Задание: для одноопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Найти максимальный изгибающий момент и из условия прочности подобрать поперечное сечение для балки в виде двутавра и прямоугольника с соотношением сторон $h = 2b$.

Материал сталь, допускаемое напряжение 160 МПа.

Рассчитать площади поперечных сечений и сделать вывод о целесообразности применения сечения.

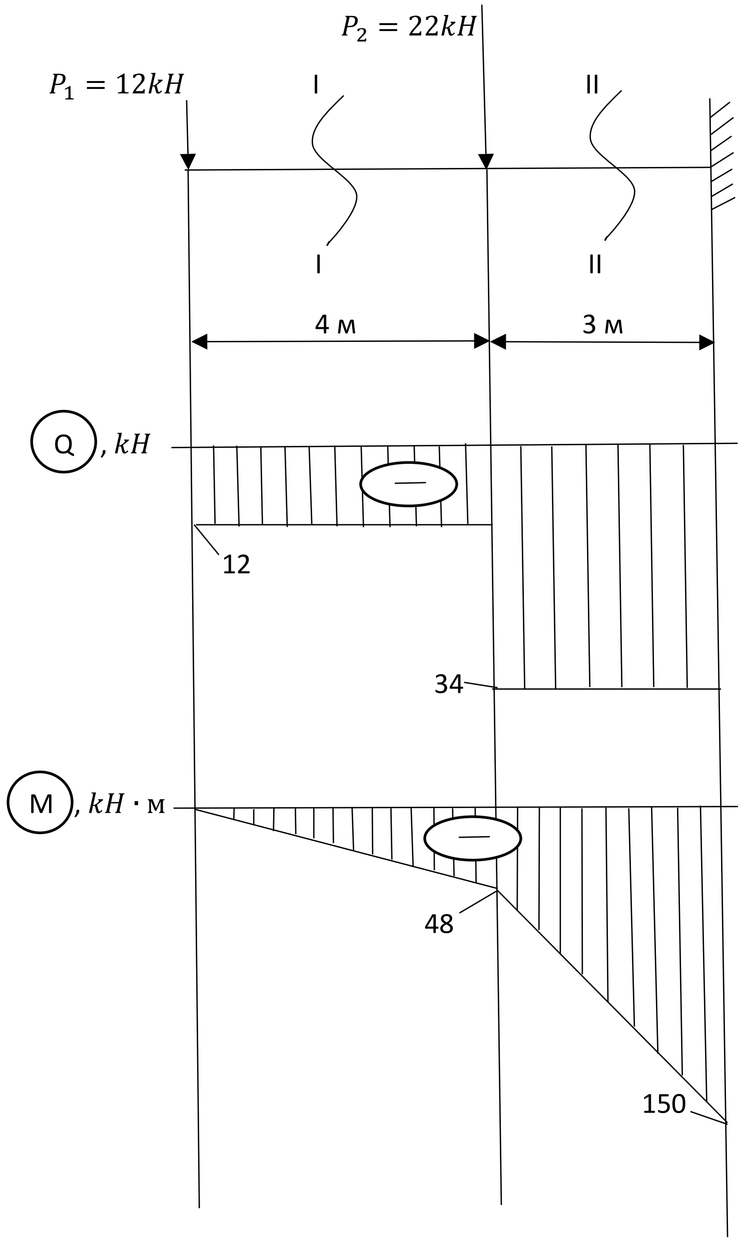
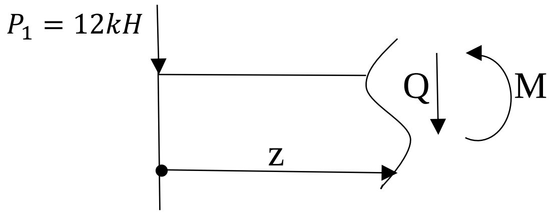


Рисунок 1 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Составляем уравнения равновесия.

