

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Физика и теоретическая механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник задач

Рекомендовано Методическим советом по качеству
образовательной деятельности ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Составители:

В.И. Хаванский, А.А. Кузин, С.И. Кирюшина

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2014

УДК 531(075.8)
ББК В21я73
Т 338

Рецензенты:

Кафедра «Физика»
Дальневосточного государственного гуманитарного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *В.И. Крылов*)

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Электротехника
и электроника» Тихоокеанского государственного университета
Е.А. Жуков

Составители:

В.И. Хаванский – ст. преподаватель, А.А. Кузин – ст. преподаватель,
С.И. Кирюшина – ст. преподаватель

Теоретическая механика : сб. задач / сост. В.И. Хаванский,
Т 338 А.А. Кузин, С.И. Кирюшина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС,
2014. – 116 с. : ил.

Сборник задач соответствует ФГОС ВО по техническим специальностям.

Даны краткие теоретические сведения по разделам статика, кинематика, динамика теоретической механики; примеры решения задач и варианты задач для выполнения контрольных работ № 1–3.

Предназначен для студентов 1-го и 2-го курсов заочной формы обучения, изучающих дисциплину «Теоретическая механика».

Разд. 1–2 – сост. В.И. Хаванский; разд. 3 – сост. А.А. Кузин, С.И. Кирюшина; введение и заключение – А.А. Кузин.

УДК 531(075.8)
ББК В21я73

© ДВГУПС, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Современная техника ставит перед инженерами множество задач, решение которых связано с исследованием механического движения и взаимодействия тел друг с другом.

Сборник задач предназначен для самостоятельного выполнения контрольных работ студентами по всем разделам курса «Теоретическая механика»: статика, кинематика, динамика.

Изложены примеры решения задач, разъяснения наиболее трудных этапов решения, необходимые правила и рекомендации. К выполнению индивидуальных заданий следует приступать после изучения соответствующего раздела данного пособия, а также дополнительной литературы [1–4].

В результате освоения данной дисциплины студенты должны:

- **знать:** основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем;
- **уметь:** применять знания, полученные по теоретической механике при изучении дисциплин профессионального цикла (техническая механика, механика жидкости и газа, механика грунтов);
- **владеть:** основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Сборник задач ориентирован на студентов, изучающих теоретическую механику самостоятельно. В пособии представлен краткий теоретический курс дисциплины, включающий три раздела: статику, кинематику, динамику, показаны примеры и основные методы решения задач по теоретической механике.

Студенты выполняют 3 контрольных работы:

контрольная работа № 1 (статика) – задачи С1–С4;

контрольная работа № 2 (кинематика) – задачи К1–К4;

контрольная работа № 3 (динамика) – задачи Д1, Д2.

К каждой задаче в контрольных работах № 1 и 2 дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т. д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, указанного в зачетной книжке, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается цифрами 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

В контрольной работе № 3 номер варианта выбирается по двум последним цифрам шифра.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверить). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи*; все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам С1–С4 и Д1, Д2 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 – тела 2 и т. д. Аналогично, в кинематике и динамике V_B, a_B означают скорость и ускорение точки B ; V_C, a_C – точки C ; ω_1, ϵ_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2, ϵ_2 – тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайтесь внимание только на относящиеся к *вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические рекомендации по решению задач и теоретические сведения даются для каждой задачи, затем рассматривается пример решения аналогичной задачи, далее – варианты задач для самостоятельного реше-

ния. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. **Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;** в конце должны быть даны ответы.

1. СТАТИКА

1.1. Равновесие тела под действием плоской системы параллельных сил

Сила – это мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

*Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Сила изображается вектором (рис. 1.1). Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы*.*

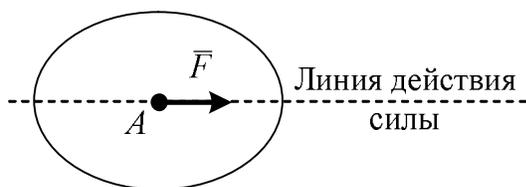


Рис. 1.1

За единицу силы в Международной системе единиц – СИ (в механике – система МКС) принимается ньютон (Н).

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется *системой сил*.

При составлении уравнений равновесия необходимо уметь находить проекции силы на координатные оси.

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла α между силой и положительным направлением оси, т. е. проекция силы \vec{F} на ось l определяется как

$$np_l |\vec{F}| = F_l = |F| \times \cos(\vec{F} \vec{l}) = F \cos \alpha. \quad (1.1)$$

Если угол между вектором и положительным направлением оси острый – проекция вектора положительна, если тупой – отрицательна, а если вектор перпендикулярен оси, то проекция на ось равна нулю.

Тогда проекции сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 на ось x составят (рис. 1.2):

$$\begin{aligned} F_{1x} &= a_1 v_1 = |\vec{F}_1| \cos \alpha_1 = F_1 \cos \alpha_1; \\ F_{2x} &= a_2 v_2 = |\vec{F}_2| \cos \alpha_2 = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

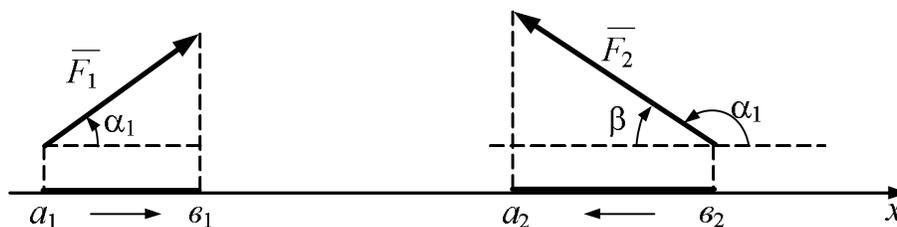


Рис. 1.2

Плоская система сил может быть представлена не только совокупностью отдельных сосредоточенных сил, но и действием различного вида распределенных нагрузок, а также моментов.

Распределенная нагрузка характеризуется в каждой точке числовым значением и направлением вектора интенсивности этой нагрузки. Интенсивность может быть отнесена к единице объема γ (Н/м³), единице площади ρ (Н/м²) или единице длины q (Н/м). Соответственно она называется *объемной, поверхностной и линейно распределенной или погонной нагрузкой*.

Равномерно распределенная нагрузка заменяется равнодействующей $Q=ql$, где l — длина участка (рис. 1.3); приложена сила Q в середине участка действия распределенной нагрузки.

Действие на объект момента M означает действие пары сил, характеризующееся моментом M .

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 1.4).

Действие пары сил на твердое тело сводится к вращательному эффекту, мерой которого является момент пары сил.

В плоских задачах момент пары равен взятому со знаком «+» или «-» произведению модуля одной из сил пары на ее плечо

$$M = \pm F_1 \cdot h. \quad (1.3)$$

Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Знак момента определяется направлением вращательного действия: момент пары считается положительным, если вращение, произ-

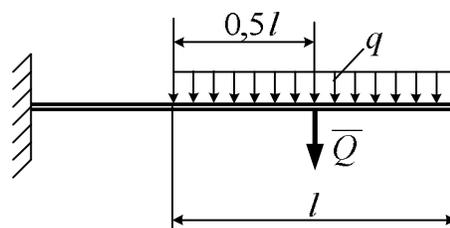


Рис. 1.3

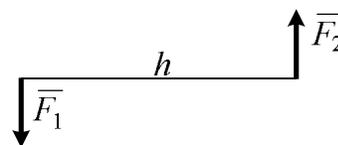


Рис. 1.4

водимое парой, наблюдается против хода часовой стрелки, отрицательным – при вращении по ходу часовой стрелки. На рис. 1.4 момент пары равен

$$M = +F_1 \cdot h.$$

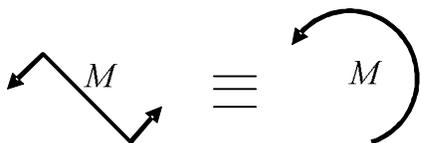


Рис. 1.5

В плоских задачах статики допускается изображение момента или в виде дуговой стрелки, или в виде пары сил (рис. 1.5), которые и определяют направление вращательного действия момента.

Так как сумма моментов сил, образующих пару, относительно любой точки равна моменту этой пары, то место приложения момента на расчетной схеме не фиксируется. Модуль момента измеряется в ньютон-метрах (Нм) или килоньютон-метрах (кНм).

Вращательное действие на объект оказывают не только пары сил, но и отдельные сосредоточенные силы. Вращательный эффект силы относительно какого-либо центра характеризуется алгебраическим моментом силы относительно этого центра.

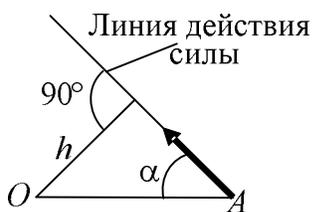


Рис. 1.6

Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля силы на ее плечо (рис. 1.6):

$$m_0(\bar{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.4)$$

где F – модуль силы; h – плечо силы.

Момент силы относительно центра считается положительным, если вращение, производимое силой, наблюдается против хода часовой стрелки, отрицательным – при вращении по ходу часовой стрелки. При вычислении момента силы относительно центра модуль силы бывает либо задан, либо является искомой величиной.

Плечом силы называется длина перпендикуляра, опущенного из центра на линию действия силы.

Для определения плеча силы \bar{F} вдоль вектора этой силы проводится ее линия действия; из центра O опускается перпендикуляр на эту линию действия; по данным задачи вычисляется длина этого перпендикуляра, т. е. плечо силы \bar{F} относительно центра O .

В примере на рис. 1.6 $h = OA \cdot \sin \alpha$; знак момента – положительный, т. е. $m_0(\bar{F}) = +F \cdot h = F \cdot OA \sin \alpha$.

В некоторых случаях для вычисления момента силы относительно центра удобнее пользоваться теоремой Вариньона: момент равнодействующей

щей относительно центра равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этого центра, т. е.

$$m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}''). \quad (1.5)$$

Рассмотрим это на конкретном примере (рис. 1.7). Для вычисления момента силы \bar{F} относительно центра O предварительно разложим ее на две составляющие \bar{F}' и \bar{F}'' , их модули равны

$$F' = F \cdot \sin \alpha, \quad F'' = F \cdot \cos \alpha.$$

Согласно теореме Вариньона получим:

$$\begin{aligned} m_O(\bar{F}) &= m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}'') = \\ &= F' \cdot a + F'' \cdot b = F(a \sin \alpha + b \cos \alpha). \end{aligned}$$

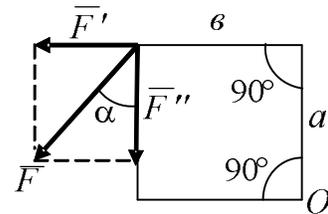


Рис. 1.7

Если на объект действует **плоская система параллельных сил**, условия равновесия выражаются двумя формами уравнений равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad (1.6)$$

или

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.7)$$

В формулах (1.6) ось y следует выбирать параллельно силам, центр A – произвольно. В формулах (1.7) отрезок AB не должен быть параллелен силам.

Порядок решения задач статики: сначала выделяют твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть, потом к этому телу прикладывают все действующие на него силы, а затем составляют и решают уравнения равновесия этих сил.

Пример С1

Однородная балка весом $G = 30$ кН, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к вертикальному стержню с шарнирами на концах (рис. С1). На балку действуют: пара сил с моментом $M = 100$ кНм, равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $q = 60$ кН/м и сила $F = 70$ кН.

Определить реакции связей в точках A , B , вызываемые действующими нагрузками.

Дано: $G = 30$ кН, $M = 100$ кНм, $q = 60$ кН/м, $F = 70$ кН, $a = 0,4$ м.

Определить: R_A , R_B .

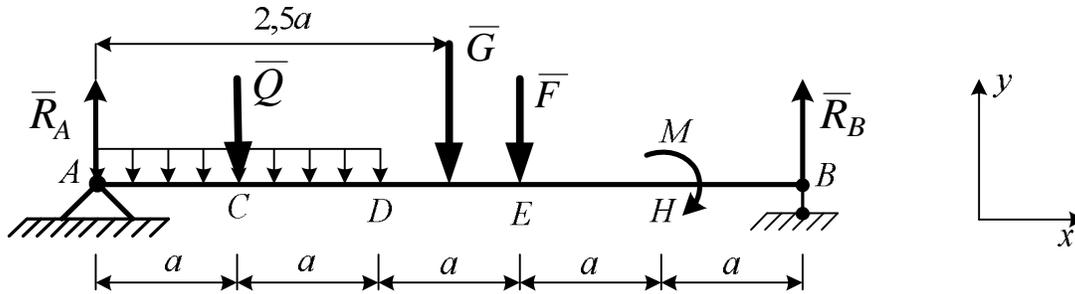


Рис. С1

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки АВ. На балку действуют активные силы: сила тяжести \bar{G} ; сила \bar{F} ; равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем равнодействующей \bar{Q} , приложенной в середине участка AD (численно $Q = q \cdot 2a = 60 \cdot 2 \cdot 0,4 = 48 \text{ кН}$) и пара сил с моментом M . Действие связей на раму в точках А и В заменяем их реакциями: реакция невесомого стержня \bar{R}_B направлена вдоль стержня. Так как активные силы и реакция \bar{R}_B – вертикальны, то реакция неподвижной шарнирной опоры А должна быть направлена вертикально.

2. Для полученной плоской системы параллельных сил составим два уравнения равновесия (1.7):

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot a - G \cdot 2,5a - F \cdot 3a - M + R_B \cdot 5a = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad -R_A \cdot 5a + Q \cdot 4a + G \cdot 2,5a + F \cdot 2a - M = 0. \quad (\text{б})$$

Решая уравнения (а), (б), получим:

$$R_B = \frac{Q \cdot a + G \cdot 2,5a + F \cdot 3a + M}{5a} =$$

$$= \frac{48 \cdot 0,4 + 30 \cdot 2,5 \cdot 0,4 + 70 \cdot 3 \cdot 0,4 + 100}{5 \times 0,4} = 116,6 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{Q \cdot 4a + G \cdot 2,5a + F \cdot 2a - M}{5a} =$$

$$= \frac{48 \cdot 4 \cdot 0,4 + 30 \cdot 2,5 \cdot 0,4 + 70 \cdot 2 \cdot 0,4 - 100}{5 \cdot 0,4} = 31,4 \text{ кН}.$$

После определения реакций связей необходимо сделать проверку.

Проверка: $\sum F_{ky} = 0;$

$$R_A - Q - G - F + R_B = 31,4 - 48 - 30 - 70 + 116,6 = 148 - 148 = 0.$$

Ответ: $R_A = 31,4 \text{ кН}; R_B = 116,6 \text{ кН}.$

Задача С1

Однородная балка весом G , расположенная в вертикальной плоскости (табл. С1, рис. С1.0–С1.9), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к вертикальному стержню с шарнирами на концах. На балку действуют: пара сил с моментом $M = 20$ кНм, равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q и сила \bar{F}_i , значение и точка приложения которой указаны в табл. С1. Расстояния между точками A, B, C, D, E, H, K, L равны $a = 0,4$ м.

Определить реакции связей в точках A, B , вызываемые действующими нагрузками.

Таблица С1

Силы	$\bar{F}_1 \downarrow$	$\bar{F}_2 \uparrow$	$\bar{F}_3 \downarrow$	$\bar{F}_4 \uparrow$	$q, \text{кН}$	$G, \text{кН}$
	$F_1 = 10 \text{ кН}$	$F_2 = 20 \text{ кН}$	$F_3 = 30 \text{ кН}$	$F_4 = 40 \text{ кН}$		
Номер условия	Точка приложения	Точка приложения	Точка приложения	Точка приложения		
0	Е				10	5
1		Н			20	10
2			К		30	15
3				Л	40	20
4	Н				50	15
5		К			40	10
6			Л		30	5
7				Е	20	10
8	С				10	15
9		Д			20	20

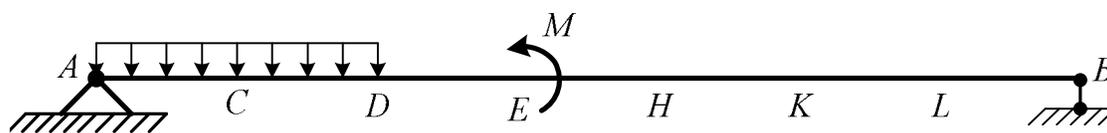


Рис. С1.0

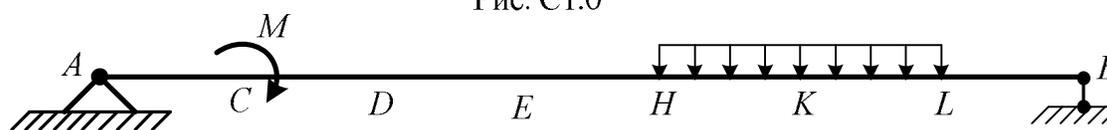
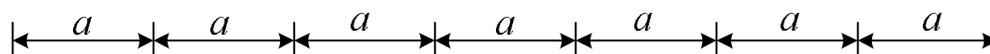


Рис. С1.1



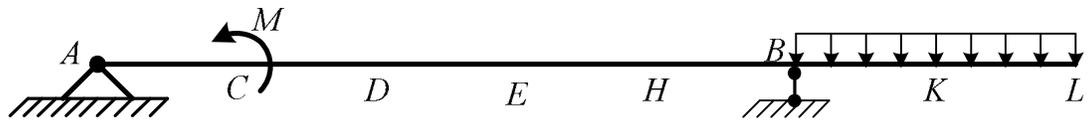


Рис. С1.2

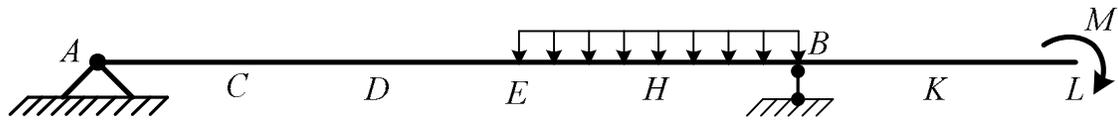


Рис. С1.3

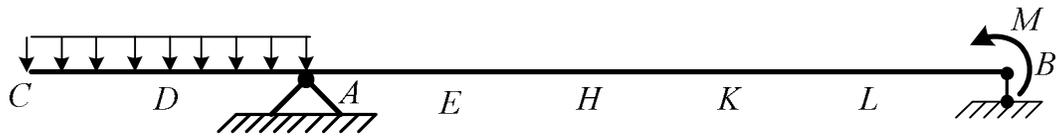


Рис. С1.4

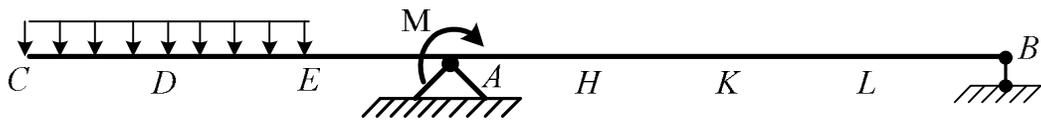


Рис. С1.5

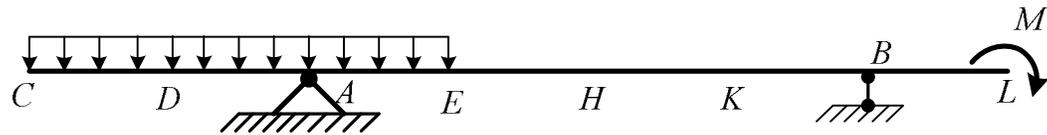


Рис. С1.6

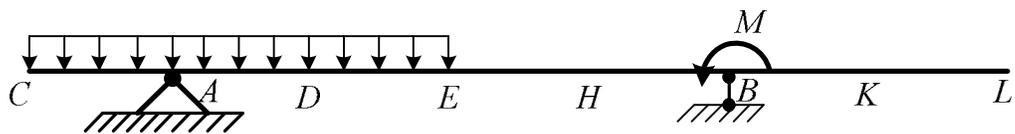


Рис. С1.7

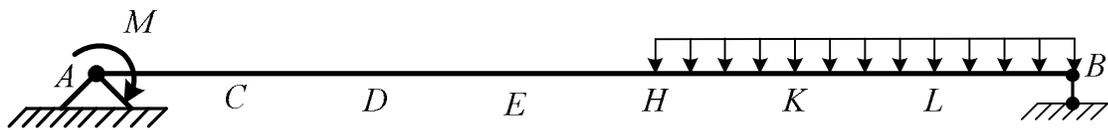


Рис. С1.8

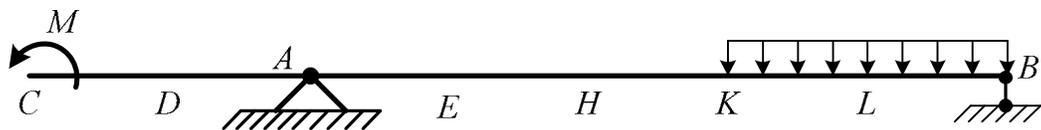
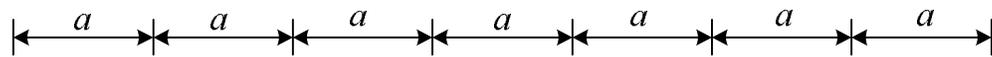


Рис. С1.9



1.2. Равновесие тела под действием плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух прямоугольных осей, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, расположенной в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.8)$$

Равенства (1.8) представляют так называемую **основную форму** условий равновесия при действии на тело плоской системы сил. Условия равновесия тела под действием плоской системы сил могут быть представлены еще в двух других формах.

Вторая форма условий равновесия:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum F_{kx} = 0, \quad (1.9)$$

т. е. должны быть равны нулю суммы моментов сил относительно любых двух точек A, B , расположенных в плоскости действия сил, и сумма проекций всех этих сил на ось x (при этом ось x не должна быть перпендикулярна прямой AB).

Третья форма условий равновесия:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.10)$$

т. е. должны быть равны нулю суммы алгебраических моментов всех сил относительно любых трех точек A, B, C (эти точки расположены в плоскости действия сил и не лежат на одной прямой).

Направления осей координат x и y следует выбирать так, чтобы они были перпендикулярны неизвестным силам.

За центр моментов следует выбирать точку пересечения двух неизвестных сил или точку на линии действия неизвестной силы.

Пример С2

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах (рис. С2). В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кНм и силы $F_1 = 10$ кН и $F_3 = 30$ кН.

Определить реакции связей в точках A и B , вызываемые действующими нагрузками.

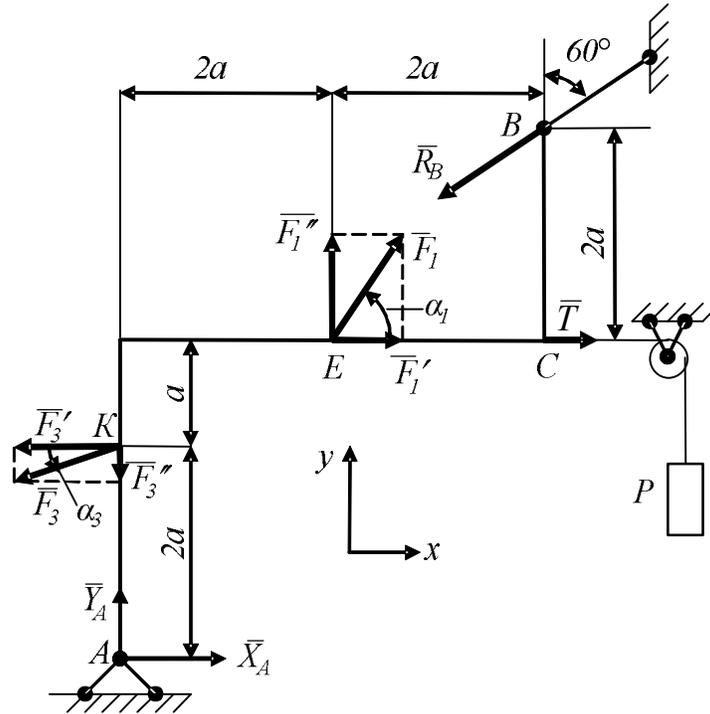


Рис. С2

Дано: $F_1 = 10$ кН, $\alpha_1 = 60^\circ$, точка E ; $F_3 = 30$ кН, $\alpha_3 = 15^\circ$, точка K ; $P = 25$ кН; $M = 100$ кНм; $a = 0,5$ м.

Определить: X_A ; Y_A ; R_B .

Решение

1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси X , Y и изобразим действующие на раму силы: силы \bar{F}_1 , \bar{F}_3 ; пару сил с моментом M ; натяжение троса \bar{T} (по модулю $T = P$) и реакции связей \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция невесомого стержня направлена вдоль стержня).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы \bar{F}_k относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу \bar{F}_k на составляющие \bar{F}_k' , \bar{F}_k'' ($F_k' = F_k \cos \alpha$; $F_k'' = F_k \sin \alpha$) и учтем, что $M_A(\bar{F}_k) = M_A(\bar{F}_k') + M_A(\bar{F}_k'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - F_3 \cos 15^\circ + F_1 \cos 60^\circ + T + R_B \cos 30^\circ = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - F_3 \cos 75^\circ + F_1 \cos 30^\circ + T - R_B \cos 60^\circ = 0, \quad (б)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad F_3 \cos 15^\circ \cdot 2a + M + F_1 \cos 30^\circ \cdot 2a - F_1 \cos 60^\circ \cdot 3a - \\ - T \cdot 3a + R_B \cos 30^\circ \cdot 5a - R_B \cos 60^\circ \cdot 4a = 0. \quad (в)$$

Решая уравнения (а)–(в), получим:

$$(в): R_B = \frac{-30 \cdot 0,966 - 100 - 10 \cdot 0,866 \times 1 + 10 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 25 \cdot 1,5}{0,866 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 2} = -79,52 \text{ кН.}$$

$$(а): X_A = 30 \cdot 0,966 - 10 \cdot 0,5 - 25 - 79,52 \cdot 0,866 = -69,88 \text{ кН.}$$

$$(б): Y_A = 30 \cdot 0,259 - 10 \cdot 0,866 - 79,52 \cdot 0,5 = -40,65 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum m_C(F_k) = 0; \quad X_A \cdot 3a - Y_A \cdot 4a - F_3 \cdot \cos 15^\circ \cdot a + F_3 \cdot \cos 75^\circ \cdot 4a + M - \\ - F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a = 0; \\ -69,88 \cdot 1,5 + 40,65 \cdot 2 - 30 \cdot 0,966 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,259 \cdot 2 + 100 - \\ - 10 \cdot 0,866 \cdot 1 - 79,52 \cdot 0,866 \cdot 1 = 0; \\ -196,84 + 196,84 = 0.$$

Ответ: $X_A = -69,88$ кН, $Y_A = -40,65$ кН; $R_B = -79,52$ кН.

Знаки указывают, что силы X_A ; Y_A ; R_B направлены противоположно показанным на рисунке.

Задача С2

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С2.0–С2.9, табл. С2), закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кНм и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл. С2. При окончательных расчетах принять $a = 0,5$ м.

Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

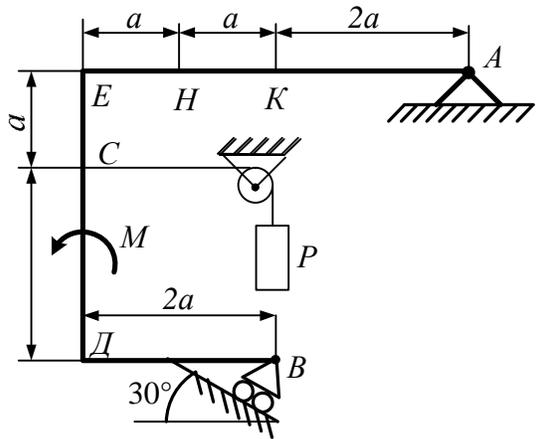


Рис. С2.0

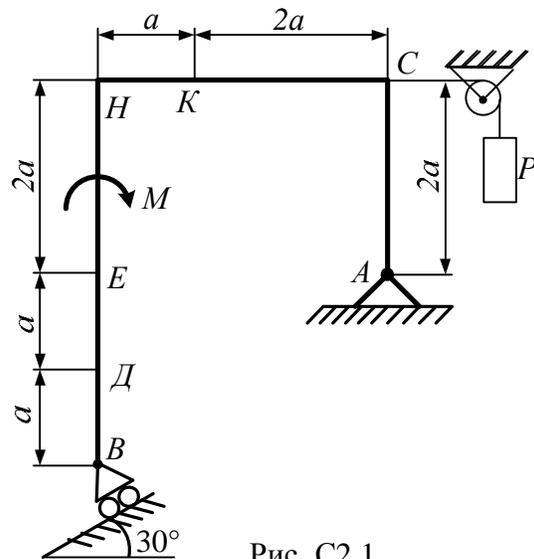


Рис. С2.1

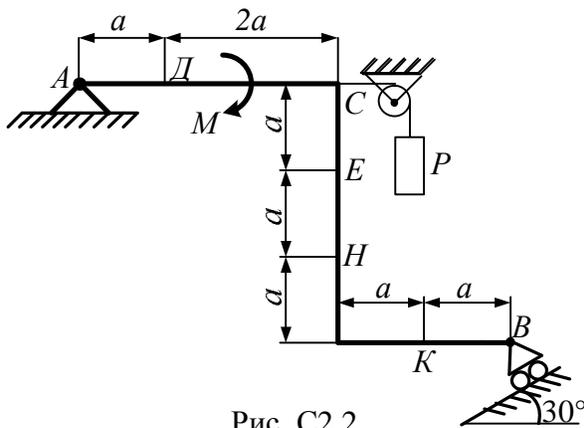


Рис. С2.2

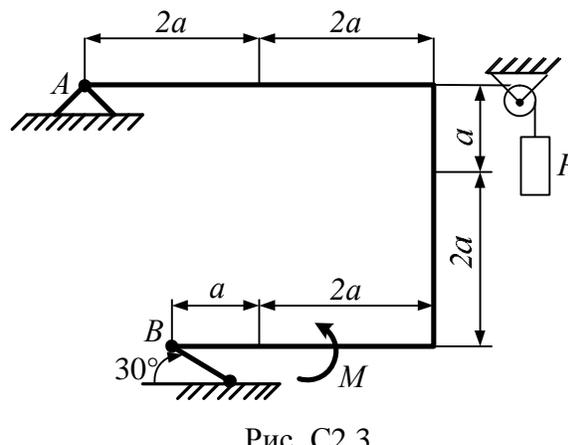


Рис. С2.3

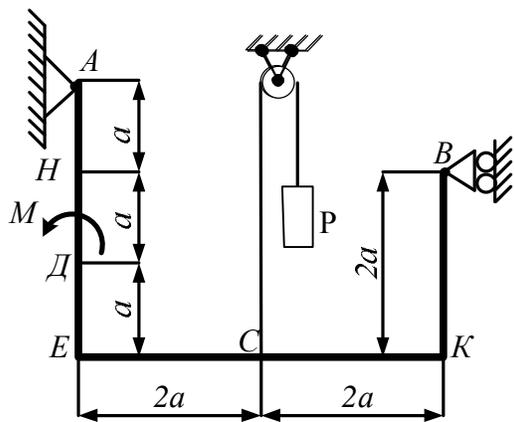


Рис. С2.4

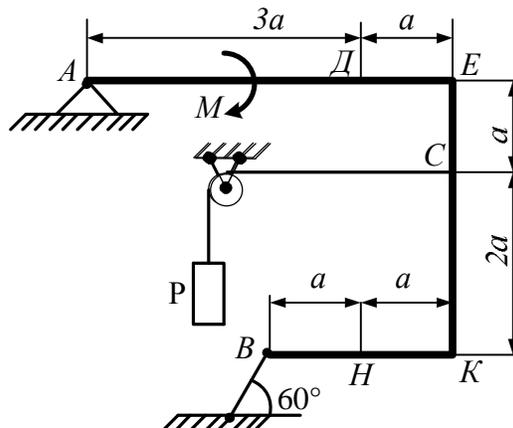


Рис. С2.5

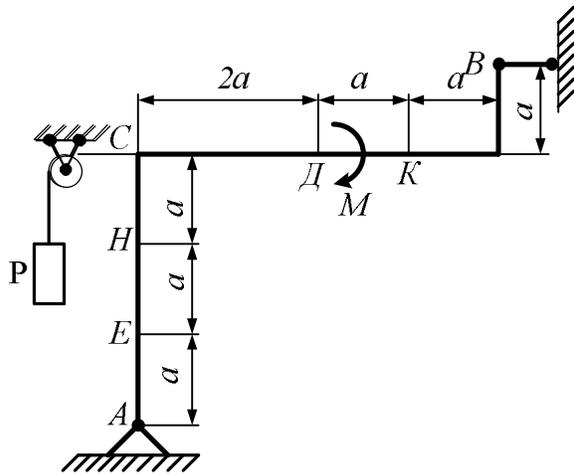


Рис. С2.6

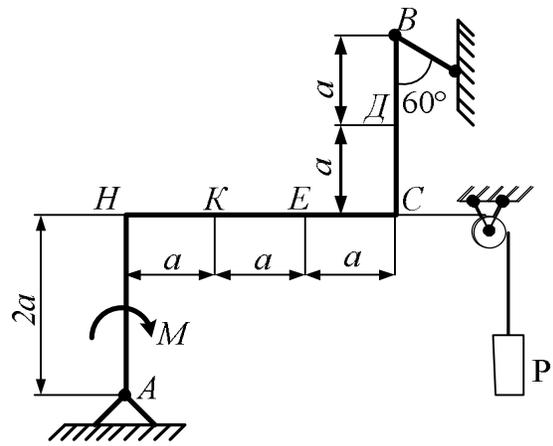


Рис. С2.7

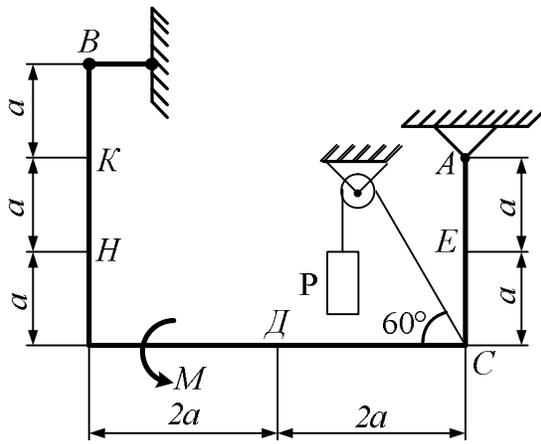


Рис. С2.8

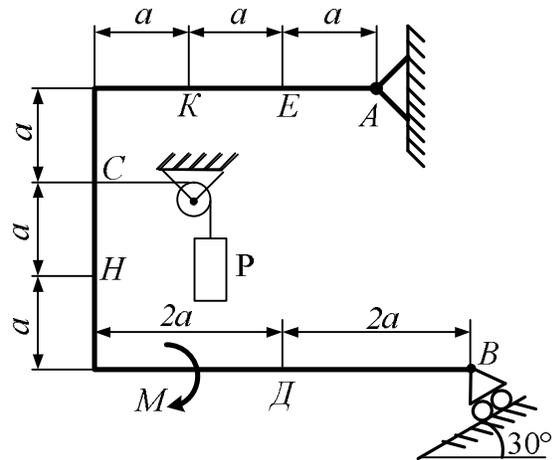


Рис. С2.9

Таблица С2

Силы	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4	
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	Н	30	–	–	–	–	К	60
1	–	–	Д	15	Е	60	–	–
2	К	75	–	–	–	–	Е	30
3	–	–	К	60	Н	30	–	–
4	Д	30	–	–	–	–	Е	60

Силы	\vec{F}_1		\vec{F}_2		\vec{F}_3		\vec{F}_4	
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
5	–	–	Н	30	–	–	Д	75
6	Е	60	–	–	К	15	–	–
7	–	–	Д	60	–	–	Н	15
8	Н	60	–	–	Д	30	–	–
9	–	–	Е	75	К	30	–	–

1.3. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси.

Момент силы \vec{F} относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z , взятому относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Для вычисления момента силы F относительно оси z необходимо выполнить следующие операции (рис. 1.8).

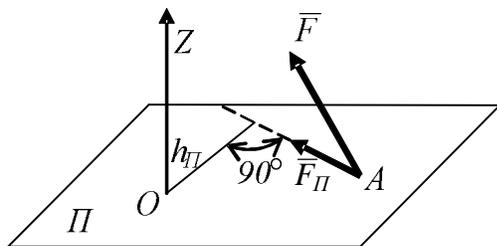


Рис. 1.8

1. Провести через произвольную точку O оси z плоскость Π , перпендикулярную оси z .

2. Найти проекцию \vec{F}_Π силы \vec{F} на плоскость Π .

3. Определить плечо h_Π силы \vec{F}_Π относительно точки O .

4. Вычислить произведение $F_{\Pi} \cdot h_{\Pi}$.

5. Определить знак момента: принимаем его со знаком плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила \bar{F}_{Π} , виден против хода часовой стрелки, и со знаком минус – когда по ходу часовой стрелки.

Так, момент силы \bar{F} относительно оси z (рис. 1.8) определяется формулой

$$m_z(\bar{F}) = m_o(\bar{F}_{\Pi}) = +F_{\Pi} \cdot h_{\Pi}, \quad (1.12)$$

где F_{Π} – модуль проекции \bar{F}_{Π} ; h_{Π} – плечо этой проекции.

Момент силы относительно оси равен нулю:

1) если сила параллельна оси (при этом $F_{\Pi} = 0$);

2) если линия действия силы пересекает ось (при этом $h_{\Pi} = 0$).

Объединяя оба случая вместе, можно заключить, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Указание. При решении задачи С3 учесть, что реакция сферического подшипника (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника).

Пример С3

Конструкция (рис. С3), состоящая из двух жестко соединенных прямоугольных плит, закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим подшипником в точке B и невесомым стержнем DD' с шарнирами на концах (стержень DD' расположен в плоскости, параллельной плоскости Ayz). На конструкцию действуют: пара сил с моментом M , расположенная в плоскости Axy горизонтальной плиты, сила T , расположенная в плоскости вертикальной плиты и приложенная в точке E под углом β к горизонтальному ребру DE .

Дано: $M = 24$ кНм, $T = 8$ кН, $a = 0,4$ м, $b = 0,2$ м, $c = 0,3$ м, $l = 0,5$ м, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Определить: реакции в точках A , B и реакцию стержня DD' , вызванные заданными нагрузками.

Решение

Рассмотрим равновесие конструкции из прямоугольных плит. Изобразим (рис. С.3) заданные силу \bar{T} и пару сил с моментом M , а также реакции связей: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ – три составляющие реакции сферического шарнира;

\bar{X}_B, \bar{Y}_B – две составляющие реакции цилиндрического подшипника, перпендикулярные его оси y ; \bar{R}_D – реакция стержня DD' , которую направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

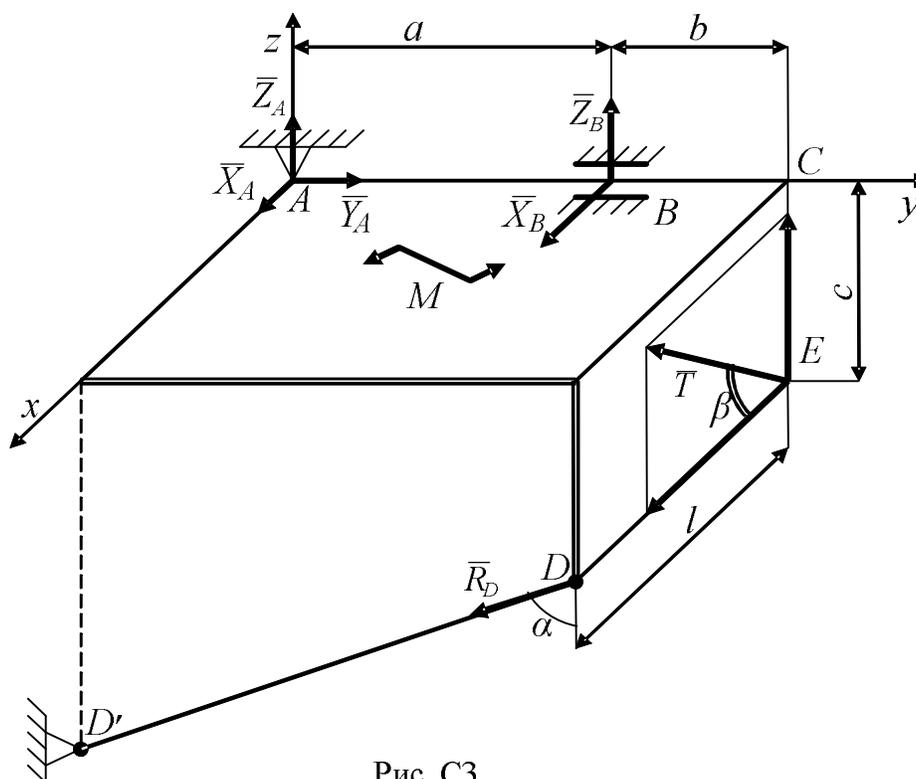


Рис. С3

Система сил, действующая на конструкцию, является произвольной пространственной. Для нее составим шесть уравнений равновесия (1.11), в которые будут входить шесть неизвестных реакций:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + T \cos \beta = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_D \sin \alpha = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B + T \sin \beta - R_D \cos \alpha = 0; \quad (\text{в})$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad Z_B \cdot a + T \sin \beta (a + b) - R_D \cos \alpha (a + b) - R_D \sin \alpha \cdot c = 0; \quad (\text{г})$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad R_D \cos \alpha \cdot l - T \cos \beta \cdot c = 0; \quad (\text{д})$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0, \quad M - X_B \cdot a - T \cos \beta (a + b) - R_D \sin \alpha \cdot l = 0. \quad (\text{е})$$

Отметим некоторые особенности участия сил, образующих пару, в уравнениях равновесия. Так как силы пары равны по модулю и действуют в противоположных направлениях на параллельных прямых, то сумма проекций этих сил на любую координатную ось будет равна нулю. Кроме

того, легко обосновать, что сумма моментов сил пары относительно любой оси, параллельной плоскости действия пары, будет равна нулю.

При определении моментов сил \bar{T} и \bar{R} относительно координатных осей применяем теорему Вариньона (1.5), т. е. раскладываем каждую силу на ее составляющие, параллельные координатным осям, вычисляем моменты каждой из составляющих относительно соответствующих осей координат и складываем их алгебраически.

Решая систему уравнений (а) – (е), получим:

$$(д): R_D = \frac{T \cos 30^\circ \cdot c}{\cos 60^\circ \cdot l} = \frac{8 \cdot 0,866 \cdot 0,3}{0,5 \cdot 0,5} = 8,31 \text{ кН};$$

$$(б): Y_A = R \sin 60^\circ = 8,31 \cdot 0,866 = 7,2 \text{ кН};$$

$$(г): Z_B = \frac{-T \sin 30^\circ (a+b) + R_D \cos 60^\circ (a+b) + R_D \sin 60^\circ \cdot c}{a} =$$

$$= \frac{-8 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 8,31 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 8,31 \cdot 0,866 \cdot 0,3}{0,4} = 5,63 \text{ кН};$$

$$(в): Z_A = -Z_B - T \sin 30^\circ + R_D \cos 60^\circ =$$

$$= -5,63 - 8 \cdot 0,5 + 8,31 \cdot 0,5 = -5,475 \text{ кН};$$

$$(е): X_B = \frac{M - T \cos 30^\circ (a+b) - R \sin 60^\circ \cdot l}{a} =$$

$$= \frac{24 - 8 \cdot 0,866 \cdot 0,6 - 8,31 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{0,4} = 40,6 \text{ кН};$$

$$(а): X_A = -X_B - T \cos 30^\circ = -40,6 - 8 \cdot 0,866 = -47,53 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения задачи можно составить, например, уравнения моментов относительно осей, направленных вдоль ED и EC .

$$\sum m_{ED}(\bar{F}_k) = 0, \quad -Z_A(a+b) - Y_A \cdot c - Z_B \cdot b = +5,47 \cdot 0,6 -$$

$$- 7,2 \cdot 0,3 - 5,63 \cdot 0,2 = 3,28 - 3,28 = 0;$$

$$\sum m_{EC}(\bar{F}_k) = 0, \quad M + X_A(a+b) + X_B \cdot b - R_D \sin \alpha \cdot l =$$

$$= 24 - 47,53 \cdot 0,6 + 40,6 \cdot 0,2 - 8,31 \cdot 0,866 \cdot 0,5 =$$

$$= 32,12 - 32,12 = 0.$$

Ответ: $X_A = -47,53$ кН, $Y_A = 7,2$ кН, $Z_A = -5,475$ кН, $X_B = 40,6$ кН, $Z_B = 5,63$ кН, $R_D = 8,31$ кН.

Задача С3

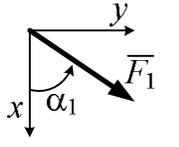
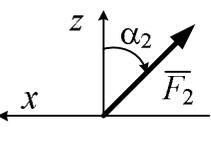
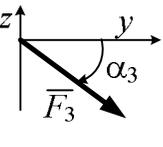
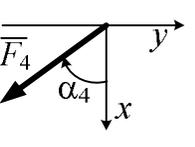
Две однородные прямоугольные плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. С3.0–С3.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С3.8, С3.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес бóльшей плиты $P_1 = 8$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 6$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy – горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом $M = 10$ кНм, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С3; при этом силы \bar{F}_1 и \bar{F}_4 лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy ; сила \bar{F}_2 – в плоскости, параллельной xz , и сила \bar{F}_3 – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил D, E, H, K находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0,8$ м.

Таблица С3

Силы								
	$F_1 = 8$ кН		$F_2 = 10$ кН		$F_3 = 12$ кН		$F_4 = 16$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	Е	60	Н	30	–	–	–	–
1	–	–	Д	60	Е	30	–	–
2	–	–	–	–	К	60	Е	30
3	К	30	–	–	Д	0	–	–
4	–	–	Е	30	–	–	Д	60
5	Н	0	К	60	–	–	–	–
6	–	–	Н	90	Д	30	–	–
7	–	–	Д	60	Н	60	К	90
8	Д	60	–	–	К	0	–	–
9	–	–	Д	90	–	–	Н	30

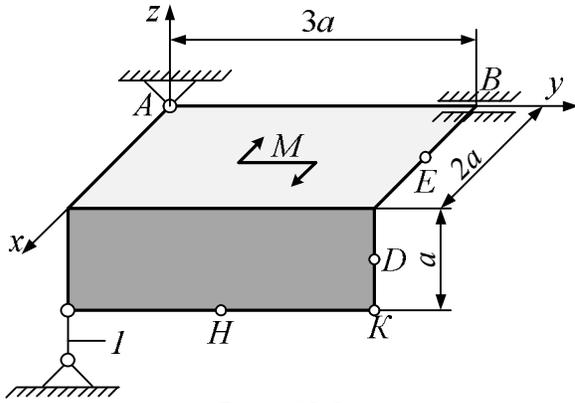


Рис. С3.0

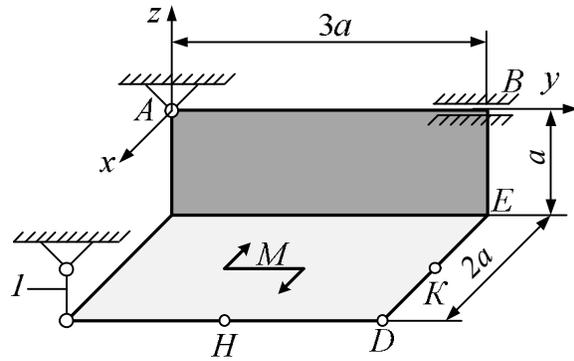


Рис. С3.1

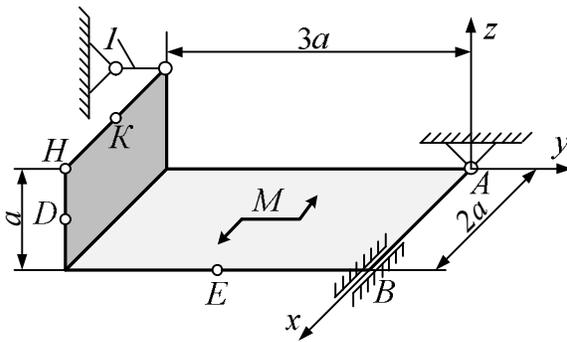


Рис. С3.2

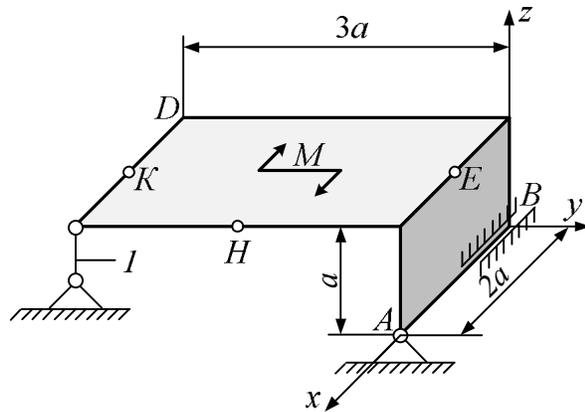


Рис. С3.3

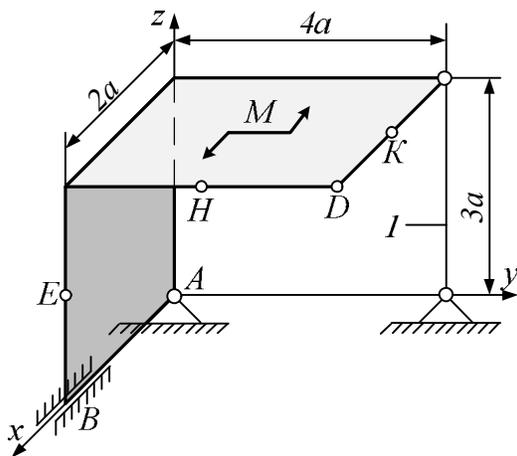


Рис. С3.4

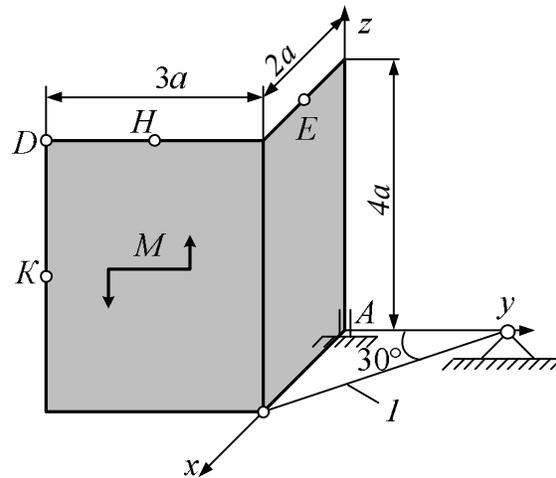


Рис. С3.5

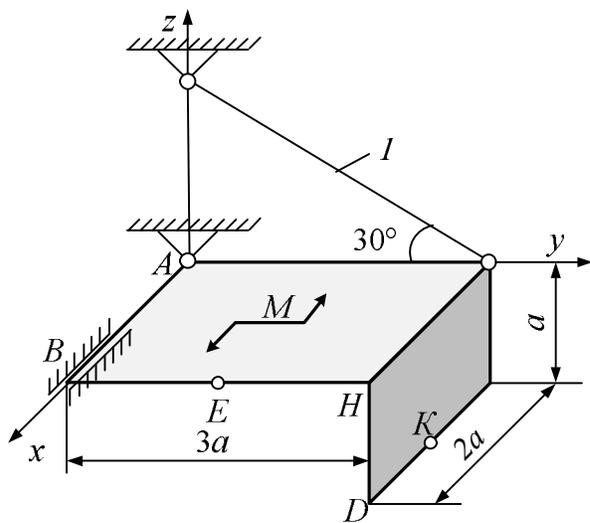


Рис. С3.6

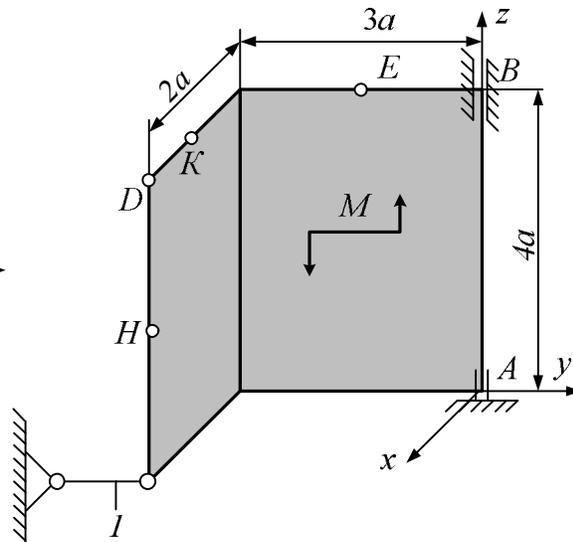


Рис. С3.7

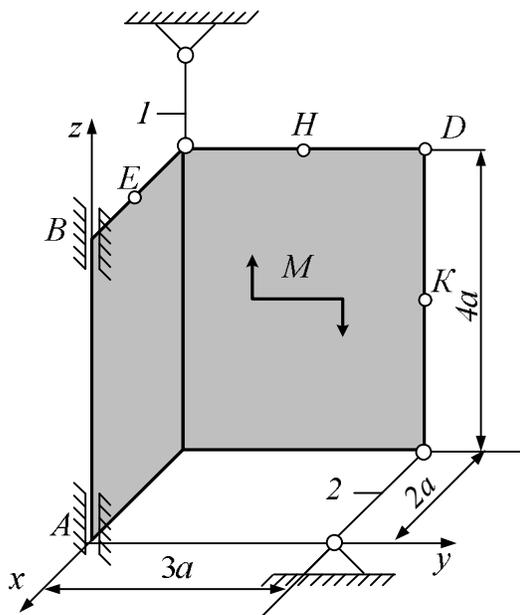


Рис. С3.8

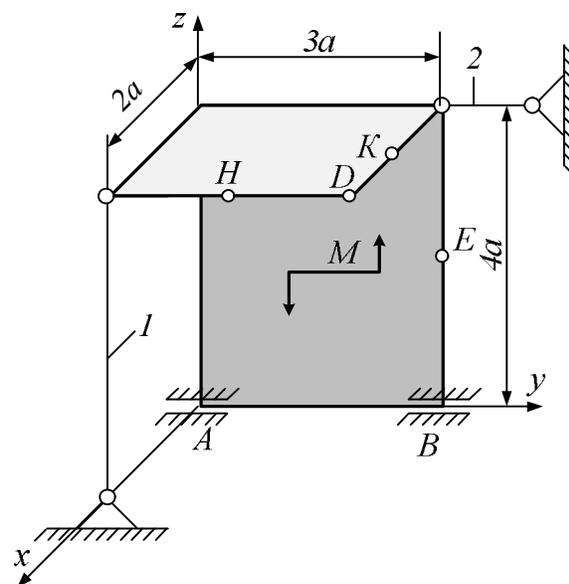


Рис. С3.9

1.4. Определение центра тяжести однородной плоской пластины

Центром тяжести твердого тела называется геометрическая точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести, действующих на все частицы тела. Для абсолютно твердого тела положение центра тяжести относительно тела является неизменным.

Равнодействующую сил тяжести $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$, действующих на все частицы данного тела, обозначим \bar{P} . Модуль этой силы называется весом тела и определяется равенством

$$P = \sum p_k. \quad (1.13)$$

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}; \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}; \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \quad (1.14)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести p_k , действующих на частицы тела.

Если тело является однородным, то вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части тела: $p_k = \gamma v_k$, где γ – вес единицы объема. Подставив эти значения в формулы (1.14), после сокращения на γ получим координаты точки C , называемой *центром тяжести объема V* :

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \quad y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \quad z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}. \quad (1.15)$$

Аналогичные рассуждения можно провести для тела, представляющего собой однородную плоскую пластину, и определить координаты центра тяжести площади S :

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \quad (1.16)$$

где S – площадь всей пластины; s_k – площади частей, из которых состоит пластина; x_k, y_k – координаты центров тяжести площади k -й части пластины.

Точно так же получаются координаты центра тяжести линии:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \quad (1.17)$$

где L – длина всей линии; l_k – длина ее частей.

Анализируя формулы (1.15)–(1.17), приходим к выводу, что центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы. Исходя из структуры расчетных формул, можно обосновать: *если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр*

тяжести расположен соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Действительно, если однородное тело имеет плоскость симметрии, то этой плоскостью оно разбивается на две такие части, веса которых p_1 и p_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии. Тогда, направив, например, ось x перпендикулярно плоскости симметрии и выбрав начало отсчета координаты x в точке пересечения оси x и плоскости симметрии, будем иметь для двух симметричных частей тела соотношение $p_1 = p_2$, $x_1 = -x_2$. Подставив эти значения в первую из формул (1.14), получим $x_c = 0$, т. е. центр тяжести всего тела расположен в плоскости симметрии тела.

На основе изложенного можно легко установить, что:

- 1) центр тяжести отрезка прямой лежит в его середине;
- 2) центры тяжести окружности, площади круга, однородного круглого кольца, поверхности и объема шара находятся в их геометрических центрах;
- 3) центры тяжести периметра и площади параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата лежат в точках пересечения диагоналей соответствующих фигур.

Методика определения центра тяжести тел состоит в следующем. Тело разбивается на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно или может быть предварительно определено. Далее центр тяжести всего тела вычисляют по общим формулам (1.15)–(1.17), подставляя в них соответствующие параметры тех частей, на которые было разбито тело.

Таким образом, исследуемое тело рассматривается в качестве суммы простейших тел. Иногда данное тело можно представить как разность тел (большого с вычетом меньшего). Тогда при расчетах вес (объем, площадь) большего тела считают положительным, а вес (объем, площадь) меньшего тела, как вычитаемого, считают отрицательным; так поступают для тел, имеющих вырезы, отверстия.

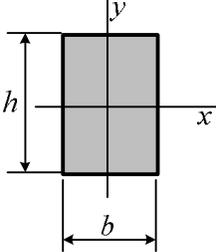
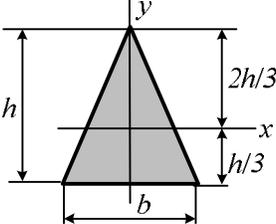
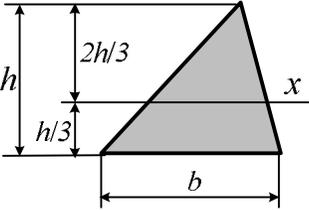
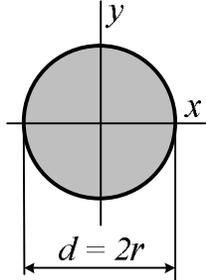
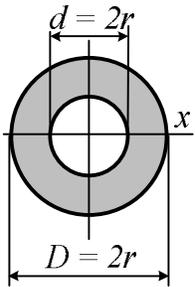
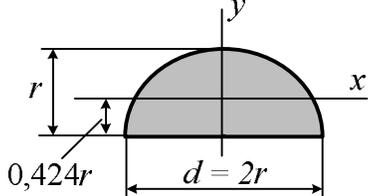
Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают на бесконечное число элементарных частей, и тогда стоящие в формулах (1.15)–(1.17) суммы обращаются в интегралы.

Плоскими телами являются расположенные в одной плоскости пластины и конструкции из весоных линий.

Простыми будем называть тела (плоские фигуры), для которых площадь (длина) и координаты центра тяжести заданы, либо легко определяются (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Площадь и координаты центра тяжести некоторых плоских фигур

<p>Прямоугольник</p>  $S = bh$	<p>Равнобедренный треугольник</p>  $S = \frac{bh}{2}$
<p>Треугольник</p>  $S = \frac{bh}{2}$	<p>Круг</p>  $S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$
<p>Кольцо</p>  $S = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \pi R^2 (1 - \alpha^2)$	<p>Полукруг</p>  $S = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$

Пример С4

Определить положение центра тяжести однородной пластины с размерами $a = 80$ см, $b = 40$ см, $c = 30$ см, $d = 20$ см (рис. С4).

Решение

Координаты центра тяжести однородной плоской пластины определяем по формулам:

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}. \quad (a)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, разбиваем площадь пластины на отдельные части, центры тяжести которых известны. В данном случае такими являются два прямоугольника и половина круга (рис. С4).

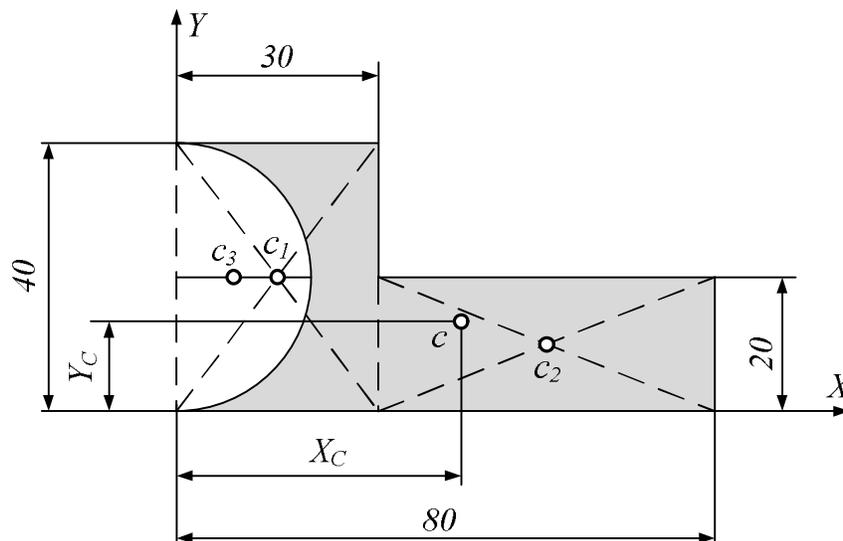


Рис. С4

Площадь половины круга, вырезанную из площади прямоугольника, будем считать отрицательной.

