КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

*Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Информационные технологии»,
010500 «Прикладная математика и информатика»*

**Нижний Новгород
2007**

ББК В22.143
К44
УДК 512.64

Контрольные работы по геометрии: / Сост. Л.Г. Киселева, С.В. Сидоров. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007. — 42 с.

Сборник содержит теоретический материал и контрольные работы по геометрии на плоскости и в пространстве.

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Информационные технологии».

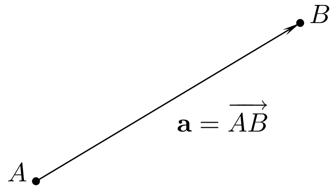
Рецензент:
А.И. Гавриков, к.ф.-м.н., доц. каф. ЧиФА

УДК 512.64

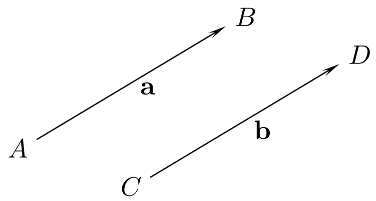
1 Теоретические сведения

1.1 Векторы на плоскости и в пространстве

Направленный отрезок, соединяющий две точки A и B, называется *вектором* и обозначается $\overrightarrow{AB}$. Точки A и B называются соответственно *началом* и *концом* вектора $\overrightarrow{AB}$. Часто векторы будем обозначать строчными латинскими буквами, например, $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$.



Длиной (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется расстояние между точками A и B (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$). Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{o}$. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, если они имеют одинаковые направления и длины. Нулевой вектор не имеет направления.



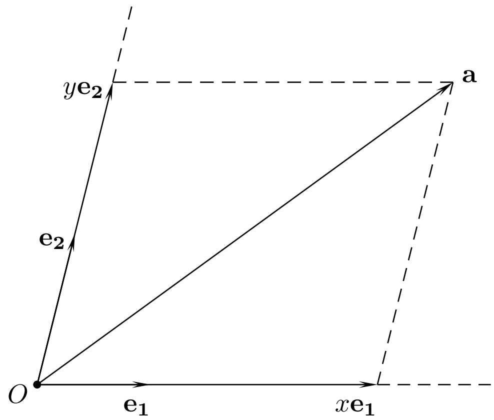
$\mathbf{a} = \mathbf{b}$

Иногда удобно все векторы откладывать из одной точки O, называемой полюсом. Тогда для произвольной точки P вектор $\overrightarrow{OP}$ называется *радиус-вектором* точки P. Два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны некоторой прямой. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Три ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Упорядоченная пара $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle$ неколлинеарных векторов на плоскости называется *базисом плоскости.*

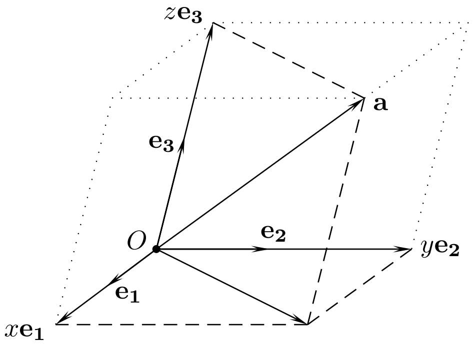
Упорядоченная тройка $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ некомпланарных векторов в пространстве называется *базисом пространства.*

Если $\mathbf{a}$ – произвольный вектор на плоскости и $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle$ – базис, то существуют такие однозначно определенные действительные числа x и y, что вектор $\mathbf{a}$ представляется в виде $\mathbf{a} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$. Коэффициенты x и y называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle$.

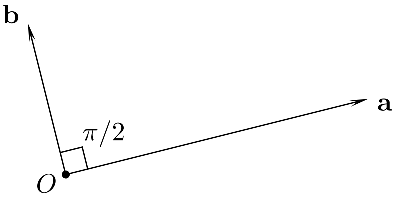


Если понятно, о каком базисе идет речь, вектор $\mathbf{a}$ вместе с координатами удобно записывать в виде $\mathbf{a}(x, y)$.

Если $\mathbf{a}$ – произвольный вектор в пространстве и $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ – базис, то существуют такие однозначно определенные действительные числа x, y и z, что вектор $\mathbf{a}$ представляется в виде $\mathbf{a} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}$. Коэффициенты x, y и z называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$. Аналогично плоскому случаю вектор $\mathbf{a}$ вместе с координатами будем записывать в виде $\mathbf{a}(x, y, z)$.



Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *перпендикулярными* (или *ортогональными*), если угол между ними равен $\pi/2$. Обозначение: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Нулевой вектор считается перпендикулярным любому вектору.



Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно перпендикулярны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если его векторы имеют длину 1.

1.2 Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число (скаляр)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где угол φ берется между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенными от одной точки.

Свойства скалярного произведения:
1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ — коммутативность;
2) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ для любого скаляра α;
3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ — дистрибутивность;
4) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{o}$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны;
5) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора (квадрат длины).

В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ выражается формулой

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1}$$

Длина вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ в ортонормированном базисе выражается формулой

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{2}$$

Косинус угла φ между векторами $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{3}$$

В ортонормированном базисе

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{4}$$

Если вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ образует с векторами ортонормированного базиса $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно, то величины $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$ называются направляющими косинусами вектора $\mathbf{a}$. Эти величины связаны с координатами вектора соотношениями:

$$\cos\alpha_i = \frac{a_i}{|\mathbf{a}|}.$$

Для направляющих косинусов выполняется равенство:

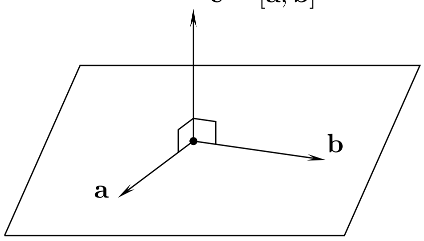
$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1. \tag{5}$$

(трехмерное обобщение основного тригонометрического тождества).

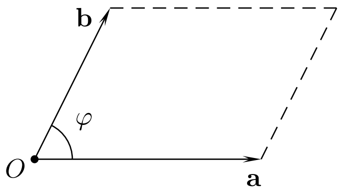
Для векторов на плоскости в формулах (1)—(5) сохраняются только первые две координаты.

1.3 Векторное и смешанное произведения

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, задаваемый следующими тремя условиями:
1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$,
где угол φ берется между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенными от одной точки;
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
3) для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ векторы $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ образуют правую тройку (упорядоченная тройка векторов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ называется *правой*, если с конца вектора $\mathbf{c}$ кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ происходит против часовой стрелки; в противном случае тройка называется *левой*).



Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.



Площадь $= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$

Свойства векторного произведения:
1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ — антикоммутативность;
2) $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ для любого скаляра α;
3) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ — дистрибутивность;
4) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{o}$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Если $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ – правая тройка, образующая ортонормированный базис, то верны следующие соотношения:

$$
\begin{array}{lll}
[\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}] = \mathbf{e_3}, & [\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}] = \mathbf{e_1}, & [\mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}] = \mathbf{e_2} \\
[\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}] = -\mathbf{e_3}, & [\mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}] = -\mathbf{e_1}, & [\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}] = -\mathbf{e_2} \\
[\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}] = \mathbf{o}, & [\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}] = \mathbf{o}, & [\mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}] = \mathbf{o}
\end{array}
$$

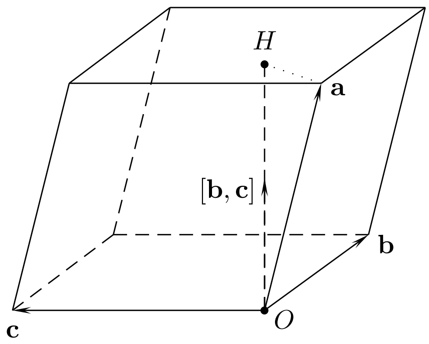
В ортонормированном базисе векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ векторов $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ имеет координаты

$$
c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.
$$

Эти три формулы можно свести в одну, где векторное произведение выражается в виде «символического определителя»:

$$
\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e_3}.
$$

Смешанным произведением трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, обозначаемое $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$. Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.



Свойства смешанного произведения вытекают из свойств скалярного и векторного произведений:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$;

3) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для любого скаляра α;

4а) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

компланарны;
4b) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle$ – правая тройка;
4c) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) < 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle$ – левая тройка.

Смешанное произведение выражается через координаты сомножителей в виде:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}).$$

Если базис $\langle \mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\rangle$ образует правую тройку векторов и является ортонормированным, то смешанное произведение $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ равно

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.4 Аффинная система координат на плоскости и в пространстве

Аффинная система координат на плоскости

Базис $\langle \mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\rangle$ плоскости и точка O задают *аффинную систему координат* $S = \langle O,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\rangle$ на плоскости. При этом точка O называется началом системы координат. Пусть P — произвольная точка плоскости. Координаты x, y вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $\langle \mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\rangle$ называются координатами точки P в системе координат S. Если понятно, о какой системе координат идет речь, будем записывать координаты точки следующим образом $P=(x,y)$.

Пусть на плоскости заданы системы координат: $S = \langle O,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\rangle$ и $S' = \left\langle O',\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2}\right\rangle$, причем начало второй системы координат имеет в первой системе координаты a_{10}, a_{20}, а векторы $\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2}$ выражаются через $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e'_1} &= a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2}, \\ \mathbf{e'_2} &= a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда координаты точки P в системах S и S' связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases} \tag{7}$$

Аффинная система координат в пространстве

Базис $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ пространства и точка O задают *аффинную систему координат* $S = \langle O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ в пространстве. Точка O называется началом системы координат. Пусть P — произвольная точка пространства. Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ называются координатами точки P в системе координат S. Если понятно, о какой системе координат идет речь, будем записывать координаты точки следующим образом $P = (x, y, z)$.