Участок I-I:

$$0 \le z \le 4\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ \ Q + P_1 = 0; Q = -P_1; Q = -12kH$

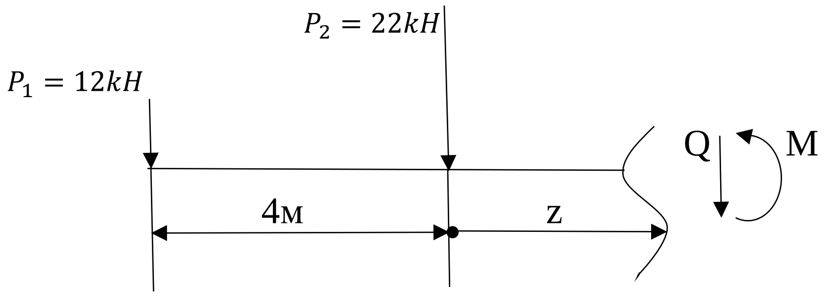
$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P_1 \cdot z = 0; M = -P_1 \cdot z;$

При $z = 0$ $M = -12 \cdot 0 = 0$

При $z = 4$м $M = -12 \cdot 4 = -48(kH \cdot \text{м})$

Участок II-II:

$$0 \le z \le 3\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ \ Q + P_1 \ + P_2 \ = 0; Q = -P_1 - P_2\,; Q = -12 - 22 = 34(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P_1 \cdot (4 + z) - P_2 \cdot z \ = 0; M = -P_1 \cdot (4 + z) \ - P_2 \cdot z;$

При $z = 0$ $M = -12 \cdot (4 + 0) - 22 \cdot 0 = -48(kH \cdot \text{м})$

При $z = 3$м $M = -12 \cdot (4 + 3) - 22 \cdot 3 = -150(kH \cdot \text{м})$

Выбираем соответствующий масштаб и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.1).

Итак, максимальный изгибающий момент $M_{\text{и}} = 150kH \cdot$ м.

Опасным сечением является сечение, где действует максимальный изгибающий момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении **по условию прочности**:

$$\sigma_{и}^{max} = \frac{M_{и}}{W_x} \leq [\sigma_{и}], \qquad (1)$$

где $\sigma_{и}^{max}$ – нормальное напряжение на поверхности при изгибе;

$M_{и}$ – максимальный изгибающий момент в сечении;

W_x – осевой момент сопротивления сечения;

$[\sigma_{и}]$ – допускаемое напряжение.

Для балки в виде двутавра:

$$W_x \geq \frac{M_{и}}{[\sigma_{и}]} \qquad (2)$$

$$W_x \geq \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 937{,}5 \cdot 10^3(мм^3) = 937{,}5(см^3)$$

По таблице 3.2 (Приложение 3 ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр № 40: момент сопротивления $W_x = 953 см^3$; площадь поперечного сечения $А_{двутавр} = 72{,}6 см^2$.

Для балки в виде прямоугольника:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}, \qquad (3)$$

где b и h – стороны прямоугольника.

По условию задачи $h = 2b$, тогда из уравнения (3) получаем:

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}$$

Таким образом,

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}}; \ b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 937{,}5}{2}} = 11{,}2(см)$$

$$h = 2 \cdot 11{,}2 = 22{,}4(см).$$

Площадь поперечного сечения

$$А_{прямоугольник} = b \cdot h; \ А_{прямоугольник} = 11{,}2 \cdot 22{,}4 = 250{,}88(см^2)$$

Итак,

$$\frac{A_{\text{прямоугольник}}}{A_{\text{двутавр}}} = \frac{250{,}88}{72{,}6} = 3{,}5$$

Вывод: балка прямоугольного сечения в 3,5 раза тяжелее, поэтому целесообразно применять сечение двутавр.

Задание 4.2: для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой силой с моментом m, определить реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, найти максимальный изгибающий момент.

