В.А. Голубков, А.А. Ефимов, В.В. Колесников, С.Ю. Мельников

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

методические указания к выполнению практических заданий
по электротехническим курсам дисциплин

Часть 1

2018 г.

УДК 621.3.01

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент ГУАП *М.А. Волохов*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета в качестве
методических указаний к выполнению практических заданий

В.А. Голубков, А.А. Ефимов, В.В. Колесников, С.Ю. Мельников

Расчет электрических цепей: Часть 1. Методические указания к выполнению практических заданий по электротехническим курсам дисциплин/ В. А. Голубков, А. А. Ефимов, В. В. Колесников, С. Ю. Мельников. - СПб.: ГУАП, 2018. 57 с.

Методические указания по расчету электрических цепей состоят из четырех частей. В первой части представлены задания для расчета линейных резистивных электрических цепей постоянного тока и простых линейных цепей гармонического тока. Рассмотрены основные методы анализа цепей, приведены варианты расчетных заданий по каждой теме и примеры их выполнения.

Методические указания предназначены для студентов всех направлений и специальностей ГУАП, учебные планы которых предполагают изучение курсов ТОЭ, ОТЦ или Электротехники.

СОДЕРЖАНИЕ

Задание 1

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Задача 1.1 Метод преобразований

Простейшая электрическая цепь содержит один источник (напряжения или тока) и пассивные элементы, соединенные последовательно или параллельно. Анализ таких цепей целесообразно проводить методом преобразований, основанным на определении эквивалентного (входного) сопротивления цепи относительно зажимов источника. Зная эквивалентное сопротивление цепи, с помощью закона Ома можно найти токи в ветвях схемы и напряжения на ее элементах.

При последовательном соединении элементов электрической цепи через них протекает один и тот же ток. Например, через сопротивления R_1 и R_2 (рис.1.1,*а*), соединенные друг с другом только одной парой выводов, протекает один и тот же ток I. В этом случае участок цепи с последовательно соединенными сопротивлениями R_1 и R_2 можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $R_{12} = R_1+R_2$ (рис.1.1,*б*).

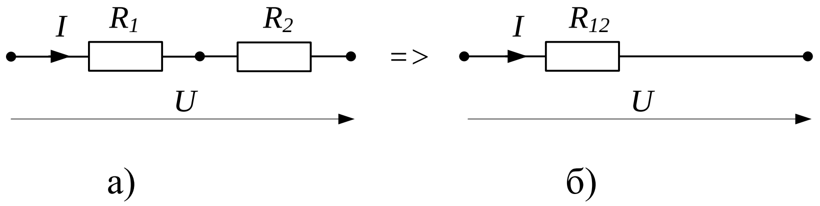


Рис. 1.1

В общем случае при *n* последовательно соединенных элементах эквивалентное сопротивление участка цепи R_{1n} равно

$$R_{1n} = \sum_{k=1}^{n} R_k .$$

Параллельно соединенные элементы находятся под одним и тем же напряжением и соединены друг с другом двумя парами выводов, например, сопротивления R_1 и R_2 (рис.1.2,*а*).

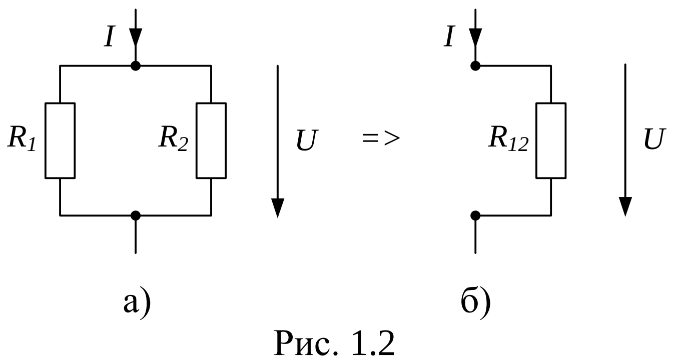


Рис. 1.2

В этом случае участок цепи с параллельно соединенными R_1 и R_2 можно заменить одним эквивалентным сопротивлением R_{12} (рис.1.2, б), величина которого определяется из выражения:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ или } G_{12} = G_1 + G_2,$$

где $G = \dfrac{1}{R}$ – проводимость.

В общем случае для n параллельно соединенных элементов справедлива формула:

$$\frac{1}{R_{1n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

При двух параллельно соединенных элементах выражение для эквивалентного сопротивления участка цепи принимает вид:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_1}{R_1 + R_1}.$$

Правильность расчета токов в ветвях схемы можно проверить по балансу мощности, заключающемуся в равенстве мощности, отдаваемой источником, и мощности, рассеиваемой на сопротивлениях цепи.

Мощность источника ЭДС определяется выражением:

$$P_E = E \cdot I_E,$$

где E – ЭДС источника, I_E – ток, отдаваемый им во внешнюю цепь.

Мощность источника тока:

$$P_J = U_J \cdot J,$$

где U_J – напряжение на зажимах источника тока, J – ток источника.

Суммарная мощность, рассеиваемая на сопротивлениях схемы, определяется по формуле:

$$P_R = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 \cdot R_k,$$

где n – количество ветвей схемы, I_k и R_k – соответственно ток и суммарное сопротивление k-й ветви.

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.1. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, обозначить узлы и элементы, указать стрелками предполагаемое направление тока в ветвях, ориентируясь на направление ЭДС или тока источника. Рекомендуется использовать одинаковый индекс при обозначении сопротивлений и токов в одной и той же ветви (например, в первой ветви – сопротивление R_1 и ток I_1).

Для заданного варианта задачи из прил.1 выполнить следующее:

– определить входное сопротивление (проводимость);

– рассчитать токи в ветвях и напряжения на всех элементах цепи;

– проверить баланс мощности.

Пример 1.1. Рассчитать цепь, схема которой представлена на рис.1.3,*а*. Параметры цепи, после обозначения узлов и элементов (рис.1.3,*б*), следующие: E = 5 В; R_1 = 10 Ом; R_2 = 6 Ом; R_3 = 5 Ом; R_4 = 20 Ом.

Решение. Зададим положительное направление токов в ветвях. Найдем на схеме участки с параллельным соединением сопротивлений и заменим их эквивалентным сопротивлением. Сопротивления R_3 и R_4, подсоединенные к узлам 2 и 3, находятся под одним и тем же напряжением, поэтому включены параллельно, и их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением R_{34}, упростив схему (1.3,*в*):

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом}.$$

В получившейся после преобразования схеме сопротивления R_2 и R_{34} соединены последовательно, так как через них протекает один и тот же ток. Их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением R_{234} (1.4,*г*):

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 6 + 4 = 10 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_1 и R_{234} подключенные к узлам 1 и 3, находятся под одним и тем же напряжением, поэтому включены параллельно, их можно заменить эквивалентным сопротивлением R_{1234} (рис. 1.3,*д*):

$$R_{1234} = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234}} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом}.$$

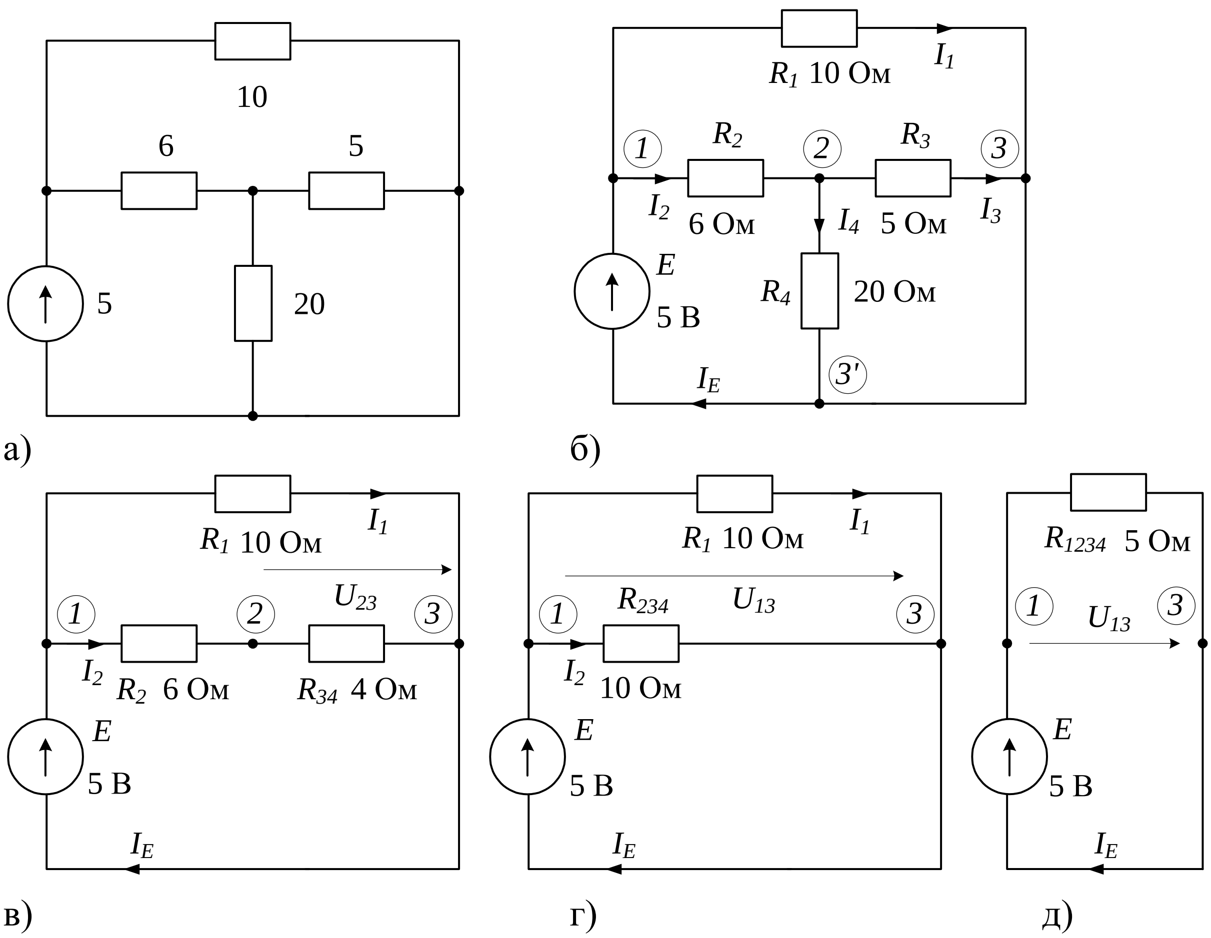


Рис.1.3

Используя закон Ома, определим ток I_E источника:

$$I_E = \frac{E}{R_{1234}} = \frac{5}{5} = 1\,\text{А}.$$

Падение напряжения U_{13} между узлами 1 и 3 равно по величине ЭДС источника E и является одновременно напряжением на сопротивлениях R_1 и R_{234} (рис. 1.3,*г*):

$$U_{13} = U_{R1} = |E| = 5\text{ В}.$$

По закону Ома можно вычислить токи I_1 и I_2 в ветвях схемы:

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{5}{10} = 0.5\,\text{А}, \qquad I_2 = \frac{E}{R_{234}} = \frac{5}{10} = 0.5\,\text{А}.$$

Ток I_2, проходя через сопротивление R_{34} (рис.1.3,*в*), создает на нем падение напряжения U_{23}:

$$U_{23} = I_2 \cdot R_{34} = 0.5 \cdot 4 = 2\text{ В}.$$

Это напряжение приложено к сопротивлениям R_3 и R_4 (рис.1.3,*б*), поэтому токи через них:

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{2}{5} = 0.4\,\text{А}, \qquad I_4 = \frac{U_{23}}{R_4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{2}{20} = 0.1\,\text{А}.$$

Падение напряжения на сопротивлении R_2:

$$U_{R2}=I_2 \cdot R_2=0.5 \cdot 6=3 \text{ В}.$$

Результаты расчета токов и напряжений в цепи:

Элемент	***E***	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{R_2}$	$\boldsymbol{R_3}$	$\boldsymbol{R_4}$
I, А	1.0	0.5	0.5	0.4	0.1
U, В	5	5	3	2	2

Проверим правильность расчета по балансу мощности. Мощность источника ЭДС:

$$P_E=E \cdot I_E=5 \cdot 1=5 \text{ Вт}.$$

Мощность, рассеиваемая на сопротивлениях схемы:

$$P_R = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 \cdot R_k = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 =$$
$$= 0.5^2 \cdot 10 + 0.5^2 \cdot 6 + 0.4^2 \cdot 5 + 0.1^2 \cdot 20 = 2.5 + 1.5 + 0.8 + 0.2 = 5 \text{ Вт}.$$

Мощность, отдаваемая источником в цепь, равна суммарной мощности, рассеиваемой на сопротивлениях схемы:

$$P_E=P_R=5 \text{ Вт},$$

следовательно, расчет выполнен правильно.

В прил. 7 приведены результаты моделирования схемы в программе Multisim, подтверждающие результаты выполненного расчета.

Рассмотренный выше метод преобразований применим для анализа цепей только с одним источником. В общем случае, при наличии в цепи нескольких источников, расчет может быть выполнен другими способами - методом токов ветвей, контурных токов, узловых напряжений, методом наложения (суперпозиции) или методом эквивалентного источника (генератора) [1-7]. Обычно для расчета выбирают метод, дающий более простое решение, например, меньшее количество описывающих цепь уравнений системы.

Задача 1.2 Метод токов ветвей

Расчет линейной резистивной электрической цепи методом токов ветвей основан на решении системы уравнений, составленных по двум законам Кирхгофа.

Первый закон – закон токов Кирхгофа (ЗТК) гласит: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad 1.1$$

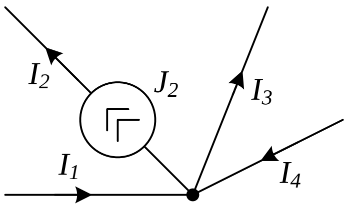
где n – число ветвей, сходящихся в узле, I_k – ток в k-й ветви.

Все токи, одинаково направленные по отношению к узлу, записываются в уравнении с одним и тем же знаком. Например, все токи, входящие в узел – со знаком "+", а все выходящие из узла – со знаком "–". Это значит, что сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла. Количество независимых уравнений, составляемых по ЗТК на единицу меньше числа узлов $n_{узл}$ в цепи:

$$n_{ЗТК} = n_{узл} - 1. \qquad 1.2$$

Запишем уравнение по ЗТК для узла, изображенного на рис.1.4,*а*:

$$I_1 - J_2 - I_3 + I_4 = 0.$$



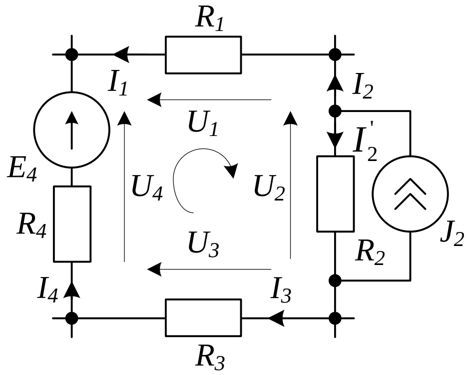


Рис.1.4

Второй закон – закон напряжений Кирхгофа (ЗНК) гласит: *алгебраическая сумма напряжений ветвей в любом контуре электрической цепи равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k = 0, \qquad 1.3$$

где m – число ветвей, входящих в контур, U_k – напряжение на k-й ветви.

Все напряжения ветвей, совпадающие по направлению с выбранным произвольно направлением обхода контура, записываются в уравнении со знаком "+", не совпадающие – со знаком "–". Количество независимых уравнений, составляемых по ЗНК, определяется выражением:

$$n_{ЗНК}= n_{вет} - n_{ЗТК} - n_J = n_{вет} - n_{узл} + 1 - n_{J.}, \qquad 1.4$$

где $n_{вет}$ и $n_{узл}$ – соответственно число ветвей и узлов электрической цепи, $n_{J.}$ – число ветвей, содержащих идеальные источники тока.

При наличии в ветви схемы *идеального* источника тока для записи уравнений по ЗНК следует выбирать контуры, не содержащие такую ветвь.

О*бобщенную ветвь* (рис.1.5,*а*), а также *реальный* источник тока (рис.1.5,*в*) для удобства расчета и уменьшения количества уравнений системы, описывающих схему, можно заменить эквивалентной ветвью, содержащей реальный источник ЭДС (рис.1.5,*г*).

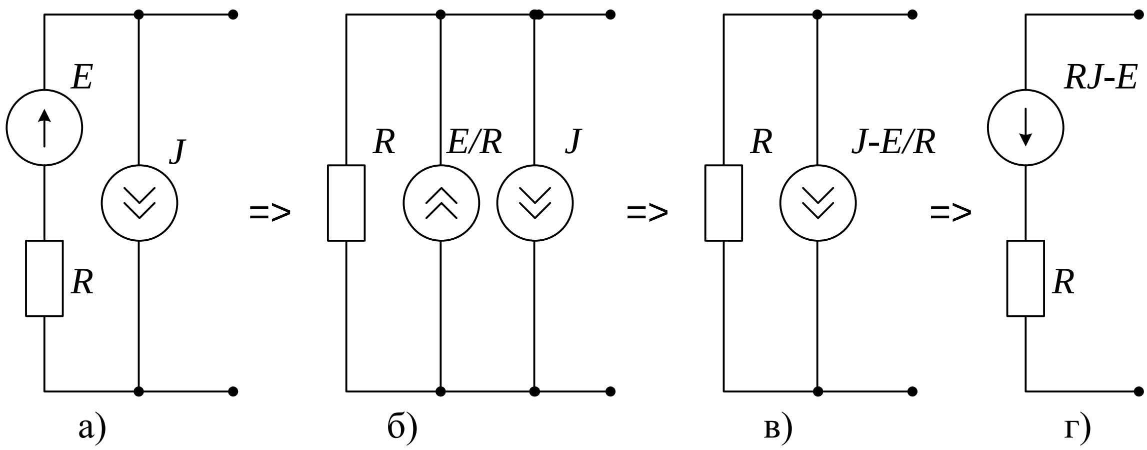


Рис.1.5

Запишем уравнение по ЗНК для контура, изображенного на рис.1.4,*б*. Выберем направление обхода контура по часовой стрелке. Учитывая, что напряжения ветвей (U_1 .. U_4), входящих в контур, совпадают по направлению с токами в ветвях, получим:

$$-U_1 - U_2 + U_3 + U_4 = 0. \qquad 1.5$$

Воспользовавшись законом Ома для участка цепи, напряжения ветвей можно переписать в виде:

$$U_1 = I_1R_1;\;\; U_2 = I_2R_2 - J_2R_2;\;\; U_3 = I_3R_3;\;\; U_4 = I_4R_4 - E_4. \qquad 1.6$$

Здесь J_2R_2 – источник ЭДС, преобразованный из реального источника тока J_2.

После подстановки (1.6) в (1.5) получим:

$$-I_1R_1 - I_2R_2 + J_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 - E_4 = 0. \qquad 1.7$$

Сгруппировав падения напряжения на сопротивлениях ветвей в левой части уравнения, а источники – в правой, запишем ЗНК для контура (рис. 1.4,*б*) в виде:

$$-I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = E_4 - J_2R_2. \qquad (1.8)$$

Таким образом, ЗНК можно представить в другой формулировке: *алгебраическая сумма падений напряжений на сопротивлениях ветвей, входящих в контур, равна алгебраической сумме ЭДС и преобразованных источников тока, действующих в контуре:*

$$\sum_{k=1} I_k R_k = \sum_{k=1} E_k + \sum_{k=1} J_k R_k. \qquad (1.9)$$

Знаки перед слагаемыми в уравнении по ЗНК (1.9) ставят в соответствии со следующим правилом

в левой части уравнения – если направление обхода контура совпадает с направлением тока в ветви, перед произведением I_kR_k ставится знак "+", иначе – знак "–".

в правой части уравнения – если направление обхода контура совпадает с указанным стрелкой направлением источника ЭДС E_k или преобразованного источника тока J_kR_k, он записывается со знаком "+", иначе – со знаком "–". В случае, когда ветви, входящие в контур, не содержат источников, правая часть уравнения по ЗНК равна нулю.