Пусть в пространстве заданы две системы координат: $S = \langle O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$ и $S' = \left\langle O', \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'} \right\rangle$, причем начало второй системы координат имеет в первой системе координаты a_{10}, a_{20}, a_{30}, а векторы $\mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}, \mathbf{e_3'}$ выражаются через $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1'} &= a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2} + a_{31}\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e_2'} &= a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + a_{32}\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e_3'} &= a_{13}\mathbf{e_1} + a_{23}\mathbf{e_2} + a_{33}\mathbf{e_3} \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда координаты точки P в системах S и S' связаны соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20} \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30} \end{array} \right. \tag{9}$$

Аффинная система координат называется *прямоугольной*, если ее базис является ортонормированным.

1.5 Задание прямой на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана в общем, параметрическом и каноническом видах.
Общий вид: множество решений линейного уравнения

$$Ax + By + C = 0, \tag{10}$$

где A, B, C – действительные числа, причем A и B одновременно не равны нулю, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Каждое решение уравнения (10) рассматривается как набор координат некоторой точки прямой в аффинной или прямоугольной системе координат. В случае прямоугольной системы координат вектор $\mathbf{n}(A, B)$ является вектором-нормалью к прямой.

Параметрическое представление прямой:
a) в векторном виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{11}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой, $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой ($\mathbf{a}$ может быть произвольным ненулевым вектором), t — параметр, принимающий произвольные действительные значения.

Если векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{a}$ заданы своими координатами: $\mathbf{r}(x, y)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, то равенство (11) можно записать
b) в координатном виде

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases} \tag{12}$$

Выражая параметр t из первого и второго уравнений, получаем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \tag{13}$$

В равенстве (13) один из знаменателей может обратиться в нуль, в этом случае прямая параллельна одной из осей координат.

1.6 Задание плоскости в трехмерном пространстве

Плоскость в пространстве может быть задана в общем и параметрическом видах.
Общий вид: множество решений линейного уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{14}$$

где A, B, C, D – действительные числа, причем A, B и C одновременно не равны нулю, т. е. $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Каждое решение уравнения (14) рассматривается как набор координат некоторой точки плоскости в аффинной или прямоугольной системе координат. В случае прямоугольной системы координат вектор $\mathbf{n}(A, B, C)$ является вектором-нормалью к плоскости.

Параметрическое представление плоскости:
a) в векторном виде
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a} + t_2\mathbf{b}, \tag{15}$$
где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки плоскости, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два неколлинеарных направляющих вектора плоскости, t_1, t_2 — параметры, принимающие произвольные действительные значения.

Если векторы $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ заданы своими координатами: $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, то векторное равенство (15) можно записать
b) в координатном виде
$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t_1a_1 + t_2b_1, \\ y = y_0 + t_1a_2 + t_2b_2, \\ z = z_0 + t_1a_3 + t_2b_3 \end{array}\right. \tag{16}$$

1.7 Задание прямой в трехмерном пространстве

Прямая в пространстве может быть задана в общем, параметрическом и каноническом видах.
Общий вид: множество решений системы уравнений (пересечение пары непараллельных плоскостей)
$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array}\right. \tag{17}$$
где $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – действительные числа, причем векторы $\mathbf{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны. Каждое решение системы (17) рассматривается как набор координат некоторой точки прямой в аффинной или прямоугольной системе координат.

Параметрическое представление прямой:
a) в векторном виде
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \tag{18}$$
где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой, $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой ($\mathbf{a}$ может быть произвольным ненулевым вектором), t — параметр, принимающий произвольные действительные значения.

Если векторы $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{a}$ заданы своими координатами: $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, то векторное равенство (18) можно записать
b) в координатном виде

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \tag{19}$$

Выражая параметр t из трех равенств и приравнивая, получаем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{20}$$

В равенстве (20) один или два знаменателя могут равняться нулю. В этом случае прямая параллельна одной из осей координат или одной из координатных плоскостей.

2 Прямые и плоскости в аффинной системе координат

Предполагается, что координаты всех точек и векторов, уравнения прямых и плоскостей, приведенных ниже, заданы в некоторой аффинной системе координат.

2.1 Взаимное расположение точек на плоскости. Уравнение прямой в аффинной системе координат.

Даны координаты точек A, B и C на плоскости.
1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B, в параметрическом, каноническом и общем видах.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB, в параметрическом, каноническом и общем видах. Проверить, что точка C не принадлежит прямой AB.
3. Задать треугольник ABC системой линейных неравенств.
4. Выяснить, принадлежит ли начало координат треугольнику ABC.

1. $A = (0, 2)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, 4)$

2. $A = (-1, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (2, 3)$
3. $A = (-2, 0)$, $B = (-4, -2)$, $C = (1, 2)$
4. $A = (3, 5)$, $B = (4, 6)$, $C = (4, 5)$
5. $A = (-3, -1)$, $B = (0, 2)$, $C = (4, 4)$
6. $A = (0, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, 0)$
7. $A = (-1, -1)$, $B = (2, 5)$, $C = (2, -2)$
8. $A = (-2, -3)$, $B = (-4, -7)$, $C = (1, -4)$
9. $A = (3, 7)$, $B = (4, 9)$, $C = (4, 2)$
10. $A = (-3, -5)$, $B = (0, 1)$, $C = (4, -5)$
11. $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 5)$
12. $A = (0, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (-2, 1)$
13. $A = (4, 6)$, $B = (5, 7)$, $C = (-5, -1)$
14. $A = (-2, 0)$, $B = (-1, 1)$, $C = (5, 6)$
15. $A = (3, 5)$, $B = (6, 8)$, $C = (-1, 2)$
16. $A = (1, -2)$, $B = (2, 0)$, $C = (4, -3)$
17. $A = (0, -4)$, $B = (3, 2)$, $C = (-2, -1)$
18. $A = (4, 4)$, $B = (5, 6)$, $C = (-5, 0)$
19. $A = (-2, -8)$, $B = (-1, -6)$, $C = (5, -1)$
20. $A = (3, 2)$, $B = (6, 8)$, $C = (-1, 1)$
21. $A = (-1, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 3)$
22. $A = (-2, 0)$, $B = (1, 3)$, $C = (-4, -1)$
23. $A = (2, 4)$, $B = (3, 5)$, $C = (5, 5)$
24. $A = (-3, -1)$, $B = (-4, -2)$, $C = (-7, -3)$
25. $A = (1, 3)$, $B = (-2, 0)$, $C = (3, 4)$
26. $A = (-1, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (2, 0)$
27. $A = (-2, -1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-4, 2)$
28. $A = (2, 7)$, $B = (3, 9)$, $C = (5, -1)$
29. $A = (-3, -3)$, $B = (-4, -5)$, $C = (-7, 3)$
30. $A = (1, 5)$, $B = (-2, -1)$, $C = (3, 2)$

2.2 Связь аффинных систем координат на плоскости.

В некоторой аффинной системе координат на плоскости заданы уравнения двух прямых l_1 и l_2. Пусть они образуют оси новой системы координат (направления на прямых задать произвольно). В новой системе координат найдите уравнения осей исходной системы и координаты ее начала.

1. $l_1 : -x + 3y = -5; \quad l_2 : x - 4y = 6$

2. $l_1 : 3x + 7y = -1; \quad l_2 : -2x - 5y = 1$

3. $l_1 : 5x + 9y = 1; \quad l_2 : 4x + 7y = 1$

4. $l_1 : -5x + 3y = -13; \quad l_2 : 3x - 2y = 8$

5. $l_1 : 7x + 8y = 6; \quad l_2 : 8x + 9y = 7$

6. $l_1 : 6x + 5y = 8; \quad l_2 : 5x + 4y = 7$

7. $l_1 : 3x + 2y = 5; \quad l_2 : 7x + 5y = 11$

8. $l_1 : 4x + y = 10; \quad l_2 : -5x - y = -13$

9. $l_1 : 2x + 3y = 0; \quad l_2 : 5x + 8y = -1$

10. $l_1 : -x + 2y = -7; \quad l_2 : -y = 2$

11. $l_1 : x - 2y = -3; \quad l_2 : -3x + 7y = 11$

12. $l_1 : -3x - 2y = -7; \quad l_2 : 7x + 5y = 17$

13. $l_1 : 8x + 5y = 18; \quad l_2 : 5x + 3y = 11$

14. $l_1 : 8x - 3y = 2; \quad l_2 : -5x + 2y = -1$

15. $l_1 : 3x + y = 5; \quad l_2 : 7x + 2y = 11$

16. $l_1 : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{5}; \quad l_2 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}$

17. $l_1 : \frac{x-4}{-5} = \frac{y-1}{2}; \quad l_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-1}$

18. $l_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}; \quad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-1}$

19. $l_1 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1}; \quad l_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2}$

20. $l_1 : \frac{x-7}{8} = \frac{y-8}{5}; \quad l_2 : \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2}$

21. $l_1 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{5}; \quad l_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{2}$

22. $l_1 : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{7}; \quad l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-3}$

23. $l_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-5}{7}; \quad l_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+7}{5}$

24. $l_1 : \frac{x+1}{5} = \frac{y+6}{4}; \quad l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{2}$

25. $l_1 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+8}{6}$; $\quad l_2 : \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{5}$

26. $l_1 : \frac{x-7}{-4} = \frac{y+7}{3}$; $\quad l_2 : \frac{x+8}{-7} = \frac{y-4}{5}$

27. $l_1 : \frac{x+5}{-4} = \frac{y-6}{7}$; $\quad l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2}$

28. $l_1 : \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1}$; $\quad l_2 : \frac{x+4}{-3} = \frac{y+2}{-1}$

29. $l_1 : \frac{x-4}{5} = \frac{y+4}{-3}$; $\quad l_2 : \frac{x+7}{2} = \frac{y-2}{-1}$

30. $l_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2}$; $\quad l_2 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-8}{9}$

2.3 Взаимное расположение точек и прямых в пространстве.