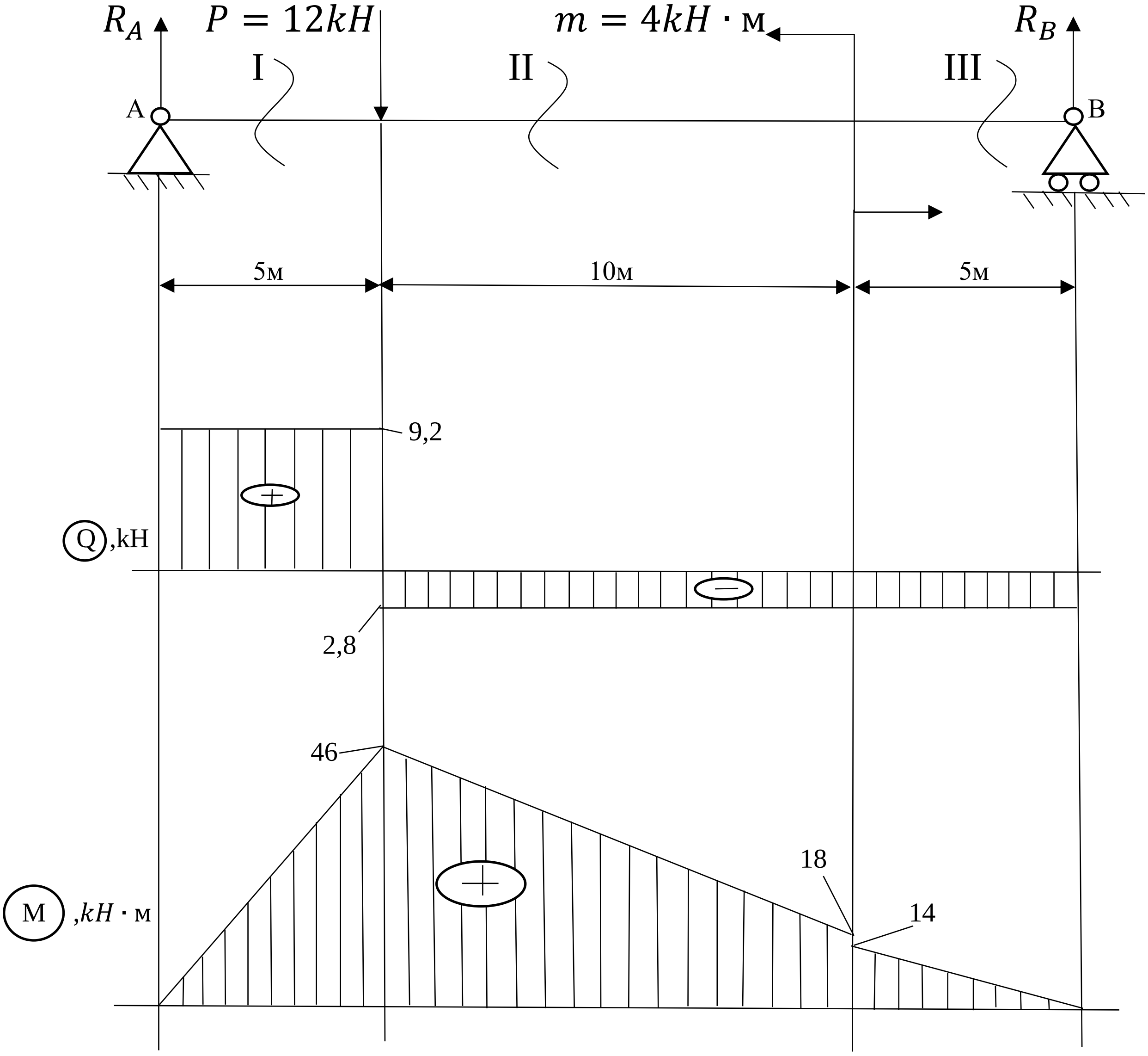


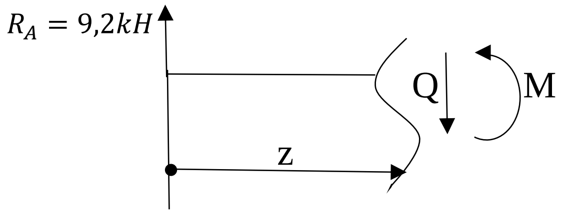
Рисунок 1 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (задание 4.2)

1. Определяем реакции в опорах.
   $\sum m_A(P_k) = 0;\ -P \cdot 5 + m + R_B \cdot 20 = 0$
   $R_B = \frac{P \cdot 5 - m}{20};\ R_B = \frac{12 \cdot 5 - 4}{20} = 2{,}8(kH)$
   $\sum Y_k = 0;\ R_A - P + R_B = 0$
   $R_A = P - R_B;\ R_A = 12 - 2{,}8 = 9{,}2(kH)$

2. Определяем поперечные силы и изгибающие моменты.