Порядок расчета цепи *методом токов ветвей* с помощью законов Кирхгофа следующий [7]:

1. Определяют количество ветвей $n_{вет}$ и узлов $n_{узл}$ в схеме, а также количество ветвей n_J, содержащих идеальные источники тока.
2. По формулам (1.2) и (1.4) вычисляют количество уравнений, описывающих схему, по ЗТК и ЗНК соответственно.
3. Задают произвольно направления токов в ветвях схемы и направления обхода контуров. При наличии в схеме идеальных источников тока следует выбирать контуры, в которые не входят ветви с этими источниками. Ток в ветви с идеальным источником тока известен, поэтому составлять уравнение для его определения не требуется.
4. Обозначают арабскими цифрами узлы схемы. Узлы, соединенные ветвью, не содержащей каких-либо элементов, должны иметь один и тот же номер.
5. Нумеруют ветви и присваивают всем элементам, находящимся в одной и той же ветви, а также току в ней одинаковый индекс, совпадающий с ее номером (например, на рис.1.4,*б* в четвертой ветви – сопротивление R_4, ток I_4, ЭДС E_4).
6. Записывают уравнения по ЗТК для выбранных узлов в соответствии с (1.1) и по ЗНК для контуров (1.9), учитывая правило знаков.
7. Решают полученную систему уравнений относительно токов ветвей.

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.2. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, обозначить узлы и элементы, указать стрелками предполагаемое направление тока в ветвях и направления обхода контуров.

Для заданного варианта схемы из прил.2 записать необходимое количество уравнений для определения токов ветвей (по законам Кирхгофа) и вычислить их.

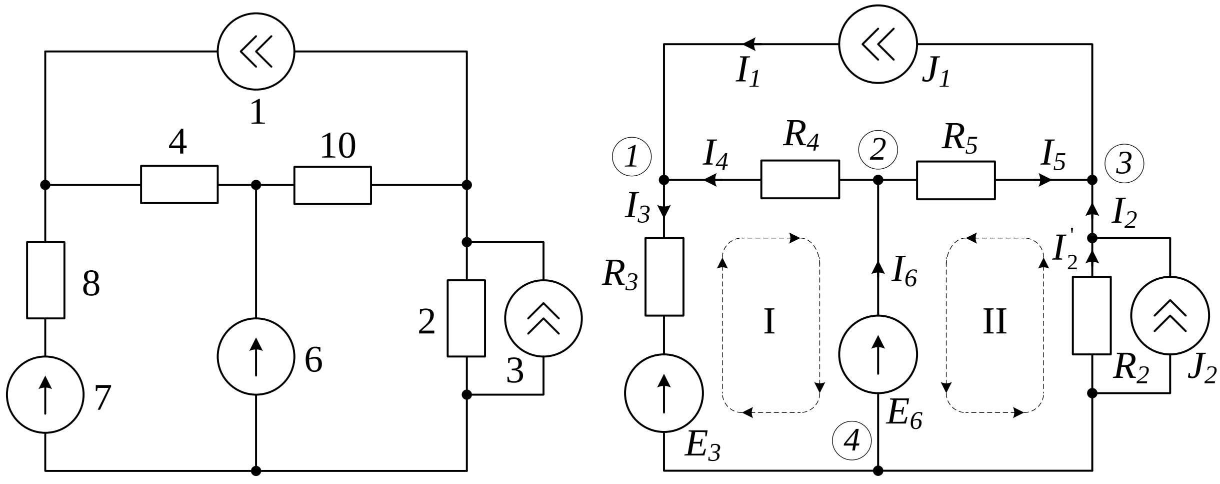
Пример 1.2. Записать уравнения методом токов ветвей и рассчитать цепь, схема которой представлена на рис.1.6,*а*.

Решение. Схема содержит шесть ветвей ($n_{\text{вет}}$=6), четыре узла ($n_{\text{узл}}$=4) и один идеальный источник тока (n_J=1).

Определим количество уравнений системы, необходимое для вычисления неизвестных токов ветвей:

$$n_{\text{ЗТК}}= n_{\text{узл}}-1=4-1=3 \text{ и } n_{\text{ЗНК}}= n_{\text{вет}}-n_{\text{ЗТК}}-n_J=6-3-1=2.$$

В общем случае, для схемы, содержащей шесть ветвей, необходимо составить шесть уравнений по ЗТК и ЗНК. Поскольку в данном примере величина тока в ветви с идеальным источником тока известна, для математического описания схемы потребуется составить систему из пяти уравнений по ЗТК и ЗНК.



а) б)

Рис.1.6

Обозначим узлы и пронумеруем элементы в ветвях схемы (рис. 1.6,*б*), зададим произвольно направления токов в ветвях. Выберем контуры и зададим произвольно направление их обхода (по или против часовой стрелки).

Ток в первой ветви уже известен: I_1=J_1=1А. Записав уравнения по ЗТК (для узлов 1, 2, 3) и по ЗНК для двух выбранных контуров (I и II), получим системy уравнений по методу токов ветвей:

$$\boxed{\begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\ -I_4 - I_5 + I_6 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_5 = 0 \\ -R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_3 - E_6 \\ R_2 I_2 - R_5 I_5 = R_2 J_2 - E_6 \end{cases}}$$

Подставив численные значения параметров и решая эту систему, найдем неизвестные токи ветвей:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
1.0 А	0.83 А	0.25 А	–0.75 А	0.17 А	–0.58 А

Определим ток $I_2^{'}$. Для этого запишем уравнение по ЗТК:

$$I_2^{'} + J_2 - I_2 = 0;$$

$$I_2^{'} = I_2 - J_2 = 0.83 - 3 = -2.17\,A.$$

Знак "–" перед величиной тока означает, что его направление противоположно ранее выбранному.

Проверим правильность расчета по балансу мощности. Вначале определим напряжения на зажимах источников тока:

$$U_{J1} = R_5 I_5 - R_4 I_4 = 10 \cdot 0.17 - 4 \cdot (-0.75) = 1.7 + 3 = 4.7 \text{ В};$$

$$U_{J2} = -R_2 I_2^{'} = -2 \cdot (-2.17) = 4.34 \text{ В}.$$

Если ток в ветви сонаправлен с источником ЭДС (противоположен напряжению на источнике), последний отдает мощность в цепь. В противном случае источник потребляет мощность. Источник тока отдает мощность в цепь, если напряжение на его зажимах противоположно направлению источника. Суммарная мощность источников в цепи определяется с учетом знака ("+" у источников, отдающих мощность, и знака "–" у потребляющих):

$$\sum P_{ист} = E_3 I_3 + E_6 I_6 + U_{J1} J_1 + U_{J2} J_2 =$$
$$= -7 \cdot 0.25 + 6 \cdot (-0.58) + 4.7 \cdot 1 + 4.34 \cdot 3 = 12.46 \text{ Вт}.$$

Мощность, рассеиваемая на сопротивлениях:

$$\sum P_R = R_2 I_2^{'2} + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 2\cdot(-2.17)^2 + 8\cdot 0.25^2 +$$
$$+4\cdot(-0.75)^2 + 10\cdot 0.17^2 = 9.42 + 0.5 + 2.25 + 0.29 = 12.46 \text{ Вт.}$$

Равенство суммарной мощности, отдаваемой источниками и потребляемой сопротивлениями схемы, свидетельствует о правильности расчета.

В прил. 7 приведены результаты моделирования схемы в программе Multisim, подтверждающие результаты выполненного расчета.

Задача 1.3 Метод контурных токов

Метод контурных токов (МКТ) основан на законе напряжений Кирхгофа (ЗНК) и позволяет уменьшить количество уравнений системы, описывающих цепь до значения:

$$n_{МКТ}=n_{ЗНК}= n_{вет} - n_{ЗТК} - n_J=n_{вет} - (n_{узл}-1)-n_J, \qquad 1.10$$

где $n_{вет}$ и $n_{узл}$ – соответственно число ветвей и узлов электрической цепи, n_J – число ветвей, содержащих идеальные источники тока.

Расчет цепи *методом контурных токов* выполняется в следующем порядке [7]:

1. Произвольно выбираются направления токов в ветвях цепи.
2. Выбирают независимые контуры (в каждый из которых входит хотя бы одна ветвь, не вошедшая в другие контуры), в них произвольно задают направление условных токов, называемых *контурными*.
3. Для каждого независимого контура записываются уравнения по ЗНК относительно контурных токов. Если два независимых контура имеют общую ветвь с идеальным источником тока, уравнение по ЗНК следует записывать для одного объединенного контура (исключив ветвь с этим источником), в котором действуют два контурных тока.
4. Полученную систему уравнений решают относительно контурных токов.
5. Определяют токи в каждой ветви как алгебраическую сумму контурных токов, проходящих через нее.

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.2. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, обозначить элементы, указать стрелками предполагаемое направление токов в ветвях, выбрать независимые контуры и произвольно задать направления контурных токов в них.

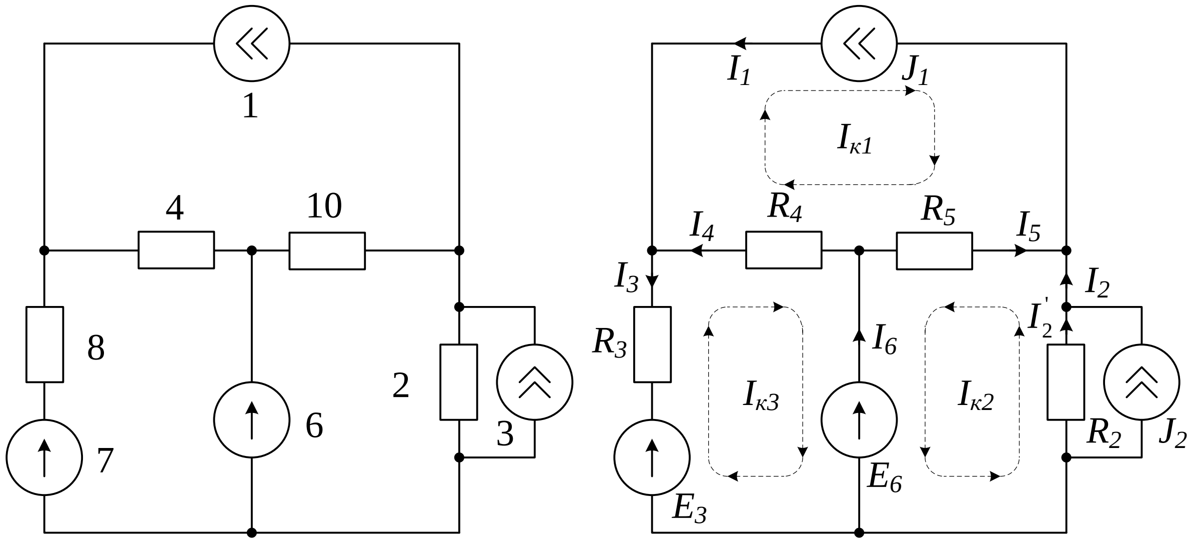
Для заданного варианта схемы из прил.2 составить систему уравнений по методу контурных токов, решить ее и вычислить токи в ветвях цепи.

Пример 1.3. Записать уравнения методом контурных токов и рассчитать токи в ветвях цепи, схема которой представлена на рис.1.7,*а*.

Решение. Пронумеруем элементы в ветвях схемы (рис. 1.7,*б*), укажем предполагаемое направление токов в ветвях, выберем три независимых контура, зададим произвольно направления контурных токов ($I_{к1}..I_{к3}$) в них.

Рассматриваемая цепь содержит шесть ветвей, четыре узла и один идеальный источник тока. По формуле (1.10) определим количество уравнений, описывающих цепь методом контурных токов:

$$n_{МКТ}=n_{вет} - (n_{узл} - 1) - n_J = 6-(4-1)-1=2$$



а) б)

Рис.1.7

В левой части уравнений по МКТ на основе ЗНК записывается сумма падений напряжений $U_k=R_kI_к$ на сопротивлениях ветвей, входящих в контур. Она определяется совместным действием контурных токов рассматриваемого и смежных контуров. В правой части уравнений записывается алгебраическая сумма ЭДС источников напряжения и преобразованных источников тока ($\sum E_{к1} + \sum R_{к1} J_{к1}$), действующих в контуре. Если направление контурного тока совпадает с направлением источника, последний записывается со знаком "+", иначе – со знаком "–".

В общем случае после перегруппировки слагаемых система уравнений для определения трех неизвестных контурных токов будет иметь вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{к1} + R_{12}I_{к2} + R_{13}I_{к3} = \sum E_{к1} + \sum R_{к1}J_{к1} \\ R_{21}I_{к1} + R_{22}I_{к2} + R_{23}I_{к3} = \sum E_{к2} + \sum R_{к2}J_{к2} \\ R_{31}I_{к1} + R_{32}I_{к2} + R_{33}I_{к3} = \sum E_{к3} + \sum R_{к3}J_{к3}. \end{cases} \qquad 1.11$$

Здесь R_{11}, R_{22}, R_{33}, – собственные сопротивления соответственно первого, второго и третьего контура, R_{12}=R_{21}, R_{13}=R_{31}, R_{23}=R_{32} – взаимные сопротивления соответствующих контуров.

Собственным сопротивлением контура называется сумма сопротивлений ветвей, входящих в контур. Сопротивление ветви (ветвей), являющейся общей для двух смежных контуров, называется *взаимным* сопротивлением. Собственное сопротивление всегда положительно, а знак взаимного сопротивления зависит от направления контурных токов смежных контуров (рис.1.8). Если эти токи совпадают на взаимном сопротивлении – оно записывается в уравнении со знаком "+" (рис.1.8, а), если не совпадают – со знаком "–".

Рис.1.8

При наличии идеального источника тока в ветви, ее сопротивление принимается равным бесконечности, т.к. внутреннее сопротивление R_J такого источника очень велико. Внутреннее сопротивление R_E идеального источника ЭДС наоборот стремится к нулю и не оказывает влияния на общее сопротивление ветви.

Запишем уравнения по МКТ для выбранных контуров (рис.1.7,*б*). Вначале определим собственные и взаимные сопротивления этих контуров:

Номер контура	Собственное сопротивление	Номера контуров	Взаимное сопротивление
1	$R_{11}=R_4+R_5+R_{J1}$	1-2	$R_{12}=R_{21}=R_5$
2	$R_{22}=R_2+R_5$	1-3	$R_{13}= R_{31}= –R_4$
3	$R_{33}= R_3+ R_4$	2-3	$R_{23}=R_{32}=0$

Первый контурный ток проходит через ветвь с идеальным источником тока J_1 (внутреннее сопротивление R_{J1} которого бесконечно) и направлен противоположно току этого источника. Поэтому уравнение для первого контура обращается в тождество:

$$I_{к1} = -J_1.$$

Тогда система уравнений относительно неизвестных контурных токов примет вид:

$$\begin{cases} I_{к1} = -J_1 \\ R_{21}I_{к1} + R_{22}I_{к2} + R_{23}I_{к3} = R_2 J_2 - E_6 \\ R_{31}I_{к1} + R_{32}I_{к2} + R_{33}I_{к3} = E_3 - E_6 \end{cases}$$

Подставив значения собственных и взаимных сопротивлений контуров, получим системy уравнений по МКТ:

$$\boxed{\begin{cases} I_{к1} = -J_1 \\ R_5 I_{к1} + (R_2 + R_5)I_{к2} + 0 \cdot I_{к3} = R_2 J_2 - E_6 \\ -R_4 I_{к1} + 0 \cdot I_{к2} + (R_3 + R_4)I_{к3} = E_3 - E_6 \end{cases}}$$

После подстановки численных значений параметров и решения системы уравнений относительно трех контурных токов, получим:

$I_{к1}$= –1 А $\qquad$ $I_{к2}$= 0.83 А $\qquad$ $I_{к3}$= –0.25 А

Выразим токи в ветвях схемы через контурные токи. Если направление контурного тока совпадает с направлением тока в ветви, последний берется со знаком "+", иначе – со знаком "–".

$$\begin{aligned} &I_1 = -I_{к1} = 1\text{А}; && I_4 = I_{к1} - I_{к3} = -1 - (-0.25) = -0.75\text{А}; \\ &I_2 = I_{к2} = 0.83\text{А}; && I_5 = -I_{к1} - I_{к2} = 1 - 0.83 = 0.17\text{А}; \\ &I_3 = -I_{к3} = 0.25\text{А}; && I_6 = -I_{к2} - I_{к3} = -0.83 - (-0.25) = -0.58\text{А}. \end{aligned}$$

Вычисленные значения токов аналогичны их величинам, рассчитанным на основе метода токов ветвей (задача 1.2):

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
1 А	0.83 А	0.25 А	–0.75 А	0.17 А	–0.58 А

Легко убедиться, что в соответствии с ЗТК, алгебраическая сумма вычисленных токов для любого узла схемы на рис. 1.7,*б* равна нулю, что свидетельствует о правильности расчета.

Задача 1.4 Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений (МУН) основан на законе токов Кирхгофа (ЗТК) и законе Ома для участка цепи. Количество уравнений системы, описывающих цепь этим методом, равно:

$$n_{МУН}=n_{ЗТК}-n_E=n_{узл}-1-n_E,$$

где $n_{узл}$ – количество узлов электрической цепи, n_E – количество ветвей, содержащих идеальные источники ЭДС.

Расчет цепи *методом узловых напряжений* выполняется в следующем порядке [7]:

1. Произвольно выбираются направления токов в ветвях цепи.
2. Один из узлов схемы выбирают в качестве опорного, его потенциал принимают равным нулю и обозначают цифрой «0». Если схема содержит ветвь с идеальным источником ЭДС, то опорный узел должен примыкать к этой ветви. Все остальные узлы схемы нумеруют цифрами, начиная с единицы. Напряжения между узлами схемы и опорным узлом называются *узловыми*.
3. Составляют систему уравнений по ЗТК для всех узлов, кроме нулевого.
4. В левой части уравнений производят замену токов в ветвях произведением собственных или взаимных проводимостей узлов на узловые напряжения. В правой части уравнений для ветвей, входящих в узел, записывают алгебраическую сумму токов источников тока и преобразованных источников ЭДС.
5. Если схема содержит ветвь с идеальным источником ЭДС, то узловое напряжение на этой ветви равно величине ЭДС (с учетом знака).
6. Решают полученную систему уравнений относительно узловых напряжений.
7. Находят ток в каждой ветви схемы из уравнения по ЗНК, составленного для контура, в который входит рассматриваемая ветвь и известные узловые напряжения.

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.2. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, указать предполагаемое направление тока в ветвях, обозначить узлы и элементы, указать стрелками, направленными к выбранному нулевому узлу, узловые напряжения.

Для заданного варианта схемы из прил.2 составить систему уравнений по методу узловых напряжений, решить ее и вычислить токи в ветвях цепи.

Пример 1.4. Записать уравнения методом узловых напряжений и рассчитать токи в ветвях цепи, схема которой представлена на рис.1.9,*а*.

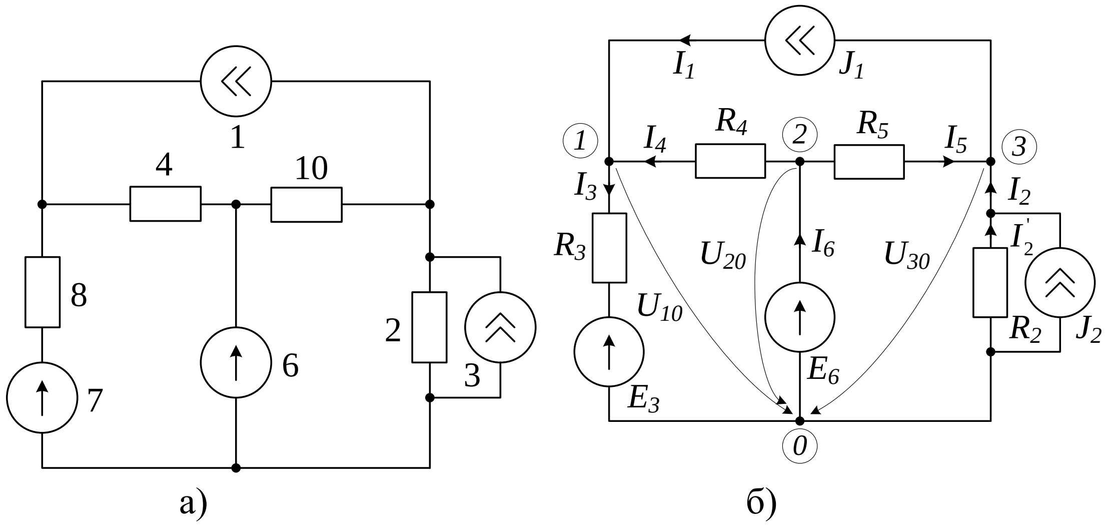


Рис.1.9

Решение. Обозначим и пронумеруем элементы в ветвях схемы (рис.1.9,*б*), укажем предполагаемое направление токов в ветвях. Так как в схеме имеется идеальный источник ЭДС E_6, то в качестве опорного (нулевого) выберем один из узлов, примыкающих к ветви с этим источником. Укажем стрелками, направленными от узлов схемы к опорному, узловые напряжения U_{10}, U_{20}, U_{30}.