Даны координаты трех точек A, B, C в пространстве.
1. Написать уравнение прямой l, проходящей через точки A и B, в параметрическом, каноническом и общем видах.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой l, в параметрическом, каноническом и общем видах. Проверить, что точка C не принадлежит прямой AB.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, в параметрическом и общем видах.

1. $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 1, 3)$, $C = (0, 3, 4)$

2. $A = (-1, -1, 1)$, $B = (5, 2, 4)$, $C = (-2, 2, 3)$

3. $A = (-3, -2, 0)$, $B = (-7, -4, -2)$, $C = (-4, 1, 2)$

4. $A = (7, 3, 5)$, $B = (9, 4, 6)$, $C = (2, 4, 5)$

5. $A = (-5, -3, -1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-5, 4, 4)$

6. $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, 1, 3)$, $C = (4, 3, 0)$

7. $A = (1, -1, -1)$, $B = (4, 2, 5)$, $C = (3, 2, -2)$

8. $A = (0, -2, -3)$, $B = (-2, -4, -7)$, $C = (2, 1, -4)$

9. $A = (5, 3, 7)$, $B = (6, 4, 9)$, $C = (5, 4, 2)$

10. $A = (-1, -3, -5)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (4, 4, -5)$

11. $A = (-2, 1, 3)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (-3, 4, 5)$

12. $A = (-4, 0, 2)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (-1, -2, 1)$

13. $A = (4, 4, 6)$, $B = (6, 5, 7)$, $C = (0, -5, -1)$

14. $A = (-8, -2, 0)$, $B = (-6, -1, 1)$, $C = (-1, 5, 6)$

15. $A = (2, 3, 5)$, $B = (8, 6, 8)$, $C = (1, -1, 2)$
16. $A = (3, 1, -2)$, $B = (4, 2, 0)$, $C = (5, 4, -3)$
17. $A = (2, 0, -4)$, $B = (5, 3, 2)$, $C = (1, -2, -1)$
18. $A = (6, 4, 4)$, $B = (7, 5, 6)$, $C = (-1, -5, 0)$
19. $A = (0, -2, -8)$, $B = (1, -1, -6)$, $C = (6, 5, -1)$
20. $A = (5, 3, 2)$, $B = (8, 6, 8)$, $C = (2, -1, 1)$
21. $A = (1, -1, 1)$, $B = (3, 0, 2)$, $C = (0, 2, 3)$
22. $A = (-1, -2, 0)$, $B = (5, 1, 3)$, $C = (2, -4, -1)$
23. $A = (7, 2, 4)$, $B = (9, 3, 5)$, $C = (-1, 5, 5)$
24. $A = (-3, -3, -1)$, $B = (-5, -4, -2)$, $C = (3, -7, -3)$
25. $A = (5, 1, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$, $C = (2, 3, 4)$
26. $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 0, 3)$, $C = (3, 2, 0)$
27. $A = (0, -2, -1)$, $B = (3, 1, 5)$, $C = (-1, -4, 2)$
28. $A = (4, 2, 7)$, $B = (5, 3, 9)$, $C = (5, 5, -1)$
29. $A = (-1, -3, -3)$, $B = (-2, -4, -5)$, $C = (-3, -7, 3)$
30. $A = (3, 1, 5)$, $B = (0, -2, -1)$, $C = (4, 3, 2)$

2.4 Взаимное расположение прямых в пространстве.

Выяснить взаимное расположение прямых l_1 и l_2.
1. Если они параллельны или пересекаются, то написать уравнение плоскости, проходящей через них.
2. Если они скрещиваются, то написать уравнение плоскости α_1, проходящей через l_1 параллельно l_2, и плоскости α_2, проходящей через l_2 параллельно l_1.

1. $l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{6}, \quad l_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-8}{9}$

2. $l_1 : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 5x - y - z + 7 = 0, \\ 3x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$

3. $l_1 : x = 1 + t, y = 4 + 2t, z = 8 + 3t, \quad l_2 : \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$

4. $l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}, \quad l_2 : \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-4}$

5. $l_1 : \begin{cases} x+y-z=0, \\ 4x-6y-9z-5=0 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} x+3y-3=0, \\ 2y+z=0 \end{cases}$

6. $l_1 : \begin{cases} 6x-4y-7z-5=0, \\ x+3y+1=0 \end{cases}$
$l_2 : x=-3-3t, y=2+t, z=-4-2t$

7. $l_1 : x=5-6t, y=-2+2t, z=3-4t$
$l_2 : x=3t, y=1-t, z=-2+2t$

8. $l_1 : 2x=-6y-2=3z+1, \quad l_2 : x=3+6t, y=-2t, z=4t$

9. $l_1 : \frac{x+1}{9}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{6}, \quad l_2 : \begin{cases} x+5y+z-3=0, \\ 2x+4y-z-6=0 \end{cases}$

10. $l_1 : -2x-2=6y=-3z-3, \quad l_2 : \frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$

11. $l_1 : \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}, \quad l_2 : \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$

12. $l_1 : x=-5+3t, y=-1+t, z=5-2t$
$l_2 : x=3+t, y=-5-3t, z=1$

13. $l_1 : \begin{cases} 3x-4y+1=0, \\ y+z-2=0 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} 3x-y-2z=0, \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$

14. $l_1 : x=3+2t, y=5+4t, z=-1-2t, \quad l_2 : \begin{cases} x-y+z-1=0, \\ x-3y+2=0 \end{cases}$

15. $l_1 : -x+3=2y=2z, \quad l_2 : \begin{cases} 3x+y+z-5=0, \\ z=1 \end{cases}$

16. $l_1 : \frac{x+5}{6}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-4}, \quad l_2 : \frac{x+3}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-3}$

17. $l_1 : \frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{0}, \quad l_2 : \begin{cases} x-y-3z+3=0, \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$

18. $l_1 : \begin{cases} 2x+3z-5=0, \\ 4x-6y+3z-1=0 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} 3x+y-4=0, \\ 3x+y+3z-7=0 \end{cases}$

19. $l_1 : x=5-2t, y=-1+t, z=-1+t,$
$l_2 : x=1+4t, y=1+3t, z=1-3t$

20. $l_1 : 14x-12=2y=-7z+9, \quad l_2 : \begin{cases} 3x-y+z-3=0, \\ y+2z-3=0 \end{cases}$

21. $l_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-6}{2}, \quad l_2 : \frac{x}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$

22. $l_1 : x=1+t, y=2+t, z=6+5t$
$l_2 : x=2+t, y=-2-t, z=3-t$

23. $l_1 : \begin{cases} 5x - 4y = 0, \\ 7x + 4z + 8 = 0 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} 2x + 3y - z + 5 = 0, \\ x - 3y - 2z + 10 = 0 \end{cases}$

24. $l_1 : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 3 - t, \quad l_2 : \begin{cases} x - 2y + 2z - 1 = 0, \\ 3x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$

25. $l_1 : -x = y = z - 5, \quad l_2 : \begin{cases} 2x + 3y - z + 5 = 0, \\ -x + 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

26. $l_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{5}, \quad l_2 : \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-8}{3}$

27. $l_1 : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-7}, \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$

28. $l_1 : \begin{cases} 2x + 3y - z - 2 = 0, \\ 3x + y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ $\quad l_2 : \begin{cases} 4x + y - z + 5 = 0, \\ 3x + 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$

29. $l_1 : x = -1 + 3t, y = 1 - 2t, z = -1,$
$l_2 : x = 3 - 2t, y = -2 + 2t, z = 5 + 2t$

30. $l_1 : 5x = 5y - 5 = z - 1, \quad l_2 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 7 = 0 \end{cases}$

2.5 Взаимное расположение точки, прямой и плоскости в пространстве.

Даны точка A и прямая l в пространстве.
1. Выяснить, принадлежит ли точка A прямой l.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A и прямую l.

1. $A = (1, 0, 0), \quad l : x = 5 + 2t, y = 2 - t, z = 4 + t$

2. $A = (1, 2, 1), \quad l : \begin{cases} 2x + 5y + z - 2 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

3. $A = (5, 0, 3), \quad l : \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$

4. $A = (1, -2, -1), \quad l : x = -3 + 2t, y = 2 + t, z = -2 + 2t$

5. $A = (-3, 0, -3), \quad l : \begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x - 6y + 2z + 19 = 0 \end{cases}$

6. $A = (5, 2, 4), \quad l : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$

7. $A = (5, -2, 2), \quad l : x = 1 + 4t, y = 2 - 4t, z = 1 + t$

8. $A = (1, 4, 2), \quad l : \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$

9. $A = (1, -6, -3)$, $\quad l : \frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-1}$

10. $A = (7, 5, 7)$, $\quad l : x = 1 + 2t, y = 2 + 5t, z = 1 + 4t$

11. $A = (0, 0, 2)$, $\quad l : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 6 + t$

12. $A = (1, -1, 3)$, $\quad l : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0, \\ x + 3y + 2z - 16 = 0 \end{cases}$

13. $A = (2, 0, 7)$, $\quad l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$

14. $A = (1, 1, 6)$, $\quad l : x = 2t, y = 2 - 4t, z = 5 - t$

15. $A = (2, 2, 10)$, $\quad l : \begin{cases} 3x + y + 2z - 12 = 0, \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

16. $A = (-2, 0, -3)$, $\quad l : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{1}$

