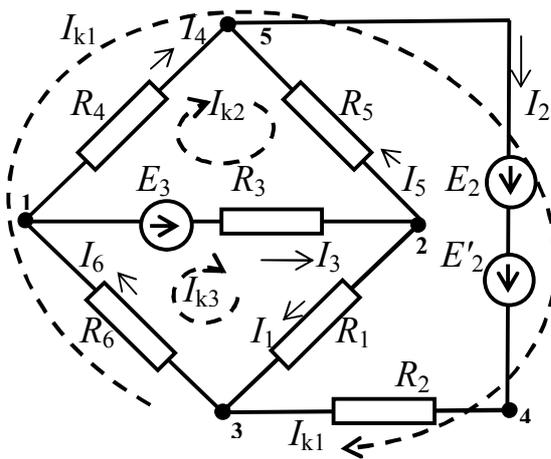


Рис. 23

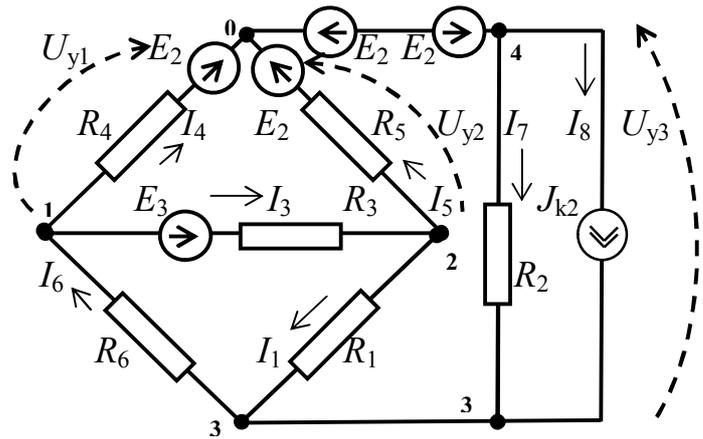


Рис. 24

3 Пример расчета одного из заданий

Исходная схема представлена на рис. 21. В ней источник тока с нулевой интенсивностью не показан. До расчета проставляются направления токов во всех ветвях схемы (направление тока I_1 берется в соответствии с заданием).

Пусть заданные параметры пассивных и активных элементов будут следующими: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 25 \text{ Ом}$; $R_3 = 15 \text{ Ом}$; $R_4 = 38 \text{ Ом}$; $R_5 = 52 \text{ Ом}$; $R_6 = 65 \text{ Ом}$; $E_2 = E_3 = 50 \text{ В}$; $J_{k2} = 0,6 \text{ А}$; $J_{k3} = 0 \text{ А}$.

3.1 Расчет методом контурных токов

При расчете этой схемы методом контурных токов возможны два пути. Путь 1. Преобразование исходной схемы не производится. И тогда $n_b = 8$; $n_y = 5$; $n_t = 1$. Число уравнений k (и число неизвестных контурных токов):

$$k = n_b - n_y - n_t + 1 = 8 - 5 - 1 + 1 = 3,$$

где n_b – число ветвей схемы;

n_y – число узлов;

n_t – число идеальных источников тока.

Однако число независимых контуров на n_t больше, т.е. рассматривать нужно 4 контурных тока, из них 3 требуют определения, а четвертый – известен и равен интенсивности источника тока J_{k2} . Схема с размещенными в ней контурными токами представлена на рис. 22. Система уравнений, соответствующая схеме рис. 22, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} R_{11} \cdot I_{k1} - R_{12} \cdot I_{k2} + R_{13} \cdot I_{k3} = E_2 + R_2 \cdot I_{k4} \\ -R_{21} \cdot I_{k1} + R_{22} \cdot I_{k2} + R_{23} \cdot I_{k3} = E_3 \\ R_{31} \cdot I_{k1} + R_{32} \cdot I_{k2} + R_{33} \cdot I_{k3} = E_3 \end{cases} .$$

В ней:

$$R_{11} = R_4 + R_6 + R_2 = 38 + 65 + 25 = 128 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 = 15 + 38 + 52 = 105 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_1 + R_3 + R_6 = 20 + 15 + 65 = 100 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = R_4 = 38 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = R_3 = 15 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = R_6 = 65 \text{ Ом};$$

$$I_{k4} = J_{k2}; \quad R_2 \cdot I_{k4} = 25 \cdot 0,6 = 15 \text{ В}.$$

Таким образом, система в числовом выражении выглядит:

$$\begin{cases} 128 \cdot I_{k1} - 38 \cdot I_{k2} + 65 \cdot I_{k3} = 65 \\ -38 \cdot I_{k1} + 105 \cdot I_{k2} + 15 \cdot I_{k3} = 50 \\ 65 \cdot I_{k1} + 15 \cdot I_{k2} + 100 \cdot I_{k3} = 50 \end{cases} \quad (1)$$

и имеет решение $I_{k1} = 0,822 \text{ А}$; $I_{k2} = 0,796 \text{ А}$; $I_{k3} = -0,154 \text{ А}$.