В рассматриваемой схеме 4 узла, имеется одна ветвь с идеальным источником ЭДС. Количество уравнений по МУН, описывающих схему равно:

$$n_{МУН}= n_{узл} – 1 – n_{E.}=4–1–1=2$$

В левой части уравнения по МУН для каждого из узлов, кроме нулевого, на основе ЗТК и закона Ома для участка цепи записывается сумма токов ветвей, входящих в этот узел, выраженных через произведения проводимостей ветвей на узловые напряжения. Например, ток $I_3=G_3U_{10}–G_3E_3$, ток $I_4= G_4(U_{20}–U_{10})$.

В правой части уравнения по МУН записывается алгебраическая сумма источников тока и преобразованных источников напряжения ($\sum J_k + \sum G_k E_k$) ветвей, входящих в узел. Если источник направлен к узлу, он записывается в уравнении со знаком "+", иначе – со знаком "–".

В общем случае после перегруппировки слагаемых система уравнений для определения трех неизвестных узловых напряжений будет иметь вид:

$$\begin{cases} G_{11}U_{10} + G_{12}U_{20} + G_{13}U_{30} = \sum J_{k1} + \sum G_{k1}E_{k1} \\ -G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} + G_{23}U_{30} = \sum J_{k2} + \sum G_{k2}E_{k2} \\ -G_{31}U_{10} + G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = \sum J_{k3} + \sum G_{k3}E_{k3} \end{cases}$$

Здесь G_{11}, G_{22}, G_{33} – собственные проводимости соответственно первого, второго и третьего узла, G_{12}=G_{21}, G_{13}=G_{31}, G_{23}=G_{32} – взаимные проводимости двух узлов.

Собственной проводимостью узла называется сумма проводимостей ветвей, входящих в этот узел. *Взаимной проводимостью* двух узлов называется проводимость ветви (ветвей), непосредственно соединяющих эти узлы. Собственные проводимости записывается в уравнениях по МУН всегда со знаком "+", а взаимные – со знаком "–".

Проводимость G_{Jk} ветви с идеальным источником тока (имеющим бесконечное внутреннее сопротивление) равна нулю. Проводимость G_{Ek} ветви с идеальным источником ЭДС (имеющим внутреннее сопротивление, равное нулю) стремится к бесконечности.

Определим собственные и взаимные проводимости узлов схемы:

Номер узла	Собственная проводимость	Номера узлов	Взаимная проводимость
1	$G_{11}=G_{J1}+G_3+G_4$	1-2	$G_{12}=G_{21}=-G_4$
2	$G_{22}=G_4+G_5+G_{E6}$	1-3	$G_{13}=G_{31}=-G_{J1}$
3	$G_{33}=G_{J1}+G_2+G_5$	2-3	$G_{23}=G_{32}=-G_5$

Запишем систему уравнений по МУН для всех узлов рассматриваемой схемы, кроме нулевого:

$$\begin{cases} G_{11}U_{10}+G_{12}U_{20}+G_{13}U_{30}=G_3E_3+J_1 \\ G_{21}U_{10}+G_{22}U_{20}+G_{23}U_{30}=G_{E6}E_6 \\ G_{31}U_{10}+G_{32}U_{20}+G_{33}U_{30}=-J_1+J_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

Заменим собственные и взаимные проводимости узлов соответствующими проводимостями ветвей. В шестой ветви рассматриваемой схемы имеется идеальный источник ЭДС, поэтому ее проводимость G_{E6} и, соответственно, собственная проводимость G_{22} равны бесконечности. С учетом этого, в тождество $U_{20}=E_6$ обращается второе уравнение системы (1.12). Тогда система уравнений по МУН принимает вид:

$$\boxed{\begin{cases} (G_{J1}+G_3+G_4)U_{10}-G_4U_{20}-G_{J1}U_{30}=G_3E_3+J_1 \\ U_{20}=E_6 \\ -G_{J1}U_{10}-G_5U_{20}+(G_{J1}+G_2+G_5)U_{30}=-J_1+J_2 \end{cases}}$$

Подставим численные значения проводимостей, учитывая, что проводимость G_{J1} первой ветви, в которой расположен идеальный источник ЭДС, равна нулю:

$$\begin{cases}(0+\frac{1}{8}+\frac{1}{4})U_{10}-\frac{1}{4}U_{20}-0\cdot U_{30}=\frac{1}{8}7+1\\ U_{20}=6\\ -0\cdot U_{10}-\frac{1}{10}U_{20}+(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{10})U_{30}=-1+3\end{cases}\qquad \begin{cases}0,375\cdot U_{10}-0.25\cdot U_{20}=1.875\\ U_{20}=6\\ -0.1\cdot U_{20}+0.6\cdot U_{30}=2\end{cases}$$

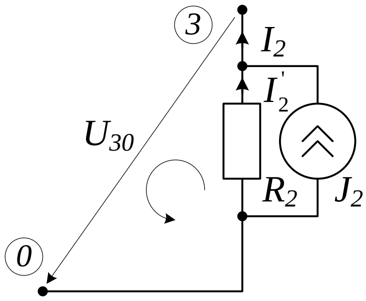
Решив полученную систему уравнений относительно трех узловых напряжений, получим:

U_{10}=9 В; U_{20}=6 В; U_{30}=4.33 В.

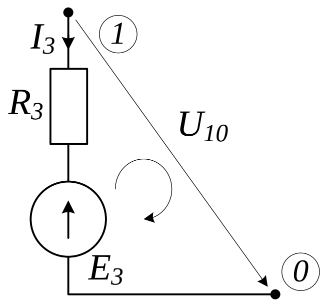
Найдем токи в ветвях цепи. Ток в первой ветви совпадает с направлением идеального источника тока в ней, поэтому:

$I_1=J_1$=1 А.

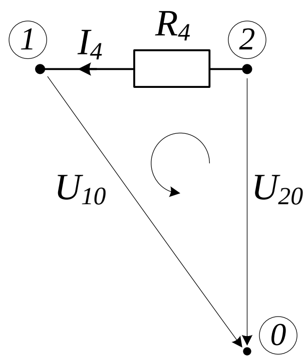
Знаая узловые напряжения, запишем уравнения по ЗНК для остальных ветвей цепи и определим токи в них:



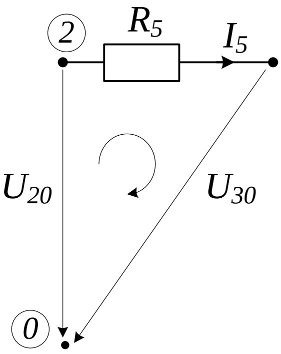
$$U_{30}+R_2I_2=R_2J_2;$$
$$I_2=\frac{R_2J_2-U_{30}}{R_2}=\frac{3\cdot 2-4.33}{2}=0.83\,\text{А}$$



$$U_{10}-R_3I_3=E_3;$$
$$I_3=\frac{U_{10}-E_3}{R_3}=\frac{9-7}{8}=0.25\,\text{А}$$



$$U_{10}-U_{20}+R_4I_4=0;$$
$$I_4=\frac{U_{20}-U_{10}}{R_4}=\frac{6-9}{4}=-0.75\,\text{А}$$



$$U_{30} - U_{20} + R_5 I_5 = 0;$$

$$I_5 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_5} = \frac{6 - 4.33}{10} = 0.17\,\text{А}$$

Ток I_6 в ветви с идеальным источником ЭДС найдем, записав уравнение по ЗТК для второго узла (рис.1.9,*б*):

$$-I_4 - I_5 + I_6 = 0.$$

Выразим ток I_6:

$$I_6 = I_4 + I_5 = -0.75 + 0.17 = -0.58\ \text{А}.$$

Вычисленные значения токов аналогичны их величинам, рассчитанным с помощью метода токов ветвей (задача 1.2) и метода контурных токов (задача 1.3):

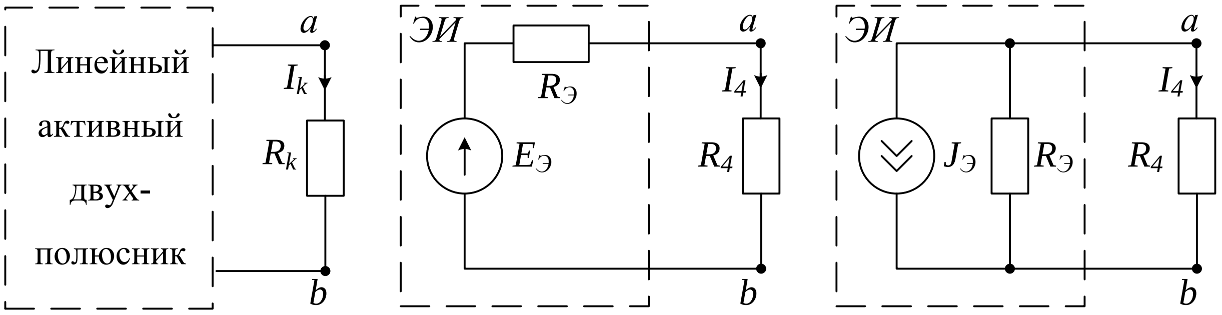
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
1.0 А	0.83 А	0.25 А	–0.75 А	0.17 А	–0.58 А

Задача 1.5 Метод эквивалентного источника

В случае, когда требуется определить ток только в одной ветви линейной цепи, для расчета рационально использовать метод эквивалентного источника (МЭИ). Суть его заключается в том, что вся цепь, кроме ветви, в которой нужно найти ток, заменяется активным двухполюсником - эквивалентным источником с ЭДС $E_Э$ (или током $J_Э$) и внутренним сопротивлением $R_Э$.

Рассматриваемый метод основан на теореме об активном двухполюснике, которая гласит: любой активный линейный двухполюсник, содержащий произвольное количество соединенных между собой источников и сопротивлений, можно заменить эквивалентной схемой, состоящей только из одного источника и одного сопротивления (рис.1.10).

Теорему о замене линейного активного двухполюсника эквивалентной схемой с последовательно включенными источником ЭДС и сопротивлением (рис.1.10,*б*) называют *теоремой Тевенина,* а о замене схемой с параллельно включенными источником тока и сопротивлением (рис.1.10,*в*) - *теоремой Нортона*.



а) б) в)

Рис.1.10

Для определения неизвестного тока через сопротивление R_k в k-й ветви необходимо определить параметры эквивалентной схемы замещения относительно зажимов a-b, к которым подключен этот элемент, по одному из двух вариантов:

1. по теореме Тевенина: эквивалентное сопротивление схемы $R_Э$ относительно разомкнутых зажимов a-b и напряжение холостого хода $U_0=E_Э$ между ними;
2. по теореме Нортона: эквивалентное сопротивление схемы $R_Э$ относительно разомкнутых зажимов a-b и ток короткого замыкания $I_0=J_Э$ между ними.

В первом варианте (рис.1.10,*б*) ток в k-й ветви определим по закону Ома:

$$I_k = \frac{E_Э}{R_Э + R_k}, \tag{1.13}$$

где R_k – сопротивление k-й ветви.

Во втором варианте (рис.1.10,*в*) искомый ток найдем по формуле делителя токов:

$$I_k = J_Э \frac{R_Э}{R_Э + R_k}. \tag{1.14}$$

В формулах (1.13) и (1.14) $R_Э$ равно сопротивлению линейного активного двухполюсника относительно разомкнутых зажимов a-b при замене источников их внутренними сопротивлениями. Источники ЭДС с внутренним сопротивлением, стремящимся к нулю, заменяют короткозамыкающими перемычками, а источники тока, внутреннее сопротивление которых стремится к бесконечности, заменяют обрывом в цепи.

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.3. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, указать предполагаемое направление тока в ветвях, обозначить элементы.

Для заданного варианта схемы из прил.3 методом эквивалентного источника найти ток через сопротивление, помеченное звездочкой.

Пример 1.5. В цепи, схема которой представлена на рис.1.11,*а*, а методом эквивалентного источника рассчитать ток через сопротивление R_4 (помеченное звездочкой). Параметры цепи: J_1 = 2 А, E_2 = 48 В, R_1 = 6 Ом, R_2 = 14 Ом, R_3 = 20 Ом, R_4 = 5 Ом.

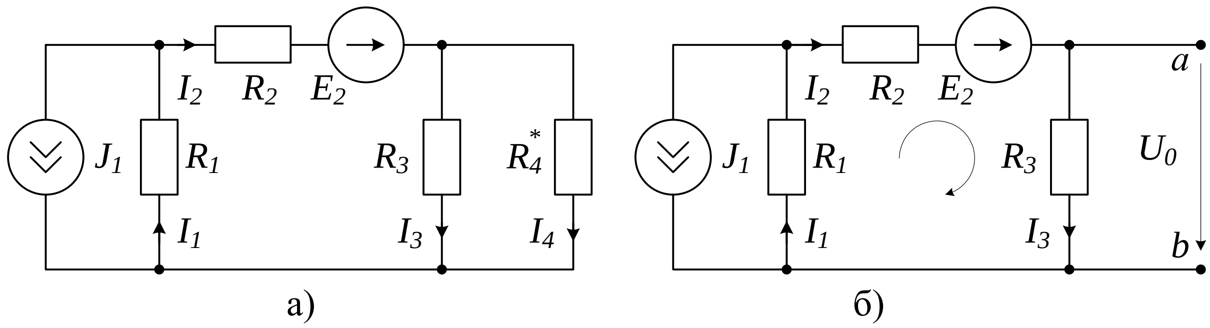


Рис.1.11

Решение. Выберем предполагаемое направление токов в ветвях. Исключим из схемы сопротивление R_4, ток через которое требуется определить. Обозначим зажимы, к которым было подключено это сопротивление буквами a и b (рис.1.11,*б*).

Заменим источник тока J_1 и источник ЭДС E_2 их внутренними сопротивлениями (рис.1.12) и рассчитаем сопротивление эквивалентного источника $R_Э$ относительно зажимов a и b:

$$R_Э = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(6+14)20}{6+14+20} = 10 \text{ Ом}.$$

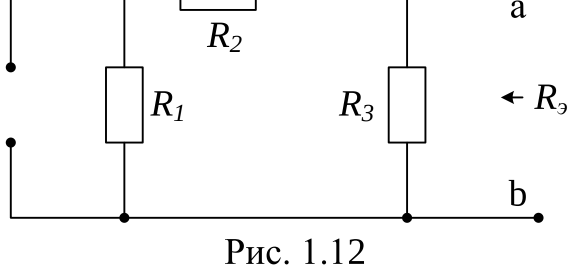
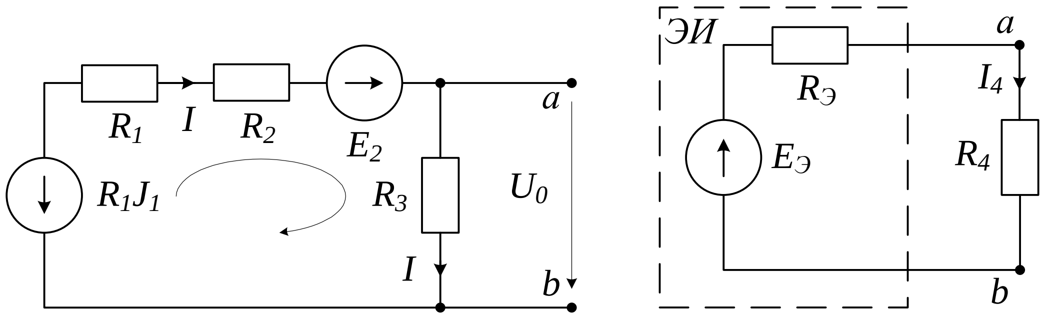


Рис. 1.12

Рассчитаем ЭДС $E_Э$ эквивалентного источника. Численно она равна напряжению холостого хода U_0 между зажимами a и b, к которым было подключено сопротивление R_4 (рис.1.11,*б*).

Для удобства расчета преобразуем реальный источник тока J_1 в реальный источник ЭДС R_1J_1 (рис.1.13,*а*) и запишем уравнение для выбранного направления обхода контура:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I = E_2 - R_1J_1.$$



а) б)

Рис. 1.13

Падение напряжения на R_3 равно U_0. Найдем ток I и напряжение холостого хода U_0:

$$I = \frac{E_2 - R_1J_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{48 - 6 \cdot 2}{6 + 14 + 20} = \frac{36}{40} = 0.9 \text{ А};$$

$$U_0 = I \cdot R_3 = 0.9 \cdot 20 = 18 \text{ В}.$$

ЭДС эквивалентного источника $E_Э$ равна по величине напряжению холостого хода:

$$E_Э = |U_0| = 18 \text{ В}.$$

Зная $E_Э$ и $R_Э$, можно заменить часть схемы, подключенную к зажимам *a* и *b*, эквивалентной схемой с последовательно включенными источником ЭДС и сопротивлением $R_Э$ (рис.1.13,*б*). Искомый ток через сопротивление R_4 определим по формуле (1.13):

$$I_4 = \frac{E_Э}{R_Э + R_4} = \frac{18}{10 + 5} = 1.2 \text{ А}.$$

Ток I_4 можно рассчитать другим способом – используя для замены схему эквивалентного источника тока. Чтобы определить ток $J_Э$ эквивалентного источника, замкнем накоротко зажимы *a* и *b* и найдем величину тока короткого замыкания I_0 (рис.1.14,*а*).

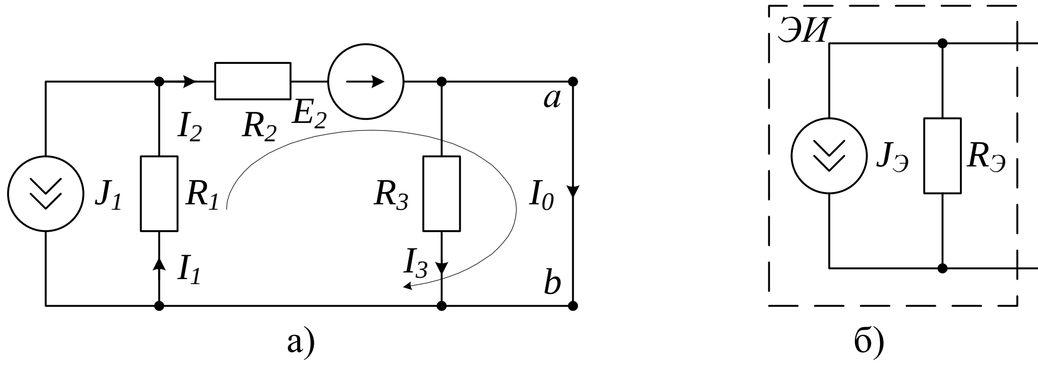


Рис. 1.14

Короткозамыкающая перемычка шунтирует ветвь с сопротивлением R_3, поэтому:

$$(R_1 + R_2)I_0 = E_2 - R_1 J_1;$$

$$I_0 = \frac{E_2 - R_1 J_1}{R_1 + R_2} = \frac{48 - 6 \cdot 2}{6 + 14} = \frac{36}{20} = 1.8 \text{ А.}$$

Ток $J_Э$ эквивалентного источника равен току короткого замыкания:

$$J_Э = I_0 = 1.8 \text{ А.}$$

Тогда исходную схему (рис.1.11, а) можно заменить схемой замещения (рис.1.14,*б*) и по формуле (1.14) рассчитать искомый ток:

$$I_4 = J_Э \frac{R_Э}{R_Э + R_4} = 1.8 \frac{10}{10 + 5} = 1.2 \text{ А.}$$

Полученное значение тока аналогично току, рассчитанному с использованием схемы эквивалентного источника ЭДС.