17. $A = (0, -2, -1)$, $\quad l : x = 2 + 6t, y = -2 - 4t, z = 4 + 9t$

18. $A = (3, 1, 11)$, $\quad l : \begin{cases} x + 6y + 2z + 2 = 0, \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

19. $A = (0, 4, 8)$, $\quad l : \frac{x+4}{-6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-9}$

20. $A = (1, 3, 9)$, $\quad l : x = 2 + 2t, y = 2, z = 10 + 5t$

21. $A = (0, 0, 1)$, $\quad l : x = 1 + 5t, y = -1 - t, z = 1 + 3t$

22. $A = (5, -1, 4)$, $\quad l : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$

23. $A = (3, 1, 4)$, $\quad l : \frac{x-6}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}$

24. $A = (1, 3, 4)$, $\quad l : x = 2 + 3t, y = 2 + t, z = 4 + 3t$

25. $A = (4, 0, 4)$, $\quad l : \begin{cases} 2x - 3y - z + 6 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$

26. $A = (0, 4, 4)$, $\quad l : \frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{6}$

27. $A = (2, 2, 4)$, $\quad l : x = 3 + 2t, y = 5 + 2t, z = 7 + 3t$

28. $A = (-1, -3, -2)$, $\quad l : \begin{cases} 2x + y - 2z + 3 = 0, \\ 3x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

29. $A = (1, -1, 1)$, $\quad l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

30. $A = (-2, 6, 4)$, $\quad l : x = 5 + t, y = -1 + 3t, z = 4 + 3t$

2.6 Взаимное расположение плоскостей.

Выяснить взаимное расположение трех плоскостей (пересекаются в одной точке, пересекаются по прямой, две параллельные плоскости пересекаются третьей, образуют призму, две совпавшие плоскости пересекаются третьей, все три совпадают).

1. $\alpha_1 : 2x - 3y + z = -3,$
$\alpha_2 : x + 2y - 2z = 3,$
$\alpha_3 : 5x - y + 4z = 7.$

2. $\alpha_1 : -2x - 2y + 3z = 3,$
$\alpha_2 : -x + 3z = 7,$
$\alpha_3 : 2x + 3y - 2z = 1.$

3. $\alpha_1 : 3x + y + 3z = -2,$
$\alpha_2 : 2x + 3y - 2z = -3,$
$\alpha_3 : x = -1 + u + v,\ y = 3 + 2u + 4v,\ z = -2 - 3u - v.$

4. $\alpha_1 : 4x + 4y + 3z = 3,$
$\alpha_2 : x = 3 + u,\ y = -1 - u + 2v,\ z = 2u - 5v,$
$\alpha_3 : x = 1 + v,\ y = 3 + 2u,\ z = 1 + 4v.$

5. $\alpha_1 : x = -1 - 2u + v,\ y = 1 - u + v,\ z = 3u - v,$
$\alpha_2 : x = 3 + 2u + 4v,\ y = 1 - u + v,\ z = -1 + 2u + v,$
$\alpha_3 : x = 5u + v,\ y = -2 - v,\ z = -1 - 2u.$

6. $\alpha_1 : -x + 3y - z = 4,$
$\alpha_2 : 2x - y + 2z = 2,$
$\alpha_3 : 2x + 3y + 2z = 10.$

7. $\alpha_1 : 2x + y - z = 2,$
$\alpha_2 : 3x + 3y + 2z = 5,$
$\alpha_3 : -x + y + 4z = 1.$

8. $\alpha_1 : x + 2y + z = 1,$
$\alpha_2 : 2x - y + 3z = 8,$
$\alpha_3 : x = 4 + u + 5v,\ y = -1 + u + v,\ z = u - v.$

9. $\alpha_1 : 4x - y + 3z = 12,$
$\alpha_2 : x = 4 - u + 3v,\ y = -1 + 2u - v,\ z = -1 - u - 2v,$
$\alpha_3 : x = 2 + u + v,\ y = -1 + v,\ z = 1 - 2u + v.$

10. $\alpha_1 : x = 1 + u,\ y = 3 - 3u + v,\ z = 2u + v,$
$\alpha_2 : x = 2 + u + 2v,\ y = 4 + v,\ z = 1 + u + 2v,$
$\alpha_3 : x = u + 5v,\ y = 2 + u,\ z = 1 - u - 3v.$

11. $\alpha_1 : 2x + y + z = 4,$
$\alpha_2 : x - 3y + 2z = 5,$
$\alpha_3 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 - u - v,\ z = -1 - u - 3v.$

12. $\alpha_1 : x + 2y - 3z = 7,$
$\alpha_2 : 2x - y + z = 4,$
$\alpha_3 : x = u - v,\ y = 1 + u + 2v,\ z = -1 + u + v.$

13. $\alpha_1 : 2x - 3y + 4z = 9,$
$\alpha_2 : x = 2 + u + 3v,\ y = -1 + 2u - 2v,\ z = u - 3v,$
$\alpha_3 : x = 2 + 3u + v,\ y = 1 + u - 3v,\ z = 1 - u - 2v.$

14. $\alpha_1 : x = 1 + u - 3v,\ y = 4 - 2u + v,\ z = -2 + u + 2v,$
$\alpha_2 : x = 2 + 2u + 2v,\ y = 2 - u + v,\ z = 1 - u - 3v,$
$\alpha_3 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 + u + v,\ z = -1 + 3u + 5v.$

15. $\alpha_1 : 2x + 2y - 3z = 1,$
$\alpha_2 : x - y + z = 2,$
$\alpha_3 : -4x - 4y + 6z + 2 = 0.$

16. $\alpha_1 : x + 2y + z = 4,$
$\alpha_2 : 2x + y + z = 6,$
$\alpha_3 : 3x + 3y + 2z = 2.$

17. $\alpha_1 : -x + 3y + 2z = 5,$
$\alpha_2 : 2x - y + z = 3,$
$\alpha_3 : x + 2y + 3z = 1.$

18. $\alpha_1 : x = 1 + u + 3v,\ y = 1 - u - v,\ z = 1 + u - v,$
$\alpha_2 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 - u - v,\ z = 2 - u - 3v,$
$\alpha_3 : x - y = 4.$

19. $\alpha_1 : x = 1 + u - v,\ y = 2 + u + v,\ z = -u - 2v,$
$\alpha_2 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 - 3u + v,\ z = 3 - 5u - 3v,$
$\alpha_3 : 3x - 4y - z = 0.$

20. $\alpha_1 : x = 1 + u,\ y = 2 + u + 3v,\ z = 1 + u + v,$
$\alpha_2 : x = 4 + 3u - 2v,\ y = -1 - u + 4v,\ z = -u - v,$
$\alpha_3 : x = -1 + 5u - 5v,\ y = 3 + 2u + v,\ z = -1 + u - v.$

21. $\alpha_1 : 2x + y + z = 4,$
$\alpha_2 : x - 3y + 2z = 5,$
$\alpha_3 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 - u - v,\ z = -u - 3v.$

22. $\alpha_1 : x + 2y - 3z = 7,$
$\alpha_2 : 2x - y + z = 4,$
$\alpha_3 : x = 2 + u - v,\ y = 1 + u + 2v,\ z = -1 + u + v.$

23. $\alpha_1 : 2x - 3y + 4z = 9,$
$\alpha_2 : x = 2 + u + 3v,\ y = -3 + 2u - 2v,\ z = -1 + u - 3v,$
$\alpha_3 : x = 2 + 3u + v,\ y = 1 + u - 3v,\ z = 1 - u - 2v.$

24. $\alpha_1 : x = 1 + u - 3v,\ y = 3 - 2u + v,\ z = 1 + u + 2v,$
$\alpha_2 : x = 2 + 2u + 2v,\ y = 2 - u + v,\ z = 1 - u - 3v,$
$\alpha_3 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 + u + v,\ z = -1 + 3u + 5v.$

25. $\alpha_1 : 2x + y - 4z = 2,$
$\alpha_2 : x + y - z = 1,$
$\alpha_3 : -3x - 3y + 3z + 3 = 0.$

26. $\alpha_1 : x = 1 + u + 2v,\ y = 2 + u + v,\ z = 3u + 5v,$
$\alpha_2 : x = 1 + u - v,\ y = 1 + 3u + v,\ z = -1 + 5u - v,$
$\alpha_3 : x = 3 - 2u,\ y = -1 + 3u + v,\ z = 1 - u + v.$

27. $\alpha_1 : 2x - 3y + 4z = 9,$
$\alpha_2 : x = 2 + u + 3v,\ y = -3 + 2u - 2v,\ z = -1 + u - 3v,$
$\alpha_3 : x = 2u + v,\ y = -3 + 2v,\ z = -u + v.$

28. $\alpha_1 : x = 1 + u - 3v,\ y = 3 - 2u + v,\ z = 1 + u + 2v,$
$\alpha_2 : x = 2 + 2u + 2v,\ y = 2 - u + v,\ z = 1 - u - 3v,$
$\alpha_3 : x = -1 + 4u + v,\ y = 2 - 3u + v,\ z = 4 - u - 2v.$

29. $\alpha_1 : x = 2 + u + 2v,\ y = u + v,\ z = 3u + 5v,$
$\alpha_2 : 2x + y - z = 4,$
$\alpha_3 : x = 3 - 2u,\ y = -1 + 3u + v,\ z = 1 - u + v.$

30. $\alpha_1 : -4x - 2y + 2z + 8 = 0,$
$\alpha_2 : 2x + y - z = 4,$
$\alpha_3 : x = 1 + u - v,\ y = 1 + 3u + v,\ z = -1 + 5u - v.$

2.7 Взаимное расположение прямой и плоскости.