Тогда получим:

- площадь прямоугольника с центром тяжести в точке C_1

$$S_1 = b_1 \cdot h_1 = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ см}^2,$$

- площадь прямоугольника с центром тяжести в точке C_2

$$S_2 = b_2 \cdot h_2 = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ см}^2,$$

- площадь половины круга

$$S_3 = \frac{\pi R_3^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{2} = 628 \text{ см}^2.$$

Центры тяжести рассматриваемых частей пластины имеют следующие координаты:

- для первого прямоугольника: $x_1 = 15 \text{ см}$, $y_1 = 20 \text{ см}$;

- для второго прямоугольника: $x_2 = 30 + \frac{50}{2} = 55$ см, $y_2 = \frac{20}{2} = 10$ см;
 - для половины круга $x_3 = 0,424R_3 = 0,423 \cdot 20 = 8,48$ см, $y_3 = 20$ см.
- Подставляя эти значения в формулы (а), получим:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 - S_3 x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 15 + 1000 \cdot 55 - 628 \cdot 8,5}{1200 + 1000 - 628} = 42,3 \text{ см,}$$

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 - S_3 y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 20 + 1000 \cdot 10 - 628 \cdot 20}{1200 + 1000 - 628} = 13,4 \text{ см.}$$

Изображаем на рис. С4 искомые координаты и центр тяжести пластины.

Задача С4

Для однородной пластины, размеры которой даны в табл. С4, определить положение центра тяжести (рис. С4.0–С4.9).

Таблица С4

Номер условия	a , см	b , см	c , см	d , см
0	110	40	28	25
1	80	50	24	40
2	100	56	30	40
3	94	34	20	30
4	82	26	20	30
5	88	30	24	50
6	78	32	10	30
7	70	40	30	40
8	80	36	24	40
9	74	24	16	30

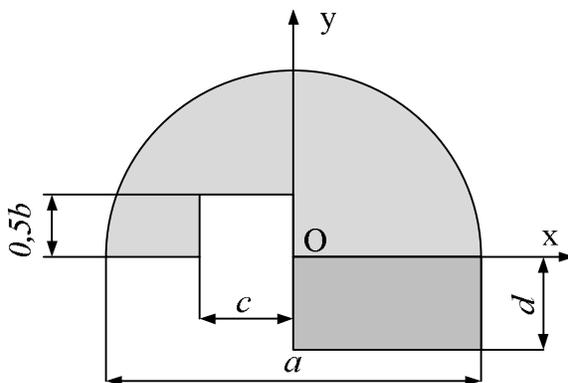


Рис. С4.0

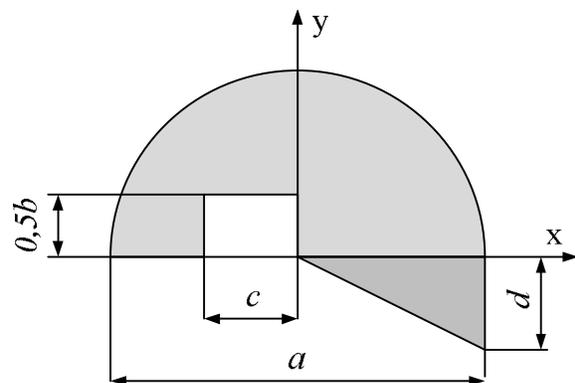


Рис. С4.1

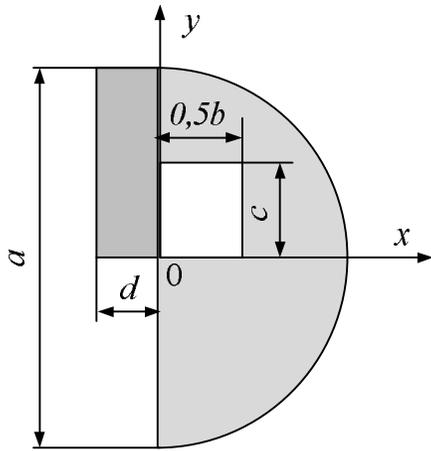


Рис. С4.2

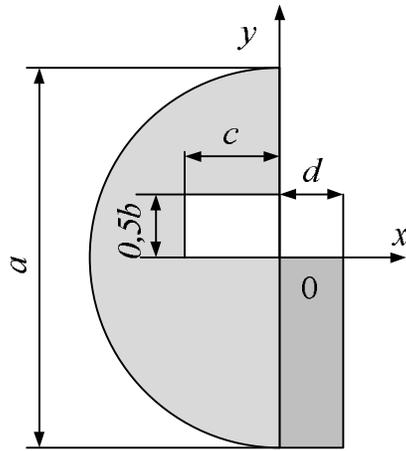


Рис. С4.3

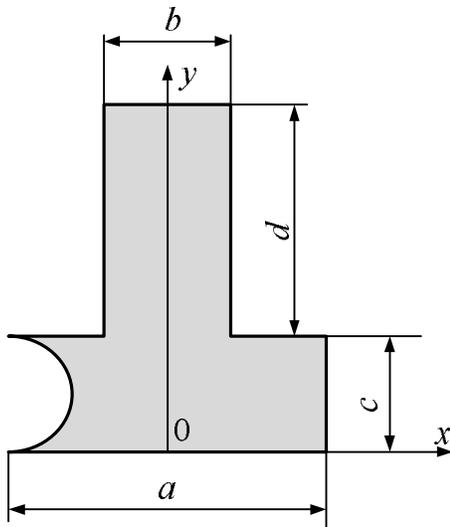


Рис. С4.4

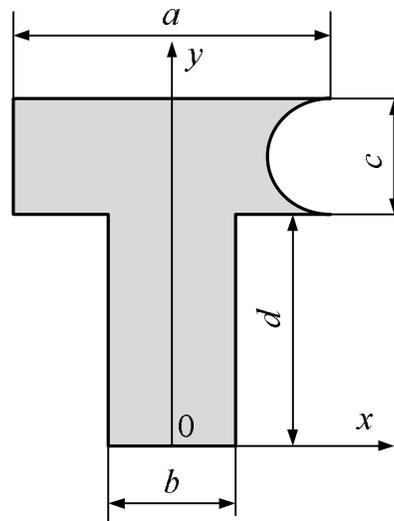


Рис. С4.5

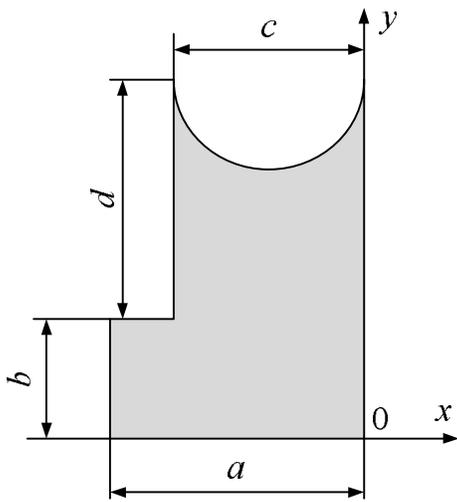


Рис. С4.6

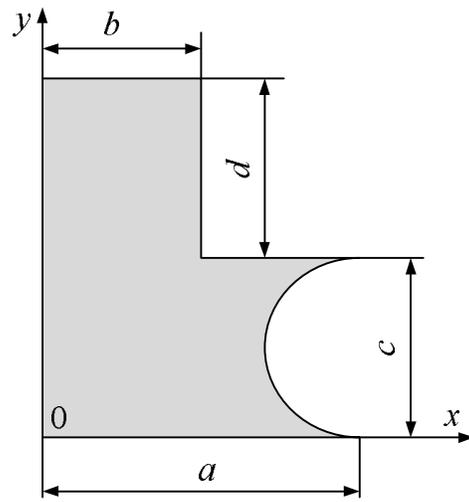


Рис. С4.7

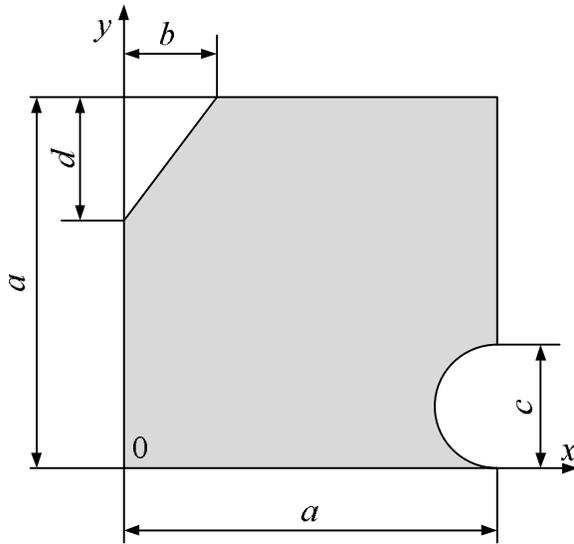


Рис. С4.8

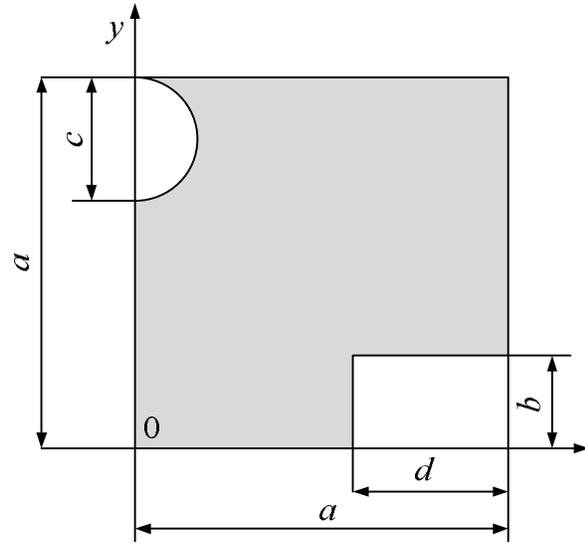


Рис. С4.9

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки

Положение точки в пространстве можно определить ее декартовыми координатами x , y , z , которые при движении точки будут с течением времени изменяться.

Тогда положение точки в любой момент времени может быть определено зависимостями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) представляют собой уравнения (закон движения) точки в прямоугольных декартовых координатах. Отметим, что задать движение точки можно и другими системами координат, например, полярными, сферическими и т. д.

Если движение точки происходит в плоскости xu , то задаются только два уравнения движения:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

При прямолинейном движении точки достаточно задать одно уравнение движения:

$$x = f_1(t),$$

если принять, что ось x совпадает с прямой, по которой движется точка.

Уравнения (2.1) одновременно дают и уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t . Исключив из уравнений движения время t , можно найти уравнение траектории в обычной форме, т. е. в виде зависимости между координатами точки.

Скорость точки представляет собой вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данный момент времени.

При задании движения точки уравнениями (2.1) проекции скорости на оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (2.2)$$

Модуль скорости и ее направление в пространстве (обозначив углы, которые образует вектор \vec{V} с осями x, y, z , соответственно α, β, γ) найдем по формулам

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha = V_x / V, \quad \cos \beta = V_y / V, \quad \cos \gamma = V_z / V. \quad (2.3)$$

Если движение точки задается в плоскости xy , то

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

$$\cos \alpha = V_x / V, \quad \cos \beta = V_y / V. \quad (2.4)$$

При прямолинейном движении по оси x :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad V = |V_x| = |\dot{x}| \quad (2.5)$$

Характеристикой быстроты изменения скорости является ускорение a . Ускорение точки равно производной от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (2.6)$$

При задании движения точки уравнениями (2.1) проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \quad (2.7)$$

Модуль и направление ускорения найдем из формул:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}, \quad (2.8)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между вектором \vec{a} и координатными осями x, y, z .

Если движение точки задается в плоскости xy , то

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}. \quad (2.9)$$

При прямолинейном движении по оси x :

$$a_x = \ddot{x} \quad a = |a_x| = |\ddot{x}| \quad (2.10)$$

Задачи, относящиеся к кинематике точки, решаются с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорения точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки). В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Пример К1

Закон движения точки M в плоскости xy задан уравнениями $x = 4 \sin(\pi t / 6) - 1$, $y = 3 \cos(\pi t / 6) + 2$ (где x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 2$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Траекторию и найденные векторные величины изобразить на чертеже.

Решение

Уравнение траектории точки будем искать в виде зависимости между координатами точки. Для исключения из уравнений движения времени t , которое входит в аргументы тригонометрических функций, используем формулу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ или, считая } \alpha = \pi t / 6,$$

$$\sin^2(\pi t / 6) + \cos^2(\pi t / 6) = 1. \quad (a)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (а). Получим

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3},$$

следовательно,
$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \quad (б)$$

Таким образом, траекторией является эллипс, центр C которого имеет координаты $(-1, 2)$, а размеры полуосей, параллельных осям x и y , соответственно 4 и 3 см (рис. 2.2).

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \dot{x} = \frac{2\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), & V_y &= \dot{y} = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \quad (в)$$

При $t_1 = 2$ с получим

$$\begin{aligned} V_{1x} &= 1,05 \text{ см/с}, & V_{1y} &= -1,36 \text{ см/с}, \\ V_1 &= \sqrt{1,05^2 + (-1,36)^2} = 1,72 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Используя полученные результаты, построим на чертеже вектор \bar{V}_1 , предварительно определив координаты точки M_1 : $x_1 = 2,46$ см, $y_1 = 3,5$ см (рис. К1, а).

Теперь найдем ускорение точки:

$$a_x = \dot{v}_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad a_y = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

и при $t_1 = 2$ с

$$a_{1x} = -0,95 \text{ см/с}^2, \quad a_{1y} = -0,41 \text{ см/с}^2, \quad a_1 = 1,02 \text{ см/с}^2. \quad (г)$$

По этим результатам строим вектор \bar{a}_1 (рис. К1, б).

Заметим, что, так как движение точки было задано координатным способом, то величины скорости и ускорения определены по проекциям этих величин на координатные оси.

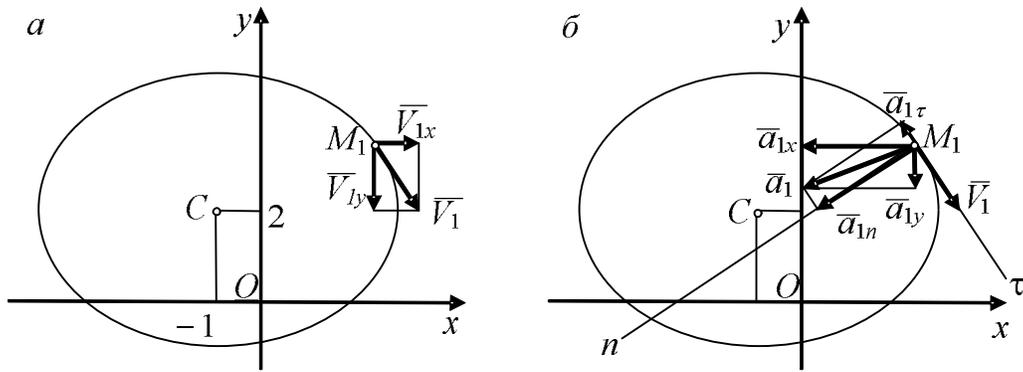


Рис. К1

Теперь определим касательное и нормальное ускорения точки, т. е. проекции вектора \bar{a} на оси естественного трехгранника.

Касательное ускорение найдем, про дифференцировав по времени равенство $V^2 = V_x^2 + V_y^2$. Получим

$$2V \frac{dV}{dt} = 2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt},$$

откуда
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (\text{д})$$

Подставив в (д) числовые значения величин, для $t_1 = 2$ с получим $a_{1\tau} = -0,26 \text{ см/с}^2$.

Нормальное ускорение точки при известных значениях величин a_1 и $a_{1\tau}$ вычислим по формуле $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Подставив значения a_1 и $a_{1\tau}$ получим $a_{1n} = 0,98 \text{ см/с}^2$.

Изобразим на рис. К1, б составляющие $\bar{a}_{1\tau}$ и \bar{a}_{1n} , которые найдем путем разложения вектора \bar{a}_1 на направления касательной (прямая, на которой лежит вектор \bar{V}_1) и главной нормали (перпендикулярна вектору \bar{V}_1). Направление оси τ устанавливаем в соответствии со знаком проекции $a_{1\tau}$ (так как $a_{1\tau} < 0$, то ось $M_1\tau$ противоположна вектору $\bar{a}_{1\tau}$), ось M_1n направлена ей перпендикулярно в сторону вогнутости траектории.

Радиус кривизны траектории определим по формуле $\rho = V^2/a_n$. Подставляя числовые значения V_1 и a_{1n} , найдем, что $\rho = 3,0 \text{ см}$.

Ответ: $V_1 = 1,72 \text{ см/с}$, $a_1 = 1,02 \text{ см/с}^2$, $a_{1\tau} = -0,26 \text{ см/с}^2$, $a_{1n} = 0,98 \text{ см/с}^2$, $\rho = 3,0 \text{ см}$.

Задача К1

Точка В движется в плоскости xOy . Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t = t_1$ определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рис. К1.0–К1.9, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0–3 в графе 2, для рис. 4–6 в графе 3, для рис. 7–9 в графе 4). Номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 – по последней.

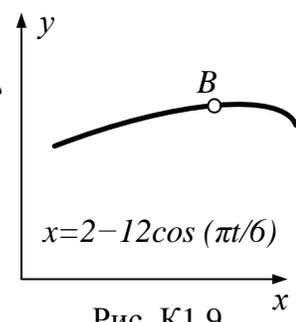
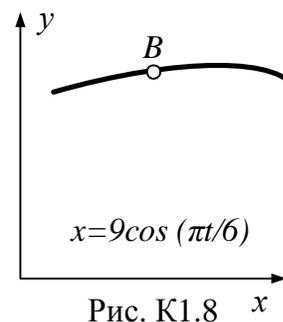
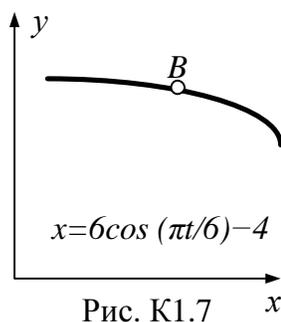
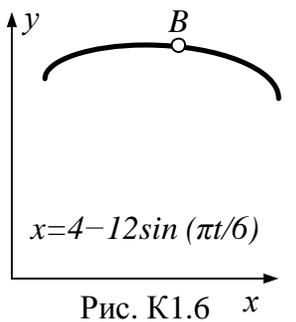
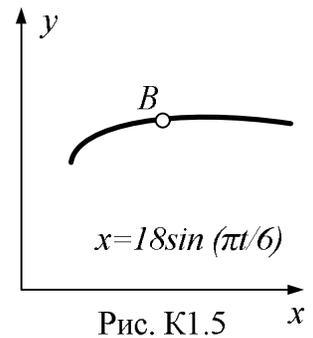
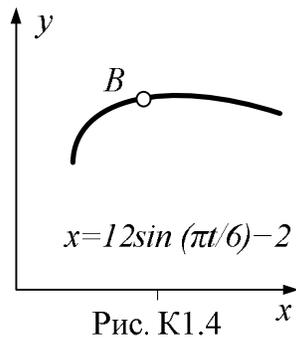
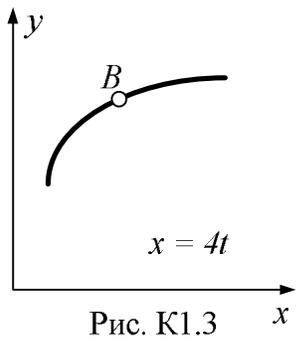
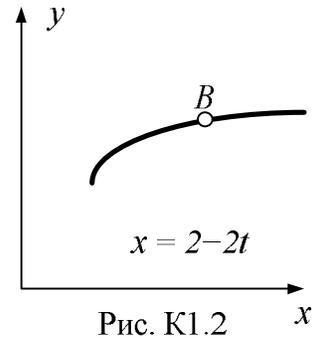
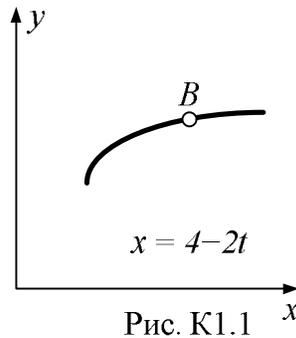
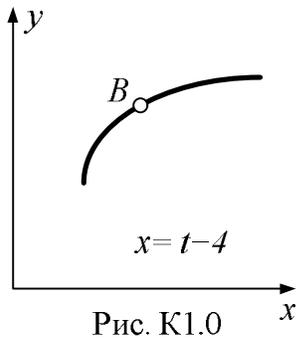


Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	рис. 0–3	рис. 4–6	рис. 7–9
0	$2t^2 + 2$	$6 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$12 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
1	$8 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
2	$(2+t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
3	$2t^3$	$12 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$9 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
4	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
5	$2 - 3t^2$	$12 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$6 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
6	$2 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$6 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
7	$(t+1)^3$	$-8 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$
8	$2 - t^3$	$12 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$9 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
9	$4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-12 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

2.2. Исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются во время движения неподвижными (рис. 2.1). Эта прямая называется осью вращения. Траекториями всех точек, не лежащих на оси вращения, будут окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

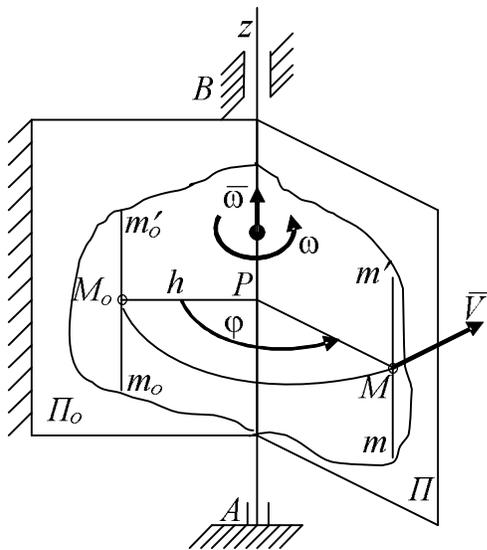


Рис. 2.1

Угловая скорость и угловое ускорение тела. Проведем через ось вращения Az (рис. 2.1) две полуплоскости: полуплоскость Π , твердо связанную с телом и вращающуюся вместе с ним, и неподвижную в пространстве полуплоскость Π_0 . Тогда положение тела в любой момент времени определяется взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который называется *углом поворота тела*. Угол считается положительным, если он отсчитан от неподвижной полуплоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если он отсчитан по ходу часовой стрелки. Измеряется угол φ в радианах.

Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t , т. е.

$$\varphi = f(t). \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) выражает *закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

Угловая скорость характеризует изменение со временем угла поворота тела, и ее числовое (алгебраическое) значение равно первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = d\varphi / dt \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}. \quad (2.12)$$

Знак ω определяет направление вращения: если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$, то тело вращается по ходу часовой стрелки. Это обстоятельство отражается и изображением величины ω с помощью дуговой стрелки (рис. 2.1). Размерность угловой скорости $1/T$ (1/время), обычно с^{-1} (радиан – величина безразмерная).

В технике угловую скорость часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n , об/мин. Так как за один оборот тело поворачивается на угол 2π , а $1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.13)$$

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела, и его числовое (алгебраическое) значение равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.14)$$

Размерность углового ускорения $1/T^2$ (1/время²), обычно c^{-2} .

При совпадении знаков ε и ω их дуговые стрелки направлены одинаково (рис. 2.2), при разных знаках – дуговые стрелки будут направлены взаимно противоположно (рис. 2.3).

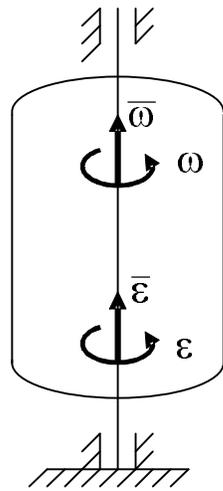


Рис. 2.2

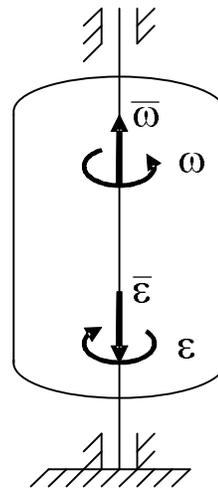


Рис. 2.3

Когда тело вращается ускоренно, то величины ω и ε имеют одинаковые знаки и направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$ (рис. 2.2). Когда тело вращается замедленно, то величины ω и ε имеют разные знаки и векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль оси вращения в противоположные стороны (рис. 2.3).

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = const$), то вращение тела называется *равномерным*. Интегрируя равенство $d\varphi = \omega \cdot dt$ (считая при этом, что в начальный момент времени $t_0 = 0, \varphi = \varphi_0$), получим *закон равномерного вращения*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.15)$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon = \text{const}$), то вращение называется *равнопеременным*.

Интегрируя равенство $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ (считая при этом, что в начальный момент времени $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$), получим

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t . \quad (2.16)$$

Представив это выражение в виде $d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t$ или $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon \cdot dt$ и вторично интегрируя, найдем отсюда закон *равнопеременного вращения*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (2.17)$$

Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Как было отмечено ранее, прямые, проведенные в теле параллельно оси вращения (например, прямая mm' на рис. 2.1), совершают поступательное движение, а значит, скорости и ускорения всех точек каждой такой прямой будут одинаковы. Следовательно, для изучения кинематических характеристик точек тела достаточно определить соответствующие величины для точек сечения, проведенного перпендикулярно оси вращения.

Траекториями всех точек, не лежащих на оси вращения, являются окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Рассмотрим какую-нибудь точку M вращающегося тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис. 2.1). Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает по своей траектории элементарное перемещение $ds = h \cdot d\varphi$. Тогда числовое (алгебраическое) значение скорости точки

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad V = h \cdot \omega. \quad (2.18)$$

Таким образом, алгебраическое значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Вектор скорости \vec{V} направлен по касательной к описываемой точкой окружности (или перпендикулярно плоскости Π , проходящей через ось вращения и точку M , или перпендикулярно прямой MP , соединяющей точку M с осью вращения) по направлению движения, что совпадает с направлением дуговой стрелки угловой скорости (см. рис. 2.1).

Векторы скоростей всех точек сечения, перпендикулярного оси вращения, будут располагаться в его плоскости, образуя поле скоростей, вид которого изображен на рис. 2.4. Отметим:

1) векторы скоростей точек перпендикулярны прямым, соединяющим точки с осью вращения, и направлены в сторону вращения тела (дуговой стрелки ω);

2) модули скоростей точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

Скорость \bar{V} точки вращающегося тела иногда называют линейной или окружной в отличие от угловой скорости тела.

Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_\tau = dV_\tau / dt$, $a_n = V^2 / \rho$. Подставляя в них значение V из равенства (2.18) и учитывая, что в данном случае $\rho = h$, получим: $a_\tau = h\varepsilon$, $a_n = h\omega^2$, или окончательно:

$$a_\tau = h\varepsilon, a_n = h\omega^2. \quad (2.19)$$

Касательная составляющая ускорения \bar{a}_τ направлена по касательной к траектории точки в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε ; нормальная составляющая \bar{a}_n направлена по радиусу MP к оси вращения (рис. 2.5).

Полное ускорение точки M

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{или} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.20)$$

Отклонение вектора \bar{a} от радиуса описываемой точкой окружности (от нормали к траектории) определяется углом μ , который вычисляется по формуле $tg\mu = a_\tau / a_n$. Используя равенства (2.19), получим

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2. \quad (2.21)$$

Указание. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же.

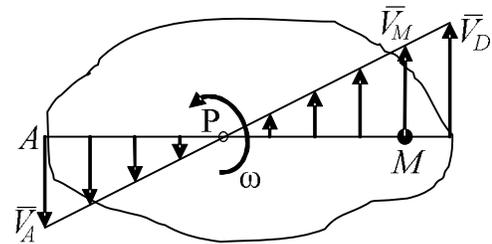


Рис. 2.4

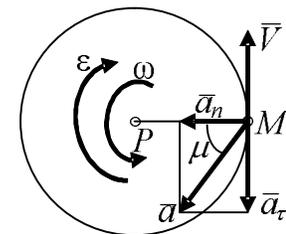


Рис. 2.5

Пример К2

Груз B опускается по закону $x = 0,02 t^2$, длина рукоятки OA равна $0,8$ м (рис. К2). Радиусы колес $r_1 = 0,5$ м, $r_2 = 1$ м, $r_3 = 0,2$ м. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса 1, а также скорость и ускорение конца рукоятки OA в момент времени $t_1 = 5$ с.

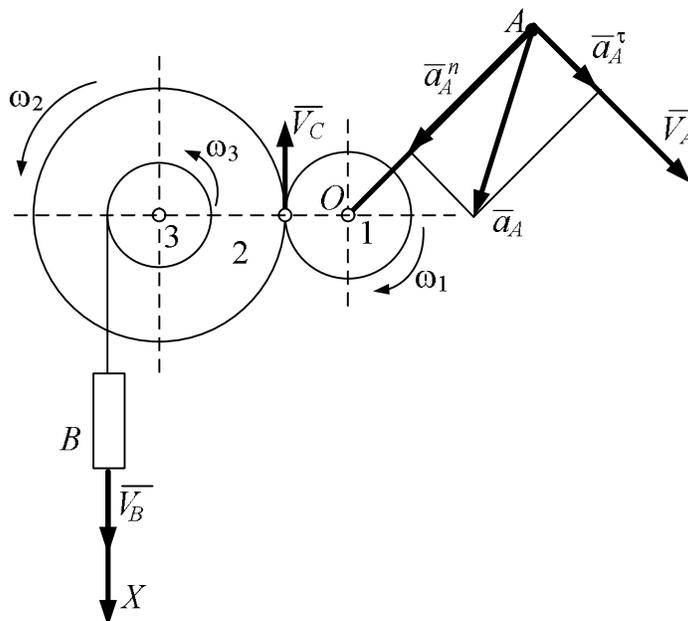


Рис. К2

Дано: $r_1 = 0,5$ м, $r_2 = 1$ м, $r_3 = 0,2$ м, $OA = 0,8$ м, $x = 0,02 t^2$ м, $t_1 = 5$ с.

Определить: ω_1 , ϵ_1 ; V_A , a_A при $t_1 = 5$ с.

Решение

Зная закон движения груза B $x = 0,02 t^2$ м, определим его скорость:

$$V_B = \frac{dx}{dt} = \frac{d(0,02 t^2)}{dt} = 0,04 t.$$

При $t_1 = 5$ с, $V_B = 0,04 \cdot 5 = 0,2$ м/с.

Угловая скорость колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_3} = \frac{0,04 t}{0,2} = 0,2 t.$$

Так как колеса 2 и 3 жестко связаны друг с другом, то $\omega_2 = \omega_3$.

При $t_1 = 5$ с:

$$\omega_2 = \omega_3 = 0,2 \cdot 5 = 0,1 \text{ с}^{-1}.$$

Угловую скорость колеса 1 и рукоятки OA определим через скорость точки C, общей для колес 2 и 1.