Зная напряжение холостого хода U_0 и ток короткого замыкания I_0, можно рассчитать сопротивление эквивалентного источника по формуле:

$$R_Э = \frac{U_0}{I_0} = \frac{18}{1.8} = 10 \text{ Ом.}$$

Выбор схемы для расчета – с использованием эквивалентного источника ЭДС или источника тока – зависит от того, какую из величин (напряжение холостого хода U_0 или ток короткого замыкания I_0) проще определить.

Задача 1.6 Метод наложения

В основе этого метода лежит принцип суперпозиции, заключающийся в следующем: если в линейной цепи имеется несколько источников постоянного тока и (или) напряжения, то реакция цепи равна сумме реакций от каждого источника в отдельности.

Расчет цепи *методом наложения* выполняется в следующем порядке [7]:

1. Обозначают элементы схемы и произвольно выбирают направления токов в ветвях.
2. Формируют так называемые частичные схемы, в каждой из которых присутствует только один источник, а остальные заменяют их внутренними сопротивлениями (идеальный источник тока – обрывом в цепи, а идеальный источник ЭДС – короткозамыкающей перемычкой).
3. Рассчитывают частичные токи в ветвях каждой из частичных схем любым известным способом (по законам Ома, Кирхгофа, методом преобразований, контурных токов или узловых напряжений).
4. Рассчитывают токи в ветвях исходной схемы как алгебраическую сумму соответствующих токов частичных схем. Частичный ток записывается со знаком "+", если он сонаправлен с током в исходной схеме, иначе – со знаком "–".

Задание

Варианты исходных данных к задаче приведены в прил.3. На всех рисунках рядом с элементами указаны их параметры: сопротивления – в омах, токи источников – в амперах, ЭДС – в вольтах.

Перед началом расчета цепи следует начертить схему по своему варианту, указать предполагаемое направление тока в ветвях, обозначить элементы.

Для заданного варианта схемы из прил.3 методом наложения найти токи во всех ветвях.

Пример 1.6. Методом наложения рассчитать токи в цепи, схема которой представлена на рис.1.15. Параметры цепи: J_1 = 2 А, E_2 = 48 В, R_1 = 6 Ом, R_2 = 14 Ом, R_3 = 20 Ом, R_4 = 5 Ом.

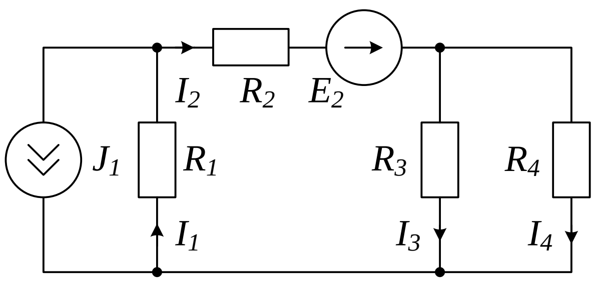


Рис. 1.15

Решение. Обозначим элементы схемы и выберем предполагаемое направление токов в ветвях. Схема содержит два источника, поэтому для расчета методом наложения необходимо рассмотреть две частичные схемы:

1. С источником тока J_1 при закороченном источнике ЭДС E_2 (рис.1.16,*а*);
2. С источником ЭДС E_2 при обрыве ветви с источником тока J_1 (рис.1.16,*б*)

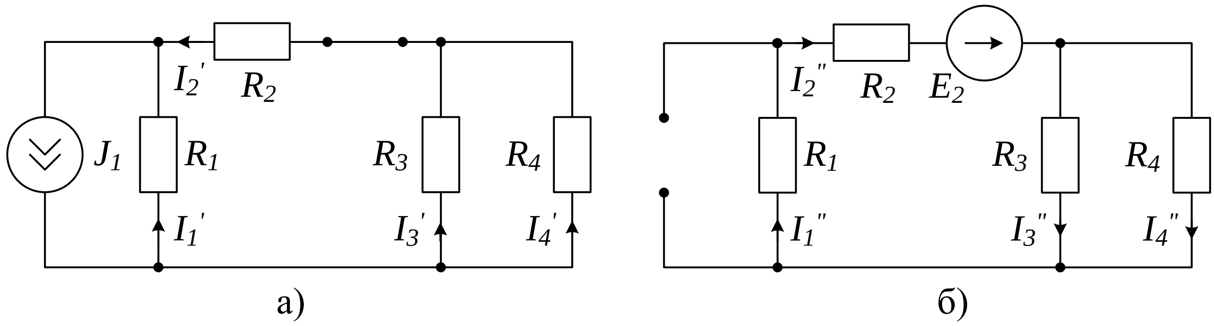


Рис. 1.16

Рассчитаем токи $I_1^{'}$.. $I_4^{'}$ в первой частичной схеме (рис.1.16,*а*). Найдем суммарное сопротивление R_2, R_3 и R_4:

$$R_{234} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 14 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = 18 \text{ Ом}.$$

По формуле делителя токов:

$$I_1^{'} = J_1 \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} = 2\frac{18}{6+18} = \frac{36}{24} = 1.5 \text{ А};$$

$$I_2^{'} = J_1 \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} = 2\frac{6}{6+18} = \frac{12}{24} = 0.5 \text{ А};$$

$$I_3^{'} = I_2^{'} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0.5\frac{5}{20+5} = 0.1 \text{ А};$$

$$I_4^{'} = I_2^{'} \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 0.5\frac{20}{20+5} = 0.4 \text{ А}.$$

Теперь рассчитаем токи $I_1^{''}$.. $I_4^{''}$ во второй частичной схеме (рис.1.16,*б*). Найдем сопротивление схемы относительно зажимов источника ЭДС:

$$R_Э^{''} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 6 + 14 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = 24 \text{ Ом}.$$

Тогда:

$$I_1'' = I_2'' = \frac{E_2}{R_Э''} = \frac{48}{24} = 2 \text{ A};$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2 \frac{5}{20+5} = 0.4 \text{ A};$$

$$I_4'' = I_2'' \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 2 \frac{20}{20+5} = 1.6 \text{ A}.$$

Рассчитаем токи в ветвях исходной схемы как алгебраическую сумму соответствующих токов частичных схем:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1.5 + 2 = 3.5 \text{ A}; \qquad I_2 = -I_2' + I_2'' = -0.5 + 2 = 1.5 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' = -0.1 + 0.4 = 0.3 \text{ A}; \quad I_4 = -I_4' + I_4'' = -0.4 + 1.6 = 1.2 \text{ A}.$$

Выполним проверку правильности расчета токов по балансу мощности. Для этого определим напряжение на зажимах источника тока (на сопротивлении R_1)

$$U_J = R_1 I_1 = 6 \cdot 3.5 = 21 \text{ В}$$

и рассчитаем суммарную мощность, отдаваемую источниками в цепь:

$$\sum P_{ист} = P_J + P_E = U_J J + E I_2 = 21 \cdot 2 + 48 \cdot 1.5 = 42 + 72 = 114 \text{ Вт}.$$

Суммарная мощность источников в цепи определяется с учетом знака ("+" у источников, отдающих мощность, и знака "–" у потребляющих). В рассматриваемой задаче оба источника отдают мощность в цепь.

Мощность, рассеиваемая на сопротивлениях схемы:

$$\sum P_R = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 =$$
$$= 6 \cdot 3.5^2 + 14 \cdot 1.5^2 + 20 \cdot 0.3^2 + 5 \cdot 1.2^2 = 73.5 + 31.5 + 1.8 + 7.2 = 114 \text{ Вт}.$$

Суммарная мощность источников равна мощности, рассеиваемой на сопротивлениях схемы ($\sum P_{ист} = \sum P_R$), следовательно, расчет выполнен правильно.

В прил. 7 приведены результаты моделирования схемы в программе Multisim, подтверждающие результаты выполненного расчета.

Задание 2
АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ В ГАРМОНИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Задача 2.1 Определение токов и напряжений ветвей с использованием законов Кирхгофа в комплексной форме.

Основным способом для анализа цепей в гармоническом режиме (при синусоидальных или косинусоидальных токах и напряжениях) является расчет в комплексной форме [1-4]. Он состоит в том, что мгновенное значение функции, например, напряжение

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \qquad 2.1$$

изображается вращающимся вектором на комплексной плоскости (рис.2.1) и представляется комплексным числом в алгебраической, тригонометрической и показательной форме:

$$u(t) \equiv \dot{U}(t) = U_1 + jU_2 = U_m \cos(\omega t + \psi_u) + jU_m \sin(\omega t + \psi_u) = \dot{U}_m e^{j\omega t}, \qquad 2.2$$

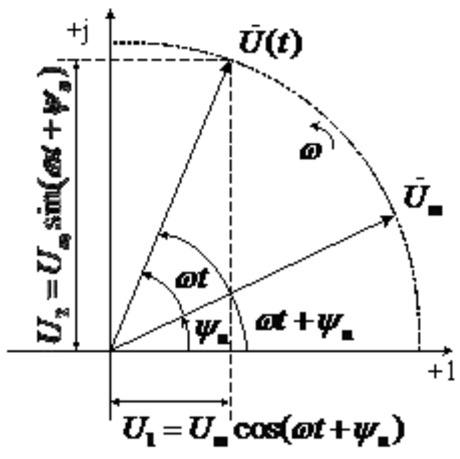


Рис.2.1

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ - комплексная амплитуда, полностью определяющая данное напряжение при определенной частоте $\omega = 2\pi f$; j – мнимая единица, определяемая как $j = \sqrt{-1}$; ψ_u – начальная фаза напряжения; $e^{j\omega t}$ – оператор вращения.

Равенство (2.2) называют прямым преобразованием и используют для превращения мгновенного значения в комплексное изображение гармонической функции $\dot{U}(t)$. Аналогично преобразуется любая синусоидальная функция, например, ток:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \equiv \dot{I}_m e^{j\omega t}, \qquad 2.3$$

где $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$.

После расчета цепи в комплексной форме переходят к мгновенным значениям. ЗТК для мгновенных значений имеет вид $\sum_n i_k = 0$.

ЗТК в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0\,, \qquad 2.4$$

где $\dot{I}_k = I_{mk} / \sqrt{2}$ – комплекс действующего значения тока.

Знаки слагаемых в (2.4) определяются так же, как и при анализе резистивных цепей, с учетом произвольно выбранных положительных направлений токов.

ЗНК для мгновенных значений имеет вид $\sum_n u_k = 0$.

ЗНК в комплексной форме:

$$\sum_n \dot{U}_{mk} = 0 \text{ или } \sum_n \dot{U}_k = 0, \qquad 2.5$$

где $\dot{U}_k = U_{mk} / \sqrt{2}$ – комплекс действующего значения напряжения.

Знаки слагаемых в (2.5) определяются так же, как и при анализе резистивных цепей, с учетом положительных направлений напряжений и направления обхода n-го контура.

По уравнениям ЗТК строятся векторные диаграммы токов для узлов схемы. По уравнениям ЗНК строятся векторные диаграммы напряжений для контуров. Эти векторные диаграммы представляют собой замкнутые многоугольники и наглядно, графически, изображают уравнения по законам Кирхгофа.

Уравнения, составленные по (2.4) и (2.5) могут использоваться для определения одного из токов в узле или одного из напряжений в контуре, если остальные известны.

Пример 2.1. Даны выражения для мгновенных значений токов и напряжений:

$u_1(t) = 100\cos(\omega t + 45°)$, В; $u_2(t) = 75\cos\omega t$, В; $u_3(t) = 50\cos(\omega t - 90°)$, В;

$i_1(t) = 5\cos(\omega t - 45°)$, А; $i_2(t) = 4\cos(\omega t + 30°)$, А; $i_3(t) = 5\cos(\omega t + 90°)$, А;

Записать выражения для комплексных амплитуд и построить на комплексной плоскости векторы напряжений и токов.

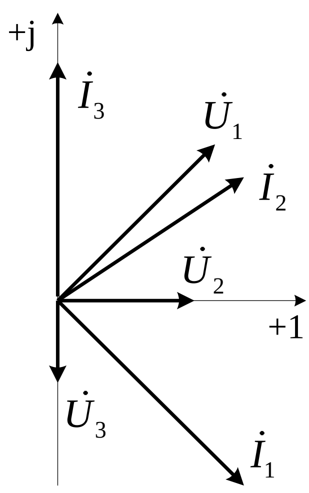


Рис.2.2

Решение:

$\dot{U}_{1m} = 100e^{j45°}$, В; $\dot{U}_{2m} = 75e^{j0°} = 75$ В; $\dot{U}_{3m} = 50e^{-j90°} = -j50$ В;

$\dot{I}_{1m} = 5e^{-j45°}$, А; $\dot{I}_{2m} = 4e^{j30°}$, А; $\dot{I}_{3m} = 5e^{j90°} = j5$ А.

На рис. 2.2 строим векторы напряжений и токов, задавшись масштабами напряжений M_u [В/мм] и токов M_i [А/мм].

Задание

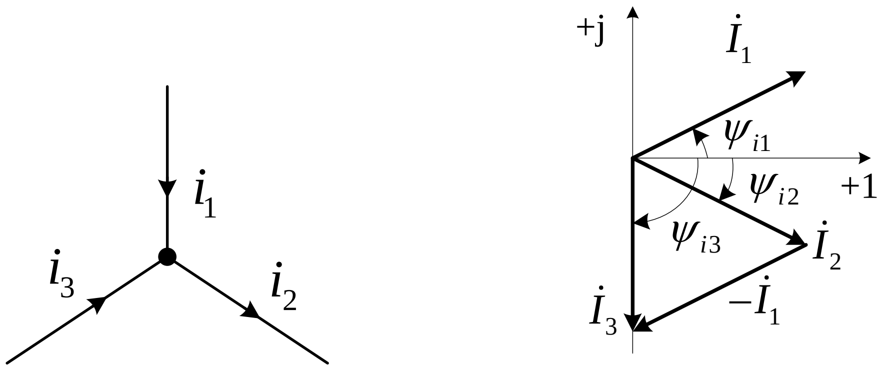
Для заданного варианта исходных данных из прил. 4 и схем из прил. 5 определить мгновенное, амплитудное и действующее значения тока i_3 (пример 2.2) и напряжения u_3 (пример 2.3), построить векторные диаграммы токов и напряжений.

Пример 2.2. Определить мгновенное, амплитудное и действующее значение тока i_3 (рис. 2.3,*а*), если заданы $I_{m1} = I_{m2} = 5\sqrt{2}\,A$, ψ_{i1}=30°, ψ_{i2}= –30°. Построить векторную диаграмму токов.

Решение. Записываем мгновенные значения токов:

$i_1(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 30°), \text{А};$

$i_2(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 30°), \text{А}.$



а) б)

Рис. 2.3

Переходим к их комплексным изображениям:

$$\dot{I}_1 = 5e^{j30°} = 5\cos 30° + j5\sin 30° = (4.33 + j2.5), \text{А};$$
$$\dot{I}_2 = 5e^{-j30°} = 5\cos(-30°) + j5\sin(-30°) = (4.33 - j2.5), \text{А}.$$

Записываем уравнения для ЗТК $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ и выразим из него ток $\dot{I}_3$:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = (4.33 - j2.5) - (4.33 + j2.5) = -j5 = 5e^{-j90°}, \text{ А}.$$

На рис.2.3, б строим векторную диаграмму токов, задавшись масштабом M_i [А/мм].

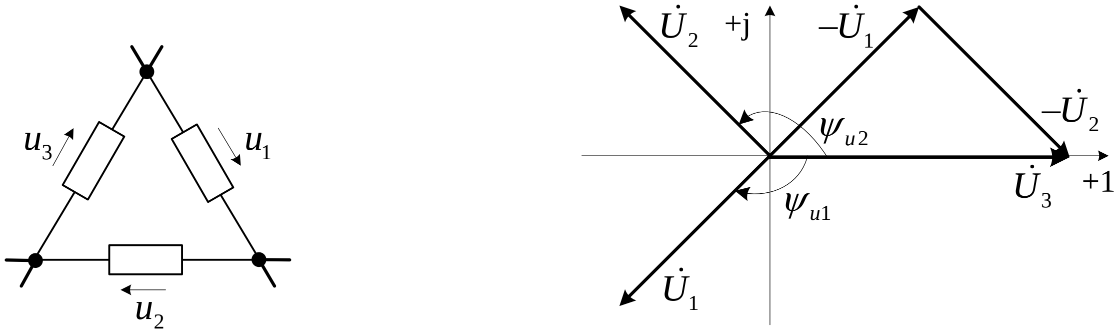
Мгновенное $i_3(t)$, амплитудное I_{m3} и действующее I_3 значения тока i_3:

$$i_3(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 90°), \text{А}; \qquad I_{m3} = 5\sqrt{2} \text{ А}; \qquad I_3 = 5\,\text{А}.$$

Пример 2.3. Определить мгновенное, амплитудное и действующее значение напряжения u_3 (рис. 2.4,а), если заданы $U_{m1} = U_{m2} = 40\sqrt{2}\,B$, ψ_{u1}= –135°, ψ_{u2}=135°. Построить векторную диаграмму напряжений.

Решение. Записываем мгновенные значения напряжений:

$$u_1(t) = 40\sqrt{2}\cos(\omega t - 135°), \text{В};$$
$$u_2(t) = 40\sqrt{2}\cos(\omega t + 135°), \text{В}.$$



а) б)

Рис. 2.4

Переходим к их комплексным изображениям:

$$\dot{U}_1 = 40e^{-j135°} = 40\cos(-135°) + j40\sin(-135°) = (-20\sqrt{2} - j20\sqrt{2}), \text{В};$$
$$\dot{U}_2 = 40e^{-j135°} = 40\cos 135° + j40\sin 135° = (-20\sqrt{2} + j20\sqrt{2}), \text{В}.$$

Записываем уравнения по ЗНК для напряжений в контуре: $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$ и выразим из него $\dot{U}_3$:

$$\dot{U}_3 = -\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = -(-20\sqrt{2} - j20\sqrt{2}) - (-20\sqrt{2} + j20\sqrt{2}) = 40\sqrt{2}, \text{В}.$$

На рис.2.4, б строим векторную диаграмму напряжений, задавшись масштабом M_u [В/мм].

Мгновенное $u_3(t)$, амплитудное U_{m3} и действующее U_3 значения напряжения u_3:

$$u_3(t) = 40\sqrt{2}\cos\omega t, \text{В}; \quad U_{m3} = 40\sqrt{2}\,\text{В}; \quad U_3 = 40\ \text{В}.$$

Задача 2.2 Анализ пассивных цепей в гармоническом режиме.

Рассматриваемые цепи имеют один источник и ветви, включенные между собой последовательно или параллельно. В общем случае ветвь может содержать сопротивление, индуктивность и емкость, включенные между собой последовательно (рис.2.5,*а*) или параллельно (рис.2.5,*б*).