Выяснить взаимное расположение прямой l и плоскости α (прямая лежит в плоскости, прямая параллельна плоскости, прямая пересекает плоскость в единственной точке). Если прямая и плоскость параллельны, написать уравнение плоскости, содержащей данную прямую и параллельной данной плоскости. Если прямая пересекает плоскость, то найти точку пересечения.

1. $l : x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 2 + t$
$\alpha : x = 1 - 4u + 2v,\ y = u + v,\ z = 3 + 5u - v$

2. $l: x=-1+2t,\ y=-1+3t,\ z=4+t$
$\alpha: x=3-2u+2v,\ y=1+2u+4v,\ z=2+4u+2v$

3. $l: \begin{cases} 3x-y-z-8=0, \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$
$\alpha: x=3+u+2v,\ y=-2+2u+v,\ z=-1+u-v$

4. $l: \begin{cases} 2x-y-z+5=0, \\ y-3z+13=0 \end{cases}$
$\alpha: x-y+z-4=0$

5. $l: \frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{5}$
$\alpha: -2x+2y-2z+8=0$

6. $l: x=1+t,\ y=1,\ z=1+2t$
$\alpha: x=1+v,\ y=u-v,\ z=u+v$

7. $l: x=2+3t,\ y=-1-t,\ z=1+5t$
$\alpha: x=2+2u+v,\ y=-1-u-v,\ z=1+3u+3v$

8. $l: \begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ x+2y+z-4=0 \end{cases}$
$\alpha: x=2+2u-v,\ y=1-u+4v,\ z=3+3u+2v$

9. $l: \begin{cases} 8x-2y-7z-8=0, \\ 4x-3z-4=0 \end{cases}$
$\alpha: 2x+y-z-2=0$

10. $l: \frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{2}$
$\alpha: -4x-2y+2z+4=0$

11. $l: x=1+t,\ y=2+t,\ z=-1+2t$
$\alpha: x=1+2u+3v,\ y=1+u-v,\ z=-1+3u+2v$

12. $l: x=4t,\ y=-2-3t,\ z=4+t$
$\alpha: x=2-u+5v,\ y=1+2u-3v,\ z=u+2v$

13. $l: \begin{cases} 2x+y-5z+22=0, \\ x-4z+16=0 \end{cases}$
$\alpha: x=2-2u+4v,\ y=2+3u-3v,\ z=1+u+v$

14. $l: \begin{cases} 4x-2y-z-1=0, \\ 3x-5y+z+2=0 \end{cases}$
$\alpha: x+y-z-3=0$

15. $l: \frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$
$\alpha: -3x-3y+3z+9=0$

16. $l: x=1+t,\ y=2+t,\ z=-1+3t$
$\alpha: x=1+2u+3v,\ y=2+u+v,\ z=3+4u+5v$

17. $l: x = -1 + 3t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + t$
$\alpha: x = 2 + 2u + v,\ y = 2 - u - v,\ z = 4 - v$

18. $l: \begin{cases} 5x - 2y - z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: x = 3 + 4u + v,\ y = 2 - 3u + 2v,\ z = 5 + 2u + 5v$

19. $l: \begin{cases} x + 4y + z - 5 = 0, \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$
$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0$

20. $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{7}$
$\alpha: -3x - 6y - 3z + 6 = 0$

21. $l: x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = t$
$\alpha: x = 1 + 3u + v,\ y = 2 - u + v,\ z = -u - v$

22. $l: x = 2t,\ y = -t,\ z = -2 + 3t$
$\alpha: x = 3 + 4u + 3v,\ y = 2 - 2u + v,\ z = -1 - u - 2v$

23. $l: \begin{cases} 3x - y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$
$\alpha: x = 1 + u + 3v,\ y = 4 + 3u + 5v,\ z = -1 - 2u - 4v$

24. $l: \begin{cases} 5x + 4y - 2z - 4 = 0, \\ 3x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$
$\alpha: x + y + 2z - 3 = 0$

25. $l: \frac{x-6}{-2} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+5}{3}$
$\alpha: 2x + 2y + 4z - 6 = 0$

26. $l: x = -1 + t,\ y = -4 + t,\ z = -8 + 3t$
$\alpha: x = 1 + 3u + v,\ y = 1 - u - 3v,\ z = 1 + 5u - v$

27. $l: x = -1 + 3t,\ y = -t,\ z = -4 + 5t$
$\alpha: x = 2 + 4u - 3v,\ y = 2 - 3u + 4v,\ z = 4 + 5u - 2v$

28. $l: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 3x - z - 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: x = 1 - 2u + v,\ y = 2 + 3u + v,\ z = 2 - u + 3v$

29. $l: \begin{cases} -4x + 3y + 3z + 8 = 0, \\ x - 12y - 3z - 11 = 0 \end{cases}$
$\alpha: 2x + y - z - 2 = 0$

30. $l: \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+1}{1}$
$\alpha: 6x + 3y - 3z - 6 = 0$

2.8 Задачи на параллельность и пересечение прямых и плоскостей.

Даны точка A и прямые l_1 и l_2 в пространстве.
1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно прямым l_1 и l_2.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через l_1 параллельно l_2.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A и пересекающей прямые l_1 и l_2. Найти точки пересечения.

1. $A = (2, 2, 1)$,
$l_1 : x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2t$,
$l_2 : x = 1 + t,\ y = 4t,\ z = 1 + t$

2. $A = (1, 3, 4)$,
$l_1 : x = 1 + 3t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + 2t$,
$l_2 : x = 2 + t,\ y = 4 + 4t,\ z = 5 - 2t$

3. $A = (3, 2, 2)$,
$l_1 : x = 1 + 2t,\ y = 1 + t,\ z = -2 + 4t$,
$l_2 : x = 1 + t,\ y = -3 + t,\ z = 1 - t$

4. $A = (1, 1, -1)$,
$l_1 : x = 2 + t,\ y = 2 + 3t,\ z = 1 + 3t$,
$l_2 : x = 1 + 2t,\ y = -2 + t,\ z = 2 + 3t$

5. $A = (9, 6, 1)$,
$l_1 : x = -1 + 2t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t$,
$l_2 : x = 2 + 3t,\ y = 2 - 2t,\ z = 3 + t$

6. $A = (1, 6, 4)$
$l_1 : \begin{cases} 3x - y - z - 5 = 0, \\ x - 3y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ 3x + y - 7z + 4 = 0 \end{cases}$

7. $A = (3, 4, 7)$,
$l_1 : \begin{cases} -x - 3y + 4 = 0, \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 2x - y - z + 5 = 0, \\ -2x - z + 9 = 0 \end{cases}$

8. $A = (1, 8, 12)$,
$l_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0, \\ 2x - z - 4 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 2x - 3y - z - 10 = 0, \\ x - 4y - 3z - 10 = 0 \end{cases}$

9. $A = (4, 2, 4)$,
$l_1 : \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0, \\ 3x + y - 2z - 6 = 0 \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - 7y + z - 18 = 0 \end{cases}$

10. $A=(1,2,3)$,

$l_1:\begin{cases} 2x-7y-3z+15=0, \\ 3x-5y+z+6=0 \end{cases}$ $\quad l_2:\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ -x+y+5z-15=0 \end{cases}$

11. $A=(3,-2,-2)$

$l_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ $\quad l_2:\begin{cases} x+y-5z+4=0, \\ x+2y-9z+8=0 \end{cases}$

12. $A=(-3,1,-2)$,

$l_1:\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ $\quad l_2:\begin{cases} 6x-y+z-13=0, \\ 4x-y-4=0 \end{cases}$

13. $A=(2,5,7)$,

$l_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{4}$ $\quad l_2:\begin{cases} x-2y-z-6=0, \\ x+z-2=0 \end{cases}$

14. $A=(-2,0,-6)$,

$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{3}$ $\quad l_2:\begin{cases} 3y-z+8=0, \\ 2x-y-z-2=0 \end{cases}$

15. $A=(-3,0,4)$,

$l_1:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{1}$ $\quad l_2:\begin{cases} 2x+y-4z+6=0, \\ y+2z-8=0 \end{cases}$

16. $A=(4,-6,-5)$

$l_1: x=5-t,\ y=4-t,\ z=6-2t$ $\quad l_2:\begin{cases} 10x-3y+2z-12=0, \\ 4x-y-4=0 \end{cases}$

17. $A=(5,5,10)$,

$l_1:\begin{cases} x+y-z=0, \\ -2x-4y+z+4=0 \end{cases}$ $\quad l_2: x=1+t,\ y=4t,\ z=7-2t$

18. $A=(4,-1,-3)$,

$l_1:\begin{cases} 2x+8y-3z-16=0, \\ 3x-10y+z+9=0 \end{cases}$ $\quad l_2: x=2-t,\ y=-2-t,\ z=t$

19. $A=(7,3,9)$,

$l_1:\begin{cases} -3x+3y-2z+2=0, \\ 3x-z-5=0 \end{cases}$ $\quad l_2: x=3+2t,\ y=-1+t,\ z=5+3t$

20. $A=(-7,-2,5)$,

$l_1:\begin{cases} x+2y+4z-9=0, \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ $\quad l_2: x=-1+3t,\ y=4-2t,\ z=2+t$

21. $A=(0,10,7)$

$l_1:\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{4}$ $\quad l_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-8}{4}=\frac{z-3}{1}$

22. $A = (-5, 0, -5)$,
$l_1 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \quad l_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-3}{2}$

23. $A = (5, -4, -8)$,
$l_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-4} \quad l_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$

24. $A = (-5, -1, -11)$,
$l_1 : \frac{x-4}{-1} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-7}{-3} \quad l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{3}$

25. $A = (5, 4, 2)$,
$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad l_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-2}{1}$

26. $A = (5, -10, -8)$
$l_1 : \begin{cases} 5x - 7y + z - 3 = 0, \\ 2x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = -1 + t,\ y = -8 + 4t,\ z = -1 + t$

27. $A = (-1, 2, 1)$,
$l_1 : \begin{cases} -3x - 7y + z + 8 = 0, \\ x + 5y + z - 8 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 3 + t,\ y = 8 + 4t,\ z = 3 - 2t$

28. $A = (0, 11, 17)$,
$l_1 : \begin{cases} 5x - 2y - 2z - 7 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 4 + 2t,\ y = 2t,\ z = -2 - 2t$

29. $A = (1, 1, -1)$,
$l_1 : \begin{cases} 3x - y - 4 = 0, \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 1 - 2t,\ y = -2 - t,\ z = 2 - 3t$

30. $A = (13, 8, 0)$,
$l_1 : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ x - 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = -4 + 6t,\ y = 6 - 4t,\ z = 1 + 2t$

2.9 Связь аффинных систем координат в пространстве.