Значения реальных токов:

$I_1 = I_{k3} = -0,154 \text{ А}$; $I_2 = I_{k1} = 0,822 \text{ А}$; $I_3 = I_{k2} + I_{k3} = 0,796 - 0,154 = 0,642 \text{ А}$;

$I_4 = I_{k1} - I_{k2} = 0,822 - 0,796 = 0,026 \text{ А}$; $I_5 = I_{k2} = 0,796 \text{ А}$; $I_6 = I_{k1} + I_{k3} = 0,822 - 0,154 = 0,668 \text{ А}$; $I_7 = I_{k1} - I_{k4} = 0,822 - 0,6 = 0,222 \text{ А}$; $I_8 = I_{k4} = J_{k2} = 0,6 \text{ А}$.

Путь 2. Предусматривает преобразование реального источника тока J_{k2} в эквивалентную ЭДС $E_2' = J_{k2} \cdot R_2 = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ В}$. Поскольку направления ЭДС E_2 и E_2' во второй ветви совпадают (см. рис. 23), то общая ЭДС ветви 2 находится суммированием: $E_2'' = E_2 + E_2' = 50 + 15 = 65 \text{ В}$. Если не изменять размещение контурных токов по сравнению со схемой рис. 22, то числовое выражение системы контурных токов для схемы рис. 23 будет иметь вид (1). Отличие новой схемы от схемы рис. 22 заключается в отсутствии в ней известного контурного тока I_{k4} . Ток I_7 через резистор R_2 определяется после возврата в исходную схему (рис. 21) по формуле:

$$I_7 = I_2 - J_{k2} = 0,822 - 0,6 = 0,222 \text{ А}.$$

3.2 Расчет методом узловых напряжений

Расчет заданной схемы методом узловых напряжений (МУН) требует ее предварительного преобразования. Ветвь «2» (см. рис. 21) содержит идеальный источник ЭДС, обладающий бесконечно большой проводимостью, что не позволит для такой схемы сформировать матрицу проводимостей с конечными элементами. Преобразование может быть таким, как представлено на рис. 23. Возможно и еще одно преобразование (см. рис. 24), заключающееся в переносе идеального источника ЭДС E_2 через узел «0». Энергетика схемы не изменится, если во все ветви, подключенные к этому узлу вставить ЭДС, равные E_2 и направленные к узлу «0». В результате в ветви «2» оказываются равные по величине и противоположно направленные ЭДС E_2 . Компенсируя друг друга в ветви «2», они осуществляют подключение четвертого узла непосредственно к опорному («0»). Система по МУН для полученной таким образом схемы должна содержать три уравнения:

$$\begin{cases} G_{11} \cdot U_{y1} - G_{12} \cdot U_{y2} - G_{13} \cdot U_{y3} = -G_{10} \cdot E_2 - G_{12} \cdot E_3 \\ -G_{21} \cdot U_{y1} + G_{22} \cdot U_{y2} - G_{23} \cdot U_{y3} = -G_{20} \cdot E_2 + G_{21} \cdot E_3 \\ -G_{31} \cdot U_{y1} - G_{32} \cdot U_{y2} + G_{33} \cdot U_{y3} = J_{k2} \end{cases}$$

В ней: $G_{11} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_6 = 1/15 + 1/38 + 1/65 = 0,108 \text{ См}$;

$G_{22} = 1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_5 = 1/20 + 1/15 + 1/52 = 0,136 \text{ См}$;

$G_{33} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_6 = 1/20 + 1/25 + 1/65 = 0,105 \text{ См}$;

$$\begin{aligned}
G_{12} &= G_{21} = 1/R_3 = 1/15 = 0,0667 \text{ См}; \\
G_{13} &= G_{31} = 1/R_6 = 1/65 = 0,0154 \text{ См}; \\
G_{23} &= G_{32} = 1/R_1 = 1/20 = 0,0500 \text{ См}; \\
G_{10} &= G_{01} = 1/R_4 = 1/38 = 0,0263 \text{ См}; \\
G_{20} &= 1/R_5 = 1/52 = 0,0192 \text{ См}; \\
G_{30} &= 1/R_2 = 1/25 = 0,04 \text{ См}.
\end{aligned}$$

Числовое представление системы по МУН:

$$\begin{cases}
0,108 \cdot U_{y1} - 0,0667 \cdot U_{y2} - 0,0154 U_{y3} = -0,0263 \cdot 50 - 0,0667 \cdot 50 = -4,65 \\
-0,0667 \cdot U_{y1} + 0,136 \cdot U_{y2} - 0,05 \cdot U_{y3} = -0,0192 \cdot 50 + 0,0667 \cdot 50 = 2,375 \\
-0,0154 U_{y1} - 0,05 \cdot U_{y2} + 0,105 \cdot U_{y3} = 0,6
\end{cases} \quad (2)$$

Ее решение: $U_{y1} = -49,00 \text{ В}$; $U_{y2} = -8,63 \text{ В}$; $U_{y3} = -5,55 \text{ В}$.