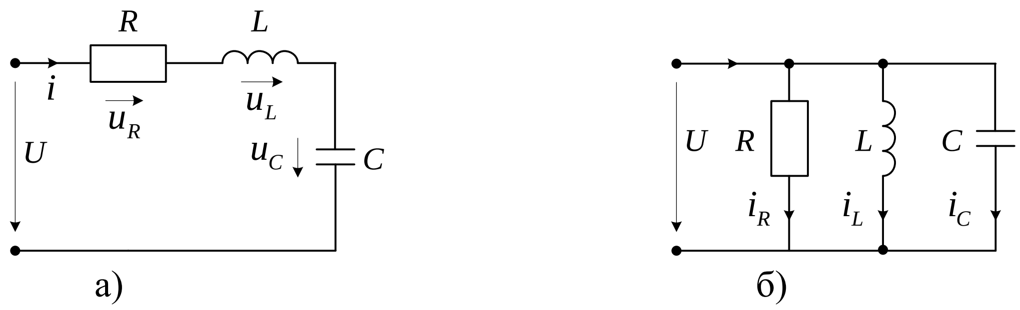


Рис.2.5

Уравнения этих элементов при любом законе изменения токов в них имеют вид:

$$u_R = Ri_R; \quad u_L = L\frac{di_L}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt;$$
$$i_R = \frac{1}{R}u_R; \quad i_L = \frac{1}{L}\int_0^t u_L dt; \quad i_C = C\frac{du_C}{dt}. \tag{2.6}$$

Пусть напряжение и ток заданы в виде:

$$u(t) = U_m\cos(\omega t + \psi_u) \text{ и } i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi_i).$$

Представим их в комплексной форме:

$$u(t) \doteq \dot{U}_m e^{j\omega t} \text{ и } i(t) \doteq \dot{I}_m e^{j\omega t},$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ и $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ - комплексные амплитуды напряжения и тока.

Подставив комплексные изображения напряжения и тока в уравнения (2.6), получим уравнения элементов в комплексной форме:

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R; \ \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L; \ \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = -\frac{j}{\omega C}\dot{I}_C; \ \dot{U} = \underline{Z}\dot{I};$$
$$\dot{I}_R = \frac{1}{R}\dot{U}_R; \ \dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{U}_L = -\frac{j}{\omega L}\dot{U}_L; \ \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C; \ \dot{I} = \underline{Y}\dot{U}. \tag{2.7}$$

Из сравнения уравнений элементов в виде (2.6) и (2.7) следует важное правило: изображение производной находится умножением изображаемого комплекса на $j\omega$, а изображение интеграла – делением на $j\omega$. Так как умножению на $j = e^{j90°}$ соответствует поворот вектора на угол 90° в положительном направлении (против часовой стрелки), то напряжение на индуктивности опережает ток на угол 90°. Деление на j ($\frac{1}{j} = e^{-j90°}$) соответствует повороту вектора на угол –90° (по направлению движения часовой стрелки). Поэтому напряжение на емкости отстает от тока на угол 90°.

Для цепи (рис.2.5,*а*), учитывая, что при последовательном соединении элементов ток $\dot{I}_R = \dot{I}_L = \dot{I}_C = \dot{I}$, запишем уравнение по ЗНК

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right]\dot{I} \qquad (2.8)$$

и построим по нему векторную диаграмму напряжений (рис.2.6,*а*):

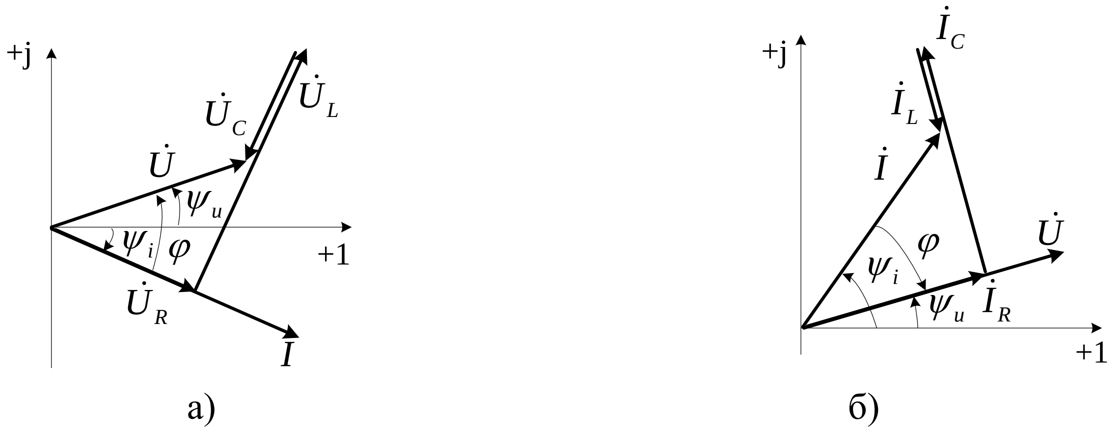


Рис.2.6.

Из (2.8) и векторной диаграммы (рис. 2.6,*а*) находим:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{U}}{R + jX} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{ze^{\varphi}}, \qquad (2.9)$$

где R – активное (резистивное) сопротивление цепи; $X = x_L - x_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное сопротивление цепи; x_L и x_C – соответственно индуктивное и емкостное реактивные сопротивления; $\underline{Z} = R + jX$ – комплексное сопротивление, модуль которого $z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – полное сопротивление; $\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$ – аргумент, определяющий угол сдвига фаз между напряжением и током в цепи ($\varphi=\psi_u-\psi_i$).

Углы ψ_u и ψ_I отсчитываются от вещественной оси +1 до векторов $\dot{U}$ и $\dot{I}$, а угол φ – от вектора тока $\dot{I}$ до вектора напряжения $\dot{U}$. Если направление отсчета совпадает с направлением вращения векторов (против часовой стрелки), то знак угла φ положительный (φ>0). Это означает, что ток отстает по фазе от напряжения и цепь носит индуктивный характер. Если ток опережает напряжение, то угол φ<0 и цепь носит емкостной характер. Для случая на рис.2.6,*а*:

$$\varphi=\psi_u-(-\psi_i)=\psi_u+\psi_i>0.$$

Запишем уравнения по ЗТК для цепи (рис.2.5,*б*):

$$\dot I = \dot I_R + \dot I_L + \dot I_C = \frac{1}{R}\dot U + j\omega C\dot U - j\frac{1}{\omega L}\dot U = \left[\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]\dot U =$$
$$= G + j(b_C - b_L)\ \dot U = G + jB\ \dot U = \underline{Y}\dot U = ye^{\varphi}\dot U, \qquad (2.10)$$

где $G = \dfrac{1}{R}$ – активная (резистивная) проводимость; $B = b_C - b_L = \omega C - \dfrac{1}{\omega L}$ – реактивная проводимость; b_C *и* b_L – емкостная и индуктивная реактивные проводимости; $\underline{Y} = G + jB$ – комплексная проводимость, модуль которой $y = \sqrt{G^2 + B^2}$ – полная проводимость; $\varphi = arctg\dfrac{B}{G}$ – аргумент, определяющий угол сдвига фаз между напряжением и током в цепи ($\varphi = \psi_u - \psi_i$).

На рис.2.6,*б* представлена векторная диаграмма токов для цепи (рис.2.5,*б*) в случае, если она имеет емкостной характер.

Полученные выше соотношения позволяют рассчитать простейшую разветвленную цепь. Для этого вначале записываются комплексы сопротивлений или проводимостей всех ветвей, а затем рассчитывают комплексы токов ветвей и напряжений на элементах цепи, используя законы Ома, Кирхгофа, правила делителя токов и делителя напряжений в комплексной форме.

Для проверки правильности расчета используется баланс мощности в комплексной форме:

$$\dot S_E = \sum_k \dot S_k, \qquad (2.11)$$

где $\dot S_k = \dot U_k \overset{*}{I}_k = \underline{Z}_k I_k^2 = P_k + jQ_k$ – комплекс полной мощности, выделяемой в *k*-й ветви; *P* и *Q* – соответственно активная и реактивная составляющие полной мощности; $\overset{*}{I}_k$ – сопряженный комплекс тока $\dot I_k$.

Комплекс полной мощности $\dot S_E$ источника напряжения определяется по формуле:

$$\dot S_E = \dot U_E \overset{*}{I}_E = P_E + jQ_E,$$

где $\dot U_E$ и $\overset{*}{I}_E$ – соответственно комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока источника.

Расчет цепи верен, если в выражении (2.11) отдельно равны вещественные и мнимые части, т.е. активная и реактивная мощность, выделяемая источником равна сумме активных и реактивных мощностей, выделяемых на всех сопротивлениях цепи.

Задание

Варианты задач приведены в прил. 6. Требуется определить:
- мгновенные и действующие значения токов и напряжений в цепи;

- построить совмещенную векторную диаграмму токов и напряжений;
- рассчитать мощность источника, а также активную, реактивную и полную мощность, потребляемую элементами цепи. Проверить баланс мощности.

Пример 2.4. Определить мгновенные и действующие значения токов и напряжений в цепи (рис.2.7,*а*). Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Рассчитать мощность источника, а также активную, реактивную и полную мощность, потребляемую элементами цепи. Проверить баланс мощности.

Параметры цепи: $U_m = 10\sqrt{2}\,B$, ψ_U=–45°, f=100 Гц, R=10 Ом, L=16 мГн, C=160 мкФ.

Рис. 2.7

Решение. Запишем выражение для мгновенного и действующего значения приложенного к цепи напряжения источника:

$$u(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 45°) \doteq 10\sqrt{2}e^{-j45°}e^{j\omega t°}, \text{В};$$
$$\dot U = 10e^{-j45°}, \text{В}.$$

Запишем сопротивления ветвей (рис.2.7,*б*):

$$\underline{Z}_1 = -jx_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi fC} = -j\frac{1}{2\cdot 3.14\cdot 100\cdot 160\cdot 10^{-6}} = -j10 = 10e^{-j90°}, \text{ Ом};$$
$$\underline{Z}_2 = jx_L = j\omega L = j2\pi fL = j2\cdot 3.14\cdot 100\cdot 16\cdot 10^{-3} = j10 = 10e^{j90°}, \text{ Ом};$$
$$\underline{Z}_3 = R = 10 \text{ Ом}.$$

Найдем входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = -j10 + \frac{j10\cdot 10}{j10+10} = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45°}, \text{ Ом}.$$

Токи ветвей:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{10e^{-j45^\circ}}{5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \sqrt{2}\ \text{А};$$

$$\dot{I}_2 = \underline{\dot{I}}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \sqrt{2}\frac{10}{j10+10} = \sqrt{2}\frac{10}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1e^{-j45^\circ} = (0.707 - j0.707),\ \text{А};$$

$$\dot{I}_3 = \underline{\dot{I}}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \sqrt{2}\frac{j10}{j10+10} = \sqrt{2}\frac{10e^{j90^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1e^{j45^\circ} = (0.707 + j0.707),\ \text{А}.$$

Проверка по ЗТК:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (0.707 - j0.707) + (0.707 + j0.707) = 1.41 = \sqrt{2}\ \text{А}.$$

Находим напряжения на элементах:

$$\dot{U}_C = \underline{Z}_1\dot{I}_1 = -jx_C\dot{I}_1 = 10\sqrt{2}e^{-j90^\circ} = -j14.14\ \text{В};$$
$$\dot{U}_L = \underline{Z}_2\dot{I}_2 = jx_L\dot{I}_2 = 10e^{j90^\circ}1e^{-j45^\circ} = 10e^{j45^\circ} = (7.07 + j7.07),\ \text{В};$$
$$\dot{U}_R = R\dot{I}_3 = 10e^{j45^\circ} = (7.07 + j7.07),\ \text{В}.$$

Проверка по ЗНК:

$$\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_L = -j14.14 + (7.07 + j7.07) = (7.07 - j7.07) = 10e^{-j45^\circ},\ \text{В}.$$

Мгновенные значения токов и напряжений:

$$i_1(t) = 2\cos\omega t,\ \text{А};\quad i_2(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - 45^\circ), \text{А};\quad i_3(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ), \text{А};$$
$$u_R(t) = u_L(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ),\ \text{В};\quad u_C(t) = 20\cos(\omega t - 90^\circ),\ \text{В}.$$

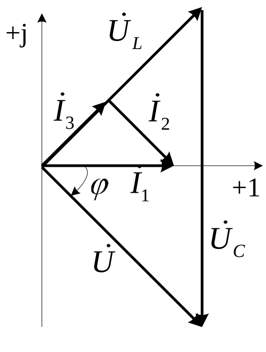


Рис.2.8

Их действующие значения:

$$I_1 = \sqrt{2}\ \text{А};\quad I_2 = 1\ \text{А};\quad I_3 = 1\ \text{А}.$$
$$U_C = 10\sqrt{2}\ \text{В};\quad U_R = U_L = 10\ \text{В}.$$

На рис.2.8 представлена векторная диаграмма, построенная по уравнениям ЗТК $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ и ЗНК $\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_L$.

Определим мощность, отдаваемую источником в цепь. Поскольку для данной задачи в комплексной записи тока $\dot{I}_1$ источника отсутствует мнимая часть, то комплексно сопряженный ток $\overset{*}{I}_1 = \dot{I}_1 = \sqrt{2}$ А. Тогда:

$\dot{S}_E = \dot{U} \cdot \overset{*}{I}_1 = 10e^{-j45°} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}e^{-j45°} = (10 - j10),\ \text{В} \cdot \text{А}.$

Мощности, потребляемые элементами в ветвях:

$\dot{S}_1 = Q_C = \underline{Z}_1 \cdot I_1^{\,2} = -jx_C \cdot I_1^{\,2} = -j10 \cdot (\sqrt{2})^2 = -j20\ \text{В} \cdot \text{А};$

$\dot{S}_2 = Q_L = \underline{Z}_2 \cdot I_2^{\,2} = jx_L \cdot I_2^{\,2} = j10 \cdot 1^2 = j10\ \text{В} \cdot \text{А};$

$\dot{S}_3 = P_R = \underline{Z}_3 \cdot I_3^{\,2} = R \cdot I_3^{\,2} = 10 \cdot 1^2 = 10\ \text{В} \cdot \text{А}.$

Полная потребляемая мощность:

$$\sum_k \dot{S}_k = \dot{S}_3 + \dot{S}_2 + \dot{S}_1 = P_R + j(Q_L + Q_C) = 10 + j(10 - 20) = 10 - j10 =$$

$$= 10\sqrt{2}e^{-j45°},\ \text{В} \cdot \text{А}.$$

Проверяем баланс мощностей ($\dot{S}_E = \sum_k \dot{S}_k$):

$$10\sqrt{2}e^{-j45°} = 10\sqrt{2}e^{-j45°}.$$

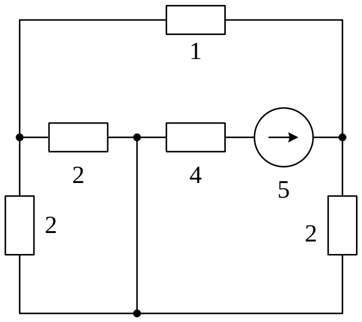
Следовательно, расчет выполнен верно.

В прил. 7 приведены результаты моделирования схемы в программе Multisim, подтверждающие результаты выполненного расчета.

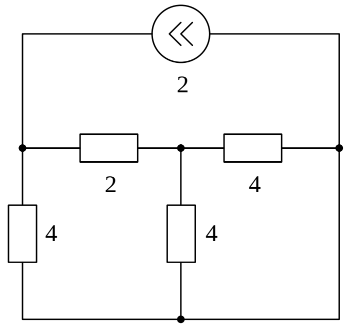
Библиографический список

1. Линейные резистивные цепи и цепи в гармоническом режиме: методические указания к практическим занятиям и домашним заданиям № 1, 2/ М.Е. Куцко, Г.Г. Рогачева, Л.Б. Свинолобова. - СПб.: Изд-во ГУАП, 1999. - 57 с.
2. Колесников В.В. Основы теории цепей. Установившиеся режимы: учебное пособие. СПб.: ГУАП, 2006. - 101 с.
3. Лавров В.Я. Линейные электрические цепи. Установившиеся процессы: учебное пособие/ СПб.: Изд-во ГУАП. 2010. - 232 с.
4. Артемьев, Б.А. Электротехника. Линейная электрическая цепь с сосредоточенными параметрами в установившемся режиме: учебное пособие/ СПб.: Изд-во ГУАП, 2013. - 86 с.:
5. Электротехника: лабораторный практикум / С.И. Бардинский, В.А. Голубков, А.А. Ефимов, В.Д. Косулин, С.Ю. Мельников. СПб.: Изд-во ГУАП, 2017. - 190 с.
6. Теоретические основы электротехники: лабораторный практикум / С.И.Бардинский, В.Д. Косулин; ред. А.А. Ефимов. СПб. : Изд-во ГУАП, 2015. - 182 с.
7. Бакалов В.П., Журавлева О.Б., Крук Б.И. Основы анализа цепей: Учебное пособие для вузов.-М.: Горячая линия-Телеком, Радио и связь, 2007. - 591 с.