Скорость точки C на основании уравнения (2.18)

$$V_C = \omega_2 \cdot r_2 = \omega_1 \cdot r_1.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \omega_{OA} = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{0,2t \cdot 1}{0,5} = 0,4t.$$

При $t_1 = 5 \text{ с}$

$$\omega_1 = \omega_{OA} = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ с}^{-2}.$$

Угловое ускорение колеса 1 и рукоятки OA находим по формуле (2.14)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{OA} = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d(0,4t)}{dt} = 0,4 \text{ с}^{-2}.$$

Оно не зависит от времени и является постоянным. Следовательно, и при $t_1 = 5 \text{ с}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{OA} = 0,4 \text{ с}^{-2}.$$

Скорость конца рукоятки

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0,4t \cdot 0,8 = 0,32t.$$

При $t_1 = 5 \text{ с}$, получим

$$V_A = 0,32 \cdot 5 = 1,6 \text{ м/с}.$$

Касательное ускорение конца рукоятки OA определим по формуле (2.19):

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение конца рукоятки OA:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (0,4t)^2 \cdot 0,8 = 0,128t^2.$$

При $t_1 = 5 \text{ с}$ $a_A^n = 0,128 \cdot 5^2 = 3,2 \text{ м/с}^2$.

Полное ускорение точки A:

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{0,32^2 + 3,2^2} = 3,22 \text{ м/с}^2.$$

Направления векторов \vec{V}_A , \vec{a}_A^{τ} , \vec{a}_A^n , \vec{a}_A показаны на рис. К2.

Задача К2

Механизм состоит из колес 1–4, находящихся в зацеплении, рукоятки AO , жестко соединенной с соответствующим колесом, и груза B , привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы колес равны соответственно r_1, r_2, r_3 и r_4 (рис. К2.0–К2.9, табл. К2).

Зная закон движения груза B $x = f(t)$, определить в момент времени t_1 угловую скорость и угловое ускорение колеса 3, а также скорость и ускорение конца рукоятки A .

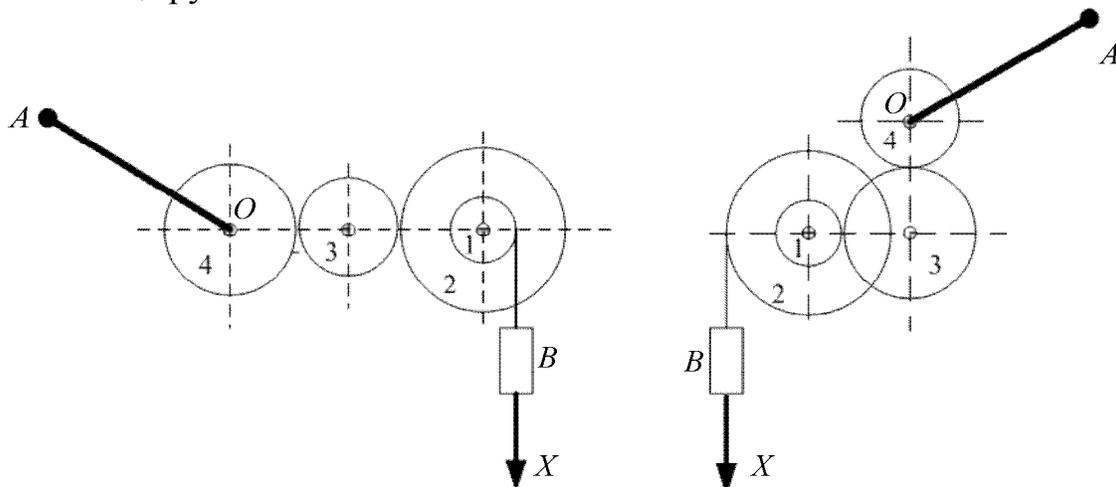


Рис. К2.0

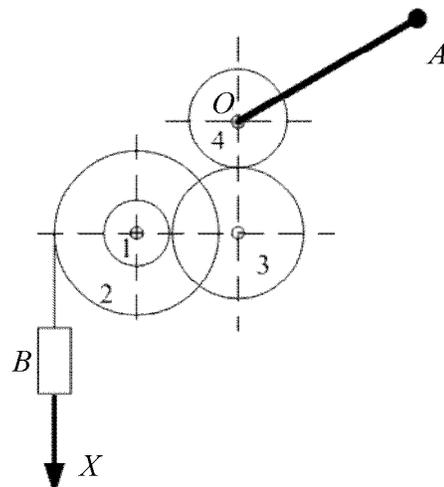


Рис. К2.1

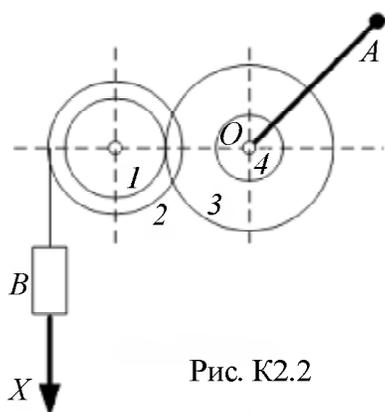


Рис. К2.2

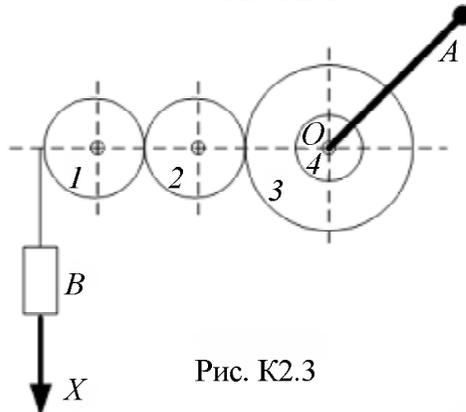


Рис. К2.3

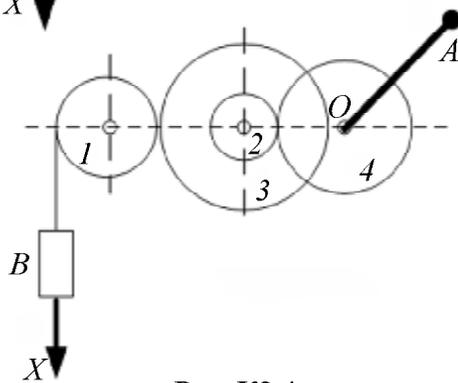


Рис. К2.4

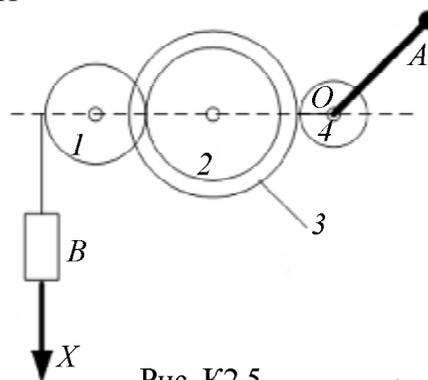


Рис. К2.5

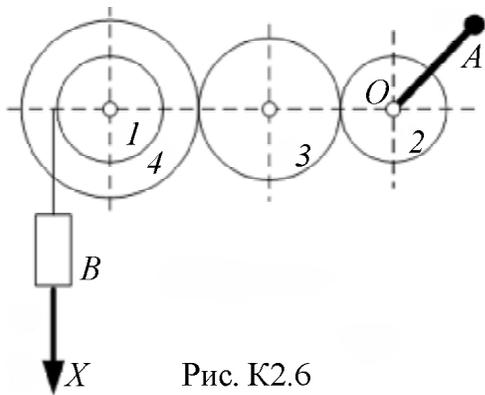


Рис. К2.6

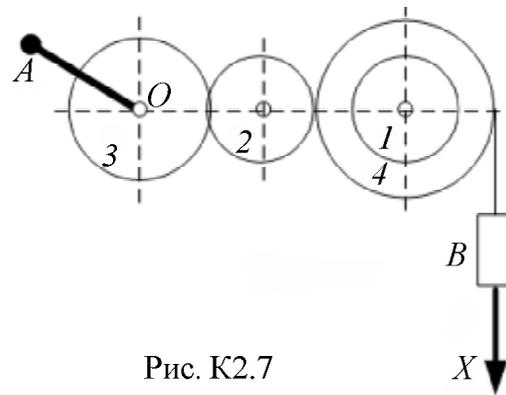


Рис. К2.7

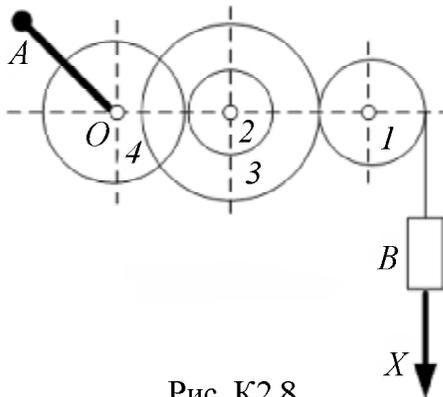


Рис. К2.8

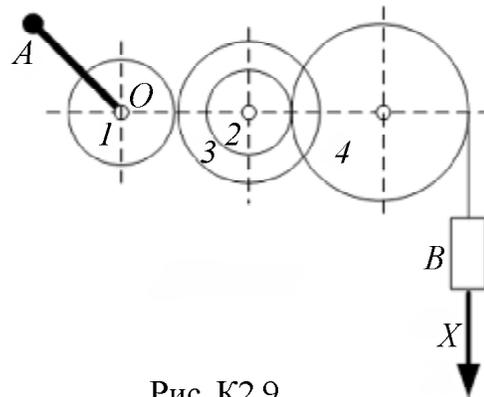


Рис. К2.9

Таблица К2

№ варианта	$x = f(t)$, м	Длина рукоятки OA, м	r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	r_4 , м	t_1 , с
0	$10t^2+t$	0,4	0,1	0,2	0,25	0,15	2
1	$5t^2$	0,5	0,2	0,3	0,35	0,3	5
2	$20(t^2+2t)$	0,6	0,2	0,4	0,5	0,3	1
3	$10t^2$	0,8	0,3	0,5	0,6	0,4	2
4	$10(t^3+6t^2)$	1,0	0,5	0,4	0,5	0,6	1
5	$20(t^2-t)$	1,2	0,5	0,4	0,6	0,8	2
6	$20t^2$	1,3	0,4	0,3	0,6	1,0	3
7	$5(t^3+2t^2)$	1,0	0,6	0,4	0,5	0,7	4
8	$4t^3$	1,5	0,4	0,3	0,5	0,6	3
9	$10(t^2+t)$	1,2	0,6	0,7	0,8	0,9	1

2.3. Исследование плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельным движением называется такое движение, при котором любая точка тела движется в плоскости, параллельной данной неподвижной плоскости. Изучение такого движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры в своей плоскости.

Определение скоростей точек тела с использованием теоремы о скоростях при плоскопараллельном движении. В случае, когда известна скорость какой-нибудь точки A (полюса) и направление искомой скорости точки B (рис. 2.6), можно пользоваться следующей теоремой: *при плоскопараллельном движении проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, равны между собой по величине и по направлению, т. е.*

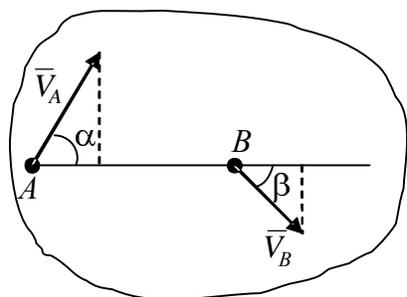


Рис. 2.6

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta. \quad (2.22)$$

Определение скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей. Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Мгновенный центр скоростей обозначается буквой P . Скорости точек плоской фигуры распределены так, как если бы фигура совершала вращательное движение вокруг оси, проходящей через МЦС. Поэтому скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна отрезку, соединяющему эту точку с МЦС, а модуль скорости равен произведению угловой скорости тела на расстояние точки до МЦС.

Мгновенный центр скоростей может быть расположен как на самой фигуре, так и на ее мысленном продолжении. *Мгновенный центр скоростей является единственной точкой плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.* В другой момент времени мгновенным центром скоростей будет уже другая точка плоской фигуры.

Рассмотрим основные способы нахождения положения МЦС.

1. При качении колеса без проскальзывания по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей находится в точке соприкосновения колеса с неподвижной поверхностью (рис. 2.7).

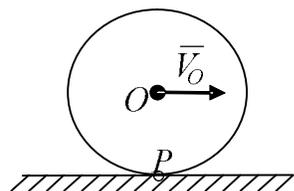


Рис. 2.7

2. Если известно направление скоростей двух точек A и B плоской фигуры (рис. 2.8), МЦС находится

на пересечении перпендикуляров к скоростям этих точек; перпендикуляры проводятся через точки A и B .

3. Если векторы скоростей точек A и B (рис. 2.9) плоской фигуры перпендикулярны отрезку AB , МЦС можно найти, используя закон прямой пропорциональной зависимости скоростей точек от их расстояния до МЦС, т. е. МЦС находится на пересечении продолжения отрезка AB и прямой $\alpha - \alpha$, проведенной через концы векторов \vec{V}_A и \vec{V}_B .

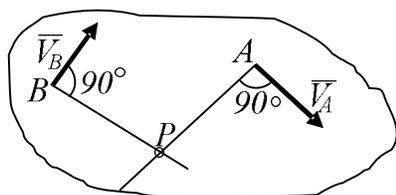


Рис. 2.8

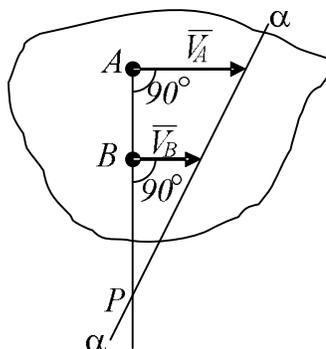


Рис. 2.9

4. В случае, когда скорости точек A и B параллельны, а отрезок AB не перпендикулярен к этим скоростям (рис. 2.10), МЦС находится в бесконечности. В этом случае имеем мгновенное поступательное движение плоской фигуры. Угловая скорость фигуры при таком движении равна нулю.

Действительно:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0.$$

Скорости всех точек фигуры в этом случае одинаковы по величине и по направлению: $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \dots$

Отметим, что при мгновенном поступательном движении только скорости точек одинаковы, а их ускорения в общем случае различны.

Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении с помощью векторного уравнения. Векторное уравнение для ускорений получается из следующей теоремы: *ускорение любой точки плоской фигуры (точки B) равно геометрической сумме ускорения полюса (точки A) и ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса, т. е.*

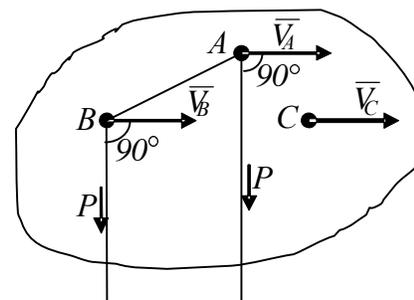


Рис. 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n, \quad (2.23)$$

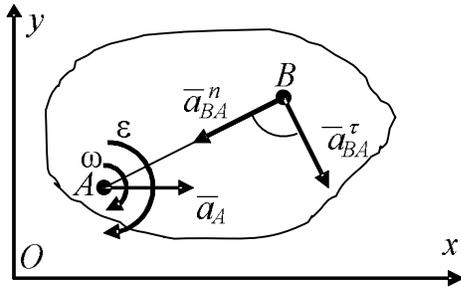


Рис. 2.11

где \bar{a}_A – ускорение полюса A (рис. 2.11); \bar{a}_{BA}^τ и \bar{a}_{BA}^n – вращательное и центростремительное ускорения точки B при вращении фигуры вокруг полюса A .

Центростремительное ускорение точки B при вращении вокруг полюса A направлено к полюсу, модуль его

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB, \quad (2.24)$$

где ω – мгновенная угловая скорость плоской фигуры.

Вращательное ускорение точки B при вращении вокруг полюса A направлено перпендикулярно центростремительному в сторону дуговой стрелки углового ускорения ϵ и равно по модулю

$$a_{BA}^\tau = \epsilon \cdot BA, \quad (2.25)$$

где ϵ – мгновенное угловое ускорение плоской фигуры.

Напомним, что при ускоренном вращении плоской фигуры вокруг полюса направление дуговой стрелки ϵ совпадает с направлением вращения, а при замедленном вращении – противоположно ему.

С помощью уравнения (2.23) задача определения ускорений чаще всего решается для заданного момента времени. При решении задачи векторное уравнение (2.23) проецируется на оси координат. Для этого надо изобразить на чертеже все векторы, входящие в уравнение. Проектирование начинается с векторов (или вектора), стоящих в левой части векторного уравнения. Затем ставится знак равенства, и проецируются векторы правой части уравнения. В результате одно векторное уравнение (2.23) заменяется двумя алгебраическими уравнениями проекций. Чтобы система алгебраических уравнений была разрешима, необходимо наличие в ней не более двух неизвестных величин. В качестве неизвестных могут быть любые две из следующих трех величин: одна или две составляющие ускорения точки A и угловое ускорение ϵ плоской фигуры. Отметим, что угловая скорость ω определяется заранее при решении задачи о скоростях.

Все вышесказанное позволяет рекомендовать следующий порядок решения задачи определения ускорений.

1. Изобразить на чертеже положение тела в заданный момент времени, выбрать полюс и отметить точку, ускорение которой требуется опреде-

лить. За полюс выбирается точка, ускорение которой либо известно по величине и направлению, либо легко определяется по условию задачи до решения уравнения (2.23).

2. Записать основное векторное уравнение (2.23) для точки, ускорение которой надо найти.

3. Показать на чертеже все векторы, входящие в уравнение (2.23). Если направление искомого вектора ускорения неизвестно, то его надо представить составляющими по направлению выбранных координатных осей.

4. Провести анализ уравнения (2.23), т. е. выявить, какие величины в нем известны, а какие неизвестны. В результате анализа и предварительных вычислений в этом уравнении должно остаться не более двух неизвестных величин.

5. Спроектировать уравнение (2.23) на выбранные оси координат. Следить за тем, чтобы знак равенства сохранял свое место и в уравнениях проекций.

6. Решая полученную систему уравнений проекций, определить неизвестные величины.

Пример К3

Кривошипно-шатунный механизм OAB приводится в движение кривошипом OA , который в рассматриваемом положении имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε (вращается ускоренно) (рис. К3, a).

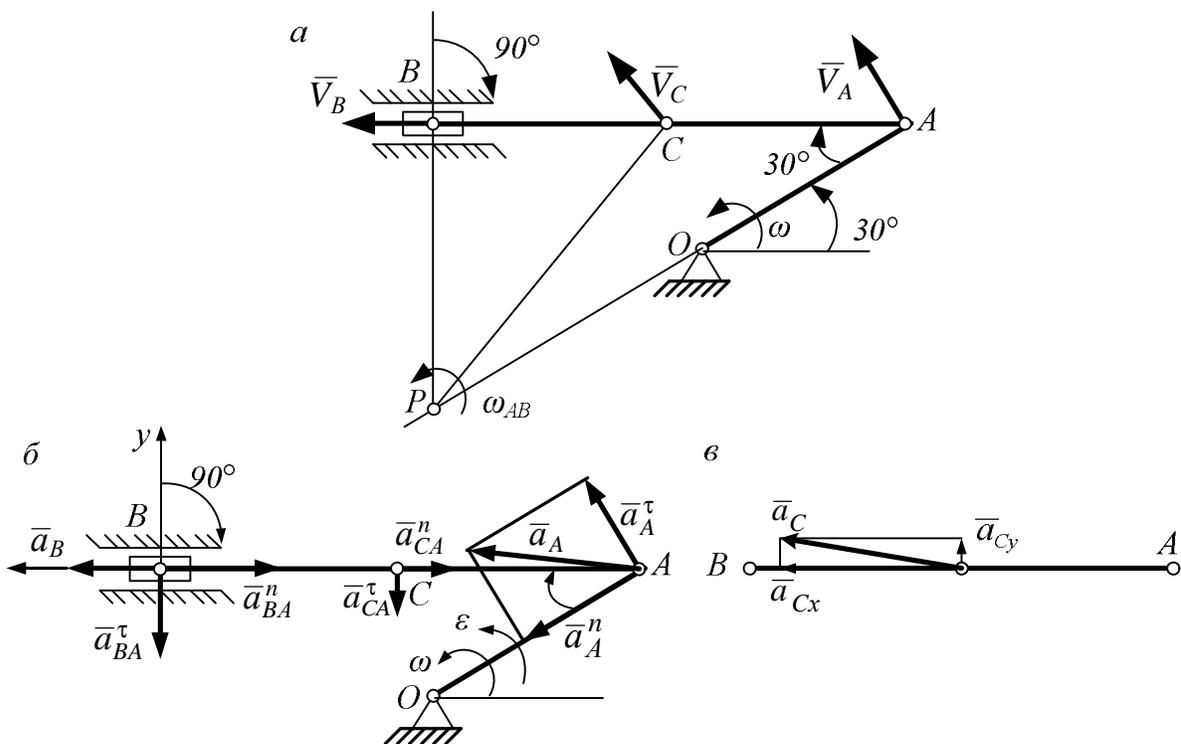


Рис. К3

Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB , скорости и ускорения точек A , B , C . Точка C находится на середине длины шатуна AB . Длина кривошипа равна l_1 , длина шатуна AB равна l_2 .

Дано: $l_1 = 0,4\text{ м}$, $l_2 = 0,8\text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\omega = 2\text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 3\text{ с}^{-2}$.

Определить: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}; a_A, a_B, a_C, \varepsilon_{AB}$.

Решение

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами и в масштабе (рис. К3, a).

2. Определяем скорость точки. Точка A принадлежит кривошипу OA , который совершает вращательное движение. Тогда скорость точки A определим по формуле (а):

$$V_A = \omega \cdot l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8\text{ м/с}; \bar{V}_A \perp OA. \quad (a)$$

3. Определяем скорость точки B . Точка B принадлежит шатуону AB , который совершает плоскопараллельное движение. Для определения V_B надо знать скорость какой-нибудь точки этого стержня (определена скорость \bar{V}_A) и направление \bar{V}_B . Направление \bar{V}_B найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная \bar{V}_A и направление \bar{V}_B , воспользуемся теоре-

мой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор \vec{V}_B (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$V_B \cos 0 = V_A \cos 60^\circ \text{ и } V_B = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4 \text{ м/с.} \quad (\text{б})$$

4. Определяем скорость точки C . Для этого, зная \vec{V}_A и \vec{V}_B , построим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB ; это точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров к \vec{V}_A и \vec{V}_B , восставленных из точек A и B . По направлению вектора \vec{V}_A определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС P . Вектор \vec{V}_C перпендикулярен отрезку CP , соединяющему точки P и C , и направлен в сторону поворота стержня. Величину V_C найдем из пропорции

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (\text{в})$$

Чтобы вычислить CP и BP , заметим, что $\triangle ABP$ и $\triangle CBP$ – прямоугольные. Тогда $BP = AB \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 0,8 \cdot 0,5774 = 0,462 \text{ м}$, $CB = 0,4 \text{ м}$, $CP = \sqrt{CB^2 + BP^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,462^2} = 0,611 \text{ м}$. В результате равенство (в) дает

$$V_C = V_B \frac{CP}{BP} = 0,4 \frac{0,611}{0,462} = 0,529 \text{ м/с, } \vec{V}_C \perp CP. \quad (\text{г})$$

5. Определяем ω_{AB} . Так как МЦС стержня AB известен (точка P), и $BP = 0,462 \text{ м}$, то

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{BP} = \frac{0,4}{0,462} = 0,866 \text{ с}^{-1}. \quad (\text{д})$$

6. Определяем ускорение точки A (рис. К.3, б). Точка A принадлежит кривошпицу OA , который совершает вращательное движение. Тогда ускорение точки определим по формулам (2.24), (2.25):

$$a_A^\tau = \varepsilon l_1 = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega^2 l_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2; \\ a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_A^n направлен вдоль AO , а \bar{a}_A^τ – перпендикулярно AO по направлению углового ускорения ϵ ; изображаем эти векторы на чертеже (рис. К3, б).

7. Определяем ускорение точки B . Точка B принадлежит стержню AB . Чтобы найти a_B , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB (точка A), которую принимаем за полюс и траекторию точки B .

Тогда ускорение точки B определим по формуле (2.23):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (\text{е})$$

Изображаем на чертеже векторы \bar{a}_{BA}^n (вдоль BA от B к A) и \bar{a}_{BA}^τ (в любую сторону перпендикулярно BA), численно

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 l_2 = 0,886^2 \cdot 0,8 = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (е), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (е) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B , спроектируем обе части равенства (е) на направление BA – ось x , перпендикулярную неизвестному вектору \bar{a}_{BA}^τ . Тогда получим

$$a_B = a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^n \cos 30^\circ - a_{BA}^n = 1,2 \cdot 0,5 + 1,6 \cdot 0,866 - 0,6 = 1,386 \text{ м/с}^2. \quad (\text{ж})$$

Так как $a_B > 0$, то вектор \bar{a}_B направлен, как показано на рис. К3, б.

8. Определяем ϵ_{AB} . Чтобы найти ϵ_{AB} , сначала определим a_{BA}^τ . Для этого обе части равенства (е) спроектируем на направление, перпендикулярное направлению BA (ось y). Тогда получим

$$0 = a_A^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau. \quad (\text{и})$$

Из равенства (и) получим:

$$a_{BA}^\tau = a_A^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ = 1,2 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 = 0,239 \text{ м/с}^2.$$

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \epsilon_3 l_3$, получим

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{l_3} = \frac{0,239}{0,8} = 0,299 \text{ м/с}^2.$$

9. Определяем ускорение точки C . Для этого воспользуемся равенством

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{CA}^\tau + \bar{a}_{CA}^n, \quad (\text{к})$$

где $a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot CA = 0,299 \cdot 0,4 = 0,12 \text{ м/с}^2$, $\bar{a}_{CA}^\tau \perp CA$;

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot CA = 0,866^2 \cdot 0,4 = 0,3 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_{CA}^n направлен от C к A .

Для определения ускорения точки C спроектируем векторное уравнение (к) на координатные оси x и y :

$$a_{Cx} = a_A^\tau \cos 60^\circ + a_A^n \cos 30^\circ - a_{CA}^n = 1,2 \cdot 0,5 + 1,6 \cdot 0,866 - 0,3 = 1,686 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_A^\tau \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ - a_{CA}^\tau = 1,2 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 - 0,12 = 0,12 \text{ м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки C

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{1,686^2 + 0,12^2} = 1,69 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V_A = 0,8 \text{ м/с}$, $V_B = 0,4 \text{ м/с}$, $V_C = 0,529 \text{ м/с}$, $\omega_{AB} = 0,866 \text{ с}^{-1}$;
 $a_A = 2 \text{ м/с}^2$, $a_B = 1,386 \text{ м/с}^2$, $a_C = 1,69 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_{AB} = 0,299 \text{ с}^{-2}$.

Задача К3

Кривошипно-шатунный механизм OAB приводится в движение кривошипом OA , который в рассматриваемом положении имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε (вращается ускоренно) (рис. К3.0–К3.9).

Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB , скорости и ускорения точек A , B , C . Точка C находится на середине длины шатуна AB . Длина кривошипа равна l_1 , длина шатуна AB равна l_2 .

Данные к задаче см. в табл. К3.

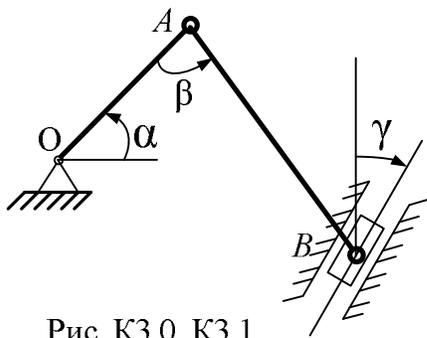


Рис. К3.0, К3.1

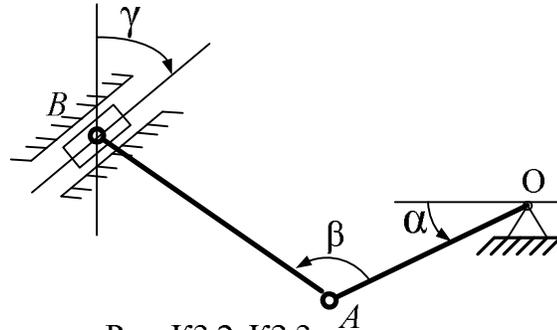


Рис. К3.2, К3.3

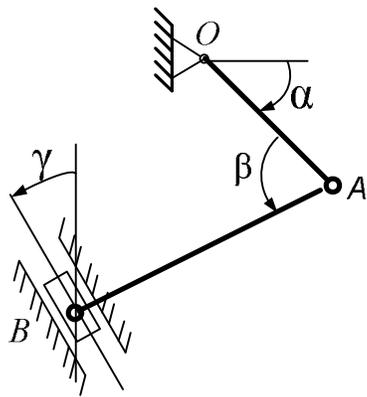


Рис. К3.4, К3.5

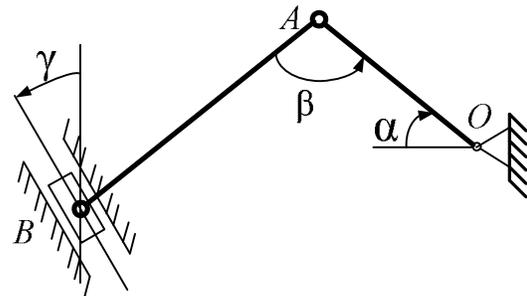


Рис. К3.6, К3.7

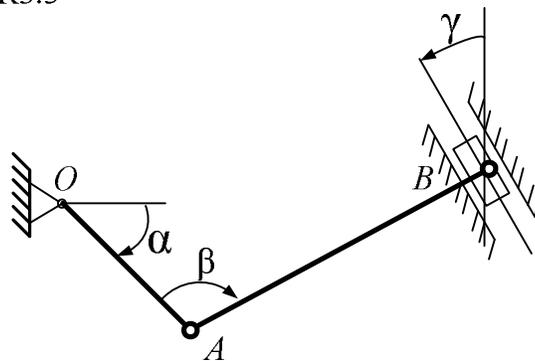


Рис. К3.8, К3.9

Таблица К3

№ варианта	l_1 , м	l_2 , м	α , град	β , град	γ , град	ω , c^{-1}	ε , c^{-2}
0	0,4	0,6	30	120	90	1	2
1	0,5	1	45	90	90	2	1
2	1	2	90	90	30	1	3
3	0,2	0,6	60	180	270	2	5
4	2	4	30	45	0	5	4
5	0,3	0,6	30	60	45	3	1

6	0,8	1,6	45	120	180	1	2
7	0,5	1,2	60	30	0	2	3
8	0,1	0,2	30	270	45	4	3
9	0,2	0,8	30	45	60	2	4

2.4. Сложное движение точки

Относительное, переносное и абсолютное движения. Движение объекта может рассматриваться одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых (основная) принимается условно за неподвижную, а другая как-то движется по отношению к первой. Движение точки или тела, исследуемое одновременно по отношению к основной и подвижной системам отсчета, называют составным или сложным.