Токи в ветвях находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
I_1 &= (U_{y2} - U_{y3}) \cdot G_{23} = (-8,63 + 5,55) \cdot 0,05 = -0,154 \text{ А}; \\
I_7 &= -U_{y3} \cdot G_{30} = 5,55 \cdot 0,04 = 0,222 \text{ А}; \quad I_2 = I_7 + J_{k2} = 0,222 + 0,6 = 0,822 \text{ А} \\
I_3 &= (E_3 + U_{y1} - U_{y2}) \cdot G_{12} = (50 - 49 + 8,63) \cdot 0,0667 = 0,642 \text{ А}; \\
I_4 &= (E_2 + U_{y1}) \cdot G_{10} = (50 - 49) \cdot 0,0263 = 0,026 \text{ А}; \\
I_5 &= (E_2 + U_{y2}) \cdot G_{20} = (50 - 8,63) \cdot 0,0192 = 0,796 \text{ А}; \\
I_6 &= (U_{y3} - U_{y1}) \cdot G_{13} = (-5,55 + 49) \cdot 0,0154 = 0,668 \text{ А}.
\end{aligned}$$

Значения токов в ветвях схемы совпадают со значениями, полученными с помощью предыдущего метода, что свидетельствует о правильности расчета. При проведении расчета одним методом признаком правильности полученного решения является равенство мощности источников и потребителей (баланс мощности).

Мощность источников:

$$\begin{aligned}
P_{u1} &= E_2 \cdot I_2 = 50 \cdot 0,822 = 41,1 \text{ Вт}, \quad P_{u2} = E_3 \cdot I_3 = 50 \cdot 0,642 = 32,1 \text{ Вт}, \\
P_{u3} &= -R_2 \cdot I_7 \cdot J_{k2} = -25 \cdot 0,222 \cdot 0,6 = -3,33 \text{ Вт}. \\
\text{Всего } P_u &= P_{u1} + P_{u2} + P_{u3} = 41,1 + 32,1 - 3,33 = 69,87 \text{ Вт}.
\end{aligned}$$

Отрицательность значения мощности источника тока указывает, что он находится в режиме потребления электроэнергии.

Мощность потребителей:

$$\begin{aligned}
P_1 &= I_1^2 \cdot R_1 = (-0,154)^2 \cdot 20 = 0,472 \text{ Вт}; & P_2 &= I_7^2 \cdot R_2 = 0,222^2 \cdot 25 = 1,23 \text{ Вт}, \\
P_3 &= I_3^2 \cdot R_3 = 0,642^2 \cdot 15 = 6,18 \text{ Вт}; & P_4 &= I_4^2 \cdot R_4 = 0,026^2 \cdot 38 = 0,027 \text{ Вт}, \\
P_5 &= I_5^2 \cdot R_5 = 0,796^2 \cdot 52 = 32,9 \text{ Вт}; & P_6 &= I_6^2 \cdot R_6 = 0,668^2 \cdot 65 = 29,00 \text{ Вт}.
\end{aligned}$$

Всего: $P_n = 0,472 + 1,23 + 6,18 + 0,027 + 32,9 + 29 = 69,81 \text{ Вт}$.

Расхождение баланса:

$$\delta_p = 200 \cdot |P_u - P_n| / (P_u + P_n) = 200 \cdot |69,87 - 69,81| / (69,87 + 69,81) = 0,09\%.$$

Это значение меньше допустимого в расчетах значения $\delta_{p \text{ доп}} = 1\%$, следовательно расчет можно признать правильным.

3.3 Определение тока I_1 методом эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора ориентирован преимущественно на нахождение одного из токов схемы. Поскольку ток I_1 при переходе от исходной схемы (рис. 21) к более простой (рис. 23) преобразованиями не затрагивается, то схема рис.23 может использоваться для его определения как исходная. В ней, согласно методу, разрывается ветвь с искомым током I_1 (см. рис. 25) и ищется напряжение U_x в месте разрыва. Для этого воспользуемся методом контурных токов. В схеме рис. 25 достаточно ввести два контурных тока. Размещение контурных токов на рис. 25 представлено пунктиром. Эти токи находятся как решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} (R_4 + R_3 + R_5) \cdot I_{k1} + (R_3 + R_5) \cdot I_{k2} = E_3 \\ (R_3 + R_5) \cdot I_{k1} + (R_3 + R_2 + R_5 + R_6) \cdot I_{k2} = E_3 + E_2'' \end{cases}$$

Или в числах:

$$\begin{cases} 105 \cdot I_{k1} + 67 \cdot I_{k2} = 50 \\ 67 \cdot I_{k1} + 157 \cdot I_{k2} = 115 \end{cases}$$

Решение системы: $I_{k1} = 0,0121 \text{ А}$; $I_{k2} = 0,727 \text{ А}$.