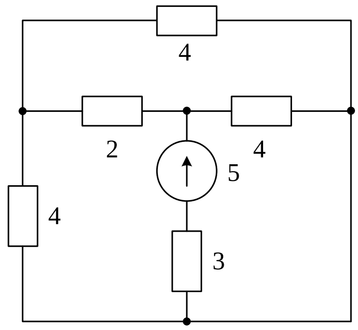
1



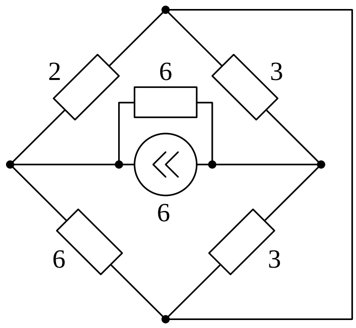
2



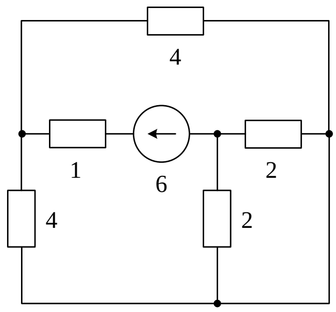
3



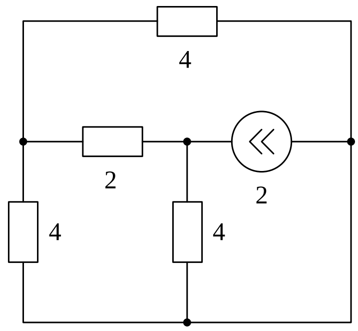
4



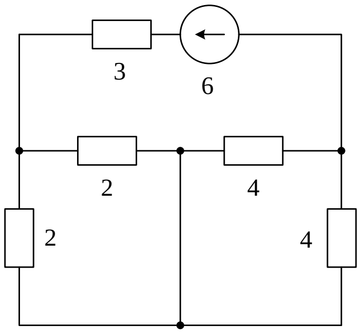
5



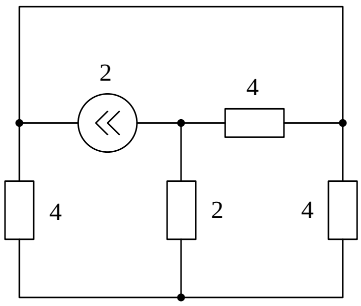
6



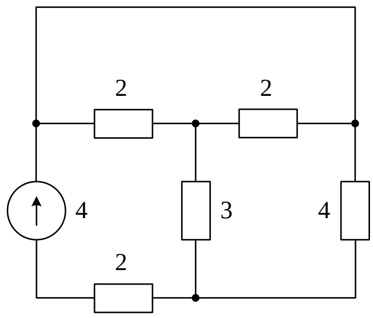
7



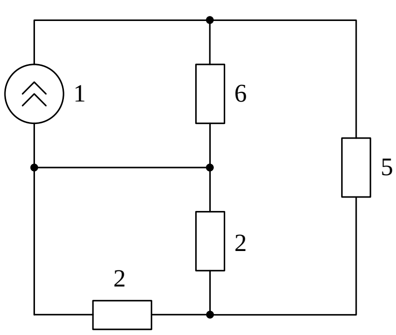
8



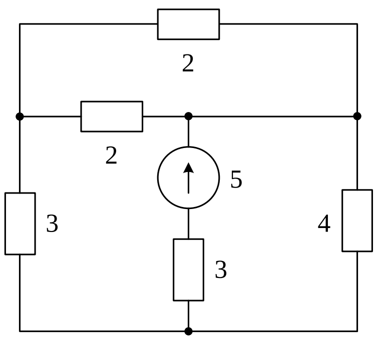
9



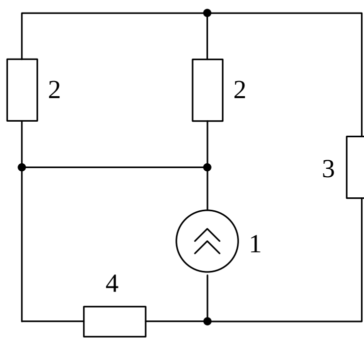
10



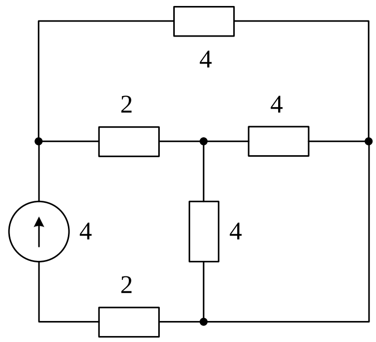
11



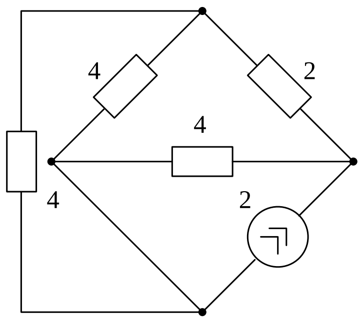
12



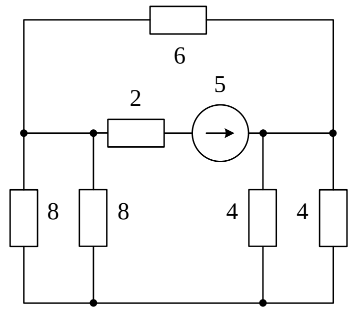
13



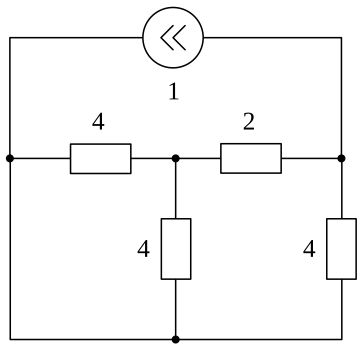
14



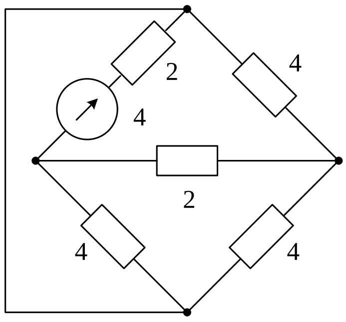
15



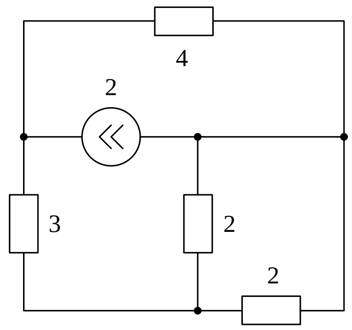
16



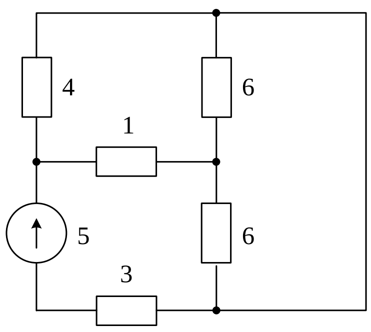
17



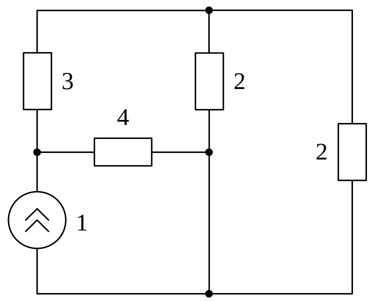
18



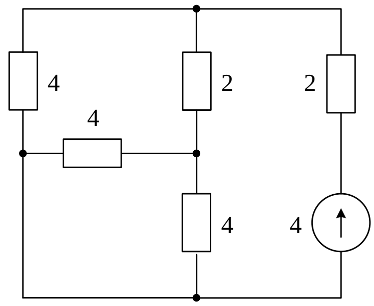
19



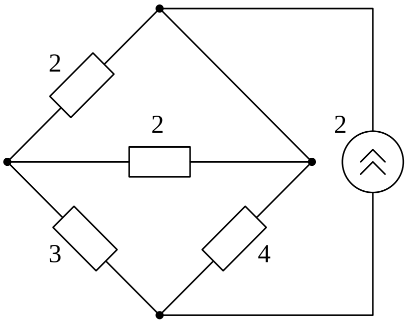
20



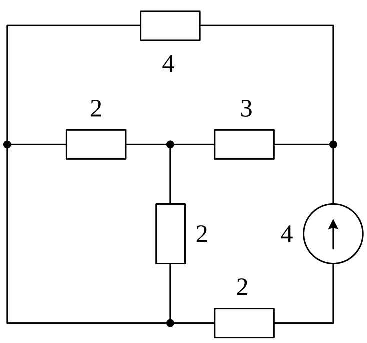
21



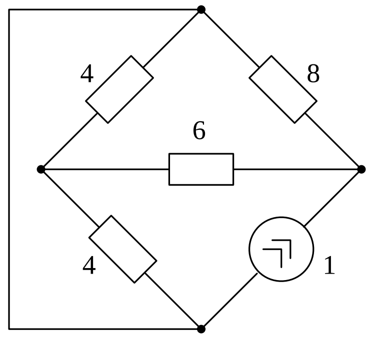
22



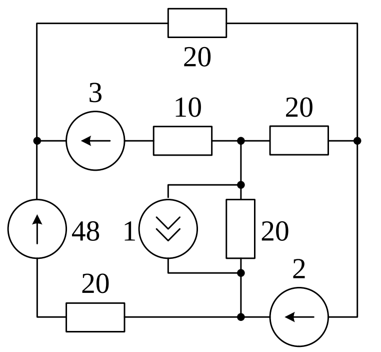
23



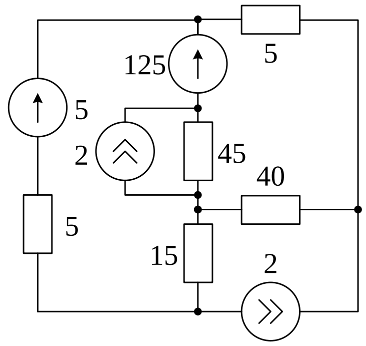
24



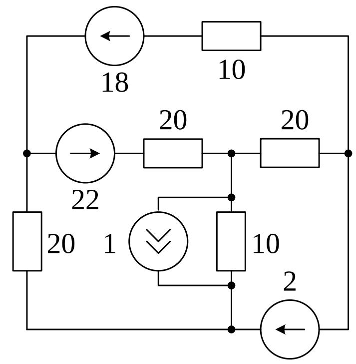
1



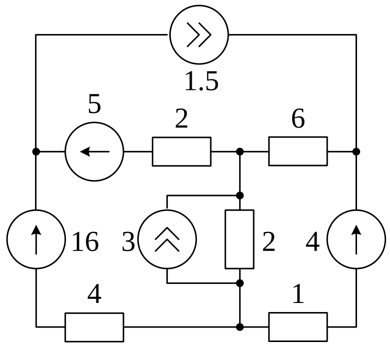
2



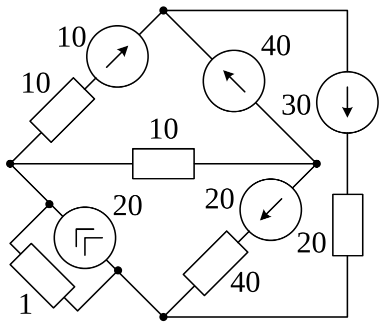
3



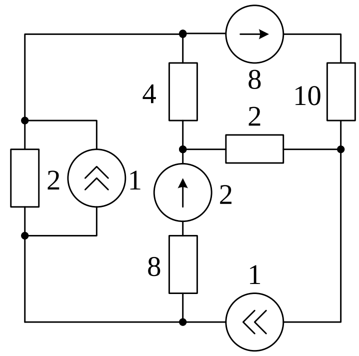
4



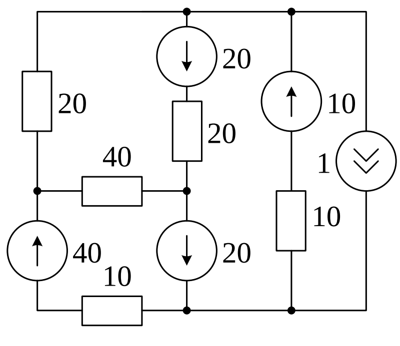
5



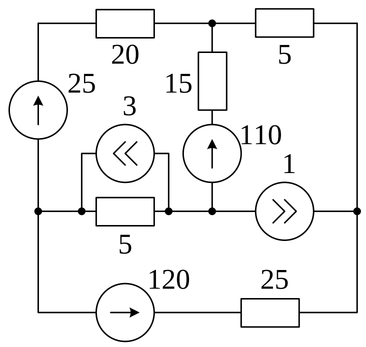
6



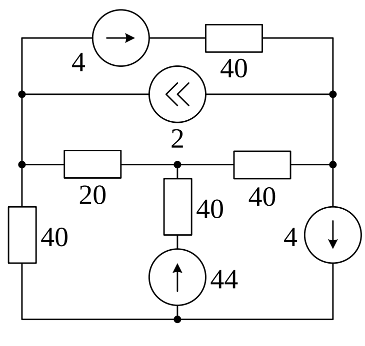
7



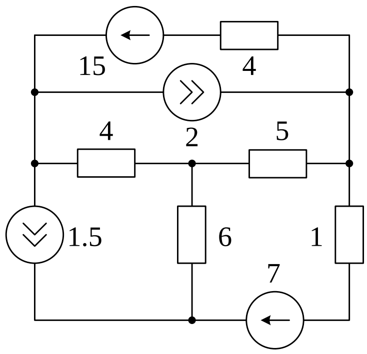
8



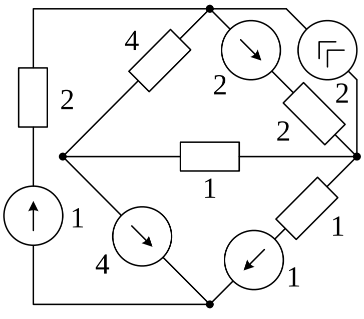
9



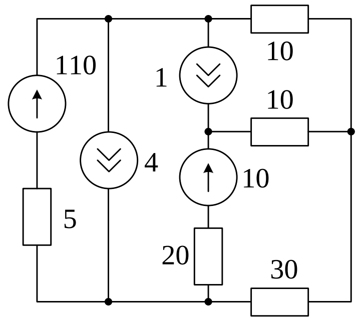
10



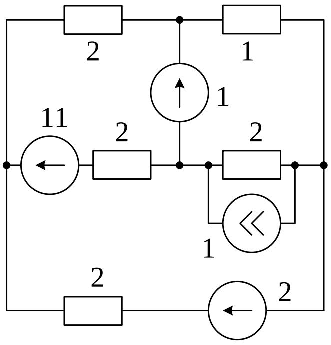
11



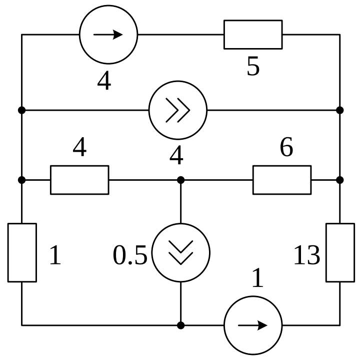
12



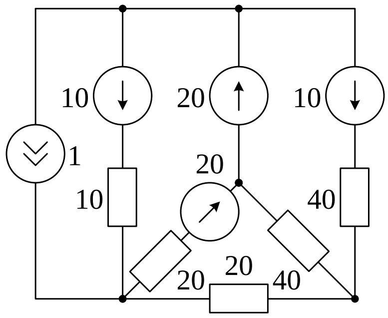
13



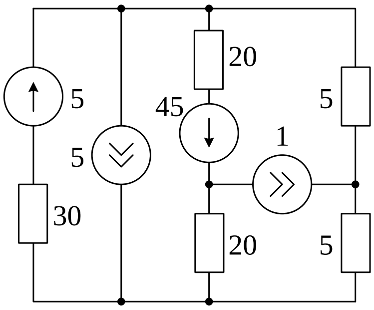
14



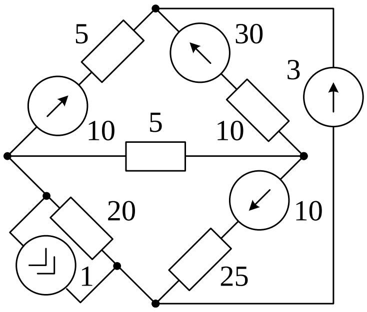
15



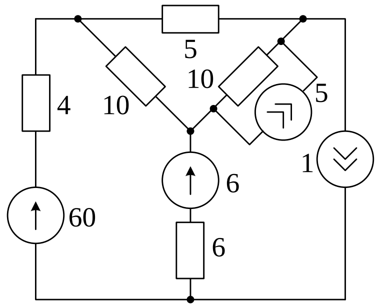
16



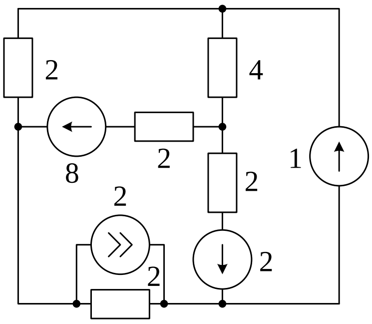
17



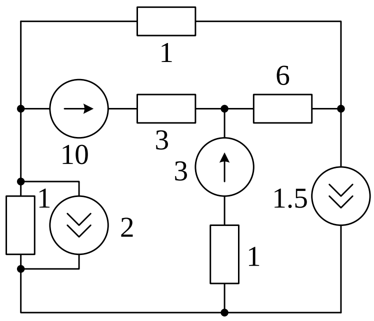
18



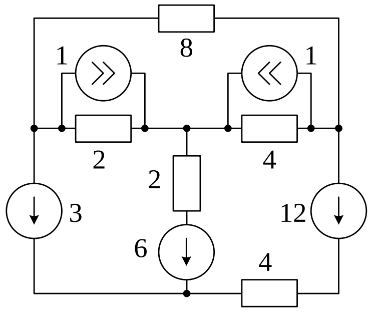
19



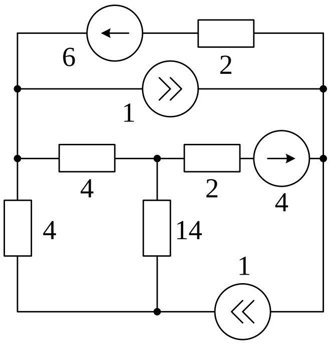
20



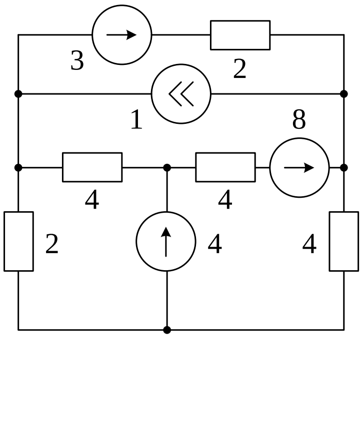
21



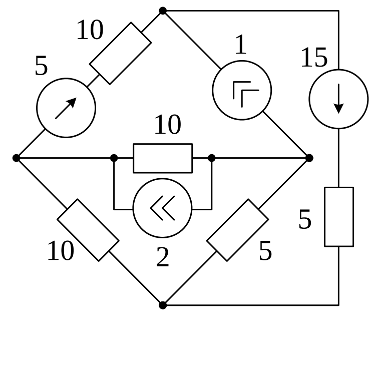
22

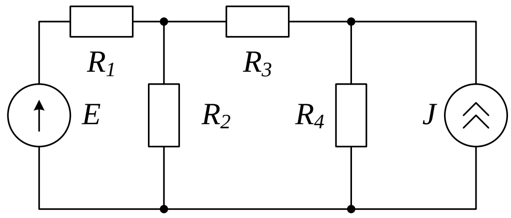
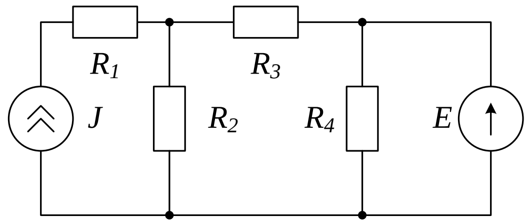
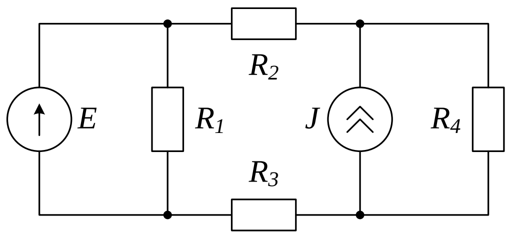
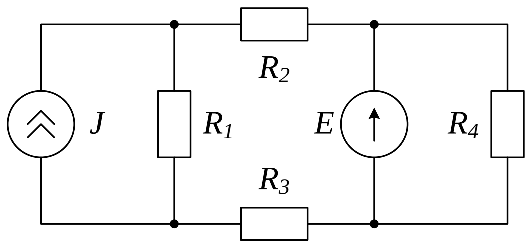
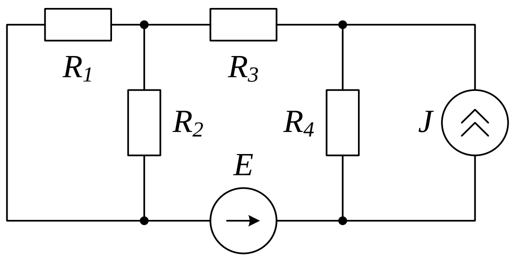
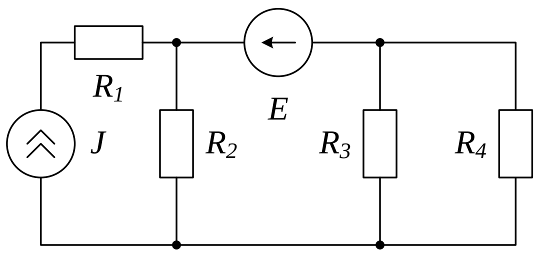


23



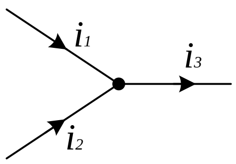
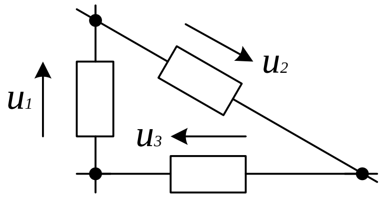
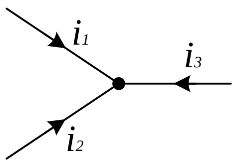
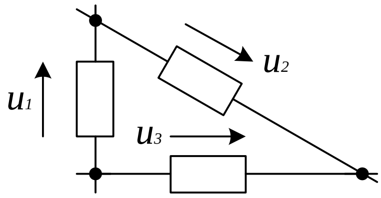
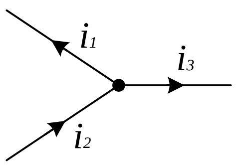
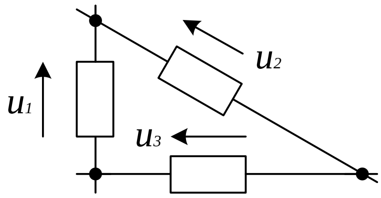
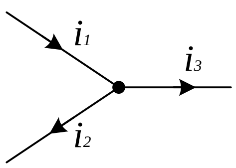
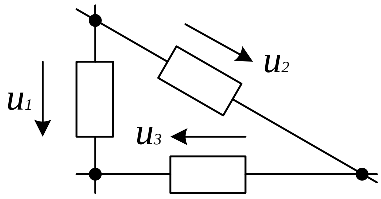
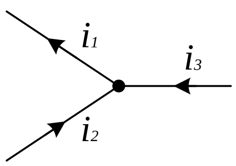
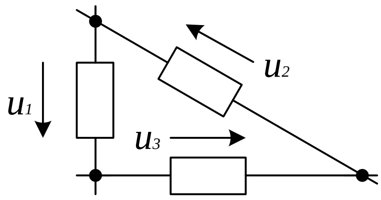
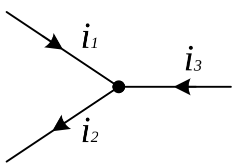
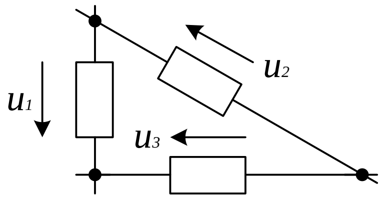
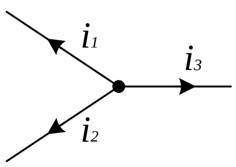
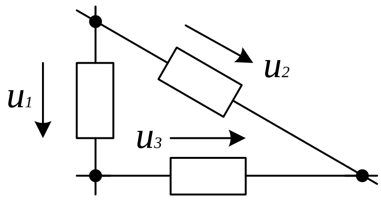
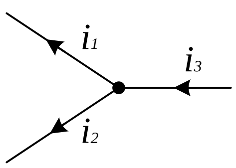
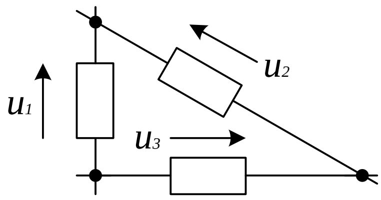
24