Введем следующие определения.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$) называется *относительным*. Траектория, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Кинематические характеристики этого движения называются соответственно относительной скоростью \vec{V}_{om} и относительным ускорением \vec{a}_{om} .

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, называется *переносным движением*. Переносной скоростью точки M $\vec{V}_{пер}$ называется скорость того пункта пространства, неизменно связанного с подвижной системой отсчета $Oxyz$, через который в рассматриваемый момент времени проходит движущаяся точка M . Аналогично определяется и переносное ускорение точки M $\vec{a}_{пер}$.

Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется *абсолютным* или *сложным*. Траектория этого движения называется абсолютной траекторией. Кинематические характеристики этого движения будут называться соответственно абсолютной скоростью $\vec{V}_{абс}$ и абсолютным ускорением $\vec{a}_{абс}$.

Определение абсолютной скорости в сложном движении точки. При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Вектор $\vec{V}_{абс}$ определяется диагональю параллелограмма, построенного на \vec{V}_{om} и $\vec{V}_{пер}$ как на сторонах (рис. 2.12).

Модуль абсолютной скорости

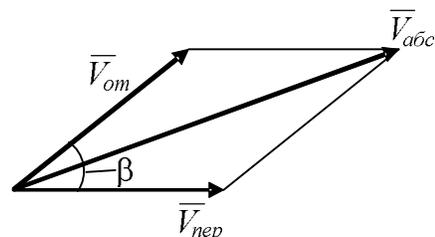


Рис. 2.12

$$V_{abc} = \sqrt{V_{om}^2 + V_{nep}^2 + 2 V_{om} \cdot V_{nep} \cdot \cos \beta}. \quad (2.26)$$

Определение абсолютного ускорения в сложном движении точки. При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{om} + \bar{a}_{nep} + \bar{a}_{кор}. \quad (2.27)$$

Кориолисово ускорение точки $\bar{a}_{кор}$ характеризует изменение относительной скорости точки при переносном движении и изменение переносной скорости точки при ее относительном движении.

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) на относительную скорость точки:

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_{om}). \quad (2.28)$$

Модуль кориолисова ускорения, если угол между векторами $\bar{\omega}$ и \bar{V}_{om} обозначить через β , будет равен:

$$a_{кор} = 2|\omega| \cdot |V_{om}| \sin \beta. \quad (2.29)$$

Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ определяется в соответствии с общим правилом векторного умножения, т. е. вектор $\bar{a}_{кор}$ направлен по перпендикуляру к плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}$ и \bar{V}_{om} в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\bar{\omega}$ с \bar{V}_{om} видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.13, а).

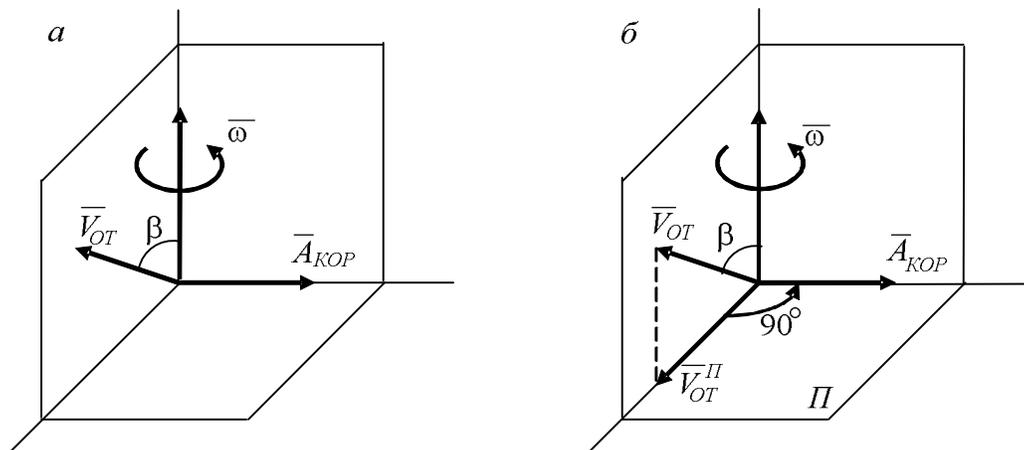


Рис. 2.13

Для определения направления $\bar{a}_{кор}$ удобно пользоваться правилом Жуковского: чтобы найти направление кориолисова ускорения, следует спроектировать вектор \bar{V}_{om} на плоскость Π , перпендикулярную вектору $\bar{\omega}$ (рис. 2.13, б), и повернуть эту проекцию \bar{V}_{om}^{Π} в этой же плоскости на 90° в сторону переносного вращения (т. е. по направлению дуговой стрелки ω).

Из формулы (2.29) видно, что $a_{кор} = 0$ в следующих случаях:

1) когда $\omega = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным или если переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) когда $V_{om} = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки или в те моменты времени, когда относительная скорость обращается в нуль;

3) когда $\sin \beta = 0$ (значит, угол $\beta = 0$ или $\beta = 180^\circ$), что происходит если вектор \bar{V}_{om} параллелен оси переносного вращения ($\bar{V}_{om} // \bar{\omega}$).

Заметим, что при решении задач равенство (2.27) часто удобно представить следующим образом:

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \bar{a}_{om}^{\tau} + \bar{a}_{om}^n + \bar{a}_{nep}^{\tau} + \bar{a}_{nep}^n + \bar{a}_{кор}. \quad (2.30)$$

Отметим также, что при изучении относительного движения и определении соответствующих кинематических характеристик точки (\bar{V}_{om} , \bar{a}_{om}) можно мысленно остановить переносное движение. Аналогично при изучении переносного движения и определении соответствующих кинематических характеристик точки (\bar{V}_{nep} , \bar{a}_{nep}) можно мысленно остановить относительное движение и рассматривать только то движение точки, которое оно совершало бы вместе с подвижной системой отсчета. Что касается кориолисова ускорения, то оно учитывает взаимное влияние друг на друга каждого из составных движений.

Указание. Для решения задачи К4 следует воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, необходимо по условию задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, как показано на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. К4.5 – К4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R , пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Пример К4.1

Прямоугольная пластинка (рис. К4.1) вращается вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = t^3 - 2t^2$. По пластинке вдоль прямой BD , образующей с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$, движется точка M по закону $s = AM = 30(t^2 - t) + 20$ см (t – в секундах). На рис. К4.1 точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

1. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по пластинке вдоль прямой BD относительным, а вращение пластины – переносным движением.

Тогда абсолютная скорость \vec{V}_{abc} и абсолютное ускорение \vec{a}_{abc} точки определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{abc} &= \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}; \\ \vec{a}_{abc} &= \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \end{aligned} \quad (a)$$

где в свою очередь,

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^\tau + \vec{a}_{пер}^n.$$

Определим все величины, входящие в равенства (а).

1. *Относительное движение.* Это движение прямолинейное и происходит по закону:

$$S = AM = 30(t^2 - t) + 20. \quad (б)$$

Поэтому $V_{отн} = S' = 30(2t - 1)$; $a_{отн} = V' = 30 \cdot 2 = 60$.

Для момента времени $t_1 = 1$ с получим:

$$\begin{aligned} S_1 &= AM_1 = 30(1^2 - 1) + 20 = 20 \text{ см}; \\ V_{отн} &= 30(2 \cdot 1 - 1) = 30 \text{ см/с}; \quad a_{отн} = 60 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (в)$$

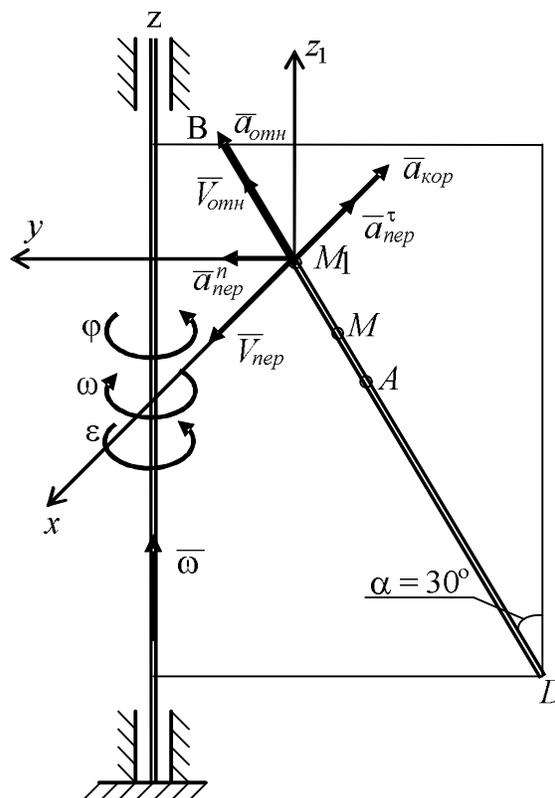


Рис. К4.1

Знаки показывают, что векторы $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{a}_{отн}$ направлены в сторону положительного отсчета расстояния S .

2. *Переносное движение.* Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^3 - 2t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного движения:

$$\omega = \varphi' = 3t^2 - 4t; \quad \varepsilon = \omega' = 6t - 4$$

и при $t_1 = 1$ с $\omega = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -1 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = 6 \cdot 1 - 4 = 2 \text{ с}^{-2}$. (г)

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 1$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ω ему противоположно.

Для определения $\vec{V}_{пер}$ и $\vec{a}_{пер}$ находим расстояние $h_1 = OM_1$ от точки M_1 до оси вращения O . Из рис. К4.1 видно, что

$$h_1 = OM_1 = 30 - AM_1 \cos 60^\circ = 30 - 20 \cdot 0,5 = 20 \text{ см.}$$

Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с получим:

$$\begin{aligned} V_{пер} &= |\omega| \cdot h_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см/с;} \\ a_{пер}^\tau &= \varepsilon \cdot h_1 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с}^2; \\ a_{пер}^n &= \omega^2 \cdot h_1 = 1^2 \cdot 20 = 20 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Изображаем на рисунке векторы $\vec{V}_{пер}$ и $\vec{a}_{пер}^\tau$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\vec{a}_{пер}^n$. Вектор $\vec{V}_{пер}$ перпендикулярен плоскости пластины и направлен к нам; вектор $\vec{a}_{пер}^\tau$ перпендикулярен плоскости пластины и направлен от нас. Вектор $\vec{a}_{пер}^n$ направлен к оси вращения.

3. *Кориолисово ускорение.* Так как угол между вектором $\vec{V}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\vec{\omega}$) равен 30° , то численно в момент времени $t_1 = 1$ с

$$a_{кор} = 2 \cdot |V_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 0,5 = 30 \text{ см/с}^2. \quad (\text{е})$$

Направление $\vec{a}_{кор}$ найдем по правилу Н.Е. Жуковского. Для этого вектор $\vec{V}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена как и вектор $\vec{a}_{пер}^n$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω , т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{a}_{кор}$ направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\vec{a}_{пер}^\tau$.

4. *Определение V_{abc} .* Так как $\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}$, а векторы $\bar{V}_{отн}$ и $\bar{V}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то в момент времени $t_1 = 1$ с

$$V_{abc} = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{пер}^2} = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36,06 \text{ см/с}.$$

5. *Определение a_{abc} .* По теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{кор}. \quad (\text{ж})$$

Для определения a_{abc} проведем координатные оси M_1xyz_1 (ось x направлена к нам) и вычислим проекции \bar{a}_{abc} на эти оси. Тогда, проектируя обе части равенства (ж) на оси M_1xyz_1 получим для момента времени $t_1 = 1$ с:

$$\begin{aligned} a_{abc \ x} &= -a_{пер}^{\tau} - a_{кор} = -40 - 30 = -70 \text{ см/с}^2; \\ a_{abc \ y} &= a_{отн} \cdot \cos 60^\circ + a_{пер}^n = 60 \cdot 0,5 + 20 = 50 \text{ см/с}^2; \\ a_{abc \ z} &= a_{отн} \cdot \cos 30^\circ = 60 \cdot 0,866 = 51,96 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

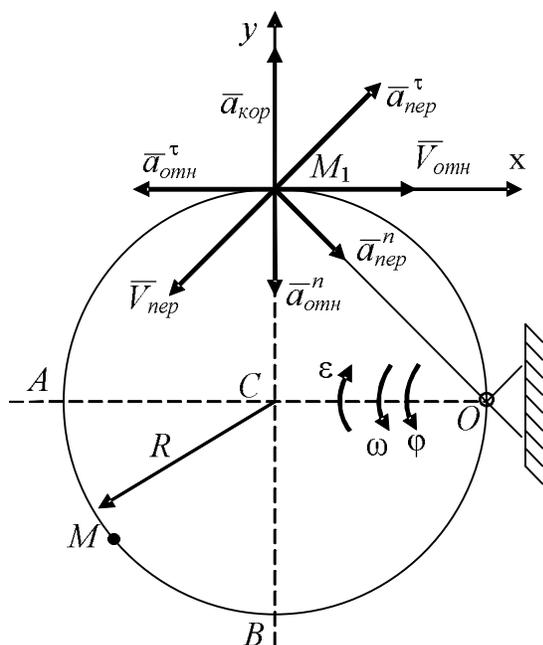
Отсюда находим значение a_{abc}

$$a_{abc} = \sqrt{a_{abc \ x}^2 + a_{abc \ y}^2 + a_{abc \ z}^2} = \sqrt{(-70)^2 + 50^2 + 51,96^2} = 100,5 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $V_{abc} = 36,06$ см/с; $a_{abc} = 100,5$ см/с².

Пример К4.2

Круглая пластинка (рис. К4.2) радиуса $R = 60$ см, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O , по закону $\varphi = 2t^2 - t^3$. По пластинке по окружности движется точка M по закону $s = AM = \frac{\pi R}{2}(2t^3 - 4t^2)$ см (t



– в секундах). На рис. К4.2 точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Дано: $R = 60$ см; $\varphi = 2t^2 - t^3$; $S = \frac{\pi R}{2}(2t^3 - 4t^2)$; (где φ – в радианах; S – в сантиметрах; t – в секундах).

Определить: V_{abc} ; a_{abc} при $t_1 = 1$ с.

Решение

Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость \bar{V}_{abc} и абсолютное ускорение \bar{a}_{abc} точки найдутся по формулам:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{abc} &= \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{пер}; \\ \bar{a}_{abc} &= \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{кор}.\end{aligned}\tag{а}$$

Определим все величины, входящие в равенства (а).

1. *Относительное движение.* Это движение происходит по закону:

$$S = AM = \frac{\pi R}{2}(2t^3 - 4t^2).\tag{б}$$

Сначала установим, где будет находиться точка M на дуге окружности в момент времени $t_1 = 1$ с.

Получим:

$$S_1 = AM_1 = \frac{\pi R}{4}(2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2) = -\frac{\pi R}{2}.$$

Тогда
$$\angle ACM_1 = \frac{S_1}{R} = -\frac{\pi R}{2R} = -\frac{\pi}{2}.$$

Знак свидетельствует о том, что точка M_1 в момент $t_1 = 1$ с находится сверху от точки A .

Теперь находим числовые значения $V_{отн}$, $a_{отн}^{\tau}$, $a_{отн}^n$:

$$\begin{aligned}V_{отн} &= S' = \frac{\pi R}{4}(6t^2 - 8t); \\ a_{отн}^{\tau} &= V' = \frac{\pi R}{4}(12t - 8); \quad a_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R},\end{aligned}$$

где $\rho_{отн}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R .

Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 60$ см, получим:

$$\begin{aligned}
V_{омн} &= \frac{3,14 \cdot 60}{4} (6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1) = -94,2 \text{ см/с}; \\
a_{омн}^{\tau} &= \frac{3,14 \cdot 60}{4} (12 \cdot 1 - 8) = 188,4 \text{ см/с}^2; \\
a_{омн}^n &= \frac{94,2^2}{60} = 147,9 \text{ см/с}^2.
\end{aligned}
\tag{в}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}_{омн}^{\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния S ; а вектор $\bar{V}_{омн}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}_{омн}^n$ направлен к центру C окружности.

2. *Переносное движение.* Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^2 - t^3$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного движения:

$$\omega = \varphi' = 4t - 3t^2; \quad \varepsilon = \omega' = 4 - 6t$$

$$\text{и при } t_1 = 1 \text{ с} \quad \omega = 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 = 1 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = 4 - 6 \cdot 1 = -2 \text{ с}^{-2}.\tag{г}$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 1$ с направление ω совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ε ему противоположно.

Для определения $\bar{V}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}$ находим расстояние $h_1 = OM_1$ от точки M_1 до оси вращения O . Из рис. К4.2 видно, что $\triangle OCM_1$ – прямоугольный и $h_1 = \sqrt{OC^2 + CM_1^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84,85$ см. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с получим:

$$\begin{aligned}
V_{пер} &= \omega \cdot h_1 = 1 \cdot 84,85 = 84,85 \text{ см/с}; \\
a_{пер}^{\tau} &= |\varepsilon| \cdot h_1 = 2 \cdot 84,85 = 169,7 \text{ см/с}^2; \\
a_{пер}^n &= \omega^2 \cdot h_1 = 1^2 \cdot 84,85 = 84,85 \text{ см/с}^2.
\end{aligned}
\tag{д}$$

Изображаем на рис. К4.2 векторы $\bar{V}_{пер}$ и $\bar{a}_{пер}^{\tau}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\bar{a}_{пер}^n$ (направлен к оси вращения O).

3. *Кориолисово ускорение.* Так как угол между вектором $\bar{V}_{омн}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 90° , то численно в момент времени $t_1 = 1$ с

$$a_{кор} = 2 \cdot |\bar{V}_{омн}| \cdot |\bar{\omega}| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 94,2 \cdot 1 \cdot 1 = 188,4 \text{ см/с}^2.\tag{е}$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н.Е. Жуковского: так как вектор $\bar{V}_{отн}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω .

4. *Определение V_{abc} .* Проведем координатные оси M_1xy и спроецируем почленно обе части равенства $\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{отн} + \bar{V}_{неп}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 1$ с:

$$V_{abcx} = V_{отнx} + V_{непx} = |V_{отн}| - V_{неп} \cos 45^\circ = 94,2 - 84,85 \cdot 0,707 = 34,2 \text{ см/с};$$

$$V_{abcy} = V_{отны} + V_{непы} = 0 - V_{неп} \cos 45^\circ = -84,85 \cdot 0,707 = -59,99 \text{ см/с}.$$

После этого находим:

$$V_{abc} = \sqrt{V_{abcx}^2 + V_{abcy}^2} = \sqrt{34,2^2 + 59,99^2} = 69,1 \text{ см/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между векторами $\bar{V}_{отн}$ и $\bar{V}_{неп}$ равен 135° , значение V_{abc} можно еще определить по формуле (а) (см. пример К4.1):

$$\begin{aligned} V_{abc} &= \sqrt{V_{отн}^2 + V_{неп}^2 + 2 V_{отн} \cdot V_{неп} \cdot \cos 135^\circ} = \\ &= \sqrt{94,2^2 + 84,85^2 + 2 \cdot 94,2 \cdot 84,85 \cdot (-0,707)} = 69,1 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

5. *Определение a_{abc} .* По теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн}^\tau + \bar{a}_{отн}^n + \bar{a}_{неп}^\tau + \bar{a}_{неп}^n + \bar{a}_{кор}. \quad (\text{ж})$$

Для определения a_{abc} спроектируем обе части равенства (ж) на проведенные оси M_1xy . Получим:

$$\begin{aligned} a_{abcx} &= -a_{отн}^\tau + a_{неп}^\tau \cos 45^\circ + a_{неп}^n \cos 45^\circ = \\ &= -188,4 + 169,7 \cdot 0,707 + 84,85 \cdot 0,707 = -8,43 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{abcy} &= -a_{отн}^n + a_{неп}^\tau \cos 45^\circ - a_{неп}^n \cos 45^\circ + a_{кор} = \\ &= -147,9 + 169,7 \cdot 0,707 - 84,85 \cdot 0,707 + 188,4 = 100,5 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } a_{abc} = \sqrt{a_{abcx}^2 + a_{abcy}^2} = \sqrt{(-8,43)^2 + 100,5^2} = 100,9 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } V_{abc} = 69,1 \text{ см/с}; \quad a_{abc} = 100,9 \text{ см/с}^2.$$

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0–К4.4) или круглая пластина радиусом $R = 1$ м (рис. К4.5–К4.9) вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = f_1(t)$.

На рис. К4.0, К4.1, К4.3, К4.5, К4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости вращения пластины и проходит через точку O , на рис. К4.2, К4.4, К4.7 ось вращения OO_1 вертикальная, на рис. К4.8, К4.9 ось вращения горизонтальная.

По пластине вдоль прямой BD (рис. К4.0–К4.4) или по окружности радиусом R (рис. К4.5–К4.9) движется точка M . Закон ее относительного движения $S = AM = f_2(t)$. Положительное направление отсчета от точки A к точке D .

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$ с.

Данные к задаче см. в табл. К4.

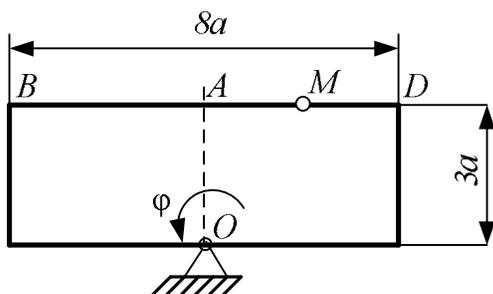


Рис. К4.0

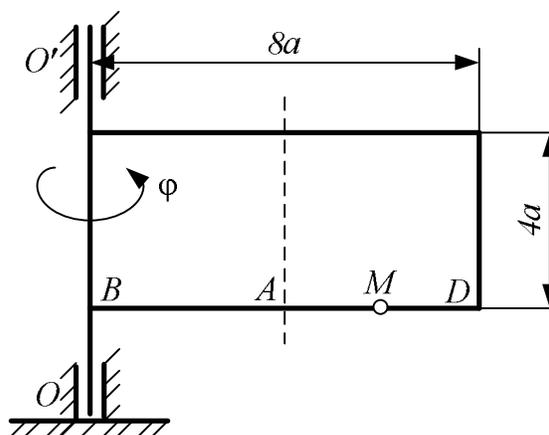


Рис. К4.1

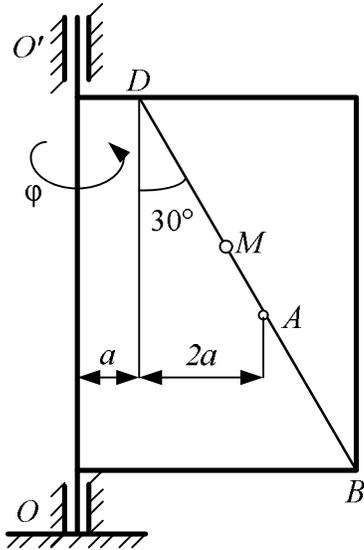


Рис. К4.2

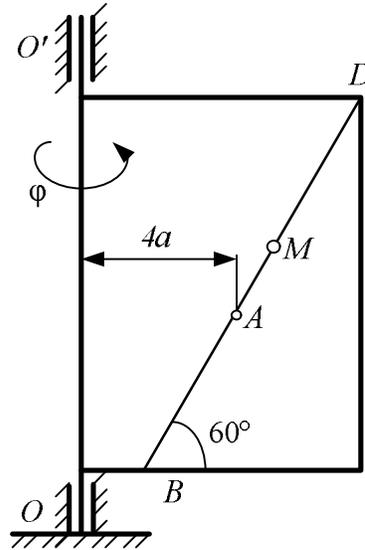


Рис. К4.3

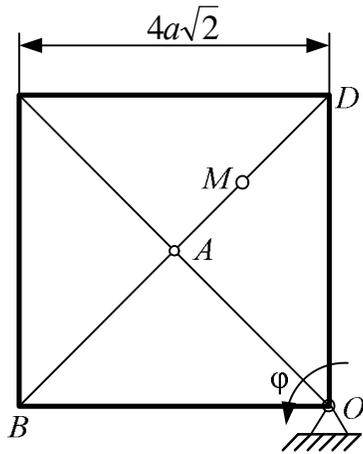


Рис. К4.4

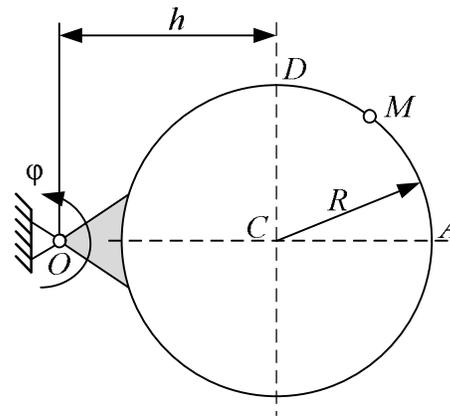


Рис. К4.5

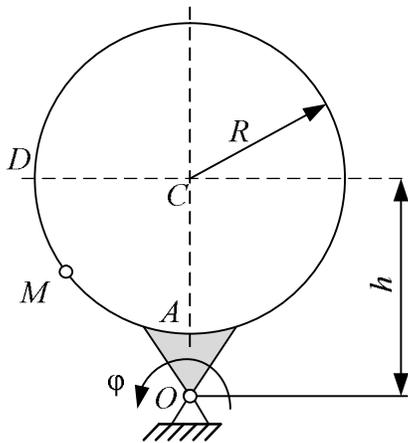


Рис. К4.6

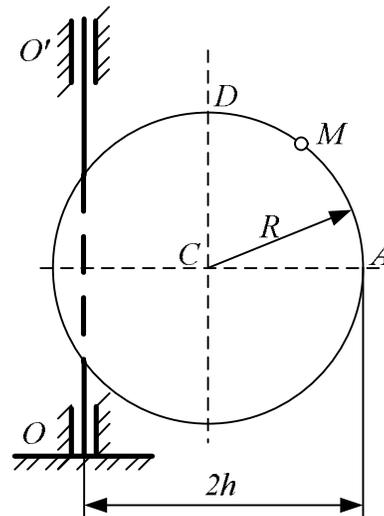


Рис. К4.7

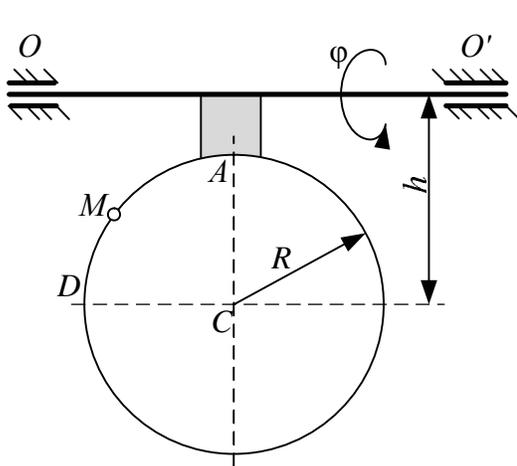


Рис. К4.8

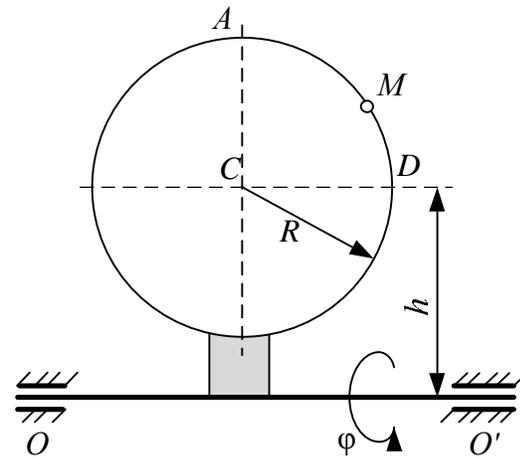


Рис. К4.9

Таблица К4

Для всех рисунков		Для рис. К4.0–К4.4		Для рис. К4.5–К4.9	
№ условия	$\varphi = f_1(t)$, рад	a , м	$S = AM = f_2(t)$, м	h , м	$S = AM = f_2(t)$, м
0	$4(t^2 - t)$	0,2	$0,5(3t - t^2) - 0,6$	R	$R(4t^2 - 2t^3) \pi/3$
1	$3t^2 - 8t$	0,3	$0,4(3t^2 - t^4) - 0,3$	$4R/3$	$R(2t^2 - t^3) \pi/2$
2	$6t^3 - 12t^2$	0,1	$0,8(t^2 - t) + 0,4$	R	$R(2t^2 - 1) \pi/3$
3	$t^2 - 2t^3$	0,4	$0,6(t^4 - 3t^2) + 0,5$	R	$R(t^4 - 3t^2) \pi/3$
4	$10t^2 - 5t^3$	0,5	$0,8(2t^2 - t^3) - 0,2$	R	$R(3t - t^2) \pi/6$
5	$2(t^2 - t)$	0,2	$0,6(t^3 - 2t^2)$	R	$R(t^3 - 2t) \pi/3$
6	$5t - 4t^2$	0,5	$0,4(t^3 - 3t) + 0,1$	$3R/4$	$R(t^3 - 2t^2) \pi/2$
7	$5t - 3t^3$	0,3	$0,6(t - t^3) + 0,4$	R	$R(t - 5t^2) \pi/6$
8	$2t^3 - 11t$	0,1	$0,5(t^3 - t) - 0,3$	R	$R(3t^2 - t) \pi/3$
9	$6t^2 - 3t^3$	0,2	$0,4(t - 2t^3) - 0,4$	$4R/3$	$R(t - 2t^2) \pi/2$

3. ДИНАМИКА

3.1. Общие указания

Из второго закона Ньютона динамики материальной точки

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad (3.1)$$

получаются две наиболее распространенные формы дифференциальных уравнений движения:

– дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме

$$\begin{aligned} ma_x = F_x, & & m\bar{a}_x = F_x, \\ ma_y = F_y, & \text{или} & m\bar{a}_y = F_y, \\ ma_z = F_z, & & m\bar{a}_z = F_z, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ – проекции ускорения \bar{a} на оси декартовых координат; F_x, F_y, F_z – проекции силы \bar{F} на те же оси декартовых координат;

– дифференциальные уравнения движения точки в естественной форме

$$\begin{aligned} ma_\tau = F_\tau, & & m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_\tau, \\ ma_n = F_n, & \text{или} & m \frac{V^2}{\rho} = F_n, \\ ma_b = F_b, & & 0 = F_b, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где a_τ, a_n, a_b – проекции ускорения \bar{a} на естественные оси координат; S – дуговая координата точки; \bar{V} – скорость точки; ρ – радиус кривизны траектории; F_τ, F_n, F_b – проекции силы \bar{F} на естественные оси координат.

С помощью дифференциальных уравнений (3.2) и (3.3) можно решить любую задачу динамики свободной материальной точки.

3.2. Первая задача динамики свободной точки

Первой или прямой называется задача, в которой заданы масса точки и закон ее движения в декартовых координатах или в естественной форме. Необходимо определить модуль и направление силы, действующей на точку.