U_x находим из следующего уравнения, записанного по второму закону Кирхгофа для контура $R_6 - E_3 - R_3 - R_1 - U_x$:

$$U_x + R_6 \cdot I_{k2} + R_3 \cdot (I_{k2} + I_{k1}) = E_3, \quad \text{откуда}$$

$$U_x = E_3 - R_6 \cdot I_{k2} - R_3 \cdot (I_{k2} + I_{k1}) = 50 - 65 \cdot 0,727 - 15 \cdot (0,727 + 0,0121) = -8,37 \text{ В}.$$

Следующий этап метода заключается в нахождении сопротивления всей схемы (в пассивном состоянии) относительно зажимов разомкнутой ветви R_x .

На рис. 26 представлена схема для этого расчета при закороченных источниках ЭДС. Воспользуемся приемами метода свертки. «Звезду» сопротивлений R_4, R_3, R_6 преобразуем в эквивалентный «треугольник»

R_{43}, R_{36}, R_{46} :

$$R_{43} = R_4 + R_3 + R_4 \cdot R_3 / R_6 = 38 + 15 + 38 \cdot 15 / 65 = 61,8 \text{ Ом},$$

$$R_{46} = R_4 + R_6 + R_4 \cdot R_6 / R_3 = 38 + 65 + 38 \cdot 65 / 15 = 267,7 \text{ Ом},$$

$$R_{36} = R_3 + R_6 + R_3 \cdot R_6 / R_4 = 15 + 65 + 65 \cdot 15 / 38 = 105,7 \text{ Ом}.$$