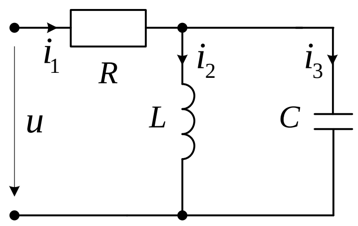
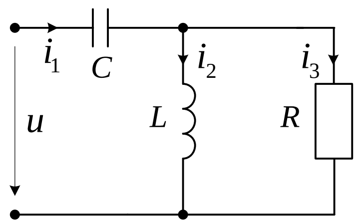
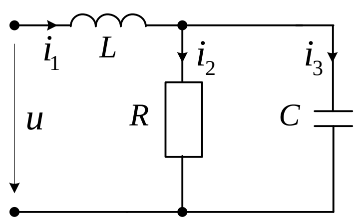
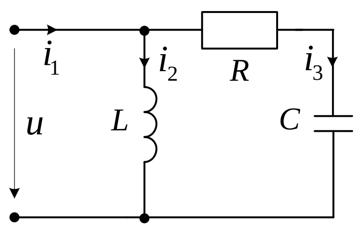
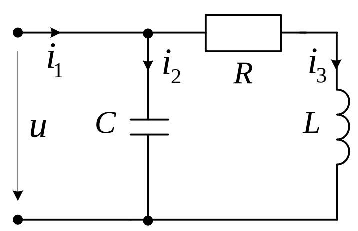
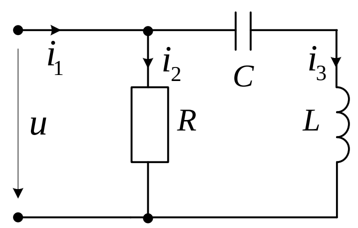
Вари-ант	*E*, В	*J*, А	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	R_4, Ом	Схема
1	6	3	4	4	1	3	
2	6	6	3	6	2	4	
3	18	9	6	6	3	3	
4	9	6	12	12	6	6	
5	8	3	6	4	4	8	
6	4	2	3	4	6	10	
7	2	2	3	2	3	5	
8	8	6	6	6	2	2	
9	6	1	8	2	2	4	
10	3	6	3	2	2	2	
11	4	2	8	2	4	4	
12	10	2	5	8	4	8	
13	6	1	2	2	1	4	
14	12	2	8	6	6	5	
15	8	2	3	3	2	4	
16	10	1	5	7	8	5	
17	8	3	4	4	6	8	
18	9	2	6	6	4	3	
19	10	1	8	8	4	12	
20	6	1	10	10	7	8	
21	4	2	3	4	8	8	
22	12	5	6	4	5	20	
23	3	1	6	5	10	10	
24	6	2	6	8	4	4	

Приложение 4

Вари-ант	I_{m1}, I_{m2}, А	ψ_{i1}, град.	ψ_{i2}, град.	U_{m1}, U_{m2}, А	ψ_{u1}, град.	ψ_{u2}, град.	Схемы из прил.5	
1	$10\sqrt{2}$	+30	+60	100	+45	+135	1а	1б
2	$20\sqrt{2}$	+60	-180	50	+30	+150	2а	2б
3	$40\sqrt{2}$	+30	-120	200	-45	+135	3а	3б
4	$20\sqrt{2}$	-60	+120	100	+120	-60	4а	4б
5	$5\sqrt{2}$	-60	-120	50	+60	-120	5а	5б
6	$2\sqrt{2}$	-180	-45	20	+60	-30	6а	6б
7	$5\sqrt{2}$	-135	-45	80	-60	+120	7а	7б
8	$2\sqrt{2}$	-45	+135	60	+135	-135	8а	8б
9	$4\sqrt{2}$	-150	+30	50	+150	-150	1а	1б
10	$\sqrt{2}$	+90	+180	40	-120	+150	2а	2б
11	$2\sqrt{2}$	-150	+30	50	+150	-150	3а	3б
12	$4\sqrt{2}$	-150	-30	100	+60	-60	4а	4б
13	$\sqrt{2}$	-150	-60	200	+120	+150	5а	5б
14	$2\sqrt{2}$	+60	+120	150	+135	-135	6а	6б
15	$3\sqrt{2}$	+90	0	60	+60	-120	7а	7б
16	$10\sqrt{2}$	-150	+160	50	+120	-30	8а	8б
17	$8\sqrt{2}$	+135	+45	80	+120	-120	1а	1б
18	$10\sqrt{2}$	-60	+90	50	+30	-135	2а	2б
19	$15\sqrt{2}$	-90	+135	60	-45	+45	3а	3б
20	$20\sqrt{2}$	+136	-120	80	-135	+45	4а	4б
21	$5\sqrt{2}$	+60	-180	100	+90	-90	5а	5б
22	$10\sqrt{2}$	-90	+30	120	-90	+135	6а	6б
23	$15\sqrt{2}$	+60	-120	100	-120	+30	7а	7б
24	$4\sqrt{2}$	-120	+120	50	+60	-45	8а	8б

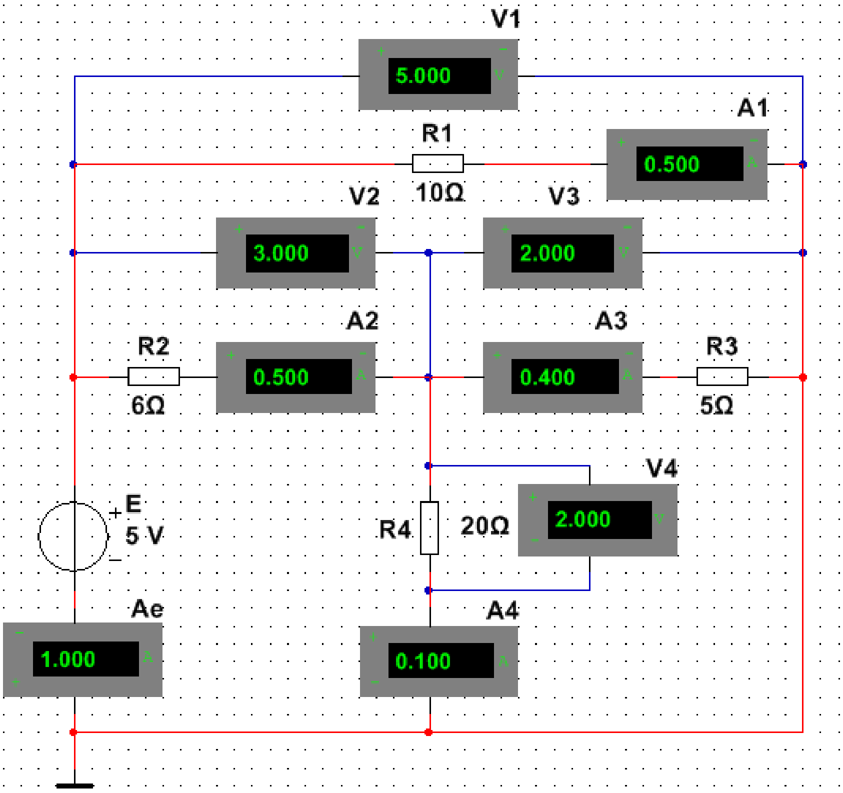
	а	**б**
1	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
2	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
3	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
4	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
5	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
6	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
7	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3
8	 i1 i3 i2	 u1 u2 u3

Приложение 6

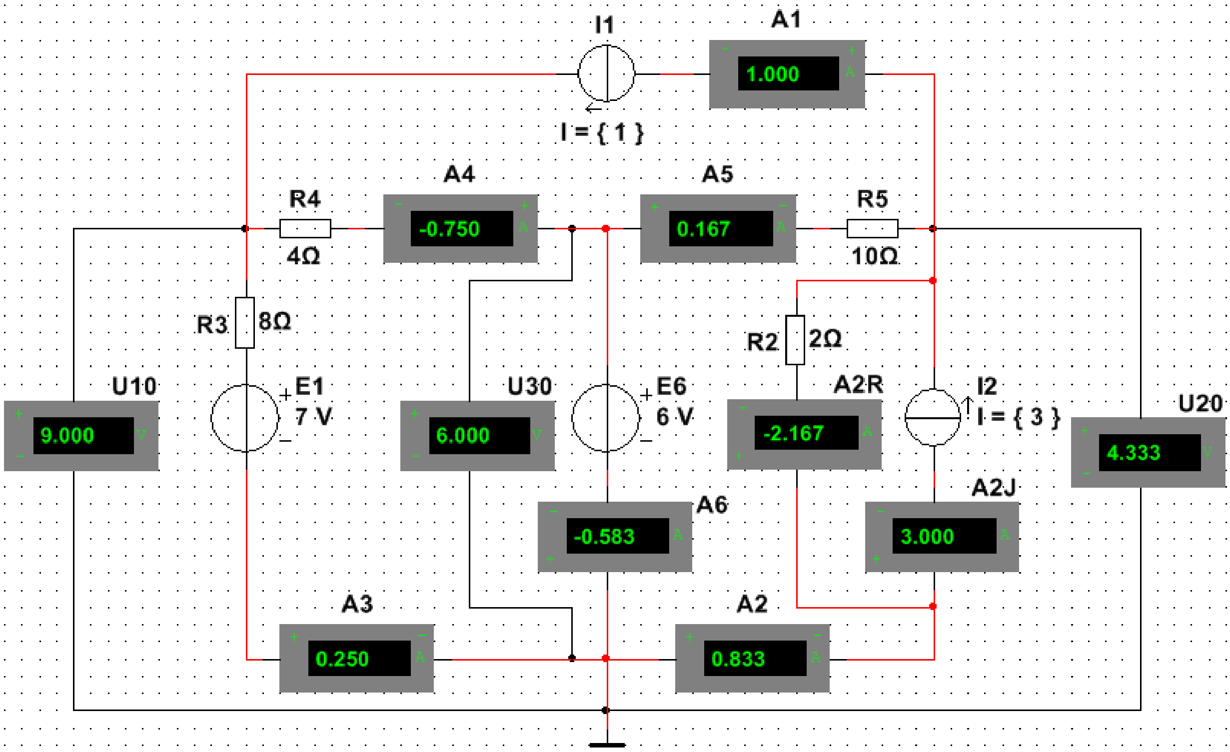
<table>
<tr><th>Вариант</th><th>U_m,
В</th><th>ψ_u,
град.</th><th>f,
Гц</th><th>R,
Ом</th><th>L,
мГн</th><th>C,
мкФ</th><th>Схема</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>50</td><td>10</td><td>32</td><td>640</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>50</td><td>20</td><td>64</td><td>320</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>50</td><td>20</td><td>32</td><td>160</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>50</td><td>10</td><td>32</td><td>640</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>100</td><td>5</td><td>8</td><td>320</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>100</td><td>20</td><td>32</td><td>80</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>100</td><td>10</td><td>16</td><td>160</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>100</td><td>10</td><td>16</td><td>160</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>400</td><td>5</td><td>2</td><td>80</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>400</td><td>10</td><td>4</td><td>40</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>400</td><td>10</td><td>4</td><td>40</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>400</td><td>20</td><td>8</td><td>20</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>50</td><td>20</td><td>64</td><td>160</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>50</td><td>10</td><td>32</td><td>320</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>50</td><td>5</td><td>16</td><td>640</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>50</td><td>5</td><td>16</td><td>640</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>100</td><td>20</td><td>32</td><td>80</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>18</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>100</td><td>10</td><td>16</td><td>160</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>100</td><td>5</td><td>16</td><td>320</td></tr>
<tr><td>20</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>100</td><td>10</td><td>16</td><td>80</td></tr>
<tr><td>21</td><td>$20\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>400</td><td>20</td><td>16</td><td>20</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>22</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>+45</td><td>400</td><td>5</td><td>4</td><td>80</td></tr>
<tr><td>23</td><td>$10\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>400</td><td>10</td><td>4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>24</td><td>$5\sqrt{2}$</td><td>-45</td><td>400</td><td>5</td><td>2</td><td>40</td></tr>
</table>

Результаты моделирования схем в Multisim

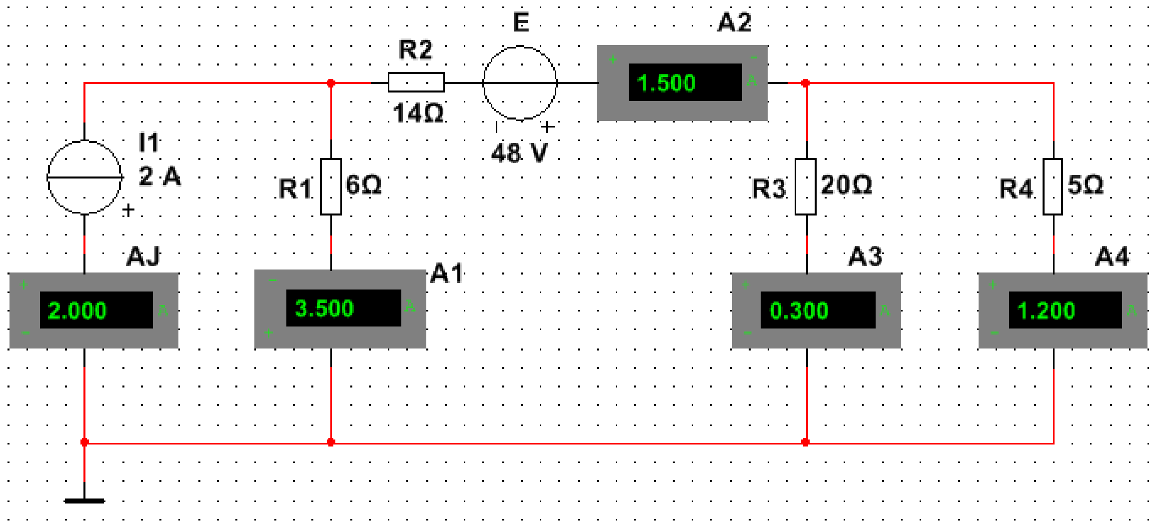
Задача 1.1



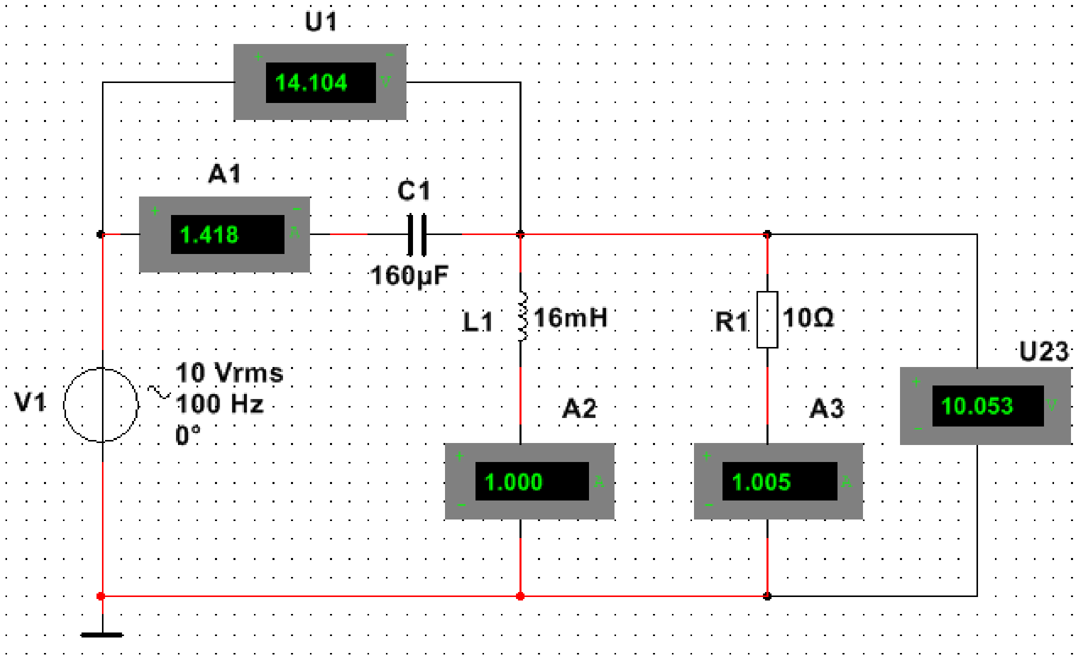
Задачи 1.2-1.4



Задачи 1.5-1.6



Задача 2.2

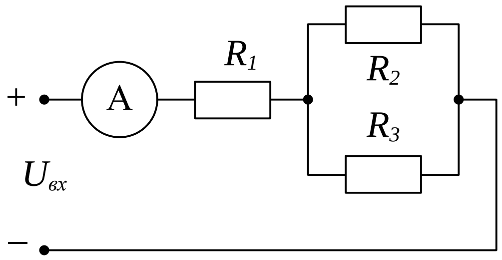


Приложение 8

Контрольные задачи

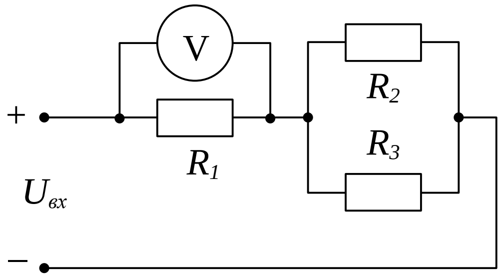
Анализ линейных резистивных цепей

1



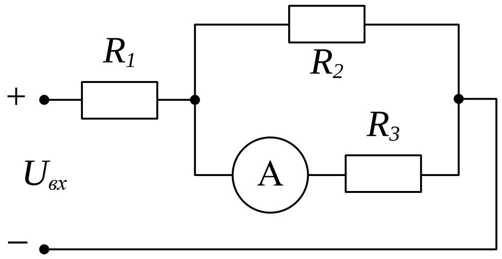
Определить показание амперметра, если $R_1=R_2=R_3=10$ Ом, $U_{вх}=15$ В

2



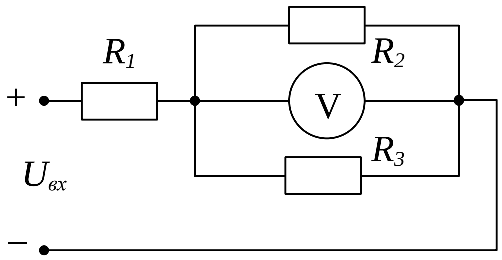
Определить показание вольтметра, если $R_1=15$ Ом, $R_2=R_3=50$ Ом, $U_{вх}=20$ В

3



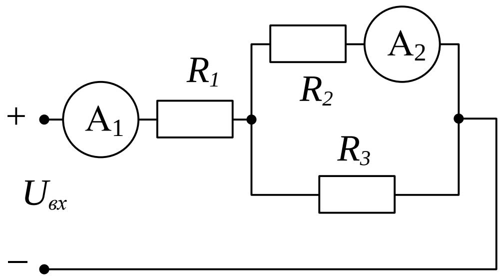
Определить показание амперметра, если $R_1=5$ Ом, $R_2=R_3=10$ Ом, $U_{вх}=20$ В