Для решения задач надо выполнить следующие операции:

– построить расчетную схему, на которой в соответствии с условием задачи изобразить систему осей координат, нарисовать траекторию точки и отметить на траектории то положение точки, для которого требуется найти действующую силу. Эту силу следует представить составляющими на выбранные оси координат;

– по заданному движению материальной точки определить проекции ее ускорения на принятые оси координат;

– составить дифференциальные уравнения движения материальной точки в форме (3.2) или (3.3) и из полученных уравнений определить проекции искомой силы, а затем ее модуль и направляющие косинусы.

Пример Д1.1

Материальная точка массой 10 кг совершает движение в горизонтальной плоскости согласно уравнениям $x = 40 \sin \pi t$, $y = 30 \cos \pi t$, $x = 0$, где x, y – в метрах, t – в секундах. Определить силу \vec{F} , действующую на точку в момент $t = 1/4$ с.

Решение

Построим расчетную схему. В соответствии с условием задачи принимаем декартовы оси координат. Они изображены на рис. Д1.1. Из заданных уравнений движения следует, что траекторией точки является эллипс (на рис. Д1.1 – половина эллипса).

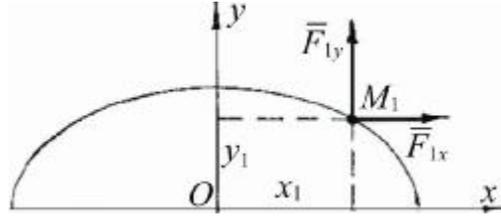


Рис. Д1.1

Положение точки в момент $t = 1/4$ с определяется координатами:

$$x_1 = 40 \sin \frac{\pi}{4} = 20\sqrt{2} \text{ м}, \quad y_1 = 30 \cos \frac{\pi}{4} = 15\sqrt{2} \text{ м}, \quad M_1(20\sqrt{2}; 15\sqrt{2}).$$

Искомую силу представим ее составляющими F_{1x} и F_{1y} . Вычислим проекции ускорения точки на оси координат:

$$a_x = \cancel{8} = 40\pi^2 \sin \pi t, \quad a_y = \cancel{8} = -30\pi^2 \cos \pi t.$$

Для заданного момента $t_1 = 1/4$ с имеем:

$$a_{1x} = -20\pi^2 \sqrt{2} \text{ м/с}^2, \quad a_{1y} = -15\pi^2 \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

Из дифференциальных уравнений (3.2) находим:

$$F_{1x} = ma_{1x} = -200\pi^2 \sqrt{2} \text{ Н}; \quad F_{1y} = ma_{1y} = -150\pi^2 \sqrt{2} \text{ Н}.$$

Затем определяем модуль силы $F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = 250\pi^2 \sqrt{2} \text{ Н}$ и направляющие косинусы

$$\cos(\vec{F}_1; \vec{i}) = \frac{F_{1x}}{F_1} = -0,8, \quad \cos(\vec{F}_1; \vec{j}) = \frac{F_{1y}}{F_1} = -0,6.$$

3.3. Вторая задача динамики свободной точки

Второй или обратной называется задача, в которой по заданным силам и массе материальной точки определяется ее движение. Для решения задачи надо выполнить следующие операции.

Построить расчетную схему. Для этого прежде всего надо выбрать систему координат. В случае произвольного движения точки в пространстве следует выбрать систему координат $Oxyz$. Положение начала координат O указывается в условии задачи, или выбирается в начальном положении движущейся материальной точки.

Затем в принятой системе координат надо *изобразить предполагаемую траекторию точки* и отметить на ней начальное положение точки M_0 , изобразить начальную скорость \dot{V}_0 . Надо отметить также произвольное положение точки M , обозначить ее координаты x, y, z ; изобразить все силы, действующие на материальную точку в этом произвольном положении. Если точка движется по плоскости, то следует выбирать систему координат Oxy . Для прямолинейного движения материальной точки достаточно выбрать одну координатную ось, которая совмещается с траекторией точки; при этом за положительное направление оси следует принять направление начальной скорости \dot{V}_0 .

Уточнить начальные условия движения точки, т. е. из условия задачи при $t=0$ определить x_0, y_0, z_0 – координаты точки в начале движения, $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – проекции начальной скорости на оси координат.

Составить дифференциальные уравнения движения точки в форме (3.2):

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Это – дифференциальные уравнения второго порядка.

Определить законы движения вдоль координатных осей, т. е. найти вторые интегралы уравнений (3.2):

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ y &= f_2(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ z &= f_3(t, c_1, c_2, \dots, c_6). \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2, \dots, c_6 находятся с использованием начальных условий обычными для теории дифференциальных уравнений способами.

Основные виды дифференциальных уравнений и их интегрирование даны в приложении.

В некоторых задачах, особенно при исследовании прямолинейного движения точки, требуется определить закон изменения скорости. В таких случаях достаточно найти только первые интегралы дифференциальных уравнений движения точки (см. ниже).

Пример Д 1.2

Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной прямой под действием силы, изменяющейся по гармоническому закону $F = F_o \sin \omega t$ и направленной вдоль этой прямой. Найти закон движения точки, если при $t = 0$ скорость точки равна нулю.

Решение

Расчетная схема (рис. Д1.2). Примем за координатную ось Ox горизонтальную прямую, а положение точки при $t = 0$ за начало координат O .

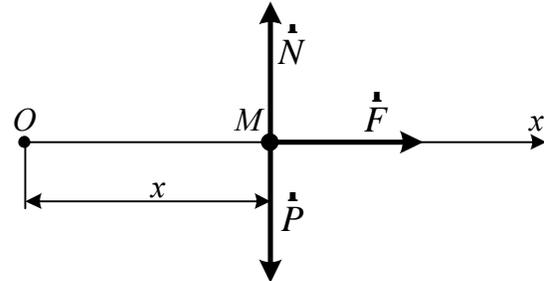


Рис. Д1.2

Изобразим материальную точку в произвольном положении на расстоянии x от ее начального положения (рис. Д1.2).

На точку действуют \dot{P} – сила тяжести, \dot{N} – реакция горизонтальной плоскости, \dot{F} – заданная сила.

Начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Составим дифференциальное уравнение движения в форме (3.2):

$$m\ddot{x} = F, \text{ или } \ddot{x} = \frac{F_o}{m} \sin \omega t.$$

Это уравнение относится к виду (см. приложение п. 1).

Так как $\dot{x} = \frac{dV}{dt}$, то $\frac{dV}{dt} = \frac{F_o}{m} \sin \omega t$.

Разделив переменные, получим $dV = \frac{F_o}{m} \sin \omega t dt$. Интеграл этого уравнения будет таким $V = -\frac{F_o}{m\omega} \cos \omega t + C_1$.

Используя начальные условия $t = 0$, $V = 0$, найдем $C_1 = \frac{F_o}{m\omega}$.

Теперь будем иметь $V = \frac{F_o}{m\omega} - \frac{F_o}{m\omega} \cos \omega t$.

Заменив V на $\frac{dx}{dt}$ и разделив переменные, получим

$$dx = \frac{F_o}{m\omega} (1 - \cos \omega t) dt.$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$x = \frac{F_o}{m\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) + C_2.$$

Используя начальные условия $t = 0, x = 0$, найдем $C_2 = 0$.

Окончательно будем иметь

$$x = \frac{F_o}{m\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Пример Д1.3

Точка M массой m движется по горизонтальной хорде AB (рис. Д1.3) окружности радиусом R под действием силы притяжения к центру O_1 , сила пропорциональна расстоянию точки до центра O_1 , коэффициент пропорциональности k .

Кратчайшее расстояние от центра окружности до хорды $h = \frac{R}{2}$. Найти закон движения точки относительно середины хорды.

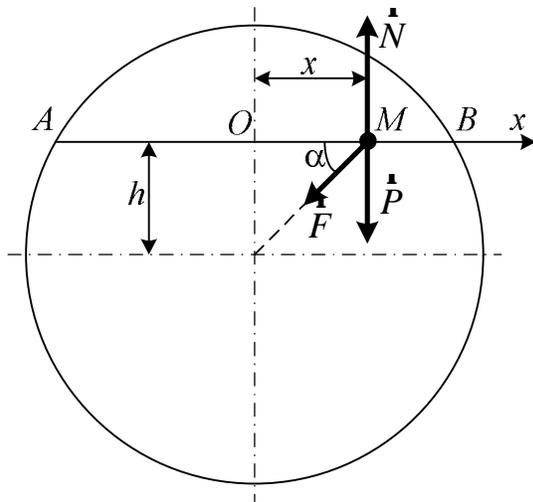


Рис. Д1.3

В начальный момент точка занимала крайнее положение B и была опущена без начальной скорости. Трением пренебречь.

Решение

Расчетная схема (рис. Д1.3). Ось координат Ox направим по хорде AB , начало отсчета O в соответствии с условием задачи поместим в середине хорды. Изобразим материальную точку M в произвольный момент времени на расстоянии x от начала координат. На материальную точку действуют: \dot{P} – сила тяжести, \dot{N} – реакция

направляющей, \dot{F} – сила притяжения точки M к центру O_1 . Модуль этой силы по условию задачи равен $k \cdot O_1M$.

Начальные условия: $t = 0, x_0 = OB = \sqrt{R^2 - h^2} = R/2 \cdot \sqrt{3}, \dot{x}_0 = 0$.

Составим дифференциальное уравнение движения точки в форме (3.2)

$$m\ddot{x} = -F \cos \alpha,$$

учитывая, что $\cos \alpha = \frac{x}{O_1M}$, будем иметь $m\ddot{x} = -kO_1M \frac{x}{O_1M}$ или $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

Это линейное однородное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$.

Так как корни характеристического уравнения оказались мнимыми, то, запишем решение в виде:

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 необходимо иметь два уравнения. Одно – записанное выше. Второе уравнение получим, если продифференцируем x по t :

$$\dot{x} = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Подставив в оба уравнения начальные условия

$$t = 0, \quad x_0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad \dot{x}_0 = 0,$$

получим $C_1 = R \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C_2 = 0$.

Тогда искомый закон движения материальной точки примет вид

$$x = R \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

Пример Д1.4

Материальная точка массой m , которой сообщена начальная скорость V_0 , движется по горизонтальной прямой в среде. Сила сопротивления среды равна $R = kmV^2$, где k – постоянный коэффициент. Найти закон дви-

жения точки. Какое расстояние пройдет точка, прежде чем ее скорость уменьшится в два раза? За какое время точка пройдет это расстояние?

Решение

Расчетная схема (рис. Д1.4). Ось координат совместим с траекторией материальной точки, за положительное направление примем направление начальной скорости V_0 . Начало отсчета O возьмем в начальном положении материальной точки M_0 .

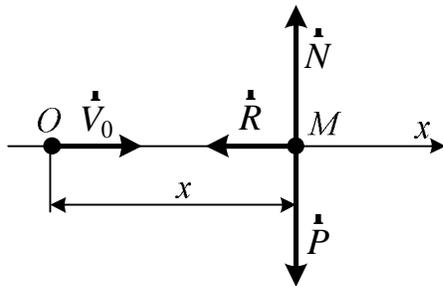


Рис. Д1.4

Изобразим материальную точку в произвольном положении M , отметим ее координату x .

На материальную точку действуют: \dot{P} – сила тяжести, \dot{N} – реакция горизонтальной плоскости; R – сила сопротивления движению.

Начальные условия: $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = V_0$.

Составим дифференциальное уравнение движения в форме (3.2):

$$m\ddot{x} = -R,$$

так как $R = kmV^2 = km\dot{x}^2$, то $\ddot{x} + k\dot{x}^2 = 0$.

Учитывая, что $\dot{x} = V, \ddot{x} = \frac{dV}{dt}$, получим:

$$\frac{dV}{dt} = -kV^2.$$

Разделим переменные $\frac{dV}{V^2} = -kdt$.

Берем интеграл от обеих частей равенства $-\frac{1}{V} = kt + C_1$.

Используя начальное условие $t = 0, V = V_0$, получим $C_1 = \frac{1}{V_0}$.

Следовательно, $\frac{1}{V} = kt + \frac{1}{V_0}$, а закон изменения скорости точки имеет

вид $V = \frac{V_0}{kV_0t + 1}$.

Теперь, заменив V на $\frac{dx}{dt}$ и разделив переменные, получим:

$$dx = \frac{V_0 dt}{kV_0 t + 1}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$x = \frac{1}{k} \ln|kV_0 t + 1|.$$

Определим теперь время, по истечении которого скорость уменьшится в два раза. Для этого в закон изменения скорости точки следует подставить значение $V_1 = \frac{1}{2}V_0$ и найти $t_1 = \frac{1}{kV_0}$.

$$\text{Расстояние } S_1 = x_1 = \frac{1}{k} \ln|kV_0 t_1 + 1| = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Замечание. Для определения расстояния, пройденного точкой до того момента, когда скорость уменьшится в два раза, нет необходимости находить зависимость $x = f(t)$. Достаточно получить зависимость $x = f(V)$. Для чего используем соотношение

$$m \frac{dV}{dt} = -kV^2.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение $m \frac{dV}{dt} = -kV^2$ примет вид $mV \frac{dV}{dx} = -kV^2$ или $-\frac{dV}{kV} = dx$.

Беря определенные интегралы от обеих частей этого уравнения

$$-\int_{V_0}^{0,5V_0} \frac{dV}{kV} = \int_0^S dx,$$

получим

$$S = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Пример Д1.5

Частица массой m , несущая заряд отрицательного электричества, влетает с вертикальной скоростью V_0 в однородное электрическое поле постоянного напряжения, имеющего горизонтальное направление. Найти уравнение движения частицы в вертикальной плоскости под действием силы тяжести и силы поля $\vec{F} = -e\vec{E}$. Ось x направить противоположно

вектору напряжения $\dot{\vec{E}}$, ось y – вертикально вверх, за начало координат принято начальное положение частицы M_0 .

Решение

Расчетная схема (рис. Д1.5). Система координат xOy соответствует условию задачи. Изобразим предполагаемую траекторию частицы M_0B , учитывая, что скорость \dot{V}_0 направлена по касательной к траектории в начальном положении точки.

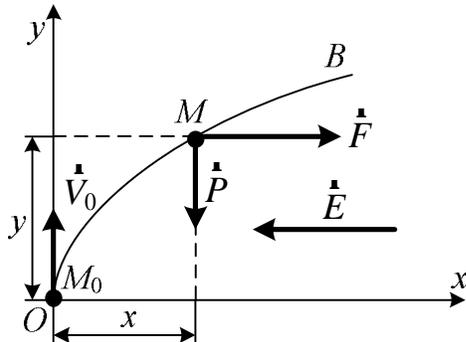


Рис. Д1.5

На траектории укажем произвольное положение M точки. Отметим ее координаты x и y .

На частицу действуют \dot{P} – сила тяжести частицы, $\dot{F} = -e\dot{E}$ – сила поля.

Начальные условия: $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, y = 0, \dot{y}_0 = V_0$.

Составим дифференциальные уравнения в форме (3.2)

$$m\ddot{x} = eE, \quad m\ddot{y} = -mg.$$

В полученной системе дифференциальные уравнения независимы друг от друга, поэтому будем их интегрировать поочередно.

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m},$$

$$V_x = \dot{x} = \frac{eE}{m}t + C_1;$$

при $t = 0, \dot{x} = 0,$

поэтому $C_1 = 0,$

тогда $\dot{x} = \frac{eE}{m}t,$

$$x = \frac{eE}{m} \frac{t^2}{2} + C_2,$$

при $t = 0, x = 0,$

поэтому $C_2 = 0;$

окончательно будем иметь

$$x = \frac{eE}{2m}t^2.$$

$$\ddot{y} = -g,$$

$$V_y = \dot{y} = -gt + C_3;$$

при $t = 0, \dot{y} = 0,$

поэтому $C_3 = V_0;$

тогда $\dot{y} = -gt + V_0,$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + V_0t + C_4,$$

при $t = 0, y = 0;$

поэтому $C_4 = 0;$

окончательно будем иметь

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + V_0t.$$

Пример Д1.6

Тяжелая точка массы m движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести и силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональной расстоянию до этого центра. Коэффициент пропорциональности $k^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию точки, если в момент $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$. Ось Ox направить горизонтально, а ось Oy – вертикально вниз.

Решение

Расчетная схема (рис. Д1.6). Система координат xOy соответствует условию задачи. Отметим начальное положение точки $M_0(a, 0)$. Изобразим предполагаемую траекторию M_0B . На траектории укажем произвольное положение точки M . Отметим ее координаты x, y .

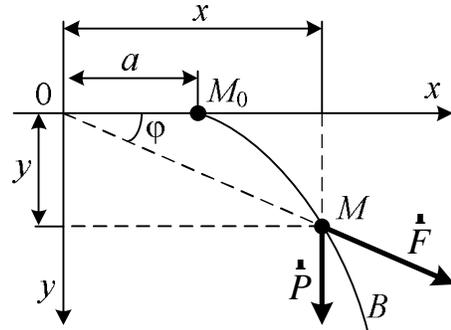


Рис. Д1.6

На материальную точку действуют \dot{P} – сила тяжести, \dot{F} – сила отталкивания от неподвижного центра.

Начальные условия: $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$.

Составляем дифференциальные уравнения в форме (3.2)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F \cos \varphi, \\ m\ddot{y} &= mg + F \sin \varphi. \end{aligned}$$

Отметим, что $F = k^2 \cdot m \cdot OM$, $\cos \varphi = \frac{x}{OM}$, $\sin \varphi = \frac{y}{OM}$.

С учетом этого дифференциальные уравнения принимают вид:

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \quad (a)$$

$$\ddot{y} - k^2 y = g. \quad (б)$$

Уравнение (a) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами [приложение, формула (4)]. Его характеристическое уравнение имеет вид $r^2 - k^2 = 0$, корни которого равны $r_1 = k$, $r_2 = -k$.

Согласно табл. 1 приложения, общее решение этого дифференциального уравнения запишем в виде

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}, \quad (в)$$

дополнительно запишем $\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}$. (г)

Подставим в уравнения (в) и (г) $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$, получим систему двух уравнений, решив которую, будем иметь:

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}.$$

Теперь уравнение (в) примет вид:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}).$$

Дифференциальное уравнение (б) относится к типу [см. формулу (5) приложения]. Его общее решение находится в форме $y = y_1 + y_2$, где y_1 – общее решение однородного уравнения $\dot{y} - k^2 y = 0$, а y_2 – частное решение уравнения (б).

Отметим, что дифференциальное уравнение $\dot{y} - k^2 y = 0$ аналогично уравнению $\dot{x} - k^2 x = 0$, поэтому $y_1 = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}$.

Правая часть дифференциального уравнения (б) постоянна, потому частное решение $y_2 = A$ (см. табл. 2 приложения). Подставляя это решение в уравнение (б), найдем $y_2 = -\frac{g}{k^2}$.

Общее решение уравнения (б) имеет вид

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k^2}, \quad (\text{д})$$

$$\dot{y} = C_3 k e^{kt} - C_4 k e^{-kt}. \quad (\text{е})$$

Подставив в уравнение (д) и (е) $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, получим систему двух уравнений, решая которую, будем иметь:

$$C_3 = C_4 = \frac{g}{2k^2}.$$

Теперь уравнение (д) примет вид

$$y = \frac{g}{2k^2}(e^{kt} + e^{-kt}) - \frac{g}{k^2}.$$

Итак, уравнения движения точки имеют вид:

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}),$$

$$y = \frac{g}{2k^2}(e^{kt} + e^{-kt}) - \frac{g}{k^2}.$$

Исключая из этих уравнений t найдем уравнение траектории точки

$$y = \frac{g}{k^2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right).$$

Траектория точки – прямая линия.

Задача Д1

Варианты 01–05

Таблица Д1.1

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось задана (см. табл. Д1.1, где A и k – постоянные величины, t – время движения). Пренебрегая сопротивлением движению, найти уравнение движения точки, если в начальный момент $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

№ вар.	Дано
01	$F_x = A \sin kt$
02	$F_x = A \cos kt$
03	$F_x = A (1 - t)$
04	$F_x = kt$
05	$F_x = A (\sin kt + \cos kt)$

Варианты 06–09

Таблица Д1.2

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось задана (см. табл. Д1.2, где A и k – постоянные величины, t – время движения). Принимая, что сила сопротивления движению постоянна и равна R , найти уравнение движения точки, если в начальный момент $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

№ вар.	Дано
06	$F_x = A \sin kt$
07	$F_x = A \cos kt$
08	$F_x = A (1 - t)$
09	$F_x = kt$

Вариант 10

Корабль движется прямым курсом под действием силы упора винтов $Q = kt$, где k – постоянная величина, t – время движения. Найти закон движения корабля $S = S(t)$, принимая во внимание, что сила сопротивления воды постоянна и равна R . В начальный момент $S_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Вариант 11

В момент прекращения работы двигателей корабль водоизмещением P имел скорость V_0 . Определить уравнение последующего прямолинейного движения $S = S(t)$, если сила сопротивления $R = c + kV$, где c и k – постоянные величины, V – скорость корабля.

Вариант 12

Шар весом P падает без начальной скорости, испытывая сопротивление среды $R = kV$, где k – постоянная величина, V – скорость шара. Найти закон движения шара.

Вариант 13

Принимая, что сила сопротивления воздуха в свободном горизонтальном полете планера изменяется по закону $R = kmV$, где k – постоянный коэффициент, m – масса планера, V – его скорость, найти закон движения планера $x = x(t)$. Считать, что при $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = V_0$.

Вариант 14

Тело массой m движется по горизонтальной прямой из состояния покоя под действием постоянной силы F . Определить уравнение движения, зная, что суммарное сопротивление движению $R = kV$, где k – постоянная величина, V – скорость тела.

Вариант 15

Определить уравнение горизонтального движения самолета весом P , считая, что горизонтальная составляющая силы тяги мотора постоянна и равна Q , а суммарное сопротивление движению $R = kV$, где k – постоянный коэффициент, V – скорость самолета. Считать, что при $t = 0$, $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Варианты 16, 17

Таблица Д1.3

№ вар.	Дано
16	$R = km\sqrt{V}$
17	$R = km\sqrt[3]{V}$

Материальная точка движется вдоль горизонтальной оси x . Сила сопротивления движению $R = f(V)$ (см. табл. Д1.3, где k – постоянный коэффициент, m – масса точки, V – скорость точки). Найти уравнение движения точки, если при $t = 0$ $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Вариант 18

Тело, находящееся на гладкой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, в некоторый момент начинает скользить вниз с начальной скоростью V_0 . Найти уравнение движения тела, если сила сопротивле-

ния $R = k m V$, где k – постоянный коэффициент, m – масса тела, V – скорость тела.

Варианты 19–22

Материальная точка массой m поднимается по оси x , наклоненной под углом α к горизонту, под действием силы, проекция которой на ось x задана (см. табл. Д1.4, где A и k – постоянные величины, t – время движения). Найти уравнение движения точки, зная, что ее начальная скорость равна нулю.

Таблица Д1.4

№ вар.	Дано
19	$F_x = A \sin kt$
20	$F_x = A \cos kt$
21	$F_x = A (1 - t)$
22	$F_x = kt$

Вариант 23

Материальная точка движется по горизонтальной оси x под действием силы отталкивания от начала координат O , изменяющейся по закону $F = k^2 m x$, где k – постоянный коэффициент, m – масса точки, x – координата точки. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Вариант 24

Материальная точка движется по горизонтальной оси x под действием силы отталкивания от начала координат O , изменяющейся по закону $F = k^2 m x$, где k – постоянный коэффициент, m – масса точки, x – координата точки и постоянной силы трения $R = k m V_0$. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент $X_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Вариант 25

Телу, находящемуся на поверхности Земли, сообщена начальная вертикальная скорость $V_0 = \sqrt{2gR}$, где g – ускорение свободного падения, R – радиус Земли. На тело действует сила притяжения Земли, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния тела до центра Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти уравнение движения тела $y = y(t)$, принимая за начало координат центр Земли.

Вариант 26

Материальная точка движется по горизонтальной оси x под действием силы притяжения к началу координат O , изменяющейся по закону $F = m x^{-3}$, где m – масса точки, x – ее координата. Определить закон движения точки, если в начальный момент $X_0 = k$, $V_0 = 1/k$.

Варианты 27, 28

Частица массой m , несущая заряд e электричества, влетает в однородное электрическое поле со скоростью V_0 , совпадающей по направлению с напряженностью поля E . Закон изменения

Таблица Д1.5

№ вар.	Дано
27	$E = A \cos kt$
28	$E = A \sin kt$

величины E дан в табл. Д1.5, где A и k – постоянные величины, t – время. Найти уравнение движения частицы, если в поле на нее действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Влиянием силы тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат.

Вариант 29

При движении тела весом P вдоль горизонтальной оси x в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $R = k(V^2/x)$, где k – постоянный коэффициент, V – скорость тела, x – его координата. В начальный момент $X_0 = a$, $V_0 = V_0$. Определить скорость тела в положении, когда координата x равна $2a$.

Варианты 30, 31

Таблица Д1.6

№ вар.	Дано
30	$R = k P V$
31	$R = k^2 P V^2$

Телу весом P сообщена вертикально вверх начальная скорость. Сила сопротивления движению $R = f(V)$ задана (см. табл. Д1.6, где k – постоянный коэффициент). Найти время T и высоту H наибольшего подъема тела.

Варианты 32–36

Таблица Д1.7

№ вар.	Дано
32	$R = mk\sqrt{V}$
33	$R = mk(1 + V)$
34	$R = mk^2(1 + V^2)$
35	$R = mk^3\sqrt{V}$
36	$R = mk\sqrt{1 + V}$

Материальная точка массой m , которой сообщена начальная скорость V_0 , движется по горизонтальной прямой в среде, сила сопротивления среды равна $R = f(V)$ (см. табл. Д1.7, где k – постоянный коэффициент). Определить время T , прошедшее от начала движения точки до остановки, и путь S , пройденный точкой.

Вариант 37

Определить скорость V_0 , которую нужно сообщить по вертикали вверх телу весом P , находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту H . Сила сопротивления воздуха $R = k^2 P V^2$, где k – постоянный коэффициент.

Варианты 38–40

Точка массой m движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды. Сила сопротивления среды $R = f(V)$ (табл. Д1.8, где k – постоянный коэффициент). Какую начальную скорость следует сообщить точке, чтобы она прошла путь, равный S ?

Таблица Д1.8

№ вар.	Дано
38	$R = mk\sqrt{V}$
39	$R = mk(1 + V^2)$
40	$R = mk^3\sqrt{V}$

Варианты 41–45

Точка массой m движется по горизонтальной прямой с начальной скоростью V_0 , испытывая сопротивление среды. Сила сопротивления среды $R = f(V)$ (см. табл. Д1.9, где k – постоянный коэффициент). Какое расстояние S пройдет точка, прежде чем ее скорость уменьшится в два раза? За какое время T точка пройдет это расстояние?

Таблица Д1.9

№ вар.	Дано
41	$R = mk\sqrt{1 + V}$
42	$R = mk(1 + V)$
43	$R = mk\sqrt{V}$
44	$R = mk^3\sqrt{V}$
45	$R = mk^2(1 + V^2)$

Варианты 46, 47

Тело весом P падает в среде без начальной скорости. Сопротивление $R = f(V)$ (табл. Д1.10, где k – постоянный коэффициент). Найти скорость V точки по истечении времени T после начала падения, а также ее максимальную скорость.

Таблица Д1.10

№ вар.	Дано
46	$R = k^2 P V^2$
47	$R = k P V$

Варианты 48–50

Точка массой m начинает двигаться по горизонтальной оси X без начальной скорости из положения $X_0 = a$ под действием силы притяжения к началу координат $F = f(X)$ (табл. Д1.11, где k – постоянный коэффициент). Найти момент времени T , когда точка окажется в положении $X_1 = \frac{1}{2} a$. Определить скорость V точки в этом положении.

Таблица Д1.11

№ вар.	Дано
48	$F = km/X^3$
49	$F = km/X^2$
50	$F = kmX$

Варианты 51–54

Таблица Д1.12

№ вар.	Дано
51	$F = kP(1 + y)$
52	$F = kP(1 + y)^{-1}$
53	$F = kP(1 + y)^{-2}$
54	$F = kP(1 + y)^{-3}$

Точка весом P движется вертикально вверх по оси y под действием силы отталкивания от начала координат $F = f(y)$ (табл. Д1.12, где k – постоянный коэффициент). В начальный момент $y_0 = 0$, $V_0 = 0$. Определить зависимость между скоростью точки в данный момент и ее координатой.

Варианты 55–58

Таблица Д1.13

№ вар.	Дано
55	$F = F_0 \cos kt$
56	$F = F_0 \sin kt$
57	$F = F_0 + kt$
58	$F = F_0 e^{-t}$

Материальная точка массой m движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось $F = f(t)$ (табл. Д1.13, где F_0 , k – постоянные величины).

Определить скорость и положение точки через t , с, после начала движения, если в начальный момент $X_0 = 0$, $V_0 = V_0$.

Варианты 59, 60

Таблица Д1.14

№ вар.	Дано
59	$F_x = kP(1 - t)$
60	$F_x = kP(1 - t^2)$

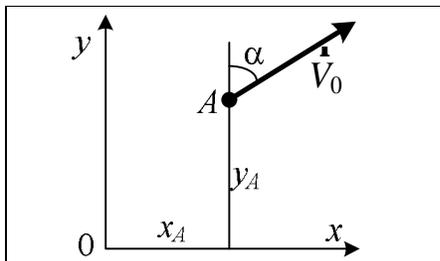
Материальная точка весом P движется по горизонтальной оси x под действием силы, проекция которой на эту ось $F_x = f(t)$ (табл. Д1.14, где k – постоянный коэффициент). Определить положение точки в момент остановки, если в начальный момент $x_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Варианты 61–63

Из орудия, находящегося в точке A , произведен выстрел под углом α (табл. Д1.15) к вертикали с начальной скоростью V_0 . Считая, что полет снаряда происходит в плоскости xu и на него действует только сила тяжести, найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ снаряда.

Таблица Д1.15

№ вар.	Дано		
	X_A	Y_A	α
61	0	0	$0 < \alpha < \pi/2$
62	S	h	$\pi/2$
63	0	h	$3/4 \pi$



Вариант 64

В условиях варианта 61 найти уравнения движения снаряда и дальность обстрела L .

Вариант 65

В условиях варианта 61 найти уравнения движения снаряда и определить, при каком угле α^* будет наибольшая дальность обстрела.

Вариант 66

В условиях варианта 61 найти уравнения движения и наибольшую высоту H траектории снаряда.

Вариант 67

С самолета, летящего по прямолинейному участку траектории под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, сброшен груз без начальной относительной скорости. Считая, что при сбрасывании груза самолет находился на высоте h над землей в точке A и имел скорость V_0 , найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ груза, если груз движется в плоскости xu под действием только силы тяжести.

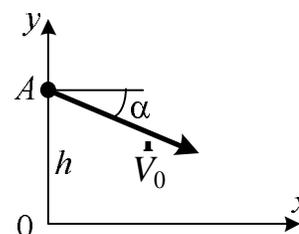


Рис. Д1.7

Вариант 68

В условиях варианта 67 при $\alpha = 0$ найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ груза.