Координаты точек O_1, A_1, B_1, C_1 заданы в некоторой аффинной системе координат $\langle O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \rangle$.
1. Доказать, что система $\left\langle O_1, \overrightarrow{O_1A_1}, \overrightarrow{O_1B_1}, \overrightarrow{O_1C_1} \right\rangle$ является аффинной системой координат.
2. Написать уравнение плоскости в этой системе координат, зная ее

уравнение $y + z = 1$ в исходной системе.
3. Найти аффинную систему координат, в которой уравнение данной плоскости имеет вид $x' = 0$.

1. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (5, 4, 3), B_1 = (2, 2, 3), C_1 = (0, 1, 4)$
2. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (0, 4, 1), B_1 = (-1, -1, -1), C_1 = (-1, 1, 0)$
3. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (2, 3, -1), B_1 = (1, 3, 1), C_1 = (5, 0, 1)$
4. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (-2, 4, 3), B_1 = (-3, 6, 4), C_1 = (-1, 2, 1)$
5. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (-3, 4, -1), B_1 = (0, 4, -3), C_1 = (-1, 3, -1)$
6. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (4, 2, 2), B_1 = (0, 1, 0), C_1 = (3, 4, -2)$
7. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (-1, 1, 2), B_1 = (-2, 0, 0), C_1 = (2, 3, 1)$
8. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (0, 4, 3), B_1 = (1, 2, 2), C_1 = (0, 6, 4)$
9. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (-1, 0, 0), B_1 = (2, 2, -1), C_1 = (-1, -1, 0)$
10. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (-2, 4, 1), B_1 = (2, 3, -3), C_1 = (-5, 5, 5)$
11. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (6, 1, 4), B_1 = (-3, 0, -3), C_1 = (0, 0, -1)$
12. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (1, -1, -1), B_1 = (5, 6, 3), C_1 = (2, 1, 0)$
13. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (2, 3, 1), B_1 = (2, 0, -1), C_1 = (4, -2, 2)$
14. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (2, 0, -3), B_1 = (3, 0, -4), C_1 = (-1, 0, 1)$
15. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (-4, 7, -1), B_1 = (-1, 5, -1), C_1 = (-3, 6, -1)$
16. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (2, 4, -2), B_1 = (3, 4, -1), C_1 = (1, 2, 0)$
17. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (2, -2, 0), B_1 = (3, 3, 2), C_1 = (3, -1, 1)$
18. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (7, 3, -1), B_1 = (3, 0, 4), C_1 = (6, 2, 1)$
19. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (2, -2, 0), B_1 = (0, -2, -3), C_1 = (1, 4, 1)$
20. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (6, 6, -1), B_1 = (0, 4, -4), C_1 = (0, 5, -5)$
21. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (2, 1, 2), B_1 = (-1, 4, 0), C_1 = (-1, 5, 0)$
22. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (0, 7, -4), B_1 = (0, 6, -3), C_1 = (3, -1, 2)$
23. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (2, 2, 0), B_1 = (3, 2, 0), C_1 = (-1, -1, 5)$
24. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (2, -3, 3), B_1 = (3, 2, -4), C_1 = (4, -2, 3)$
25. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (6, 0, 3), B_1 = (3, 0, -1), C_1 = (5, -1, 1)$
26. $O_1 = (1, 1, 1), A_1 = (1, 2, 2), B_1 = (0, 1, 6), C_1 = (1, 4, 5)$
27. $O_1 = (1, 2, 0), A_1 = (0, 3, -1), B_1 = (5, 0, -3), C_1 = (3, 1, -1)$

28. $O_1 = (3, 1, 2), A_1 = (4, 2, 7), B_1 = (3, 1, 1), C_1 = (7, 6, -2)$

29. $O_1 = (1, -1, -1), A_1 = (3, 2, -5), B_1 = (1, 3, 0), C_1 = (0, -3, 1)$

30. $O_1 = (1, 3, -2), A_1 = (6, 8, -5), B_1 = (-2, 1, 0), C_1 = (6, 4, -6)$

3 Прямые и плоскости в прямоугольной системе координат

Ниже предполагается, что координаты точек и уравнения прямых и плоскостей заданы в некоторой декартовой прямоугольной системе координат.

3.1 Взаимное расположение точек и прямых на плоскости.

Даны координаты точек A, B и C на плоскости.
1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AB.
2. Найти расстояние от точки C до прямой AB.
3. Найти проекцию точки C на прямую AB.
4. Найти точку C', симметричную точке C относительно AB.
5. Найти уравнение биссектрисы угла C треугольника ABC.
6. Найти площадь треугольника ABC.

1. $A = (1, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (0, 3)$

2. $A = (-1, -1)$, $B = (5, 2)$, $C = (-2, 2)$

3. $A = (-3, -2)$, $B = (-7, -4)$, $C = (-4, 1)$

4. $A = (7, 3)$, $B = (9, 4)$, $C = (2, 4)$

5. $A = (-5, -3)$, $B = (1, 0)$, $C = (-5, 4)$

6. $A = (2, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (4, 3)$

7. $A = (1, -1)$, $B = (4, 2)$, $C = (3, 2)$

8. $A = (0, -2)$, $B = (-2, -4)$, $C = (2, 1)$

9. $A = (5, 3)$, $B = (6, 4)$, $C = (5, 4)$

10. $A = (-1, -3)$, $B = (2, 0)$, $C = (4, 4)$

11. $A = (-2, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (-3, 4)$

12. $A = (-4, 0)$, $B = (2, 3)$, $C = (-1, -2)$

13. $A = (4,4)$, $B = (6,5)$, $C = (0,-5)$
14. $A = (-8,-2)$, $B = (-6,-1)$, $C = (-1,5)$
15. $A = (2,3)$, $B = (8,6)$, $C = (1,-1)$
16. $A = (3,1)$, $B = (4,2)$, $C = (5,4)$
17. $A = (2,0)$, $B = (5,3)$, $C = (1,-2)$
18. $A = (6,4)$, $B = (7,5)$, $C = (-1,-5)$
19. $A = (0,-2)$, $B = (1,-1)$, $C = (6,5)$
20. $A = (5,3)$, $B = (8,6)$, $C = (2,-1)$
21. $A = (1,-1)$, $B = (3,0)$, $C = (0,2)$
22. $A = (-1,-2)$, $B = (5,1)$, $C = (2,-4)$
23. $A = (7,2)$, $B = (9,3)$, $C = (-1,5)$
24. $A = (-3,-3)$, $B = (-5,-4)$, $C = (3,-7)$
25. $A = (5,1)$, $B = (-1,-2)$, $C = (2,3)$
26. $A = (1,-1)$, $B = (2,0)$, $C = (3,2)$
27. $A = (0,-2)$, $B = (3,1)$, $C = (-1,-4)$
28. $A = (4,2)$, $B = (5,3)$, $C = (5,5)$
29. $A = (-1,-3)$, $B = (-2,-4)$, $C = (-3,-7)$
30. $A = (3,1)$, $B = (0,-2)$, $C = (4,3)$

3.2 Нахождение прямой, перпендикулярной данной.

Даны координаты трех точек A, B, C в пространстве.
1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C, перпендикулярной прямой AB и лежащей с ней в одной плоскости.
2. Найти площадь треугольника ABC.
3. Найти серединный перпендикуляр к отрезку AB, лежащий в плоскости ABC.
4. В треугольнике ABC найти уравнения биссектрис и медиан.