Участок I:

$$0 \le z \le 5\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ -Q + R_A = 0; Q = R_A; Q = 9{,}2kH$

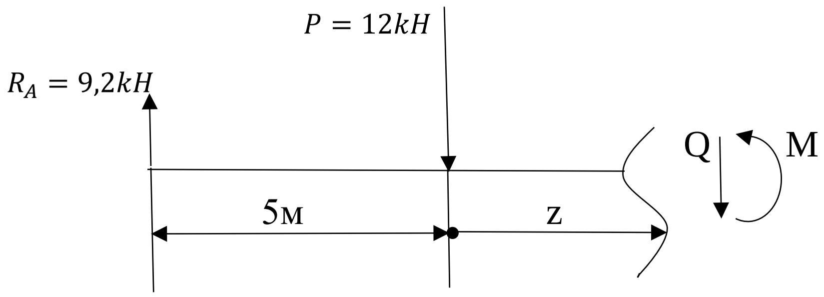
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot z = 0; M = R_A \cdot z;$

При $z = 0$ $M = 9{,}2 \cdot 0 = 0$

При $z = 5\text{м}$ $M = 9{,}2 \cdot 5 = 46(kH \cdot \text{м})$

Участок II:

$$0 \le z \le 10\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P\ + R_A\ = 0; Q = -P\ + R_A\ ; Q = -12 + 9{,}2 = -2{,}8(kH)$

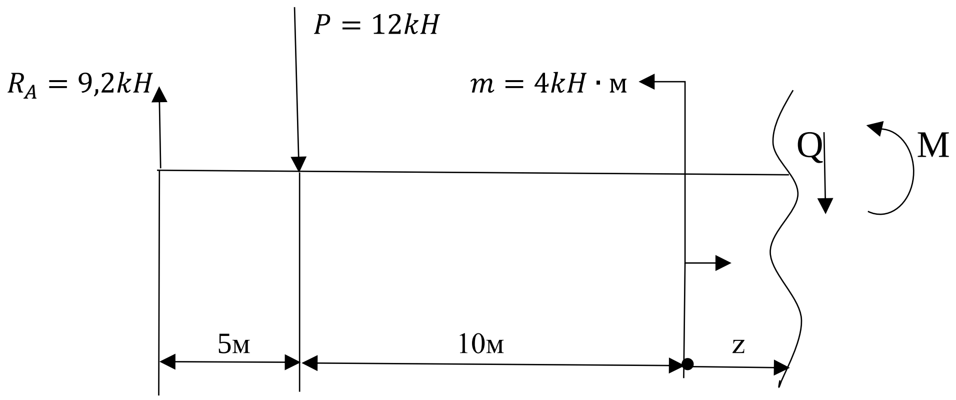
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (5 + z) - P \cdot z\ = 0; M = R_A \cdot (5 + z) - P \cdot z\ ;$

При $z = 0$ $M = 9{,}2 \cdot (5 + 0) - 12 \cdot 0 = 46(kH \cdot \text{м})$

При $z = 10\text{м}$ $M = 9{,}2 \cdot (5 + 10) - 12 \cdot 10 = 18(kH \cdot \text{м})$

Участок III:

$$0 \leq z \leq 5\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P\ + R_A\ = 0; Q = -P\ + R_A\ ; Q = -12 + 9{,}2 = -2{,}8(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (15 + z) - P \cdot (10 + z) - m\ = 0;$

$$M = R_A \cdot (15 + z) - P \cdot (10 + z) - m\ ;$$

При $z = 0$ $M = 9{,}2 \cdot (15 + 0) - 12 \cdot (10 + 0) - 4 = 14(kH \cdot \text{м})$

При $z = 5\text{м}$ $M = 9{,}2 \cdot (15 + 5) - 12 \cdot (10 + 5) - 4 = 0(kH \cdot \text{м})$

3. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.1) и определяем максимальный изгибающий момент: $M_{max} = 46kH \cdot \text{м}$.

Ответ: $R_A = 9{,}2kH$; $R_B = 2{,}8kH$; $M_{max} = 46kH \cdot \text{м}$.

Задание 4.3: для изображенной балки на рисунке 2 определить реакции в опорах, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, найти максимальный изгибающий момент.