Вариант 69

В условиях варианта 67 при $\alpha = 0$ найти уравнения движения груза и определить, какое расстояние L по горизонтали пролетит груз до падения на землю.

Варианты 70, 71

Тяжелое тело скользит по наклонной плоскости xu , образующей угол 30° с горизонтальной поверхностью. Найти уравнения движения и траекторию $x = f(y)$ тела, если оно стало двигаться из точки A ($S; h$) с начальной скоростью V_0 , образующей угол α (табл. Д1.16) с осью u . Трение и сопротивление воздуха не учитывать.

Таблица Д1.16

№ вар.	Дано	
	α	
70	0	
71	$\pi/4$	

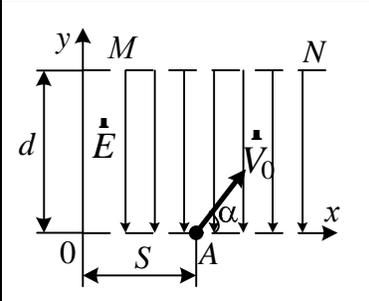
Вариант 72

В условиях варианта 70 найти уравнения движения тела и определить, через сколько времени T тело достигнет края MN наклонной плоскости, если $OM = 2S$ (ширина плоскости b достаточно большая).

Варианты 73, 74

Частица массой m , несущая заряд отрицательного электричества e , влетает в точке $A(S; 0)$ в однородное электрическое поле плоского конденсатора

Таблица Д1.17

	№	Дано
	вар.	α
	73	$\pi/3$
	74	0

напряженностью E со скоростью V_0 под углом α (табл. Д1.17) к оси x . Вектор \vec{E} напряженности поля направлен противоположно оси y . Найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует $\vec{F} = -e\vec{E}$ сила. Действием силы тяжести пренебречь.

Вариант 75

В условиях варианта 74 найти уравнения движения частицы и определить координату x^* точки, в которой частица попадет на обкладку конденсатора, если расстояние между обкладками равно d .

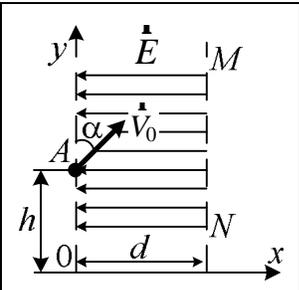
Вариант 76

В условиях варианта 73 для случая, когда вектор \vec{E} совпадает по направлению с осью y , найти уравнения движения частицы и определить расстояние d между обкладками конденсатора, при котором частица не достигнет обкладки MN .

Варианты 77–80

Тяжелая частица массой m , несущая заряд отрицательного электричества e , влетает в точке $A(0; h)$ в однородное электрическое поле плоского конденсатора

Таблица Д1.18

	№	Дано
	вар.	α
	77	$\pi/2$
	78	$0 < \alpha < \pi/2$
	79	$3/4 \pi$
	80	0

напряженностью E со скоростью V_0 под углом α (табл. Д1.18) к оси y . Вектор \vec{E} напряженности поля направлен противоположно оси x . Найти уравнения движения частицы в плоскости xu под действием силы тяжести, направленной противоположно оси y , и силы поля $\vec{F} = -e\vec{E}$.

Вариант 81

В условиях варианта 80 найти уравнения движения частицы и определить координату y^* точки, в которой частица попадет на обкладку MN конденсатора, если расстояние между обкладками равно d .

Вариант 82

В условиях варианта 77 для случая, когда вектор \vec{E} совпадает с направлением оси x , найти уравнения движения частицы и определить на каком расстоянии L от точки A частица пересечет ось y .

Варианты 83, 84

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xu под действием двух сил: силы отталкивания F от начала координат O и силы притяжения F_1 к неподвижному центру A с координатами $(l; 0)$. Величины сил пропорциональны расстояниям точки от этих центров, коэффициент пропорциональности – к m . Найти уравнения движения и траекторию $x = f(y)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.19.

Таблица Д1.19

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	α_0	β_0
83	0	h	0	V_0
84	0	0	α	β

Варианты 85, 86

Частица массой m , несущая заряд отрицательного электричества e , влетает в однородное электрическое поле с переменной напряженностью $E = E(t)$ (табл. Д1.20, где A и k – постоянные величины) со скоростью \vec{V}_0 , перпендикулярной \vec{E} . Пренебрегая действием силы тяжести, найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ частицы в поле, если на нее действует сила поля $\vec{F} = -e\vec{E}$. Начало координат взять в начальном положении точки, ось y направить по направлению \vec{E} , ось x – по направлению V_0 .

Таблица Д1.20

№ вар.	Дано
85	$E = A \cos kt$
86	$E = A \sin kt$

Варианты 87, 88

При перемещении заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле на нее действует сила тяжести и горизонтальная сила поля $F = F(t)$ (табл. Д1.21, где A и k – постоянные величины). Найти уравнения движения и траекторию $x = f(y)$ частицы, считая, что при

Таблица Д1.21

№ вар.	Дано
87	$E = A \cos kt$
88	$E = A \sin kt$

вступлении в поле частица имела горизонтальную скорость V_0 , направленную в сторону действия силы \vec{F} . Начало координат взять в начальном положении частицы, ось x направить по V_0 , ось y – вертикально вниз.

Варианты 89, 90

Таблица Д1.22

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_y
89	0	h	V_0	0
90	1	0	0	V_0

$y = f(x)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.22.

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xu под действием сил притяжения к двум центрам A и B с координатами: $A (-a; 0)$, $B (a; 0)$. Величины сил пропорциональны расстояниям точки от этих центров, коэффициент пропорциональности – $k^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию

Варианты 91, 92

Таблица Д1.23

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_y
91	0	h	V_0	0
92	1	0	0	V_0

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xu под действием силы притяжения к началу координат O . Величина силы пропорциональна расстоянию точки от начала координат. Коэффициент пропорциональности – $k^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.23.

Варианты 93, 94

Таблица Д1.24

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_y
93	0	h	V_0	0
94	1	0	0	V_0

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xu под действием силы отталкивания от начала координат O . Величина силы пропорциональна расстоянию точки от начала координат. Коэффициент пропорциональности – $k^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.24.

Варианты 95, 96

Таблица Д1.25

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_y
95	1	0	0	0
96	0	0	V_0	V_0

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xu под действием силы тяжести и силы притяжения к началу координат O , изменяющейся по закону $F = -k^2 m \vec{r}$, где k – постоянный коэффициент, \vec{r} – радиус-вектор точки. Найти уравнения движения и траекто-

рию $y = f(x)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.25. Ось y направлена по вертикали вниз.

Варианты 97, 98

Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости xu под действием силы тяжести и силы отталкивания от начала координат O , изменяющейся по закону $F = -k^2 m \bar{r}$, где k – постоянный коэффициент, \bar{r} – радиус-вектор точки. Найти уравнения движения и траекторию $y = f(x)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.26. Ось y направлена вертикально вниз.

Таблица Д1.26

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_0
97	0	0	V_0	0
98	1	0	0	0

Варианты 99, 100

Материальная точка массой m движется в горизонтальной плоскости xu под действием силы притяжения к оси y . Сила перпендикулярна к этой оси, ее величина пропорциональна расстоянию точки от оси, коэффициент пропорциональности – $k^2 m$. Найти уравнения движения и траекторию $x = f(y)$ точки. Начальные условия даны в табл. Д1.27.

Таблица Д1.26

№ вар.	Дано			
	x_0	y_0	\mathcal{E}_0	\mathcal{E}_0
99	L	h	0	V_0
100	0	0	α	β

3.4. Общее уравнение динамики

Формулировка принципа: при движении механической системы с идеальными связями сумма работ всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю.

Это положение носит также название общего уравнения динамики системы.

Как и принцип возможных перемещений, общее уравнение динамики может быть записано в различных формах:

$$\sum F_k^a \cdot \delta S_k \cos(\bar{F}_k^a \wedge \delta \bar{S}_k) + \sum F_k^{ин} \cdot \delta S_k \cos(\bar{F}_k^{ин} \wedge \delta \bar{S}_k) = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum [(F_{kx}^a + F_{kx}^{ин}) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^{ин}) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^{ин}) \delta z_k] = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum (M_k^a \cdot \delta \varphi_k) + \sum (M_k^{ин} \cdot \delta \varphi_k) = 0. \quad (3.6)$$

Общее уравнение динамики дает универсальный метод исследования движения механических систем.

Методика решения задач с помощью общего уравнения динамики для систем с одной степенью свободы.

- Убедитесь в том, что система имеет одну степень свободы.
- Изобразите на расчетной схеме все активные силы и силы инерции.
- Модули всех сил инерции системы выразите через ускорение одной точки, используя кинематические особенности системы.
- Задайте возможное перемещение системы, указав векторы возможных перемещений точек, в которых приложены активные силы и силы инерции, а также угловые перемещения тел, к которым приложены пары сил.
- Вычислите сумму работ активных сил и сил инерции на заданных возможных перемещениях, составьте общее уравнение динамики в форме (3.4) или (3.6).
- Если для решения задачи используется общее уравнение динамики в форме (3.5), то предыдущий пункт можно не выполнять.
- Выразите возможные перемещения, входящие в составленное общее уравнение динамики, через одно независимое возможное перемещение, используя кинематические зависимости.
- Найдите искомую величину, при определении закона движения полученное уравнение проинтегрируйте, исключая, как общий множитель, независимое возможное перемещение из общего уравнения динамики.

Применение общего уравнения динамики для исследования движения систем с двумя степенями свободы. Методика решения таких задач разбивается на два последовательно выполняемых этапа; на каждом этапе у системы оставляют только одну степень свободы и составляют общее уравнение динамики в последовательности, указанной выше; совместное решение полученных уравнений позволит найти искомые величины.

Перед выполнением первого этапа рекомендуется определить силы инерции для всех тел и точек системы, выразив их модули через независимые ускорения, число независимых ускорений равно числу степеней свободы системы.

3.5. Уравнения Лагранжа

Уравнения Лагранжа представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Обобщенные координаты – независимые между собою величины, однозначно определяющие положение системы. Число обобщенных координат голономной системы (ниже рассматриваются только такие системы) равно числу ее степеней свободы.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.7)$$

где n – число степеней свободы системы; q_i – обобщенные координаты; \dot{q}_i – обобщенные скорости; Q_i – обобщенные силы; T – кинетическая энергия системы.

Кинетическую энергию системы со стационарными связями (ниже рассматриваются системы именно с такими связями) целесообразно до подстановки в уравнения (3.7) представить в виде функций обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$T = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n). \quad (3.8)$$

Чтобы применять уравнения Лагранжа для исследования движения системы, нужно уметь:

- устанавливать число степеней свободы системы;
- выбирать ее обобщенные координаты;
- определять обобщенные силы;
- составлять выражение кинетической энергии системы в обобщенных координатах.

Выполнение этих операций будем рассматривать на следующих трех примерах.

1. Определение числа степеней свободы системы.

Числом степеней свободы системы называется число независимых возможных перемещений. Число степеней свободы системы определяют следующим образом. Вначале у системы исключают одну степень свободы (для этого закрепляют точку, движущуюся по заданной линии, или закрепляют вращающееся тело). Если после этого подвижность системы будет полностью устранена, значит, у системы одна степень свободы. Если же подвижность сохранится, то исключают еще одну степень свободы. И так далее до полной остановки системы. Число таких исключений равно числу степеней свободы системы.

Учитывая сказанное, легко убедиться, что система на рис. Д2.4 имеет одну степень свободы, а системы на рис. Д2.3 и Д2.9 – две степени свободы.

Иногда в соответствии с условием задачи некоторые возможные перемещения системы в расчет не принимаются. Так, в примерах Д2.1–Д2.4 горизонтальные возможные перемещения точек A и D не учитываются, так как по условию задачи эти точки движутся по вертикальным прямым.

2. Выбор и определение обобщенных координат.

В качестве обобщенных координат обычно выбирают углы поворота тел системы или координаты ее точек. Начало и положительное направление отсчета каждой обобщенной координаты рекомендуется выбирать так, чтобы в процессе движения эти координаты возрастали. Если система имеет положение статического равновесия, то начало отсчета рекомендуется выбирать так, чтобы в положении статического равновесия все обобщенные координаты системы были равны нулю.

Во многих случаях выбор обобщенных координат определяется условием задачи. Если в задаче нужно найти ускорение некоторой точки, движущейся вдоль оси x , то в качестве обобщенной координаты следует взять координату x этой точки, т. е. $q = x$, тогда искомое ускорение $a = \ddot{q}$. Если же в задаче требуется найти угловое ускорение тела, вращающегося вокруг оси, то в качестве обобщенной координаты следует взять угол φ поворота тела вокруг этой оси, тогда искомое угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$.

Для системы с одной степенью свободы обобщенной силой, соответствующей обобщенной координате q , называют величину

$$Q = \frac{\sum \delta A_k}{\delta q}, \quad (3.9)$$

где δq – приращение обобщенной координаты; $\sum \delta A_k$ – сумма элементарных работ сил системы на ее возможном перемещении.

Напомним, что сумма работ сил реакций идеальных связей системы на любом ее возможном перемещении равна нулю. Поэтому для системы с идеальными связями в выражении $\sum \delta A_k$ следует учитывать только работу активных сил системы. Если же связи не идеальны, то силы реакций их, например, силы трения, условно считаются активными силами.

Чтобы можно было по формуле (3.9) определить обобщенную силу, надо в $\sum \delta A_k$ выразить возможные перемещения тел и точек через приращение обобщенной координаты δq .

Определение обобщенной силы Q , соответствующей выбранной обобщенной координате q , рекомендуется производить в следующем порядке:

- изобразить на расчетной схеме все активные силы системы;
- дать приращение обобщенной координате $\delta q > 0$ и показать на чертеже соответствующие возможные перемещения всех точек, в которых приложены силы, и возможные угловые перемещения всех тел, к которым приложены моменты сил;

– составить выражение элементарной работы $\sum \delta A_k$ всех активных сил системы на этих перемещениях, возможные перемещения в $\sum \delta A_k$ выразить через δq ;

– определить обобщенную силу по формуле (3.9).

3. *Выражение кинетической энергии системы в обобщенных координатах.*

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий ее объектов. Чтобы получить значение T , следует скорости всех объектов системы выразить через обобщенные скорости, используя методы кинематики. При этом система рассматривается в произвольном положении и все ее обобщенные скорости считаются положительными, т. е. направленными в сторону возрастания обобщенной координаты.

4. *Составление уравнений Лагранжа.*

Чтобы получить уравнения Лагранжа, нужно подставить найденные ранее выражения кинетической энергии системы в обобщенных координатах и обобщенные силы Q_1, Q_2, \dots, Q_n в формулу (3.7).

При нахождении частных производных T по обобщенным координатам $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ и обобщенным скоростям $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ следует иметь в виду, что переменные $q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ считаются независимыми между собой. Это значит, определяя частную производную T по одной из этих переменных, все остальные переменные рассматриваем как постоянные.

При определении $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ следует дифференцировать по времени все входящие в $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ переменные величины.

Уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ составляются для каждой обобщенной координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) системы.

5. *Методика решения задач с помощью уравнений Лагранжа.*

• Изобразить систему в произвольном положении и показать действующие на нее активные силы.

• Установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты.

• Составить выражение кинетической энергии системы в обобщенных координатах.

• Определить обобщенные силы системы.

- Составить уравнения Лагранжа для каждой обобщенной координаты.
- Решить полученную систему дифференциальных уравнений, определить искомые величины.

Замечания.

1. Если система дифференциальных уравнений не интегрируется в элементарных функциях, то решение задачи в данном пособии заканчивается составлением уравнений Лагранжа.

2. Если по условию задачи требуется определить обобщенные ускорения $\ddot{\Phi}$, то система дифференциальных уравнений решается как алгебраическая.

Пример Д2.1

Груз A весом P посредством нити, переброшенной через блок B , приводит в движение каток C , который катится без проскальзывания по наклонной плоскости (рис. Д2.1). Определить ускорение груза A , считая каток и блок дисками одинакового веса Q и радиуса r . Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α .

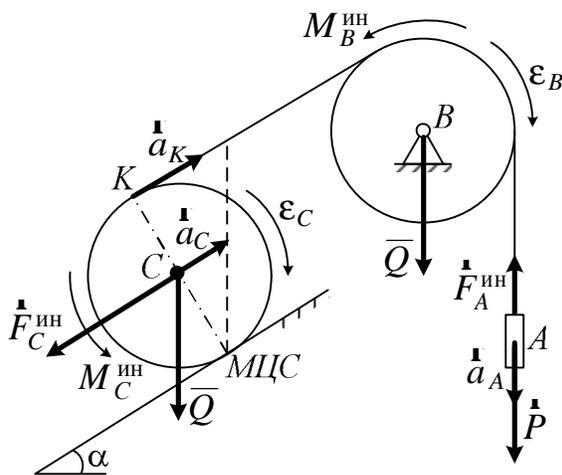


Рис. Д2.1

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как закрепление груза A ведет к остановке всей системы.

Решение

Активные силы – силы тяжести груза A , блока B и катка C . Сила инерции груза A направлена вертикально вверх – в сторону, противоположную ускорению груза. Силы инерции вращающегося блока приводят к результирующей паре, момент которой $M_B^{\text{ин}}$ направлен в сторону, противоположную ускорению блока. Силы инерции катка C , совершающего плоскопараллельное движение, приводятся к главному вектору $F_C^{\text{ин}}$ и к главному моменту $M_C^{\text{ин}}$.

Выразим все силы инерции и моменты сил инерции через интересующее нас ускорение груза A . Имеем

$$F_A^{\text{ин}} = \frac{P}{g} a_A, \quad M_B^{\text{ин}} = J_B \cdot \epsilon_B,$$

где $J_B = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2$ – момент инерции блока B относительно оси вращения;

$\varepsilon_B = \frac{a_A}{r}$ – угловое ускорение блока.

В результате
$$M_B^{\text{ин}} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r \cdot a_A.$$

Далее имеем
$$F_C^{\text{ин}} = \frac{Q}{g} a_C; \quad M_C^{\text{ин}} = J_C \cdot \varepsilon_C,$$

где $J_C = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2$ – момент инерции катка относительно оси, проходящей

через центр масс C ; $a_C = \frac{a_A}{2}$ – ускорение центра масс катка C ;

$\varepsilon_C = \frac{a_C}{r} = \frac{a_A}{2r}$ – угловое ускорение катка C .

При определении a_C и ε_C учитывалось, что точка касания катка с поверхностью является мгновенным центром скоростей.

В результате
$$F_C^{\text{ин}} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{a_A}{2}; \quad M_C^{\text{ин}} = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} r \cdot a_A.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз A получит бесконечно малое перемещение $\delta \bar{S}_A$ (рис. Д2.2), направленное по вертикали вниз. При этом центр масс катка получит перемещение $\delta \bar{S}_C$ вдоль наклонной плоскости, а каток повернется на некоторый угол $\delta \varphi_C$, в то же время блок повернется на некоторый угол $\delta \varphi_B$.

Общее уравнение динамики системы согласно формулам (3.4) и (3.6) запишется в виде

$$P \cdot \delta S_A - F_A^{\text{ин}} \cdot \delta S_A - M_B^{\text{ин}} \delta \varphi_B - Q \sin \alpha \cdot \delta S_C - F_C^{\text{ин}} \cdot \delta S_C - M_C^{\text{ин}} \delta \varphi_C = 0. \quad (\text{a})$$

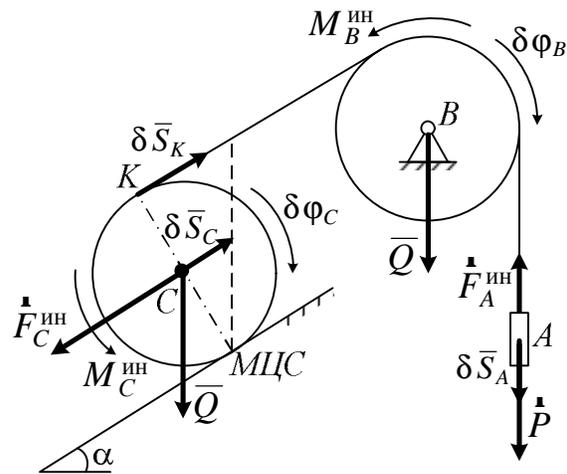


Рис. Д2.2

Выразим возможное перемещение блока B и катка C через δS_A :

$$\delta \varphi_B = \frac{\delta S_A}{r}.$$

Точка K катка имеет возможное перемещение, равное перемещению груза A , т. е. $\delta S_K = \delta S_A$. Далее имеем

$$\delta S_C = \frac{\delta S_K}{2} = \frac{\delta S_A}{2}, \quad \delta \varphi_C = \frac{\delta S_C}{r} = \frac{\delta S_A}{2r}.$$

Подставляя в уравнение (а) полученные результаты, будем иметь

$$P \cdot \delta S_A - \frac{P}{g} a_A \cdot \delta S_A - \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r \cdot a_A \frac{\delta S_A}{r} - Q \sin \alpha \cdot \frac{\delta S_A}{2} - \frac{Q}{g} \cdot \frac{a_A}{2} \frac{\delta S_A}{2} - \frac{1}{4} \frac{Q}{g} r \cdot a_A \frac{\delta S_A}{2r} = 0.$$

Исключив возможное перемещение δS_A из этого уравнения, после преобразований нашли искомое ускорение.

Пример Д2.2

Цилиндр B (рис. Д2.3) весом P и радиусом r , скатываясь по наклонной плоскости призмы A , приводит ее в движение по гладкому полу. Вес призмы равен Q . Определить ускорение призмы и ускорение центра B цилиндра относительно призмы, считая, что проскальзывание между цилиндром и призмой отсутствует.

Решение

Система на рис. Д2.3 имеет две степени свободы, так как для полной остановки надо закрепить призму A и остановить движение центра B цилиндра относительно призмы A . В связи с этим решение задачи будет состоять из двух этапов.

Найдем силы инерции призмы и цилиндра B , выразив их модули через ускорение призмы a_1 и ускорение a_2 центра B цилиндра относительно призмы. Будем считать, что \bar{a}_1 направлено вправо, \bar{a}_2 – вниз по наклонной плоскости.

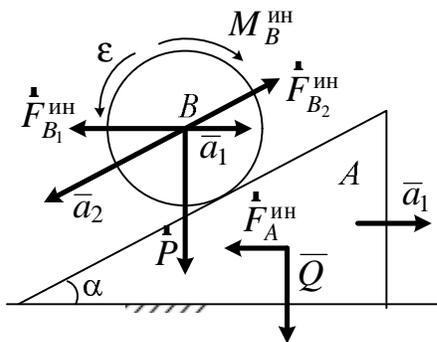


Рис. Д2.3

Силы инерции поступательно движущейся призмы приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс призмы и равной $F_A^{ин} = \frac{Q}{g} \cdot a_1$.

Силы инерции цилиндра B , совершающего плоскопараллельное движение, приводятся к главному вектору и к главному моменту. Главный вектор сил инерции должен быть направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс B . Учитывая, что это ускорение складывается из переносного (равного \bar{a}_1) и относительного (равного \bar{a}_2) ускорений, главный вектор сил инерции цилиндра разложим на две составляющие $\bar{F}_{B1}^{ин}$ и $\bar{F}_{B2}^{ин}$ (рис. Д2.3), их модули – $\bar{F}_{B1}^{ин} = \frac{P}{g} a_1$ и $\bar{F}_{B2}^{ин} = \frac{P}{g} a_2$. Главный момент сил инерции цилиндра $M_B^{ин}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε цилиндра, его модуль

$$M_B^{ин} = J_B \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \cdot \frac{a_2}{r},$$

где J_B – момент инерции однородного цилиндра относительно оси, проходящей через центр B перпендикулярно плоскости чертежа.

1-й этап решения. Закрепим центр B цилиндра так, чтобы он не мог перемещаться относительно призмы A . Тогда у системы (рис. Д2.4) останется только одна степень свободы. Система на рис. Д2.4 имеет одну степень свободы, так как закрепление призмы ведет к полной остановке всей системы.

Активными силами являются силы тяжести и силы инерции, которые без изменения перенесены со схемы на рис. Д2.3.

Дадим призме A возможное перемещение $\delta \bar{S}_A$; все точки системы на рис. Д2.4 будут иметь перемещения, равные $\delta \bar{S}_A$.

Общее уравнение динамики в формуле (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} -F_A^{ин} \cdot \delta S_A - F_{B1}^{ин} \cdot \delta S_B + \\ + F_{B2}^{ин} \cos \alpha \cdot \delta S_B = 0, \end{aligned} \quad (a)$$

где $\delta S_B = \delta S_A$.

После исключения общего множителя δS_A и подстановки полученных выражений для модулей сил инерции уравнение (a) принимает вид

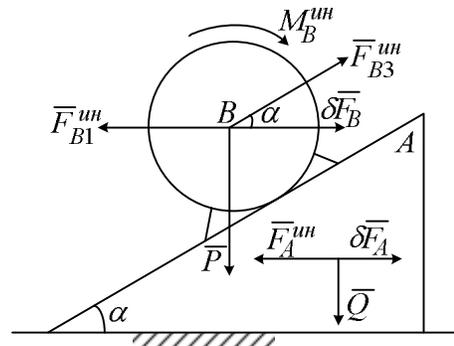


Рис. Д2.4

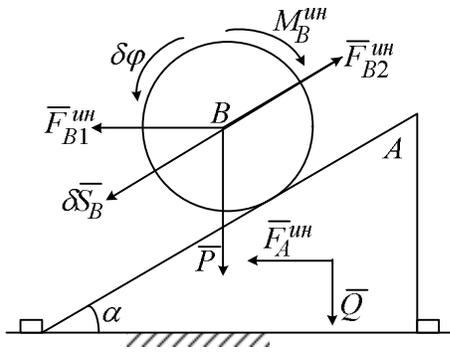


Рис. Д2.5

$$\frac{Q}{g} a_1 - \frac{P}{g} a_1 + \frac{P}{g} a_2 \cos \alpha = 0.$$

2-й этап решения. Закрепим в системе на рис. Д2.5 призму A , исключая одну степень свободы. Далее решение будем выполнять по предыдущей методике.

Система на рис. Д2.5 имеет одну степень свободы, так как закрепление точки B ведет к полной остановке системы.

Активные силы и силы инерции перенесены без изменения со схемы на рис. Д2.3.

Дадим точке B возможное перемещение $\delta \bar{S}_B$ вниз по наклонной плоскости, при этом цилиндр повернется на угол $\delta \varphi$.

Общее уравнение динамики согласно (3.4) и (3.6) имеет вид

$$P \cdot \delta S_B \sin \alpha - F_{B2}^{ин} \cdot \delta S_B + F_{B1}^{ин} \cos \alpha \cdot \delta S_B - M_B^{ин} \cdot \delta \varphi = 0.$$

Учтем, что
$$\delta \varphi = \frac{\delta S_B}{r}.$$

После исключения δS_B и подстановки выражений для модулей сил инерции уравнение принимает вид

$$P \sin \alpha - \frac{3P}{2g} a_2 + \frac{P}{g} \cos \alpha = 0.$$

Решая совместно данные уравнения, получим

$$a_1 = P \sin \alpha \cdot g [3(P+Q) - 2P \cos^2 \alpha]^{-1};$$

$$a_2 = 2(P+Q) \sin \alpha \cdot g [3(P+Q) - 2P \cos^2 \alpha]^{-1};$$

$$a_A = \left(P - \frac{1}{2} Q \sin \alpha \right) \cdot g \cdot \left(P + \frac{7}{8} Q \right)^{-1}.$$

Пример Д2.3

Система на рис. Д2.6 состоит из груза A , ступенчатого барабана B и катушки C . Постоянный момент $M = 12Pr$ вращает барабан B , наматывая на него два троса, поднимающих груз A и катушку C , катящуюся без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α .

Вес груза A равен $5P$, вес барабана B равен P , $R = 2r$. Радиус инерции барабана B относительно его оси вращения r . Вес катушки C равен $2P$, радиус инерции катушки относительно оси ее симметрии $\sqrt{2}r$.

Пренебрегая весом тросов и сопротивлением движению, определить угловое ускорение барабана B .

Решение

На систему (рис. Д2.6) действуют активные силы: P_A, P_B, P_C и момент M .

Система имеет одну степень свободы, так как закрепление точки A , движущейся по прямой, ведет к остановке всей системы. За обобщенную координату возьмем угол ϕ поворота барабана B .

Определим кинетическую энергию системы:

$$T = T_A + T_B + T_C;$$

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2}, \quad T_C = \frac{m_C V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Выразим $V_A, \omega_B, \omega_C, V_C$ через ϕ (рис. Д2.7): $\omega_B = \dot{\phi}$, $V_A = \dot{\phi} \cdot r$, $V_k = 2V_A = 2\dot{\phi} \cdot r$. Мгновенный центр скоростей катушки находится в точке L , поэтому

$$\omega_C = \frac{V_k}{KL} = \frac{2}{3} \dot{\phi}$$

$$V_C = \omega_C \cdot CL = \frac{4}{3} \dot{\phi} \cdot r.$$

Подставив эти данные в T и учитывая, что

$$m_A = \frac{5P}{g}, \quad J_B = \frac{P}{g} r^2,$$

$$m_C = \frac{2P}{g}, \quad J_C = \frac{4P}{g} r^2,$$

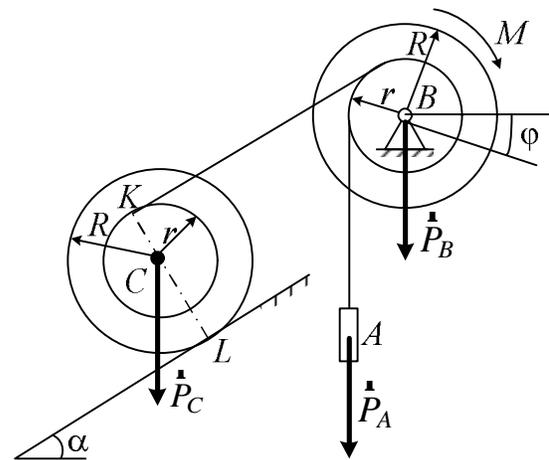


Рис. Д2.6

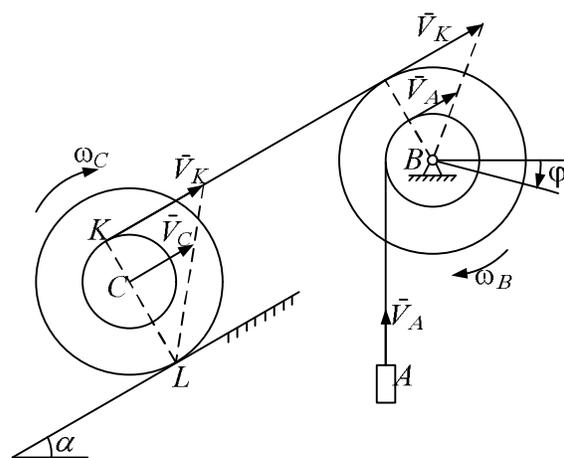


Рис. Д2.7

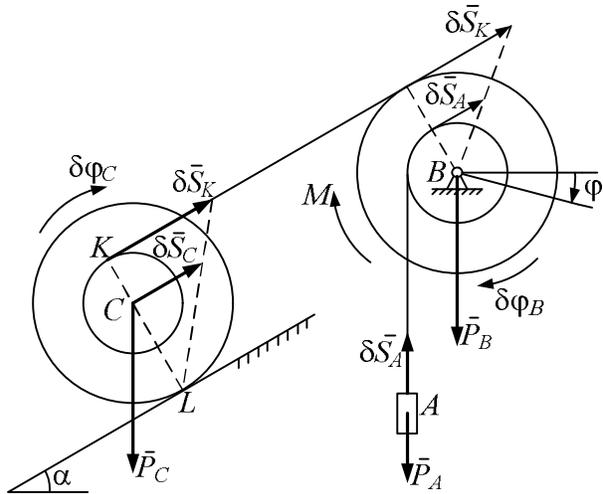


Рис. Д2.8

после преобразований получим

$$T = \frac{17}{3} \cdot \frac{P}{g} r^2 \cdot \ddot{\varphi}^2.$$

Определим обобщенную силу Q . Приращение $\delta\varphi_B$ и соответствующие возможные перемещения объектов системы показаны на рис. Д2.8. Обратите внимание на аналогию между картиной скоростей системы (рис. Д2.7) и картиной возможных перемещений (рис. Д2.8).

