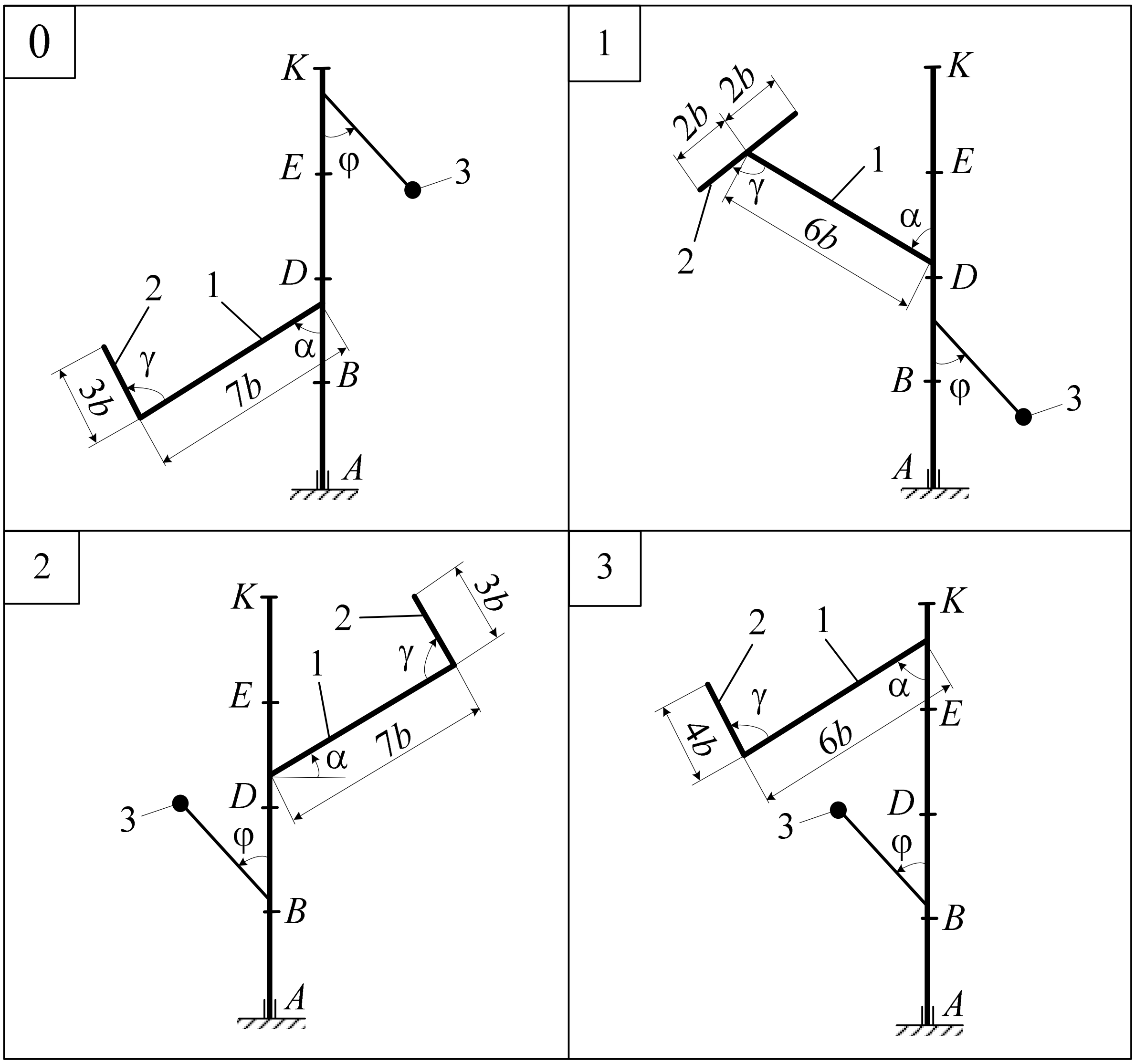
5.1. Задача Д6

Вертикальный вал AK (рис. 5.1), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\ \text{с}^{-1}$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д6 в столбце 2.

К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей указаны на рисунках, где $b = 0{,}1$ м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в табл. Д6 в столбцах 3 и 4, а углы α, β, φ, γ даны в столбцах 5 – 8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При расчетах принять $AB = BD = DE = EK = a$, где $a = 0{,}6$ м.