1. $A = (1,0,2)$, $B = (3,1,3)$, $C = (0,3,4)$
2. $A = (-1,-1,1)$, $B = (5,2,4)$, $C = (-2,2,3)$
3. $A = (-3,-2,0)$, $B = (-7,-4,-2)$, $C = (-4,1,2)$
4. $A = (7,3,5)$, $B = (9,4,6)$, $C = (2,4,5)$
5. $A = (-5,-3,-1)$, $B = (1,0,2)$, $C = (-5,4,4)$

6. $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, 1, 3)$, $C = (4, 3, 0)$
7. $A = (1, -1, -1)$, $B = (4, 2, 5)$, $C = (3, 2, -2)$
8. $A = (0, -2, -3)$, $B = (-2, -4, -7)$, $C = (2, 1, -4)$
9. $A = (5, 3, 7)$, $B = (6, 4, 9)$, $C = (5, 4, 2)$
10. $A = (-1, -3, -5)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (4, 4, -5)$
11. $A = (-2, 1, 3)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (-3, 4, 5)$
12. $A = (-4, 0, 2)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (-1, -2, 1)$
13. $A = (4, 4, 6)$, $B = (6, 5, 7)$, $C = (0, -5, -1)$
14. $A = (-8, -2, 0)$, $B = (-6, -1, 1)$, $C = (-1, 5, 6)$
15. $A = (2, 3, 5)$, $B = (8, 6, 8)$, $C = (1, -1, 2)$
16. $A = (3, 1, -2)$, $B = (4, 2, 0)$, $C = (5, 4, -3)$
17. $A = (2, 0, -4)$, $B = (5, 3, 2)$, $C = (1, -2, -1)$
18. $A = (6, 4, 4)$, $B = (7, 5, 6)$, $C = (-1, -5, 0)$
19. $A = (0, -2, -8)$, $B = (1, -1, -6)$, $C = (6, 5, -1)$
20. $A = (5, 3, 2)$, $B = (8, 6, 8)$, $C = (2, -1, 1)$
21. $A = (1, -1, 1)$, $B = (3, 0, 2)$, $C = (0, 2, 3)$
22. $A = (-1, -2, 0)$, $B = (5, 1, 3)$, $C = (2, -4, -1)$
23. $A = (7, 2, 4)$, $B = (9, 3, 5)$, $C = (-1, 5, 5)$
24. $A = (-3, -3, -1)$, $B = (-5, -4, -2)$, $C = (3, -7, -3)$
25. $A = (5, 1, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$, $C = (2, 3, 4)$
26. $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 0, 3)$, $C = (3, 2, 0)$
27. $A = (0, -2, -1)$, $B = (3, 1, 5)$, $C = (-1, -4, 2)$
28. $A = (4, 2, 7)$, $B = (5, 3, 9)$, $C = (5, 5, -1)$
29. $A = (-1, -3, -3)$, $B = (-2, -4, -5)$, $C = (-3, -7, 3)$
30. $A = (3, 1, 5)$, $B = (0, -2, -1)$, $C = (4, 3, 2)$

3.3 Нахождение проекции точки на прямую и расстояния от точки до прямой.

Даны координаты точки A и прямая l.
1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l.

2. Найти расстояние от точки A до прямой l.
3. Найти проекцию точки A на прямую l.
4. Найти точку A', симметричную точке A относительно l.

1. $A = (1, 0, 1), \quad l : x = 1 + t,\ y = 2 + t,\ z = -1 + 3t$

2. $A = (-2, 1, 2), \quad l : x = -1 + 3t,\ y = 1 - t,\ z = 2 + t$

3. $A = (-1, 5, -5), \quad l : \begin{cases} 5x - 2y - z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$

4. $A = (-2, -3, -5), \quad l : \begin{cases} x + 4y + z - 5 = 0, \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$

5. $A = (3, -1, 5), \quad l : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{7}$

6. $A = (-3, -3, 3), \quad l : x = 1 + t,\ y = -2 + t,\ z = t$

7. $A = (-1, 3, 6), \quad l : x = 2t,\ y = -t,\ z = -2 + 3t$

8. $A = (4, -1, 5), \quad l : \begin{cases} 3x - y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$

9. $A = (-5, 7, 2), \quad l : \begin{cases} 5x + 4y - 2z - 4 = 0, \\ 3x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$

10. $A = (7, 5, 0), \quad l : \frac{x-6}{-2} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+5}{3}$

11. $A = (3, -1, 2), \quad l : x = -1 + t,\ y = -4 + t,\ z = -8 + 3t$

12. $A = (4, 4, -4), \quad l : x = -1 + 3t,\ y = -t,\ z = -4 + 5t$

13. $A = (3, 4, 4), \quad l : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 3x - z - 5 = 0 \end{cases}$

14. $A = (4, 3, -1), \quad l : \begin{cases} -4x + 3y + 3z + 8 = 0, \\ x - 12y - 3z - 11 = 0 \end{cases}$

15. $A = (2, 2, 1), \quad l : \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+1}{1}$

16. $A = (2, 0, -3), \quad l : x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 2 + t$

17. $A = (1, 1, 2), \quad l : x = -1 + 2t,\ y = -1 + 3t,\ z = 4 + t$

18. $A = (-1, 3, -1), \quad l : \begin{cases} 3x - y - z - 8 = 0, \\ x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

19. $A = (0, 0, 1), \quad l : \begin{cases} 2x - y - z + 5 = 0, \\ y - 3z + 13 = 0 \end{cases}$

20. $A = (2, 3, -1), \quad l : \frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{5}$

21. $A = (2, 2, 2), \quad l : x = 1 + t,\ y = 1,\ z = 1 + 2t$

22. $A = (1, 4, 0)$, $\quad l : x = 2 + 3t,\ y = -1 - t,\ z = 1 + 5t$

23. $A = (0, 1, 3)$, $\quad l : \begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$

24. $A = (1, 1, 1)$, $\quad l : \begin{cases} 8x - 2y - 7z - 8 = 0, \\ 4x - 3z - 4 = 0 \end{cases}$

25. $A = (3, 3, -1)$, $\quad l : \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{2}$

26. $A = (1, -1, 0)$, $\quad l : x = 1 + t,\ y = 2 + t,\ z = -1 + 2t$

27. $A = (0, 0, 0)$, $\quad l : x = 4t,\ y = -2 - 3t,\ z = 4 + t$

28. $A = (3, -4, 1)$, $\quad l : \begin{cases} 2x + y - 5z + 22 = 0, \\ x - 4z + 16 = 0 \end{cases}$

29. $A = (2, -2, 1)$, $\quad l : \begin{cases} 4x - 2y - z - 1 = 0, \\ 3x - 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$

30. $A = (1, 0, 3)$, $\quad l : \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$

3.4 Нахождение проекции точки на плоскость и расстояния от точки до плоскости.

Даны координаты точки A и плоскость α.
1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α.
2. Найти расстояние от точки A до плоскости α.
3. Найти проекцию точки A на плоскость α.
4. Найти точку A', симметричную точке A относительно плоскости α.

1. $A = (1, 0, 1)$,
$\alpha : x - y + z - 4 = 0$

2. $A = (-2, 1, 2)$,
$\alpha : 2x + y - z - 2 = 0$

3. $A = (-1, 5, -5)$,
$\alpha : x + y + z + 3 = 0$

4. $A = (-2, -3, -5)$,
$\alpha : -x + 2y - z + 1 = 0$

5. $A = (3, -1, 5)$,
$\alpha : 2x - y - z - 2 = 0$

6. $A = (-3, -3, 3)$,
$\alpha : 3x - y + z + 2 = 0$

7. $A = (-1, 3, 6)$,
$\alpha : x + 2y - 3 = 0$

8. $A = (4, -1, 5)$,
$\alpha : 2y - z = 4$

9. $A = (-5, 7, 2)$,
$\alpha : -x + 3z - 2 = 0$

10. $A = (7, 5, 0)$,
$\alpha : 2x + 2y - z + 1 = 0$

11. $A = (3, -1, 2)$,
$\alpha : x + 2y - z + 4 = 0$

12. $A = (4, 4, -4)$,
$\alpha : x + y - 2z = 5$

13. $A = (3, 4, 4)$,
$\alpha : x + 2y + z = 0$

14. $A = (4, 3, -1)$,
$\alpha : -2x - y + 2z + 1 = 0$

15. $A = (2, 2, 1)$,
$\alpha : x + 3y - z + 4 = 0$

16. $A = (2, 0, -3)$,
$\alpha : \; x = 1 - 4u + 2v, \; y = u + v, \; z = 3 + 5u - v$

17. $A = (1, 1, 2)$,
$\alpha : \; x = 1 + u + v, \; y = u + 2v, \; z = 2 - u + v$

18. $A = (-1, 3, -1)$,
$\alpha : \; x = -1 - 2u - v, \; y = 1 + 2u + v, \; z = 2 - u - 3v$

19. $A = (0, 0, 1)$,
$\alpha : \; x = 3u + 2v, \; y = 1 - u - v, \; z = 1 + 3u - v$

20. $A = (2, 3, -1)$,
$\alpha : \; x = 5 + 2u, \; y = 4 - 2u + 3v, \; z = 1 + 5u - 2v$

21. $A = (2, 2, 2)$,
$\alpha : \; x = 2 + 4v, \; y = 3u - 2v, \; z = u + v$

22. $A = (1, 4, 0)$,
$\alpha : \; x = 3u + 2v, \; y = -2 - 2u, \; z = 1 + u + 5v$

23. $A = (0, 1, 3)$,
$\alpha:\ x = -1 - v,\ y = 1 + u + v,\ z = 2 - 2u$

24. $A = (1, 1, 1)$,
$\alpha:\ x = 2 - u + 2v,\ y = -1 + 2u + 2v, z = 1 + 2u + 5v$

25. $A = (3, 3, -1)$,
$\alpha:\ x = u,\ y = 1 + v,\ z = 2 + 3u$

26. $A = (1, -1, 0)$,
$\alpha:\ x = -2 + u + v,\ y = -2 + 3u + 3v,\ z = 3v$

27. $A = (0, 0, 0)$,
$\alpha:\ x = 2 + 3u + 2v,\ y = 1 + u - 2v,\ z = 1$

28. $A = (3, -4, 1)$,
$\alpha:\ x = -2u - v,\ y = -2 + 2u - 2v,\ z = 2 - 2u + 4v$

29. $A = (2, -2, 1)$,
$\alpha:\ x = -1 + 2u + 2v,\ y = 3 - u + 3v,\ z = -1 + 2u + 2v$

30. $A = (1, 0, 3)$,
$\alpha:\ x = -2 - 2u - 2v,\ y = -1 + 2u + v,\ z = 3 + 2u + 2v$

3.5 Взаимное расположение плоскостей, угол между прямой и плоскостью.

Даны прямая l и плоскость α.
1. Найти плоскость, проходящую через прямую l и перпендикулярную плоскости α.
2. Найти угол между прямой l и плоскостью α.