Составим выражение суммы работ активных сил на возможных перемещениях:

$$\sum \delta A_k = M \cdot \delta\varphi - P_A \cdot \delta S_A - P_C \cos(90 - \alpha) \cdot \delta S_C.$$

Из рис. Д2.8 видно, что

$$\delta S_A = \delta\varphi \cdot r, \quad \delta S_C = \frac{3}{2} \delta S_k = \frac{4}{3} \delta\varphi \cdot r.$$

Подставляя эти результаты в $\sum \delta A_k$ и учитывая заданные величины сил, после преобразований получим

$$\sum \delta A_k = P r \left(7 - \frac{8}{3} \sin \alpha \right) \delta\varphi.$$

Составим уравнение Лагранжа. Вначале найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{34}{3} \frac{P}{g} r^2 \ddot{\varphi}$$

Подставляя эти результаты и Q в уравнение Лагранжа, после преобразований получим угловое ускорение барабана B :

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{g}{r} \cdot \frac{(21 - 8 \sin \alpha)}{34}.$$

Пример Д2.4

Система на рис. Д2.9 состоит из диска D и стержня AB , соединенных шарниром A .

Диск может вращаться относительно горизонтальной оси O , перпендикулярной его плоскости. Сплошной однородный диск D имеет вес P , радиус r . Тонкий однородный стержень AB имеет вес $2P$, длину $4r$. Составить дифференциальные уравнения движения системы под действием сил тяжести. Сопротивлением движению пренебречь.

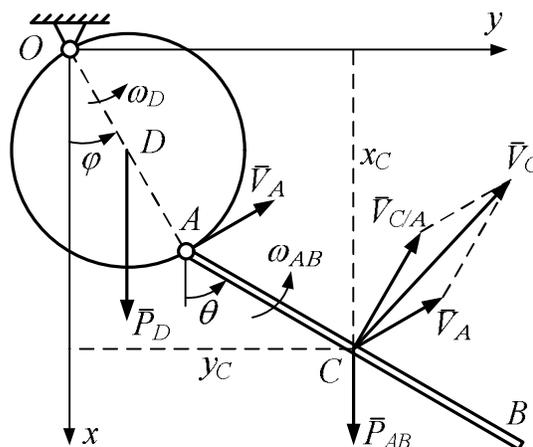


Рис. Д2.9

Решение

Активные силы системы – силы тяжести P_D и P_{AB} .

Для определения числа степеней свободы системы (рис. Д2.9) закрепим вращающийся диск D . После этого стержень AB сможет вращаться вокруг неподвижной оси A . Если закрепить еще и стержень AB , то получим неподвижную систему. Это значит, что система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат системы возьмем углы φ и θ .

Определим кинетическую энергию системы: $T = T_D + T_{AB}$.

$$T_D = \frac{J_D \omega_D^2}{2}, \quad T_{AB} = \frac{m_{AB} V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_{AB}^2}{2}.$$

Выразим ω_{AB} , ω_D и V_C через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$: $\omega_D = \dot{\varphi}$, $\omega_{AB} = \dot{\theta}$; скорость точки C найдем по формуле

$$V_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2},$$

где $x_C = 2r \cos \varphi + 2r \cos \theta$, $y_C = 2r \sin \varphi + 2r \sin \theta$; дифференцируя эти координаты по времени и подставляя результаты в формулу для V_C , получим

$$V_C^2 = 4r^2 [\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\theta - \varphi)].$$

Далее, учитывая, что $J_D = \frac{3P}{2g} r^2$, $m_{AB} = \frac{2P}{g}$, $J_C = \frac{8P}{3g} r^2$, получим после преобразований следующее выражение

$$T = \frac{Pr^2}{g} \cdot \frac{19}{4} + \frac{Pr^2}{g} \cdot \frac{16}{3} - \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \cos(\theta - \varphi).$$

Определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Сумму работ активных сил P_D и P_{AB} будем определять, используя координатную формулу

$$\sum \delta A_k = P_D \delta x_D + P_{AB} \delta x_C.$$

Из рис. Д2.10 имеем: $x_D = r \cdot \cos \varphi$, $x_C = 2r \cdot \cos \varphi + 2r \cdot \cos \theta$.

Находим:

$$\delta x_D = -r \sin \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta x_C = -2r \sin \varphi \delta \varphi - 2r \sin \theta \delta \theta. \quad (a)$$

Определение Q_1 : дадим системе первое возможное перемещение, при котором $\delta \varphi > 0$, $\delta \theta = 0$; из формул (a) имеем

$$\delta x_D = -r \sin \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta x_C = -2r \sin \varphi \delta \varphi;$$

далее находим $(\sum \delta A_k)_1 = -5Pr \sin \varphi \delta \varphi$,

по формуле (3.9) – $Q_1 = -5Pr \sin \varphi$.

Определение Q_2 : дадим системе второе возможное перемещение, при котором $\delta \theta > 0$, $\delta \varphi = 0$; из (a) имеем

$$\delta x_D = 0, \quad \delta x_C = -2r \sin \theta \delta \theta;$$

далее находим $(\sum \delta A_k)_2 = -4Pr \sin \theta \delta \theta$; $Q_2 = -4Pr \sin \theta$.

Составим уравнения Лагранжа. Вначале найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \sin(\theta - \varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \sin(\theta - \varphi);$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{Pr^2}{g} \cdot \frac{32}{3} - \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \cos(\theta - \varphi) + \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \sin(\theta - \varphi);$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Pr^2}{g} \cdot \frac{19}{2} - \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \cos(\theta - \varphi) + \frac{Pr^2}{g} \cdot 8 \sin(\theta - \varphi).$$

Подставив эти результаты, а также Q_1 и Q_2 в формулу (3.7), после преобразования получим искомые дифференциальные уравнения движения системы:

$$19r - 16r \cos(\theta - \varphi) + 16r \sin(\theta - \varphi) = -10g \sin \varphi;$$

$$32r - 24r \cos(\theta - \varphi) + 24r \sin(\theta - \varphi) = -12g \sin \theta.$$

Задача Д2

Варианты 1–30

Для механической системы, изображенной на чертеже, определить ускорение заданной точки (табл. Д2.1). Плоскость чертежа предполагается вертикальной, углы α и β , которые образуют наклонные плоскости с горизонтом, даны в табл. Д2.1. Цифрами обозначены:

1 – колесо весом P , радиусом r , масса колеса равномерно распределена по его ободу;

2 – колесо весом Q , радиусом $R = 2r$, масса колеса равномерно распределена по его ободу;

3 – ступенчатый барабан весом Q , малый радиус барабана равен r , большой – $R = 2r$, масса барабана распределена равномерно по окружности большого радиуса R ;

4 – груз весом P .

Движение системы происходит под действием сил тяжести. Считать, что колесо катится по плоскости.

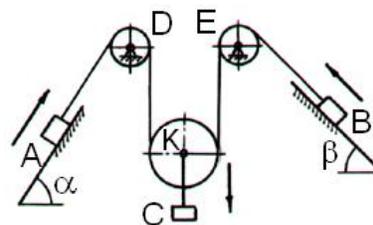
Таблица Д2.1

№ вар.	Схема	Точка	α	№ вар.	Схема	Точка	α
01		A	α	05		A	α
02		B	0	06		B	0
03		A	α	07		A	$\frac{\pi}{2}$
04		B	0				

№ вар.	Схема	Точка	α	№ вар.	Схема	Точка	α	β
08		A	α	18		A	α	-
09		B	0	19		C	$\frac{\pi}{2}$	-
10		A	$\frac{\pi}{2}$					
11		A	α	20		A	α	-
12		B	0	21		C	$\frac{\pi}{2}$	-
13		A	$\frac{\pi}{2}$					
14		A	α	22		B	α	$\beta=\alpha$
15		B	0	23		B	α	$\frac{\pi}{2}$
16		A	α	24		A	0	$\frac{\pi}{2}$
17		A	α	25		A	α	$\beta=\alpha$
		B	0	26		A	α	0
				27		A	0	β
				28		B	α	$\beta=\alpha$
			29	A		α	$\frac{\pi}{2}$	
			30	B		0	$\frac{\pi}{2}$	

Варианты 31–45

К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны груз A весом P_1 и груз B весом P_2 . Нить переброшена через неподвижные блоки D и E и охватывает снизу подвижный блок K . К оси подвижного блока прикреплен груз C весом P_3 . Определить ускорения грузов A , B и C , пренебрегая массой блоков. Трением грузов о плоскости пренебречь (табл. Д2.2).



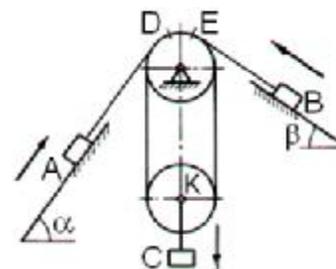
Указание. При решении считать, что движение каждого груза происходит в направлении, указанном соответствующей стрелкой.

Таблица Д2.2

№ вар.	Дано					№ вар.	Дано					№ вар.	Дано				
	α	β	P_1	P_2	P_3		α	β	P_1	P_2	P_3		α	β	P_1	P_2	P_3
31	0°	30°	P	$2P$	$4P$	36	30°	45°	$4P$	P	$8P$	41	45°	60°	P	$2P$	$2P$
32	0°	60°	P	$2P$	$2P$	37	30°	0°	P	$4P$	$8P$	42	60°	0°	$2P$	P	$8P$
33	0°	45°	P	$3P$	$2P$	38	45°	0°	P	$2P$	$4P$	43	60°	30°	$2P$	$4P$	$8P$
34	30°	30°	$2P$	P	$4P$	39	45°	30°	$2P$	P	$4P$	44	60°	45°	P	$2P$	$8P$
35	30°	60°	$2P$	P	$6P$	40	45°	45°	$2P$	P	$2P$	45	60°	60°	$4P$	P	$8P$

Варианты 46–60

К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны груз A весом P_1 и груз B весом P_2 . От груза A нить идет через неподвижный блок D , охватывает подвижный блок K , а затем через подвижный блок E , находящийся на одной оси с блоком D , идет к грузу B . К оси подвижного блока K прикреплен груз C весом P_3 . Определить, пренебрегая массой блоков, ускорения грузов A , B и C . Трением грузов о плоскости пренебречь. Значения углов α и β , а также веса грузов приведены в табл. Д2.3.



Указание. При решении считать, что движение каждого груза происходит в направлении, указанном соответствующей стрелкой.

Таблица Д2.3

№ вар.	Дано					№ вар.	Дано					№ вар.	Дано				
	α	β	P_1	P_2	P_3		α	β	P_1	P_2	P_3		α	β	P_1	P_2	P_3
46	0°	90°	$4P$	$4P$	$8P$	51	30°	0°	$2P$	P	$8P$	56	60°	60°	P	$2P$	$8P$
47	0°	45°	$4P$	$4P$	$8P$	52	45°	60°	$2P$	P	$4P$	57	60°	45°	$2P$	P	$4P$
48	0°	60°	P	$2P$	$4P$	53	45°	45°	$4P$	$2P$	$2P$	58	60°	30°	$2P$	$2P$	$6P$
49	30°	60°	$4P$	$2P$	$4P$	54	45°	30°	$6P$	$4P$	$8P$	59	60°	0°	$2P$	P	$4P$
50	30°	45°	P	$2P$	$8P$	55	45°	0°	P	P	$2P$	60	30°	30°	P	$2P$	$8P$

Варианты 61–64

Механическая система, состоящая из груза A весом P , блока B и катка C , приводится в движение силой $F = 6P$. Блок B и каток C представляют собой одинаковые ступенчатые барабаны; вес барабана равен $2P$, большой радиус – $2r$, малый – r , радиус инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$. Определить угловое ускорение блока B . Считать, что каток катится без скольжения. Весом нити и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь (табл. Д2.4).

Таблица Д2.4

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
61		63	
62		64	

Варианты 65–67

Механическая система, состоящая из груза A весом $4P$, блока B и катка C , приводится в движение парой сил с моментом $M = 12Pr$, приложенной к катку C . Блок B и каток C представляют собой одинаковые ступенчатые барабаны весом $4P$ каждый. Большой радиус барабана равен $2r$, малый – r , радиус инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$. Определить ускорение центра катка. Считать, что каток катится без скольжения. Весом нити и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь (табл. Д2.5).

Таблица Д2.5

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
65		66		67	

Варианты 68–70

Механическая система состоит из грузов A и D весом P каждый, блоков B и C . Блок B представляет собой ступенчатый барабан весом $4P$, его большой радиус равен $2r$, малый – r , радиус инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$. Блок C – однородный круглый диск весом $2P$, радиусом r . Система приводится в движение силой $F = 12P$, приложенной к телу A . Определить ускорение груза A . Весом нити и силой трения груза A по плоскости пренебречь (табл. Д2.6).

Таблица Д2.6

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
68		69		70	

Варианты 71–73

Груз A весом P и каток C приводятся в движение по наклонным плоскостям за счет наматывания каната на барабан B лебедки. К барабану приложен вращающий момент $M = 8Pr$. Определить угловое ускорение барабана лебедки, считая, что барабан и каток – однородные круглые цилиндры весом $4P$, радиусом r . Каток катится без скольжения. Весом блока D , весом каната и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь (табл. Д2.7).

Таблица Д2.7

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
71		72		73	

Варианты 74–76

Груз A весом P и каток B приводятся в движение за счет наматывания канатов на ступенчатый барабан лебедки (табл. Д2.8). К барабану приложен вращающий момент $M = 12Pr$, на систему действует также сила $F = 6P$. Определить ускорение центра катка B , считая, что каток – однородный круглый цилиндр весом $2P$, радиусом r ; ступенчатый барабан лебедки имеет вес $4P$, его большой радиус равен $2r$, малый – r , радиус инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$. Каток катится без скольжения, весом канатов и трением скольжения груза A по плоскости пренебречь.

Таблица Д2.8

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
74		75		76	

Варианты 77–79

Механическая система, состоящая из катка A , блоков B и C и груза D приводится в движение парой сил с моментом $M = 8Pr$, приложенной к катку A (табл. Д2.9). Определить ускорение центра катка, считая, что каток A – однородный круглый цилиндр весом $4P$, радиусом r ; блок B – ступенчатый барабан весом $4P$, его большой радиус равен $2r$, малый – r , радиус инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$; блок C – однородный круглый диск весом $2P$, радиусом r ; вес груза D равен $2P$. Каток катится без скольжения. Весом каната пренебречь.

Таблица Д2.9

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
77		78		79	

Варианты 80–83

Механическая система приводится в движение вращающим моментом $M = 20Pr$, приложенным к ступенчатому барабану C , который соединяется с таким же барабаном D ременной передачей (табл. Д2.10). Груз A и каток

B движется за счет наматывания канатов на барабаны, при этом каток B катится без скольжения. Определить угловое ускорение барабана C , считая, что барабаны D и C имеют вес $2P$ каждый, большие радиусы их равны $2r$, малые – r , радиусы инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$, каток B – однородный круглый цилиндр весом $4P$, радиусом r ; вес груза A равен $4P$. Весом канатов и ремня пренебречь.

Таблица Д2.10

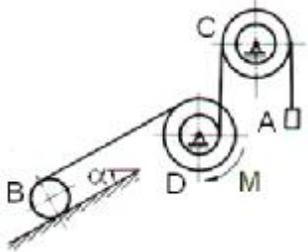
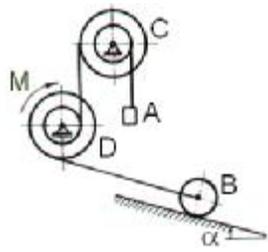
№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
80		82	
81		83	

Варианты 84–87

Механическая система, состоящая из груза A , катка B и двух одинаковых ступенчатых барабанов C и D , приводится в движение вращающим моментом $M = 20Pr$, приложенным к барабану D (табл. Д2.11). Определить угловое ускорение барабана D , считая, что барабаны C и D имеют вес $2P$ каждый, большие радиусы их равны $2r$, малые – r , радиусы инерции относительно продольной центральной оси $\rho = r$; каток B – однородный круглый цилиндр весом $4P$, радиусом r ; вес груза A равен $4P$; каток B катится без скольжения. Весом канатов пренебречь.

Таблица Д2.11

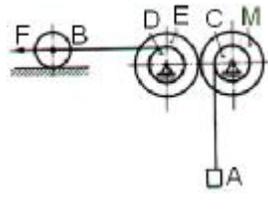
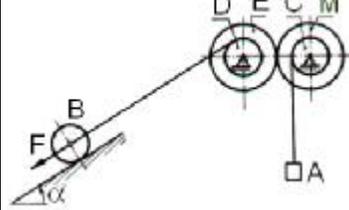
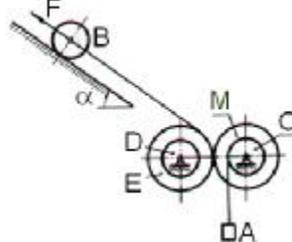
№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
84		85	

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
86		87	

Варианты 88–90

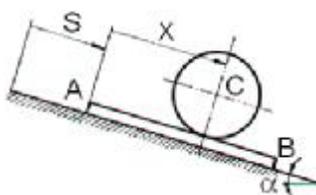
Механическая система, состоящая из груза A , катка B радиусом r , двух барабанов D и C радиусом r , жестко соединенных соответственно с зубчатыми колесами E и M радиусом $2r$, приводится в движение силой $F = 12P$, приложенной к центру катка B . Определить ускорение груза A , считая, что его вес равен $4P$, общий вес каждого барабана с зубчатым колесом – $2P$ и радиус инерции относительно оси вращения $\rho = r$, каток B – однородный круглый цилиндр весом $4P$, радиусом r . Каток катится без скольжения (табл. Д2.12).

Таблица Д2.12

№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система	№ вар.	Механическая система
88		89		90	

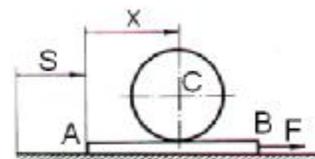
Вариант 91

Доска AB весом $3P$ движется по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом. По ней может катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр весом P , радиусом r . Определить ускорение доски и ускорение центра тяжести цилиндра относительно доски, если коэффициент трения скольжения между доской и плоскостью $f = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Трением качения пренебречь.



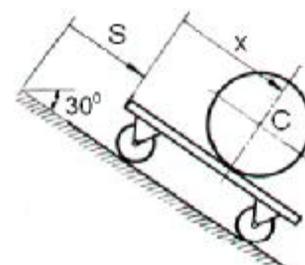
Вариант 92

Решить предыдущую задачу (вариант 91) в предположении, что доска движется по горизонтальной шероховатой плоскости с коэффициентом трения $f = \frac{1}{2}$ под действием постоянной силы $F = 4P$.



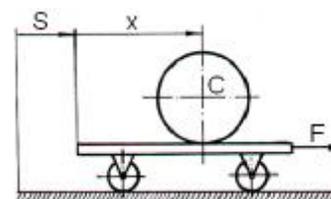
Вариант 93

Тележка, состоящая из корпуса весом $2P$ и четырех колес общим весом $2P$, скатывается по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом. По тележке может катиться без скольжения сплошной однородный цилиндр весом P . Определить ускорение тележки и ускорение центра тяжести цилиндра относительно тележки. Трением качения пренебречь.



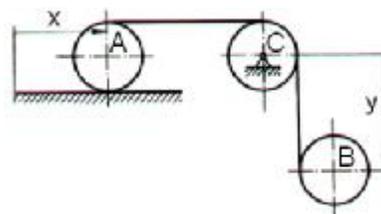
Вариант 94

Решить предыдущую задачу (вариант 93) в предположении, что тележка движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , принимая $F = 4P$.



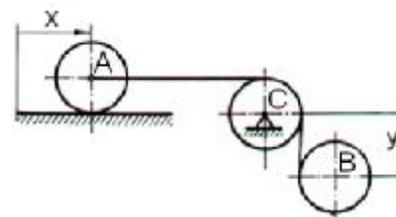
Вариант 95

Каток A и цилиндр B связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить одним концом намотана на каток A , переброшена через блок C и намотана вторым концом на цилиндр B . Определить ускорение оси катка и ускорение центра тяжести цилиндра. Каток, блок и цилиндр считать однородными сплошными цилиндрами одинакового веса и радиуса. Трением качения пренебречь.

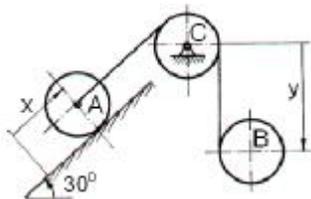


Вариант 96

Каток A и цилиндр B связаны тонкой нерастяжимой нитью. Нить, привязанная к оси катка A , переброшена через блок C и намотана свободным концом на цилиндр B . Определить ускорение оси катка и ускорение центра тяжести цилиндра. Каток, блок и цилиндр считать однородными сплошными цилиндрами одинакового веса и радиуса. Трением качения пренебречь.

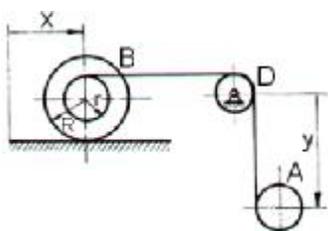


Вариант 97



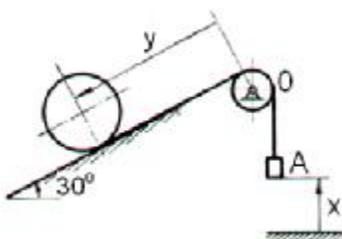
В условиях варианта 96 решить задачу, считая, что каток катится без скольжения по наклонной плоскости, составляющей 30° с горизонтом.

Вариант 98



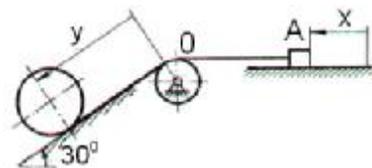
Однородный сплошной цилиндр A весом P , радиусом r , падая под действием силы тяжести, приводит в движение каток B посредством тонкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндр и на барабан катка радиусом r . Определить ускорения оси катка и центра тяжести цилиндра. Вес катка равен P , его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен $J = \frac{2 P r^2}{g}$. Наружный радиус катка $R = 2 r$. Массой блока D пренебречь. Каток катится без скольжения.

Вариант 99



Однородный сплошной цилиндр весом $4 P$ движется по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° . Цилиндр обмотан нитью, перекинутой через блок O и прикрепленной к грузу A весом P . Найти ускорение груза и центра тяжести цилиндра. Массой блока O пренебречь.

Вариант 100



В условиях варианта 99 решить задачу, если груз A движется по гладкой горизонтальной плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в данном учебном пособии методики решения задач по теоретической механике из разделов статика, кинематика и динамика позволяют студентам заочной формы обучения самостоятельно решать различные задачи данного курса.

Рассматриваемые методы позволяют выработать у студента методологический подход к решению вопросов, относящихся ко всему курсу дисциплины «Теоретическая механика», и облегчают в дальнейшем процесс изучения специализированных технических дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теоретическая механика. Типовые задачи и методы решения. В 3 ч. Ч. 1. Статика : учеб. пособие / под ред. В.И. Доронина. – 2-е изд. – Хабаровск : ДВГУПС, 2002.
2. Теоретическая механика. Типовые задачи и методы решения. В 3 ч. Ч. 2. Кинематика: учеб. пособие / под ред. В.И. Доронина. – 2-е изд. – Хабаровск : ДВГУПС, 2002.
3. Теоретическая механика. Типовые задачи и методы решения. В 3 ч. Ч. 3. Динамика : учеб. пособие / под ред. В.И. Доронина. – 2-е изд. – Хабаровск : ДВГУПС, 2003.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1. Дифференциальные уравнения второго порядка, решение которых сводится к последовательному интегрированию двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнение вида

$$\ddot{x} = f(t). \quad (1)$$

Обозначив $\dot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, получим из формулы (1) $\frac{dV_x}{dt} = f(t)$, откуда

$$dV_x = f(t) dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим первый интеграл дифференциального уравнения (1)

$$V_x = \int f(t) dt + C_1 \quad \text{или} \quad V_x = j(t, C_1).$$

Затем из соотношения $V_x = \frac{dx}{dt}$ получаем $dx = j(t, C_1) dt$.

Второй интеграл уравнения (1) имеет вид $x = \int j(t, C_1) dt + C_2$.

Уравнение вида $\ddot{x} = f(t, \dot{x})$. (2)

Обозначим $\frac{dx}{dt} = V_x$, тогда $\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt}$.

Подставляя эти выражения производных в уравнение (2), получим уравнение первого порядка:

$$\frac{dV_x}{dt} = f(t, V_x).$$

Интеграл этого уравнения получается в виде $V_x = j(t, C_1)$. Это первый интеграл уравнения (2). Далее из соотношения $\frac{dx}{dt} = V_x$ получаем $dx = j(t, C_1) dt$, а затем второй интеграл уравнения

$$x = \int j(t, C_1) dt + C_2.$$

Уравнение вида $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. (3)

В этом уравнении независимая переменная t не содержится явным образом. Примем $\dot{x} = V_x$, тогда

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = V_x \frac{dV_x}{dx}.$$

Продолжение приложения

Подставляя в уравнение (3) выражения x и \dot{x} , получим уравнение первого порядка относительно V_x

$$V_x \frac{dV_x}{dx} = f(x, V_x).$$

Интегрируя это уравнение, найдем V_x как функцию x и C_1 :

$$V_x = j(x, C_1).$$

Это первый интеграл уравнения (3).

Далее из соотношения $\frac{dx}{dt} = V_x$ получаем $\frac{dx}{dt} = j(x, C_1)$, а после разделения переменных – $\frac{dx}{j(x, C_1)} = dt$.

Интегрируя это уравнение, получим второй интеграл уравнения (3)

$$\int \frac{dx}{j(x, C_1)} \int dt + C_2.$$

2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \tag{4}$$

где p, q – постоянные действительные числа.

Составим характеристическое уравнение

$$r^2 + pr + q = 0$$

и вычислим корни этого уравнения r_1, r_2 .

По табл. 1 в зависимости от значения корней характеристического уравнения определим вид второго интеграла дифференциального уравнения (4).

Таблица 1

Виды второго интеграла дифференциального уравнения (4)

Корни характеристического уравнения r_1, r_2	Вид интеграла
Действительные и не равные между собой ($r_1 \neq r_2$)	$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
Действительные и равные между собой ($r_1 = r_2$)	$x = e^{r_1 t} (C_1 + C_2 t)$
Комплексные $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$x = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$

Окончание приложения

3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x'' + px' + qx = f(t). \quad (5)$$

Общее решение этого уравнения равно сумме решения x_1 , соответствующего решению однородного уравнения $x'' + px' + qx = 0$, и частного решения x_2 исходного уравнения (5), т.е.

$$x = x_1 + x_2.$$

Решение однородного уравнения определяется по табл. 1. Вид частного решения x_2 зависит от вида правой части уравнения (5) и от значений корней характеристического уравнения (табл. 2).

Таблица 2

Вид частного решения дифференциального уравнения (5)

Корни характеристического уравнения	Правая часть уравнения (5) $f(t)$	Вид частного решения x_2
Действительные, отличные от нуля	$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n$	$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_n$
Действительные, один из корней равен нулю	То же	$t(B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_n)$
Комплексные $r_{1,2} = a \pm bi$	$A \cos kt + B \sin kt$ $k \neq b$	$C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$
Комплексные $r_{1,2} = a \pm bi$	$A \cos kt + B \sin kt$ $k = b$	$t(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt)$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	4
1. СТАТИКА.....	6
1.1. Равновесие тела под действием плоской системы параллельных сил.....	6
1.2. Равновесие тела под действием плоской системы сил	13
1.3. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил.....	18
1.4. Определение центра тяжести однородной плоской пластины.....	24
2. КИНЕМАТИКА	31
2.1. Кинематика точки.....	31
2.2. Исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.....	37
2.3. Исследование плоскопараллельного движения твердого тела.....	46
2.4. Сложное движение точки	55
3. ДИНАМИКА	66
3.1. Общие указания	66
3.2. Первая задача динамики свободной точки	67
3.3. Вторая задача динамики свободной точки	68
3.4. Общее уравнение динамики	88
3.5. Уравнения Лагранжа.....	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	112
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	113
ПРИЛОЖЕНИЕ. Основные виды дифференциальных уравнений в задачах динамики точки.....	114

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

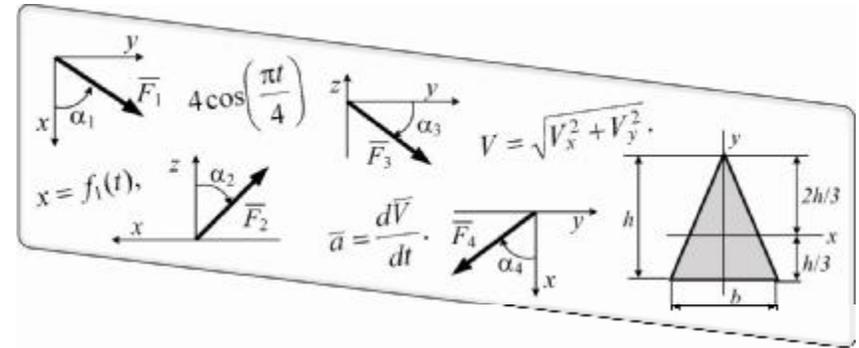
Сборник задач

Составители: **Хаванский** Владимир Иванович,
Кузин Андрей Анатольевич, **Кирюшина** Светлана Ивановна

Редактор *Н.В. Смышляева*
Технический редактор *И.А. Нильмаер*

План 2014 г. Поз. 9.18. Подписано в печать 16.10.2014 г.
Формат 60×84¹/₁₆. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,3.
Усл. печ. л. 6,7. Зак. 131. Тираж 25 экз. Цена 775 руб.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник задач