4



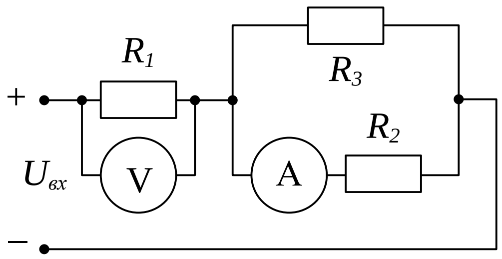
Определить показание вольтметра, если $R_1=R_2=R_3=100$ Ом, $U_{вх}=15$ В

5



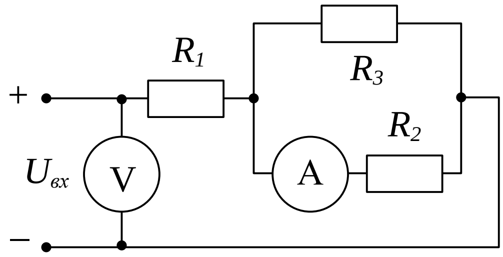
Определить показание амперметра A_1, если показание амперметра A_2 составило 0.1 А, $R_1=50$ Ом, $R_2=100$ Ом, $U_{вх}=20$ В

6



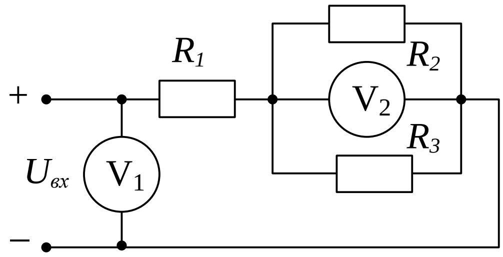
Определить показание вольтметра, если показание амперметра составляет 1 А, $R_1=5$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=20$ Ом

7



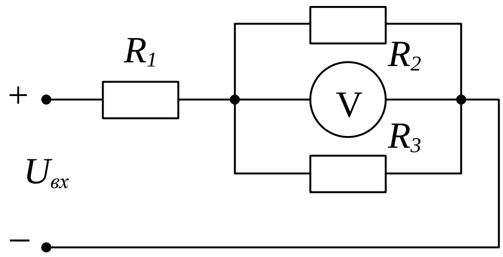
Определить показание вольтметра, если показание амперметра составило 0.1 А, R_1=30 Ом, R_2=200 Ом, R_3=100 Ом

8



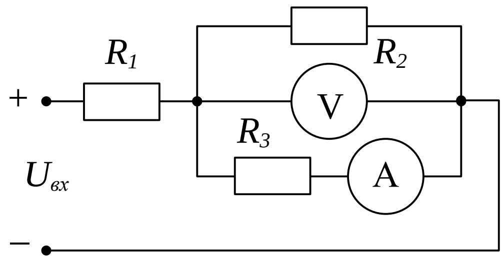
Определить показание вольтметра V_1, если показание вольтметра V_2 составляет 10 В, R_l=R_3=50 Ом, R_2=100 Ом

9



Определить сопротивление R_1, если показание вольтметра составляет 5В, R_2=50 Ом, R_3=25 Ом, $U_{вх}$=20 В

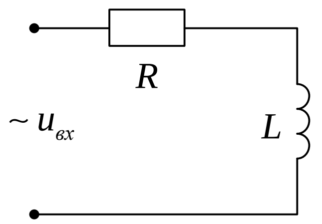
10



Определить показание амперметра, если показание вольтметра составляет 10 В, R_1=50 Ом, R_2=100 Ом, $U_{вх}$=25 В

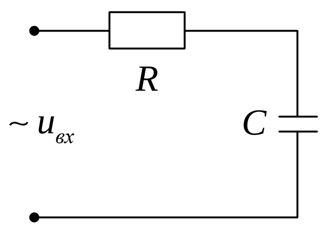
Анализ линейных цепей в гармоническом режиме

1



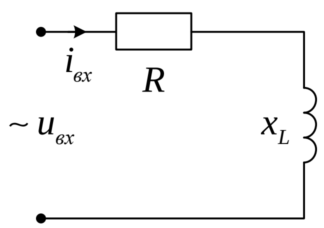
1. Определить действующее значение $U_{вх}$, если U_R=U_L=20 В;
2. Построить векторную диаграмму тока и напряжений.

2



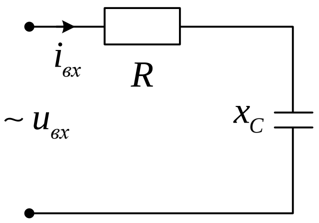
1. Определить действующее значение $U_{вх}$, если U_R=U_C=5 В;
2. Построить векторную диаграмму тока и напряжений.

3



1.. Определить действующее значение тока I, если x_L=10 Ом, R=10 Ом, $U_{вх}$=20 В;
2. Определить угол сдвига между входным напряжением и током.

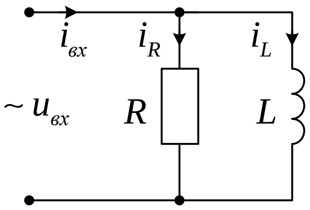
4



1. Определить действующее значение тока I, если R=20 Ом, x_C=20 Ом, $U_{вх}$=10 В;

2. Определить угол сдвига между входным напряжением и током.

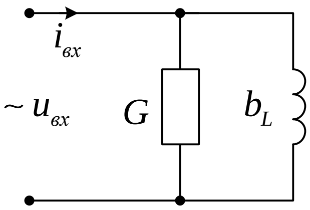
5



1. Определить действующее значение тока $I_{вх}$ на входе цепи, если I_R=I_L=1 А;

2. Построить векторную диаграмму напряжения и токов.

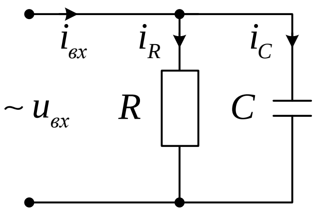
6



1. Определить действующее значение тока $I_{вх}$ на входе цепи, если G=0.1 См, b_L=0.1 См, $U_{вх}$=10 В;

2. Определить угол сдвига между напряжением и током на входе цепи.

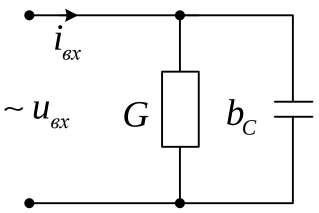
7



1. Определить действующее значение тока $I_{вх}$ на входе цепи, если I_R=I_C=0.1 А;

2. Построить векторную диаграмму напряжения и токов

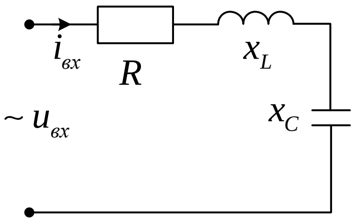
8



1. Определить действующее- значение тока $I_{вх}$ на входе цепи, если G=0.1 См, b_C=0.1 См, $U_{вх}$=20 В;

2. Определить угол сдвига фаз между напряжением и током на входе цепи.

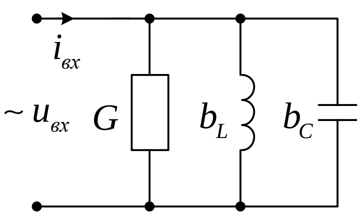
9



1. Определить действующее значение тока $I_{вх}$, если R=10 Ом, x_L=20 Ом, x_C=10 Ом, $U_{вх}$=20 В;

2. Изобразить векторные диаграммы тока и напряжений на элементах.

10



1. Определить действующее значение тока $I_{вх}$ неразветвлённой части цепи, если G=0.1 См, b_L=0.1 См, b_C=0.2 См, $U_{вх}$=10 В;

2. Определить сдвиг фаз между напряжением и током на входе цепи.

Приложение 9

Основные формулы

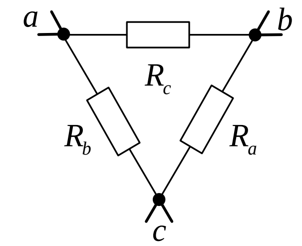
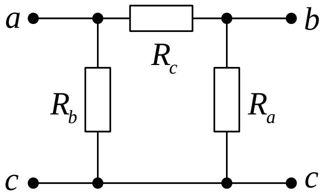
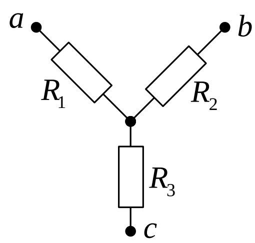
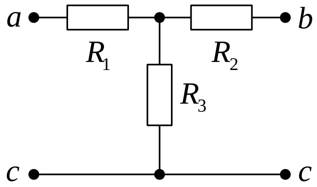
Единицы измерения

Величина		**Единица измерения (СИ)**	
Наименование	Символ	Наименование	Обозначение
Время	t	секунда	с
Период	T		
Частота	f	герц	Гц
Круговая частота	ω	радиан/секунда	рад/с
Начальная фаза	ψ	градус	°
Фазовый сдвиг	φ		
Заряд	q	кулон	Кл
Ток	I, i	ампер	А
Ток источника тока	J, j		
Напряжение	U, u	вольт	В
Электродвижущая сила (ЭДС)	E, e		
Энергия	W	Джоуль	Дж
Активная мощность	P, p	ватт	Вт
Реактивная мощность	Q	вольт·ампер реактивный	вар
Полная мощность	S	вольт·ампер	В·А
Активное сопротивление	R, r	ом	Ом
Реактивное сопротивление	X, x		
Полное сопротивление	Z, z		
Активная проводимость	G, g	сименс	См
Реактивная проводимость	B, b		
Полная проводимость	Y, y		
Индуктивность	L	генри	Гн
Взаимная индуктивность	M		
Электрическая ёмкость	C	фарад	Ф

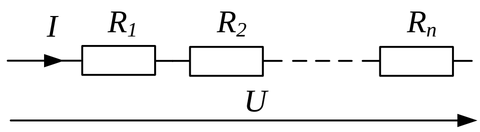
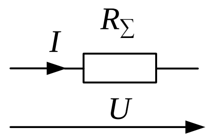
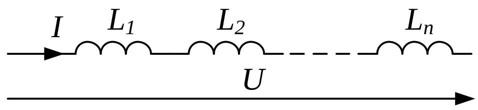
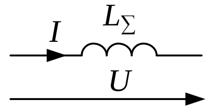
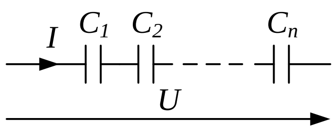
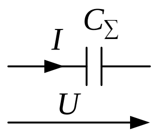
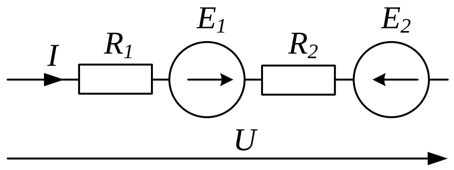
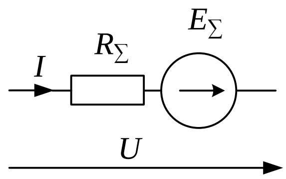
Законы электрических цепей

Постоянный ток	Переменный ток
Закон Ома	
$U = R \cdot I$	$\dot{U} = \underline{Z} \cdot \dot{I}$
$I = \dfrac{U}{I}$	$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{\underline{Z}}$
Закон токов Кирхгофа	
$\sum\limits_{k=1}^{n} I_k = 0$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$
Закон напряжений Кирхгофа (1-я форма)	
$\sum\limits_{k=1}^{m} U_k = 0$	$\sum\limits_{k=1}^{m} \dot{U}_k = 0$
Закон напряжений Кирхгофа (2-я форма)	
$\sum\limits_{k=1} R_k I_k = \sum\limits_{k=1} E_k + \sum\limits_{k=1} R_k J_k.$	$\sum\limits_{k=1} \underline{Z}_k \dot{I}_k = \sum\limits_{k=1} \dot{E}_k + \sum\limits_{k=1} \underline{Z}_k \dot{J}_k.$

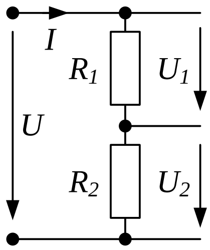
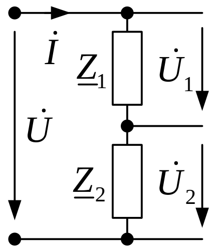
Преобразование соединения "треугольник"-"звезда"

Вид соединения	
"треугольник"	"звезда"
 	 
$R_a = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1};$ $R_a = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2};$ $R_a = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}.$	$R_1 = \dfrac{R_bR_c}{R_a + R_b + R_c};$ $R_2 = \dfrac{R_cR_a}{R_a + R_b + R_c};$ $R_1 = \dfrac{R_aR_b}{R_a + R_b + R_c}.$

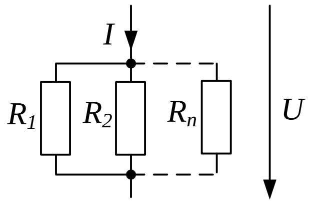
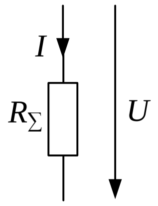
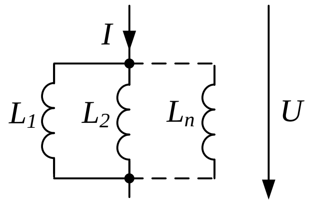
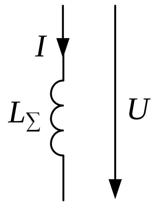
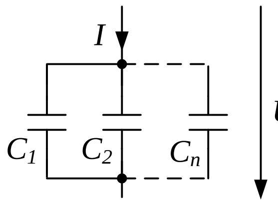
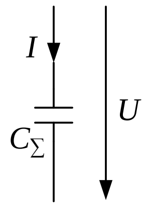
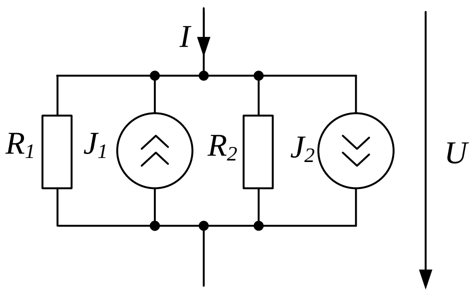
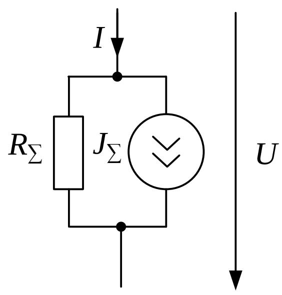
Последовательное соединение элементов

Схема соединения	Эквивалентная схема	Формула
		$R_\Sigma = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$
		$L_\Sigma = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$
		$\frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$
		$E_\Sigma = \sum E_k = E_1 - E_2$ $R_\Sigma = \sum R_k = R_1 + R_2$

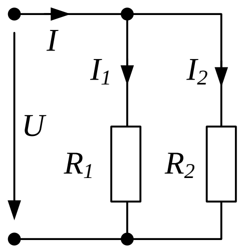
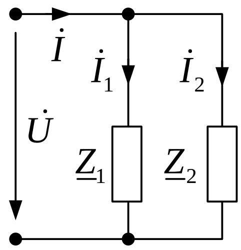
Делитель напряжения

Постоянный ток		Переменный ток	
	$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2};$ $U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}.$		$\dot{U}_1 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2};$ $\dot{U}_2 = \dot{U}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$

Параллельное соединение элементов

Схема соединения	Эквивалентная схема	Формула
		$\frac{1}{R_\Sigma}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}$ или $G_\Sigma=G_1+G_2+\ldots+G_n$
		$\frac{1}{L_\Sigma}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\ldots+\frac{1}{L_n}$
		$C_\Sigma=C_1+C_2+\ldots+C_n$
		$J_\Sigma=\sum J_k=-J_1+J_2$ $\frac{1}{R_\Sigma}=\sum\frac{1}{R_k}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ или $G_\Sigma=\sum G_k=G_1+G_2$

Делитель тока

Постоянный ток		Переменный ток	
	$I_1=I\frac{R_2}{R_1+R_2};$ $I_2=I\frac{R_1}{R_1+R_2}.$		$\dot{I}_1=\dot{I}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2};$ $\dot{I}_2=\dot{I}\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}.$

Комплексные сопротивление и проводимость пассивных элементов

Общий вид	Резистивный элемент ***R***	Индуктивный элемент ***L***	Емкостной элемент ***C***
$\underline{Z} = R + jX$	R	$j\omega L$	$-j\dfrac{1}{\omega C}$
R	R	0	0
X	0	ωL	$-\dfrac{1}{\omega C}$
$z = \sqrt{R^2 + X^2}$	R	ωL	$\dfrac{1}{\omega C}$
$\varphi_Z = \mathrm{arctg}(X/R)$	0	$+\pi/2$	$-\pi/2$
$\underline{Y} = G + jB$	$1/R$	$-j\dfrac{1}{\omega L}$	$j\omega C$
G	$1/R$	0	0
B	0	$-\dfrac{1}{\omega L}$	ωC
$y = \sqrt{G^2 + B^2}$	$1/R$	$\dfrac{1}{\omega L}$	ωC
$\varphi_Y = \mathrm{arctg}(B/G)$	0	$-\pi/2$	$+\pi/2$

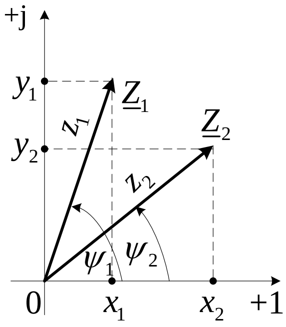
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad y = \frac{1}{z}, \quad \varphi_Y = -\varphi_Z.$$

Операции с комплексными числами

$\underline{Z}_1$ *и* $\underline{Z}_2$ – комплексные числа.

$$\underline{Z}_1 = x_1 + jy_1 = z_1 \cdot e^{j\psi_1},\ где\ z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};\ \psi_1 = arctg\frac{y_1}{x_1};$$

$$\underline{Z}_2 = x_2 + jy_2 = z_2 \cdot e^{j\psi_2},\ где\ z_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2};\ \psi_2 = arctg\frac{y_2}{x_2}.$$

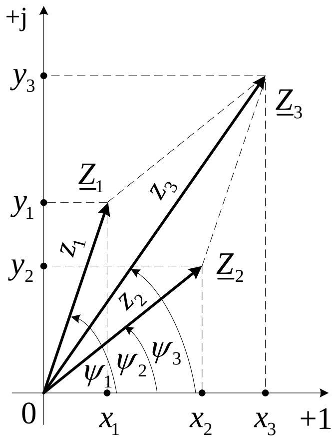


Перевод из показательной формы в алгебраическую:

$$z \cdot e^{\pm j\psi} = z(\cos\psi \pm j\sin\psi) = z\cdot\cos\psi \pm jz\cdot\sin\psi = x \pm jy,$$

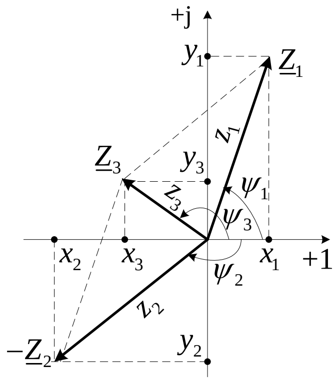
$$x = z\cdot\cos\psi; \qquad y = z\cdot\sin\psi.$$

Сложение и вычитание:



$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$= x_3 + jy_3,$$

$$x_3 = x_1 + x_2;\ \ y_3 = y_1 + y_2;$$



$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) =$$
$$= x_3 + jy_3$$

$$x_3 = x_1 - x_2;\ \ y_3 = y_1 - y_2.$$

Умножение и деление:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = z_1 \cdot e^{j\psi_1} \cdot z_2 \cdot e^{j\psi_2} = (z_1 \cdot z_2)\cdot e^{j(\psi_1+\psi_2)}.$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{z_1 \cdot e^{j\psi_1}}{z_2 \cdot e^{j\psi_2}} = \frac{z_1}{z_2}\cdot e^{j(\psi_1-\psi_2)}.$$