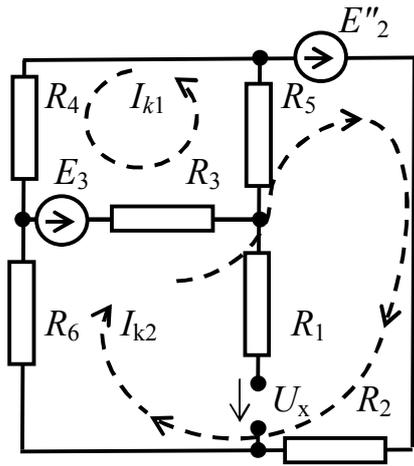


Рис. 25

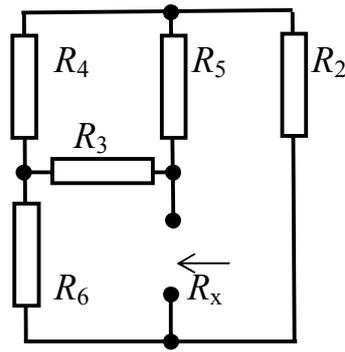


Рис. 26

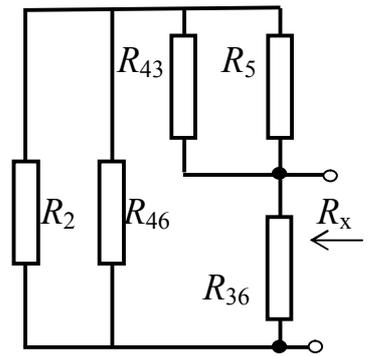


Рис. 27

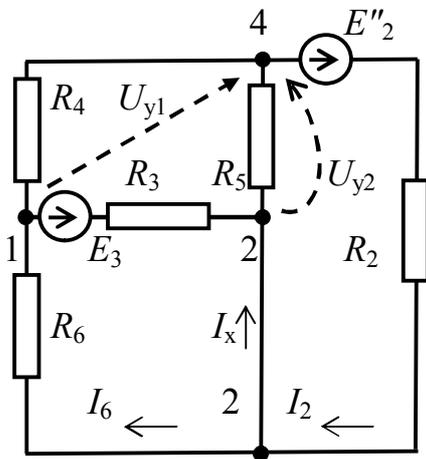


Рис. 28

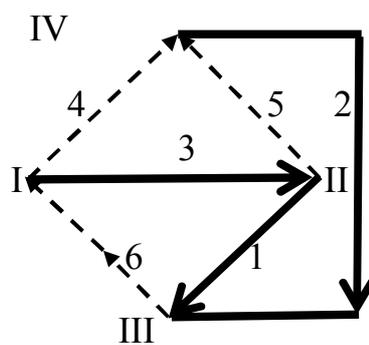


Рис. 29

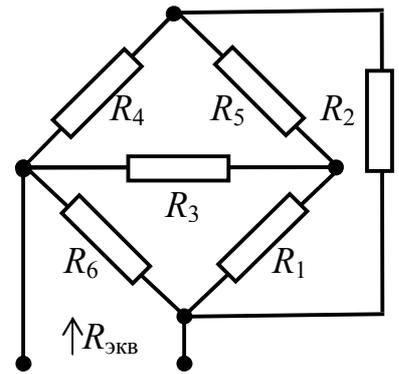


Рис. 30

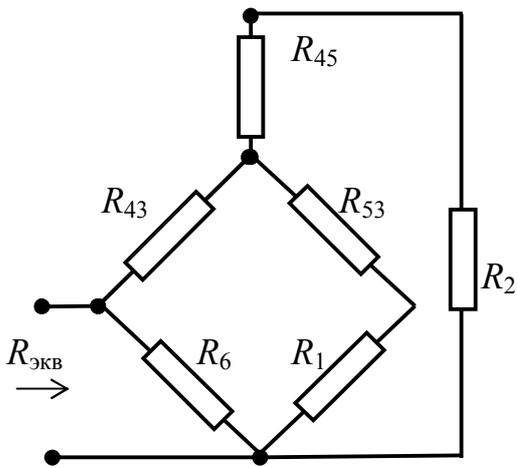


Рис. 31

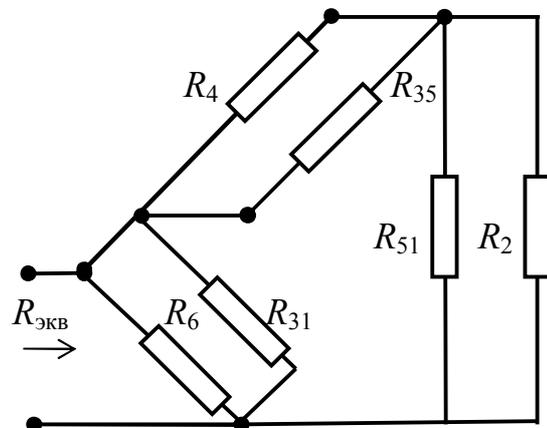


Рис. 32

На рис. 27 представлена схема, полученная после этого преобразования. В ней элемент R_5 соединен параллельно R_{43} ; элемент R_2 соединен параллельно R_{46} . Обе эти группы соединены последовательно друг с другом. Произведя соответствующие преобразования, получим элемент, параллельное соединение с которым R_{36} и создает требуемое R_x . Таким образом,

$$R_x = \frac{\left(\frac{R_2 \cdot R_{46}}{R_2 + R_{46}} + \frac{R_{43} \cdot R_5}{R_{43} + R} \right) \cdot R_{36}}{\left(\frac{R_2 \cdot R_{46}}{R_2 + R_{46}} + \frac{R_{43} \cdot R_5}{R_{43} + R} \right) + R_{36}} = \frac{\left(\frac{25 \cdot 267,7}{25 + 267,7} + \frac{61,8 \cdot 52}{61,8 + 52} \right) \cdot 105,7}{\left(\frac{25 \cdot 267,7}{25 + 267,7} + \frac{61,8 \cdot 52}{61,8 + 52} \right) + 105,7} = 34,44 \text{ Ом.}$$

Искомый ток I_1 находится по формуле:

$$I_1 = U_x / (R_x + R_1) = -8,37 / (34,44 + 20) = -0,154 \text{ А}$$

Расхождение в токе I_1 с предыдущим методом

$$\delta_I = 200 \cdot |I_{1u} - I_{1m}| / |I_{1u} + I_{1m}| = 200 \cdot |-0,1541 + 0,154| / |-0,1541 - 0,154| = 0,06\%.$$

Рассмотрим вариант расчета по методу эквивалентного источника тока. Как и в предыдущем варианте имеется три этапа решения. Для первого этапа схема представлена на рис. 28. В ней ветвь с током, подлежащим определению, закорочена. Расчетом этой схемы определяется ток I_x , протекающий по закороченному участку. Расчет, проведенный методом узловых напряжений, дает следующую формулу:

$$I_x = I_2 - I_6 = (E_2'' - U_{y2}) / R_2 - (U_{y2} - U_{y1}) / R_6.$$

Здесь U_{y2} и U_{y1} - узловые напряжения схемы рис. 28. Их можно найти, решив систему:

$$\begin{cases} (1/R_4 + 1/R_3 + 1/R_6) \cdot U_{y1} - (1/R_3 + 1/R_6) \cdot U_{y2} = -E_3 / R_3 \\ -(1/R_3 + 1/R_6) \cdot U_{y1} + (1/R_3 + 1/R_2 + 1/R_5 + 1/R_6) \cdot U_{y2} = E_3 / R_3 + E_2'' / R_2 \end{cases}$$

Или в числовом выражении:

$$\begin{cases} 0,1084 \cdot U_{y1} - 0,0821 \cdot U_{y2} = -3,33 \\ -0,0821 \cdot U_{y1} + 0,1413 \cdot U_{y2} = 5,93 \end{cases}$$

Решение этой системы $U_{y2} = 43,1 \text{ В}$; $U_{y1} = 1,85 \text{ В}$. Таким образом,

$$I_x = (65 - 43,1) / 25 - (43,15 - 1,85) / 65 = 0,243 \text{ А}$$

Второй этап этой версии метода состоит в нахождении проводимости всей схемы (в пассивном состоянии) относительно зажимов ветви с интересующим током. Учитывать сопротивление самой ветви при этом не следует. Поскольку в этой части нет отличий с предыдущим вариантом, то в данном случае можно воспользоваться уже готовым результатом: $G_x = 1/R_x = 1/34,4 = 0,029 \text{ См}$.