1. $l:\ x = 1 + 2t,\ y = 3 + t,\ z = -1 + 3t$,
$\alpha:\ x = 1 - 4u + 2v,\ y = u + v,\ z = 3 + 5u - v$

2. $l:\ x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2 + t$,
$\alpha:\ x = 1 + u + v,\ y = u + 2v,\ z = 2 - u + v$

3. $l:\ x = 2 + 2t,\ y = -1 + 3t,\ z = 1 + 4t$,
$\alpha:\ x = -1 - 2u - v,\ y = 1 + 2u + v,\ z = 2 - u - 3v$

4. $l:\ x = 1 - t,\ y = -1 - t,\ z = 2 - t$,
$\alpha:\ x = 3u + 2v,\ y = 1 - u - v,\ z = 1 + 3u - v$

5. $l:\ x = 1 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = 2 - t$,
$\alpha:\ x = 5 + 2u,\ y = 4 - 2u + 3v,\ z = 1 + 5u - 2v$

6. $l: \ x = 2 + t, \ y = -1 + t, \ z = 1 - 3t,$
$\alpha: \ x = 2 + 4v, \ y = 3u - 2v, \ z = u + v$

7. $l: \ x = -1 + 3t, \ y = 1 + 5t, \ z = 2 + t,$
$\alpha: \ x = 3u + 2v, \ y = -2 - 2u, \ z = 1 + u + 5v$

8. $l: \ x = 4 - 3t, \ y = 2 - t, \ z = 3 - 2t,$
$\alpha: \ x = -1 - v, \ y = 1 + u + v, \ z = 2 - 2u$

9. $l: \begin{cases} 2x + y - 3z + 6 = 0, \\ x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = 2 - u + 2v, \ y = -1 + 2u + 2v, z = 1 + 2u + 5v$

10. $l: \begin{cases} 3x - y - z + 4 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = u, \ y = 1 + v, \ z = 2 + 3u$

11. $l: \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = -2 + u + v, \ y = -2 + 3u + 3v, \ z = 3v$

12. $l: \begin{cases} x - 2y - z + 3 = 0, \\ 2x - 7y - z + 7 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = 2 + 3u + 2v, \ y = 1 + u - 2v, \ z = 1$

13. $l: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = -2u - v, \ y = -2 + 2u - 2v, \ z = 2 - 2u + 4v$

14. $l: \begin{cases} -2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = -1 + 2u + 2v, \ y = 3 - u + 3v, \ z = -1 + 2u + 2v$

15. $l: \begin{cases} 4x - 3y - z - 12 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 13 = 0 \end{cases}$
$\alpha: \ x = -2 - 2u - 2v, \ y = -1 + 2u + v, \ z = 3 + 2u + 2v$

16. $l: \ x = 1 - 2t, \ y = 3 - t, \ z = -1 - 3t,$
$\alpha: x - y + z - 4 = 0$

17. $l: \ x = 2 - t, \ y = 1 - t, \ z = 2 - t,$
$\alpha: 2x + y - z - 2 = 0$

18. $l: \ x = 2 - 2t, \ y = -1 - 3t, \ z = 1 - 4t,$
$\alpha: x + y + z + 3 = 0$

19. $l: \ x = 1 + t, \ y = -1 + t, \ z = 2 + t,$
$\alpha: -x + 2y - z + 1 = 0$

20. $l: \; x = 1 - 2t, \; y = -3 + t, \; z = 2 - t,$
$\alpha : 2x - y - z - 2 = 0$

21. $l: \; x = 2 - t, \; y = -1 - t, \; z = 1 + 3t,$
$\alpha : 3x - y + z + 2 = 0$

22. $l: \; x = -1 - 3t, \; y = 1 - 5t, \; z = 2 - t,$
$\alpha : x + 2y - 3 = 0$

23. $l: \; x = 4 + 3t, \; y = 2 + t, \; z = 3 + 2t,$
$\alpha : 2y - z = 4$

24. $l : \begin{cases} 2x + y - 3z + 6 = 0, \\ x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha : -x + 3z - 2 = 0$

25. $l : \begin{cases} 3x - y - z + 4 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0 \end{cases}$
$\alpha : 2x + 2y - z + 1 = 0$

26. $l : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$
$\alpha : x + 2y - z + 4 = 0$

27. $l : \begin{cases} x - 2y - z + 3 = 0, \\ 3x - 9y - 2z + 10 = 0 \end{cases}$
$\alpha : x + y - 2z = 5$

28. $l : \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$
$\alpha : x + 2y + z = 0$

29. $l : \begin{cases} -2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$
$\alpha : -2x - y + 2z + 1 = 0$

30. $l : \begin{cases} 7x - 8y + z + 1 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 13 = 0 \end{cases}$
$\alpha : x + 3y - z + 4 = 0$

3.6 Скрещивающиеся прямые.

Даны уравнения двух прямых l_1 и l_2 в пространстве.
1. Написать уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2.
2. Найти расстояние между l_1 и l_2.

1. $l_1 : x = 3 + t, \; y = 2 + t, \; z = 5 - t,$
$l_2 : x = -1 + t, \; y = -6 + 3t, \; z = 2 - 2t$

2. $l_1: x=-4+t,\ y=8+5t,\ z=-1+t,$
$l_2: x=8-t,\ y=-2+t,\ z=4+2t$

3. $l_1: x=1+t,\ y=-2+2t,\ z=4-t,$
$l_2: x=10+3t,\ y=6+2t,\ z=8-2t$

4. $l_1: x=-5+3t,\ y=-3+t,\ z=2-2t,$
$l_2: x=-3-6t,\ y=6+t,\ z=5+t$

5. $l_1: x=3+t,\ y=4+t,\ z=7+3t,$
$l_2: x=-4+t,\ y=2+3t,\ z=9+5t$

6. $l_1: \begin{cases} 3x-4y-z+4=0, \\ -2x+3y+z-5=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 3x-y-3=0, \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$

7. $l_1: \begin{cases} -2x-y+7z+7=0, \\ -4x-y+9z+1=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x+3y-z+2=0, \\ 2x+8y-3z+12=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x+y+3z-11=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 2x-4y-z-12=0, \\ y+z-14=0 \end{cases}$

9. $l_1: \begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x-4y+z-4=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x+5y+z-32=0, \\ x+7y-z-34=0 \end{cases}$

10. $l_1: \begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ 3y-z-5=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 2x+y-z+15=0, \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}$

11. $l_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-1} \quad l_2: \begin{cases} -7x+y-2z+3=0, \\ 5x-y+z-3=0 \end{cases}$

12. $l_1: \frac{x+3}{1}=\frac{y-13}{5}=\frac{z}{1} \quad l_2: \begin{cases} x-y+z-14=0, \\ 3x+5y-z-10=0 \end{cases}$

13. $l_1: \frac{x-4}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{-1} \quad l_2: \begin{cases} 6x-10y-z+8=0, \\ 4x-7y-z+10=0 \end{cases}$

14. $l_1: \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+6}{-2} \quad l_2: \begin{cases} x-y+7z-26=0, \\ x+y+5z-28=0 \end{cases}$

15. $l_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{3} \quad l_2: \begin{cases} 4x-3y+z+13=0, \\ -x-3y+2z-16=0 \end{cases}$

16. $l_1: \begin{cases} 3x-5y-2z+11=0, \\ x+z-8=0 \end{cases}$
$l_2: x=2+t,\ y=3+3t,\ z=-4-2t$

17. $l_1: \begin{cases} -3x-y+8z+4=0, \\ 4x+y-9z-1=0 \end{cases}$
$l_2: x=6-t,\ y=t,\ z=8+2t$

18. $l_1 : \begin{cases} 3x - y + z - 9 = 0, \\ -2x + 3y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 4 + 3t,\ y = 2 + 2t,\ z = 12 - 2t$

19. $l_1 : \begin{cases} 3x - 5y + 2z - 4 = 0, \\ x - 5y - z - 8 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 9 + 6t,\ y = 4 - t,\ z = 3 - t$

20. $l_1 : \begin{cases} 3x + 3y - 2z - 7 = 0, \\ x - 4y + z + 6 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = -3 + t,\ y = 5 + 3t,\ z = 14 + 5t$

21. $l_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-2}$ $\quad l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-2}{-2}$

22. $l_1 : \frac{x+7}{1} = \frac{y+7}{5} = \frac{z+4}{1}$ $\quad l_2 : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-10}{2}$

23. $l_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$ $\quad l_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-14}{-2}$

24. $l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-2}$ $\quad l_2 : \frac{x-15}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$

25. $l_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ $\quad l_2 : \frac{x+6}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{5}$

26. $l_1 : \begin{cases} 4x - 7y - 3z + 17 = 0, \\ -2x + 5y + 3z - 19 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 1 + t,\ y = 3t,\ z = -2 - 2t$

27. $l_1 : \begin{cases} x + y - 6z - 10 = 0, \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 5 - t,\ y = 1 + t,\ z = 10 + 2t$

28. $l_1 : \begin{cases} -3x + 4y + 5z - 9 = 0, \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 10 + 3t,\ y = 6 + 2t,\ z = 8 - 2t$

29. $l_1 : \begin{cases} x + y + 2z + 4 = 0, \\ 2x - 4y + z - 4 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = 3 - 6t,\ y = 5 + t,\ z = 4 + t$

30. $l_1 : \begin{cases} 2x - 5y + z + 7 = 0, \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$
$l_2 : x = -3 + t,\ y = 5 + 3t,\ z = 14 + 5t$

Содержание

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
ПО ГЕОМЕТРИИ

(методическая разработка)

Составители:
Лариса Георгиевна Киселева, к.ф.-м.н., доц. каф. МЛиВА
Сергей Владимирович Сидоров, асс. каф. МЛиВА

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Литературная.
Усл. печ. л. 2. Заказ Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18 – 0099 от 14.05.01