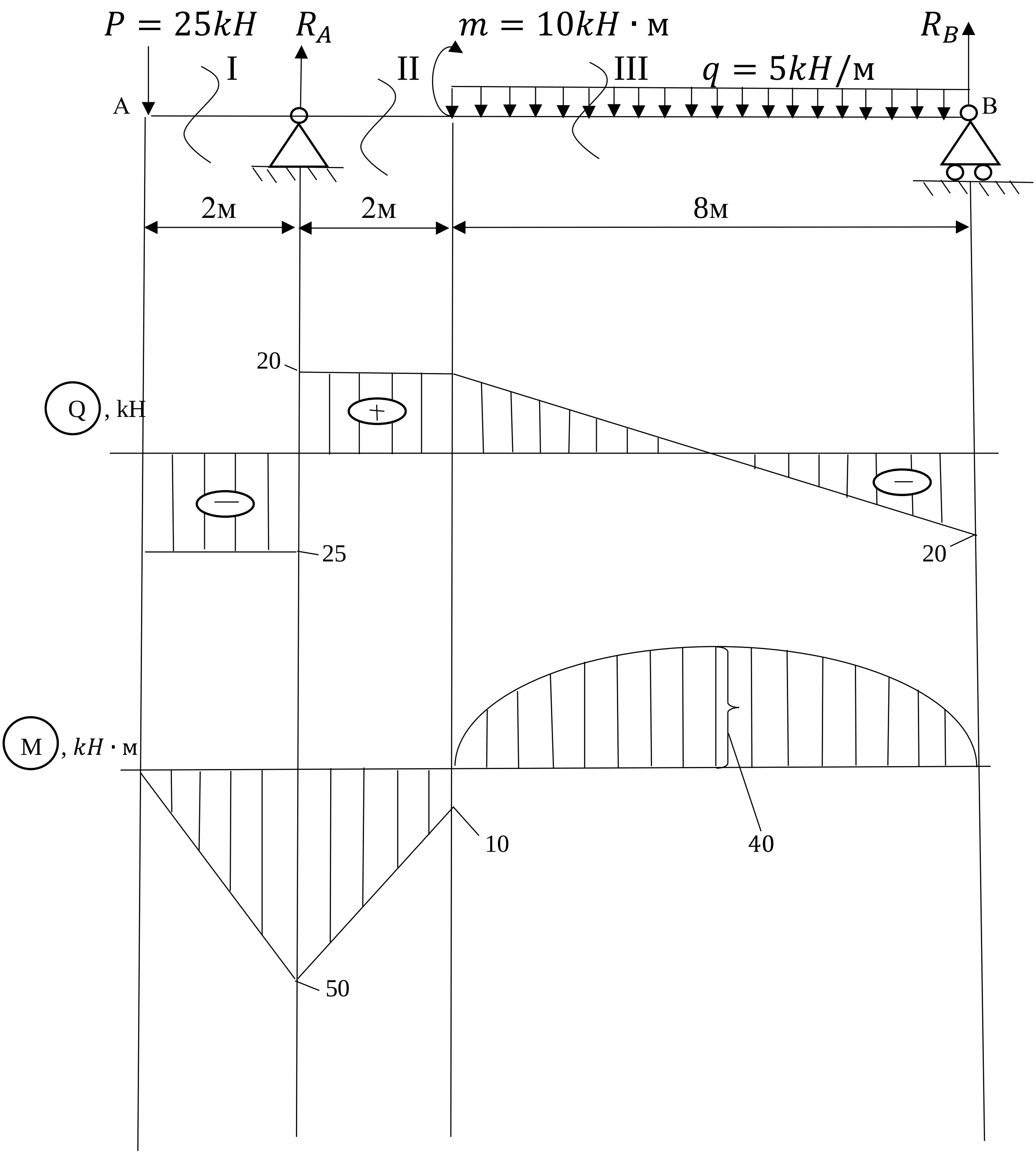


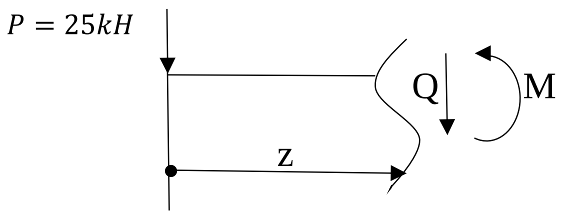
Рисунок 2 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (задание 4.3)

1. Определяем реакции в опорах.
   $\sum m_A(P_k) = 0;\ P \cdot 2 - m - q \cdot 8 \cdot 6 + R_B \cdot 10 = 0$
   $R_B = \frac{-P \cdot 2 + m + q \cdot 8 \cdot 6}{10};\ R_B = \frac{-25 \cdot 2 + 10 + 5 \cdot 8 \cdot 6}{10} = 20(kH)$
   $\sum Y_k = 0;\ R_A - P - q \cdot 8 + R_B = 0$
   $R_A = P + q \cdot 8 - R_B;\ R_A = 25 + 5 \cdot 8 - 20 = 45(kH)$

2. Определяем поперечные силы и изгибающие моменты.