Нахождение искомого тока проводим по формуле:

$$I_1 = I_x \cdot \frac{G_{23}}{G_{23} + G_x} = 0,243 \cdot \frac{0,05}{0,05 + 0,029} = 0,154 \text{ А}, \quad G_{23} = G_1 = 1/R_1.$$

Расхождение с предыдущим методом:

$$\delta_I = 200 \cdot |I_{lum} - I_{lu}| / |I_{lum} - I_{lu}| = 200 \cdot |0,1541 - 0,154| / |0,1541 + 0,154| = 0,06\%.$$

3.4 Расчет схемы с использованием топологических матриц

Для этого расчета может быть взята любая из эквивалентных схем, в которых нет идеальных источников. Такому требованию удовлетворяют схемы рис. 23 или рис. 24. Граф обеих схем идентичен (см. рис. 29), отличия будут лишь в матрицах источников ветвей. Для определенности будем адресовать граф к схеме рис.24 и тогда матрицы-столбцы источников ветвей будут иметь следующий вид:

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_{k2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \\ E_2 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Минус во втором элементе матрицы \bar{J} связан с одинаковой ориентацией ветви (тока в ветви) и источника J_{k2} в исходной схеме. Реальный источник тока в графе указывается в виде одной ветви. В графе, представленном на рис. 29, арабскими цифрами пронумерованы ветви (связи), а римскими – вершины. Выделены ветви 1, 2, 3, формирующие дерево графа. Остальные ветви - это хорды.

3.4.1 Реализация метода узловых напряжений

Реализация метода узловых напряжений в матричной форме предусматривает выполнение матричных операций согласно двум уравнениям:

$$\bar{U}_y = \bar{G}_y^{-1} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{J} - \bar{A} \cdot \bar{G} \cdot \bar{E}) \quad (3)$$

$$\bar{I} = \bar{G} \cdot (\bar{A}^T \cdot \bar{U}_y + \bar{E}) - \bar{J} \quad (4)$$

В (3) и (4) \bar{U}_y – матрица узловых напряжений;

\bar{A} – редуцированная матрица соединений;

\bar{I} – матрица-столбец неизвестных токов;

\bar{G} – матрица проводимостей ветвей.

При выполнении указываются все используемые матрицы, их размерность и результаты операций над ними (кроме процедуры обращения). Правило знаков при формировании матриц \bar{A} и \bar{G} (полная матрица соединений):

- ветвь, уходящая от узла, учитывается со знаком «+»;
- ветвь, входящая в узел, учитывается со знаком «-».

Полная и редуцированная матрицы соединений для графа рис. 29 имеют вид:

$$\bar{A}_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Полная матрица соединений.

Редуцированная матрица соединений.

Из \square_a вычеркнута последняя строка.

Матрица проводимостей ветвей:

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{vmatrix} .$$

На базе матриц \square и \bar{G} формируется матрица \bar{G}_y узловых проводимостей (размерность 3x3) по соотношению:

$$\bar{G}_y = \bar{A} \cdot \bar{G} \cdot \bar{A}^T . \quad (5)$$

Матричные операции по уравнениям (5), (3), (4) приведем с фиксацией промежуточных результатов.

$$\bar{A} \cdot \bar{G} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/R_3 & 1/R_4 & 0 & -1/R_6 \\ 1/R_1 & 0 & -1/R_3 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ -1/R_1 & -1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{vmatrix} ; \quad \bar{A}^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ;$$

$$\bar{G}_y = \bar{A} \cdot \bar{G} \cdot \bar{A}^T = \begin{vmatrix} (1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_6) & -1/R_3 & -1/R_6 \\ -1/R_3 & (1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_5) & -1/R_1 \\ -1/R_6 & -1/R_1 & (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_6) \end{vmatrix} .$$

Формирование правых частей:

$$\bar{A} \cdot \bar{J} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{k2} \end{vmatrix} ; \quad \bar{A} \cdot \bar{G} \cdot \bar{E} = \begin{vmatrix} (E_3/R_3 + E_2/R_4) \\ (-E_3/R_3 + E_2/R_5) \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{A} \cdot \bar{J} - \bar{A} \cdot \bar{G} \cdot \bar{E} = \begin{vmatrix} -E_3/R_3 - E_2/R_4 \\ E_3/R_3 - E_2/R_5 \\ J_{k2} \end{vmatrix} .$$

Получив матрицу узловых проводимостей и матрицу правых частей, можно решить уравнение (3) и получить матрицу узловых напряжений \bar{U}_y .

