МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

**Составители**: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2019. – 16 с.

# 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

**Дифференциальное уравнение вида** $y^{(n)} = f(x)$ решается путем последовательного интегрирования. Общее решение имеет $n$ произвольных постоянных:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения $y''' = 60x^2$.

**Решение.** Интегрируя, найдем сначала вторую производную:

$$y'' = 60\int x^2 dx = 60\frac{x^3}{3} + C_1 = 20x^3 + C_1.$$

Последовательно интегрируя еще два раза, получим общее решение:

$$y' = \int (20x^3 + C_1)dx = 5x^4 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)dx = x^5 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

# 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейные однородные дифференциальные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \ldots + cy'' + dy' + py = 0, \qquad (2.1)$$

где $a, b, \ldots c, d, p$ – константы.

Общее решение уравнений этого типа находится с помощью следующей теоремы.

**Теорема о структуре общего решения**. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \qquad (2.2)$$

где $C_1$, $C_2$ , …$C_n$ – произвольные постоянные; $y_1$, $y_2$ ,… $y_n$ – линейно-независимые частные решения уравнения (2.1).

Для нахождения частных решений следует предварительно составить **характеристическое уравнение** и найти его корни. Для этого в исходном уравнении (2.1) необходимо $y$ заменить единицей, первую производную $y'$ заменить на $k$, вторую производную $y''$ заменить на $k^2$, … $n$-ю производную – на $k^n$:

$$ak^n + bk^{n-1} + ... + ck^2 + dk + p = 0. \qquad (2.3)$$

Частные решения зависят от вида корней $k_1$, $k_2$ ,… $k_n$ характеристического уравнения (2.3).

**1 случай**. Корни – действительные числа, причем $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n$ (простые корни).

В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x}, ...\ y_n = e^{k_n x}.$$

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения $y''' + y'' - 2y' = 0.$

**Решение.** Сначала составим характеристическое уравнение:

$$k^3 + k^2 - 2k = 0.$$

$$k(k^2 + k - 2) = 0.$$

Находим его корни: $k_1$=0, $k_2$=-2 и $k_3$=1. Тогда общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{0x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{x}=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{x}.$$

**<u>2 случай</u>**. Корни – действительные числа, причем $k_1=k_2=\ldots=k_r=k$ (кратный корень, т.е. корень $k$ встречается $r$ раз).

В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1=e^{kx};\ y_2=xe^{kx},y_3=x^2e^{kx},\quad \ldots\ y_n=x^{r-1}e^{kx}.$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения:

$$y'''-4y''+4y'=0.$$

**Решение.** Сначала составим характеристическое уравнение:

$$k^3-4k^2+4k=0.$$

$$k(k^2-4k+4)=0.$$

$$k(k-2)^2=0.$$

Находим его корни: $k_1=0$, $k_2=k_3=k=2$. Простому корню $k_1$ соответствует частное решение $y_1=e^{k_1x}=e^{0x}=1$. Двукратному корню $k$ соответствуют два частных решения:

$$y_1=e^{2x};\ y_2=xe^{2x}.$$

Тогда общее решение имеет вид: $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$.

**<u>3 случай</u>**. Корни – комплексные сопряженные числа $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ (простые мнимые корни). В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения:

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 5y^{(2)} = 0.$$

**Решение.** Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 + 2k^3 + 5k^2 = 0.$$

$$k^2(k^2 + 2k + 5) = 0.$$

Находим его корни. Двукратному действительному корню $k_1=k_2=k=0$ соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{0x} = 1;\ y_2 = xe^{0x} = x.$$

Мнимым корням

$$k_{3;4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i$$

соответствуют частные решения: $y_3 = e^{-x}\cos 2x;\ y_4 = e^{-x}\sin 2x.$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}\cos 2x + C_4 e^{-x}\sin 2x.$$

**4 случай**. Корни – комплексные сопряженные числа, причем $k_{1,2}=k_{3,4}=\ldots=\alpha\pm\beta i$ (мнимые корни кратности $r$). В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x;$$

**…..**

$$y_{n-1} = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_n = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения:

$$y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0.$$

**Решение.** Составим характеристическое уравнение:

$$k^7 + 2k^5 + k^3 = 0.$$

$$k^3(k^4 + 2k^2 + 1) = 0.$$

$$k^3(k^2 + 1)^2 = 0.$$

Трехкратному действительному корню $k_1 = k_2 = k_3 = k = 0$ соответствуют три частных решения:

$$y_1 = e^{0x} = 1;\ y_2 = xe^{0x} = x;\ y_3 = x^2 e^{0x} = x^2.$$

Находим двукратные мнимые корни:

$$(k^2 + 1)^2 = 0,$$

$$(k^2 + 1)(k^2 + 1) = 0,$$

$$k^2 = -1,$$

$$k_{4,5} = k_{6,7} = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Им соответствуют четыре частных решения:

$$y_4 = \cos x;\ y_5 = \sin x;$$

$$y_6 = x\cos x;\ y_7 = x\sin x.$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + C_6 x \cos x + C_7 x \sin x.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение дифференциального уравнения $n$-го порядка.
2. Каким методом решаются дифференциальные уравнения $n$-го порядка, которые не содержат искомую функцию и ее производные ниже $n$-го порядка?
3. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением $n$-го порядка?
4. Какое уравнение называется характеристическим? Как оно составляется?
5. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка?
6. Какой вид имеют частные решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от типа корней характеристического уравнения?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001. – 592 с.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.А. Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Высш. шк., 1980. – 365 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 – М.: Наука, 1972. – 312 с.
6. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для вузов. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКА

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»