0
K
E
φ
3
D
2
1
γ
α
B
3b
7b
A
1
K
2b
2b
E
1
γ
α
6b
2
D
B
φ
3
A
2
K
2
3b
γ
E
1
7b
α
D
3
φ
B
A
3
K
2
1
γ
α
E
4b
6b
D
3
φ
B
A

Рис. 5.1

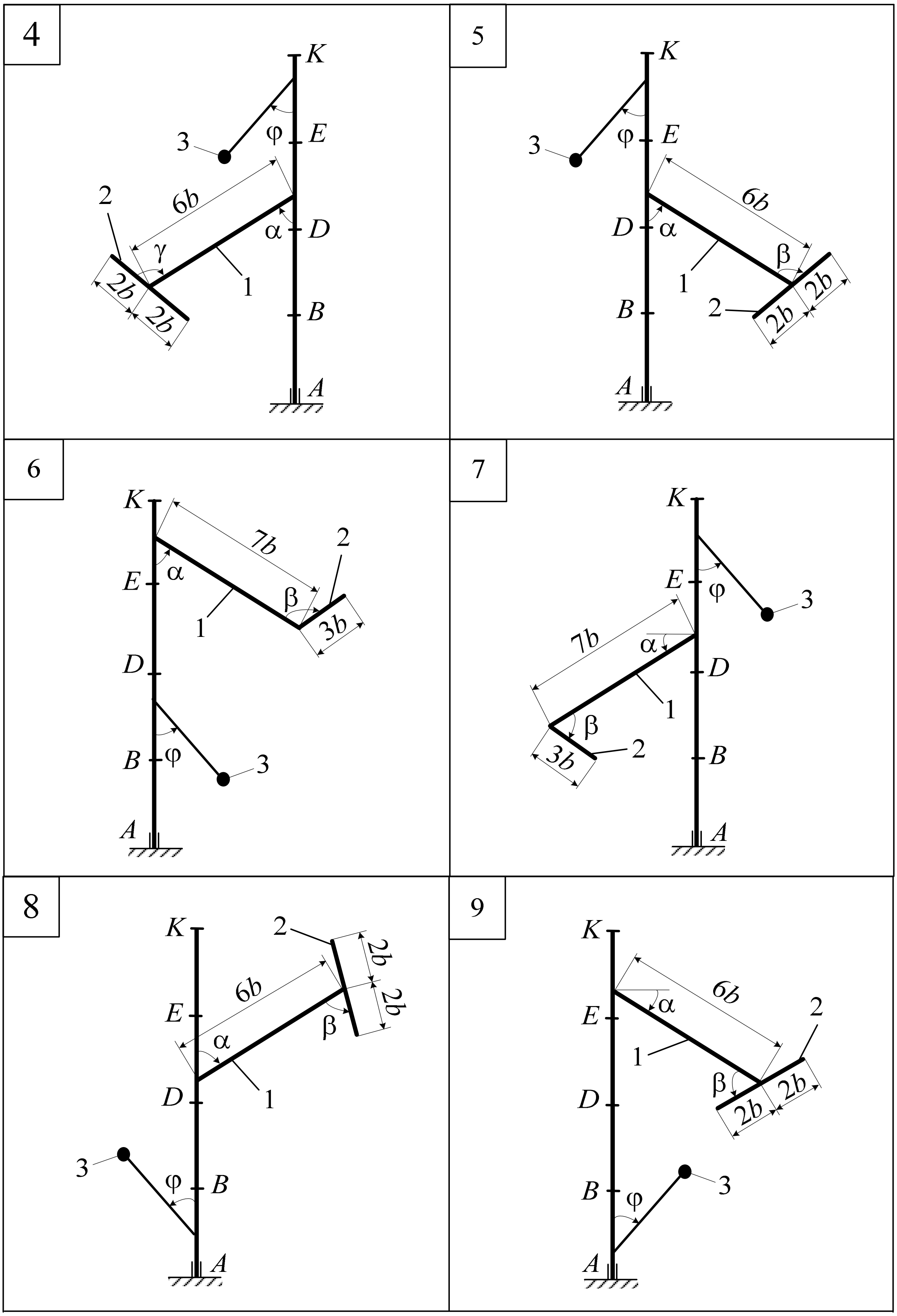


Рис. 5.1. Окончание

Таблица Д6

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α, град	γ, град	β, град	φ, град
		ломаного стержня	невесомого стержня		для вар. 0–4	для вар. 5–9	
0	*E*	*B*	*K*	45	135	225	60
1	*D*	*E*	*K*	60	60	150	30
2	*E*	*D*	*K*	60	150	60	30
3	*K*	*B*	*E*	30	120	30	60
4	*B*	*D*	*K*	45	225	135	60
5	*D*	*K*	*B*	60	240	150	30
6	*K*	*E*	*B*	30	120	210	60
7	*E*	*K*	*D*	30	210	120	60
8	*K*	*B*	*D*	60	150	240	45
9	*B*	*D*	*E*	30	210	120	60

Указания. Задача Д6 – на применение принципа Д'Аламбера для определения реакций связей динамической механической системы. Порядок решения этой задачи изложен в методических указаниях на стр. 14.

Применительно ко всем вариантам задачи Д6 рассмотрим случай вращения с постоянной угловой скоростью ω однородного стержня, расположенного в одной плоскости с осью вращения *AZ* (рис. 5.2).