<u>Участок I:</u>

$0 \le z \le 2$м



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P = 0; Q = -P; Q = -25kH$

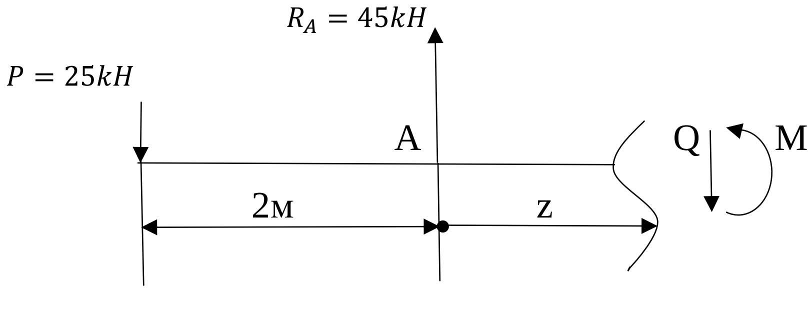
$\sum m_x(P_k) = 0; -M - P \cdot z = 0; M = -P \cdot z;$

При $z = 0$ $M = 25 \cdot 0 = 0$

При $z = 2$м $M = -25 \cdot 2 = -50(kH \cdot$м$)$

<u>Участок II:</u>

$0 \le z \le 2$м



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P + R_A = 0; Q = -P + R_A; Q = -25 + 45 = 20(kH)$

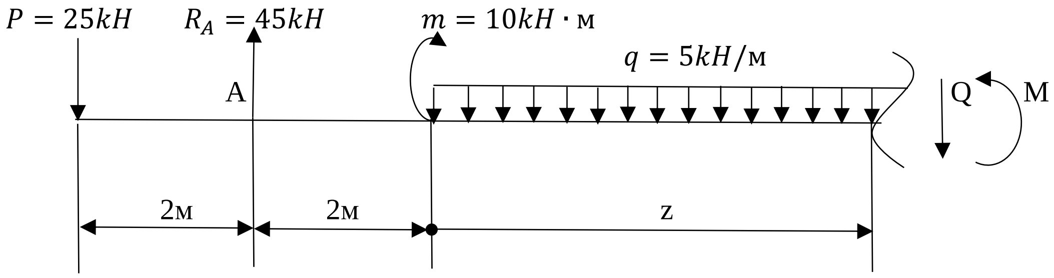
$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot z - P \cdot (2+z) = 0; M = R_A \cdot z - P \cdot (2+z);$

При $z = 0$ $M = 45 \cdot 0 - 25 \cdot (2+0) = -50(kH \cdot \text{м})$

При $z = 2\text{м}$ $M = 45 \cdot 2 - 25 \cdot (2+2) = -10(kH \cdot \text{м})$

Участок III:

$$0 \le z \le 8\text{м}$$



$\sum Y_k = 0;\ -Q - P + R_A - q \cdot z = 0; Q = -P + R_A - q \cdot z;$

При $z = 0$ $Q = -25 + 45 - 5 \cdot 0 = 20(kH)$

При $z = 8\text{м}$ $Q = -25 + 45 - 5 \cdot 8 = -20(kH)$

$\sum m_x(P_k) = 0; -M + R_A \cdot (2+z) - P \cdot (4+z) + m - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0;$

$$M = R_A \cdot (2+z) - P \cdot (4+z) + m - q \cdot \frac{z^2}{2};$$

При $z = 0$ $M = 45 \cdot (2+0) - 25 \cdot (4+0) + 10 - 5 \cdot \frac{0^2}{2} = 0(kH \cdot \text{м})$

При $z = 8\text{м}$ $M = 45 \cdot (2+8) - 25 \cdot (4+8) + 10 - 5 \cdot \frac{8^2}{2} = 0(kH \cdot \text{м})$

При $z = 4\text{м}$ $M = 45 \cdot (2+4) - 25 \cdot (4+4) + 10 - 5 \cdot \frac{4^2}{2} = 40(kH \cdot \text{м})$

3. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.2) и определяем максимальный изгибающий момент: $M_{max} = 50kH \cdot \text{м}$.

Ответ: $R_A = 45kH$; $R_B = 20kH$; $M_{max} = 50kH \cdot \text{м}$.