Для нахождения матрицы-столбца токов в ветвях выполняются операции по уравнению (4).

$$\bar{A}^T \cdot \bar{U}_y = \begin{bmatrix} U_{y2} - U_{y3} \\ -U_{y3} \\ U_{y1} - U_{y2} \\ U_{y1} \\ U_{y2} \\ U_{y3} - U_{y1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^T \cdot \bar{U}_y + \bar{E} = \begin{bmatrix} U_{y2} - U_{y3} \\ -U_{y3} \\ E_3 + U_{y1} - U_{y2} \\ U_{y1} + E_2 \\ U_{y2} + E_2 \\ U_{y3} - U_{y1} \end{bmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} (U_{y2} - U_{y3})/R_1 \\ (-U_{y3})/R_2 + J_{k2} \\ (E_3 + U_{y1} - U_{y2})/R_3 \\ (U_{y1} + E_2)/R_4 \\ (U_{y2} + E_2)/R_5 \\ (U_{y3} - U_{y1})/R_6 \end{bmatrix}.$$

Следует иметь в виду, что ток в ветви 2 (I_2) этот результат дает для ее обобщенного варианта, т. е. это ток источника E_2 , но не резистора R_2 . Ток в резисторе R_2 находится по формуле: $I_7 = I_2 - J_{k2} = 0,822 - 0,6 = 0,222$ А. При необходимости составить баланс мощности его уравнение будет следующим:

$$I_1^2 \cdot R_1 + I_7^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 - I_7 \cdot R_2 \cdot J_{k2}.$$

Нумерация вершин и ветвей графа совпадает с нумерацией узлов и ветвей схемы рис. 24, поэтому сопровождать приведенные матрицы числовыми значениями элементов необязательно. Достаточно сравнить соответствующие формулы и убедиться в их совпадении.

3.4.2 Реализация метода контурных токов

Реализация метода контурных токов в матричной форме предусматривает выполнение операций в соответствии с уравнениями:

$$\bar{I}_k = \bar{R}_k^{-1} \cdot (\bar{B} \cdot \bar{E} - \bar{B} \cdot \bar{R} \cdot \bar{J}) ; \quad (6)$$

$$\bar{I} = \bar{B}^T \cdot \bar{I}_k ; \quad (7)$$

$$\bar{R}_k = \bar{B} \cdot \bar{R} \cdot \bar{B}^T . \quad (8)$$

В этих уравнениях используются две дополнительные матрицы: \bar{R} – сопротивлений ветвей и \bar{B} – главных контуров. В энергетических расчетах следует применять токи \square_σ , непосредственно проходящие по резисторам (пассивным элементам): $\bar{I}_\sigma = \bar{I} + \bar{J}$.

Матрица сопротивлений ветвей: Матрица главных контуров:

$$\bar{R} = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{vmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Последняя матрица формируется после разбиения графа схемы на дерево и хорды (см. рис. 29). Каждая ее строка отражает присутствие той или иной ветви дерева и *одной* из хорд в контуре. Следует отметить, что топологическая реализация метода узловых напряжений разбиения графа на дерево и хорды не потребовала. По уравнению (8) требуется транспозиция \bar{B} .

Транспонированная матрица \bar{B}^T :

$$\bar{B}^T = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \bar{B} \cdot \bar{R} = \begin{vmatrix} -R_1 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \end{vmatrix};$$

матрица контурных сопротивлений:

$$\bar{R}_k = \bar{B} \cdot \bar{R} \cdot \bar{B}^T = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) & (R_1 + R_2) & -(R_1 + R_3) \\ (R_1 + R_2) & (R_1 + R_2 + R_5) & -R_1 \\ -(R_1 + R_3) & -R_1 & (R_1 + R_3 + R_6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 98 & 45 & -35 \\ 45 & 97 & -20 \\ -35 & -20 & 100 \end{vmatrix}.$$

Формирование матриц правой части уравнения (6).

$$\bar{B} \cdot \bar{E} = \begin{vmatrix} E_2 - E_3 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix}; \quad \bar{B} \cdot \bar{R} \cdot \bar{J} = \begin{vmatrix} -R_2 \cdot J_{k2} \\ -R_2 \cdot J_{k2} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{B} \cdot \bar{E} - \bar{B} \cdot \bar{R} \cdot \bar{J} = \begin{vmatrix} R_2 \cdot J_{k2} \\ E_2 + R_2 \cdot J_{k2} \\ E_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 65 \\ 50 \end{vmatrix}.$$

Сопоставление с нематричной реализацией МКТ показывает, что из-за расхождения в выбранных контурах полученная контурная матрица \bar{R}_k и матрица-столбец правых частей не совпадают с аналогичными объектами нематричной реализации МКТ.

Решение уравнений (6) и (7) для приведенных значений, а также $\bar{I}_6 = \bar{I} + \bar{J}$:

$$\bar{I}_k = \begin{pmatrix} 0,0264 \\ 0,7960 \\ 0,6680 \end{pmatrix}; \quad \bar{I} = \bar{B}^T \cdot \bar{I}_k = \begin{pmatrix} -I_{k1} - I_{k2} + I_{k3} \\ I_{k1} + I_{k2} \\ -I_{k1} + I_{k3} \\ I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1544 \\ 0,8224 \\ 0,6416 \\ 0,0264 \\ 0,7960 \\ 0,6680 \end{pmatrix}; \quad \bar{I}_e = \bar{I} + \bar{J} = \begin{pmatrix} -0,1544 \\ 0,2224 \\ 0,6416 \\ 0,0264 \\ 0,7960 \\ 0,6680 \end{pmatrix}.$$

3.5 определение сопротивления схемы относительно зажимов заданного резистора.

В соответствии с общим заданием будем определять сопротивление схемы относительно резистора R_6 .

При выполнении этого расчета все источники ЭДС в схеме закорачиваются, источники тока разрываются. Исходная схема для расчета представлена на рис. 30. Решение возможно в форме свертки схемы относительно зажимов заданного резистора (включая и его самого) и обычно многовариантно. Приведем здесь два варианта свертки. Первый связан с преобразованием «треугольника» R_4, R_5, R_3 в эквивалентную «звезду» R_{45}, R_{53}, R_{43} . Вторым связан с преобразованием «звезды» сопротивлений R_3, R_5, R_1 в эквивалентный треугольник R_{35}, R_{31}, R_{51} (достаточно привести один вариант).

1 вариант		2 вариант
$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{38 \cdot 52}{15 + 38 + 52} = 188 \text{ Ом};$		$R_{51} = R_5 + R_1 + R_5 \cdot R_1 / R_3 =$
$R_{53} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{15 \cdot 52}{15 + 38 + 52} = 7,43 \text{ Ом};$		$= 52 + 20 + 52 \cdot 20 / 15 = 141,3 \text{ Ом};$
$R_{43} = \frac{R_4 \cdot R_3}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{38 \cdot 15}{15 + 38 + 52} = 5,43 \text{ Ом};$		$R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 \cdot R_1 / R_5 =$
		$= 15 + 20 + 15 \cdot 20 / 52 = 40,8 \text{ Ом};$
		$R_{35} = R_3 + R_5 + R_3 \cdot R_5 / R_1 =$
		$= 15 + 52 + 15 \cdot 52 / 20 = 106 \text{ Ом}.$

Схемы после этих преобразований представлены на рис. 31, 32 соответственно. Дальнейшая свертка схем топологически ясна и здесь представлена окончательными формулами.

Для схемы рис. 31.

$$R_9 = \frac{\left[\frac{(R_{45} + R_2) \cdot (R_{53} + R_1)}{R_{45} + R_2 + R_{53} + R_1} + R_{43} \right] \cdot R_6}{\frac{(R_{45} + R_2) \cdot (R_{53} + R_1)}{R_{45} + R_2 + R_{53} + R_1} + R_{43} + R_6} = \frac{\left[\frac{(188 + 25) \cdot (7,43 + 20)}{188 + 25 + 7,43 + 20} + 5,43 \right] \cdot 65}{\frac{(188 + 25) \cdot (7,43 + 20)}{188 + 25 + 7,43 + 20} + 5,43 + 65} = 166 \text{ Ом} .$$

Для схемы рис. 32.

$$R_9 = \frac{\left(\frac{R_4 \cdot R_{35}}{R_4 + R_{35}} + \frac{R_2 \cdot R_{51}}{R_2 + R_{51}} \right) \cdot \left(\frac{R_6 \cdot R_{31}}{R_6 + R_{31}} \right)}{\frac{R_4 \cdot R_{35}}{R_4 + R_{35}} + \frac{R_2 \cdot R_{51}}{R_2 + R_{51}} + \frac{R_6 \cdot R_{31}}{R_6 + R_{31}}} = \frac{\left(\frac{38 \cdot 106}{38 + 106} + \frac{25 \cdot 1413}{25 + 1413} \right) \cdot \left(\frac{65 \cdot 408}{65 + 408} \right)}{\frac{38 \cdot 106}{38 + 106} + \frac{25 \cdot 1413}{25 + 1413} + \frac{65 \cdot 408}{65 + 408}} = 166 \text{ Ом} .$$

При использовании топологических матриц в силу замкнутости вычислительных процедур проверочное значение баланса мощности утрачивается (особенно в случае компьютерных вычислений). Поэтому нахождение мощности приобретает статус самостоятельного задания (приводить не обязательно):

- сумма мощностей потребителей:

$$P_n = (\bar{R} \cdot \bar{I}_g)^T \cdot \bar{I}_g = 69871 \text{ Вт};$$

- сумма мощностей источников:

$$P_u = \bar{I}_g^T \cdot \bar{E} + (\bar{R} \cdot \bar{I}_g)^T \cdot \bar{J} = 69871 \text{ Вт} .$$

В последних двух вычислениях перемножение *матриц* приводит к скалярному результату. Результаты получаются совпадающими и близкими тому, что приведено на стр. 5.