Пусть однородный стержень *AB* длиной l и массой m жестко прикреплен в точке *A* к валу, вращающемуся вокруг оси *AZ* с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ $\left(\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = 0\right)$.

При равномерном вращении стержня каждый его $к$-й элемент массой $\Delta m_к$ имеет только нормальное ускорение $\vec{a}_к^{\,n}$, направленное к оси вращения и равное по величине $a_к^n = \omega^2 h_к$, где $h_к$ – расстояние от $к$-го элемента до оси вращения. Тогда на рис. 5.2 согласно (1.2) сила инерции $\vec{\Phi}_к$ каждого элемента стержня направлена от оси вращения и ее модуль равен

$$\Phi_к = \Delta m_к a_к^n = \Delta m_к \omega^2 h_к.$$

В результате на стержень действует система параллельных сил инерции распределенных по линейному закону, равнодействующая $\vec{\Phi}$ которых проходит через центр тяжести

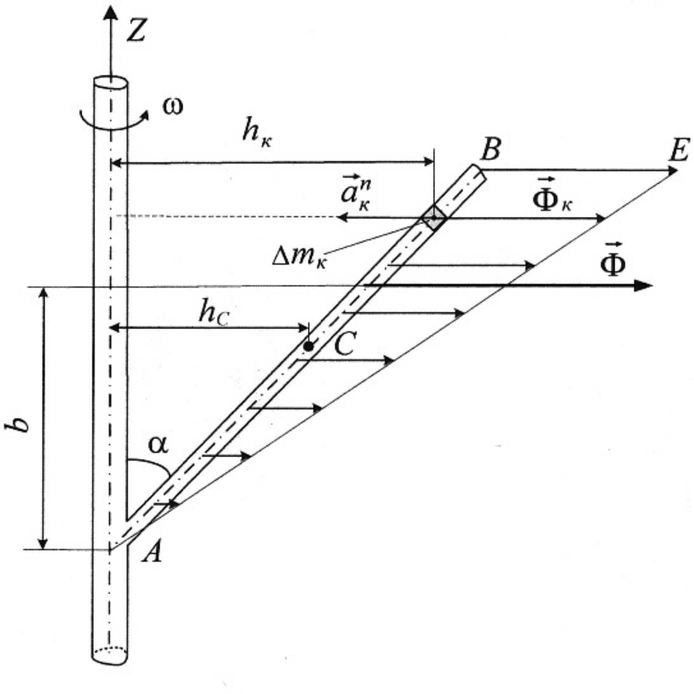


Рис. 5.2

треугольника ABE сил инерции, т. е. на расстоянии $b = \frac{2}{3} l \cos\alpha$ от вершины A (рис. 5.2). Величина этой равнодействующей равна модулю главного вектора сил инерции элементов стержня AB, т. е. с учетом (1.15)

$$\Phi = \Phi_n = m a_C^n = m\omega^2 h_C = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin\alpha.$$

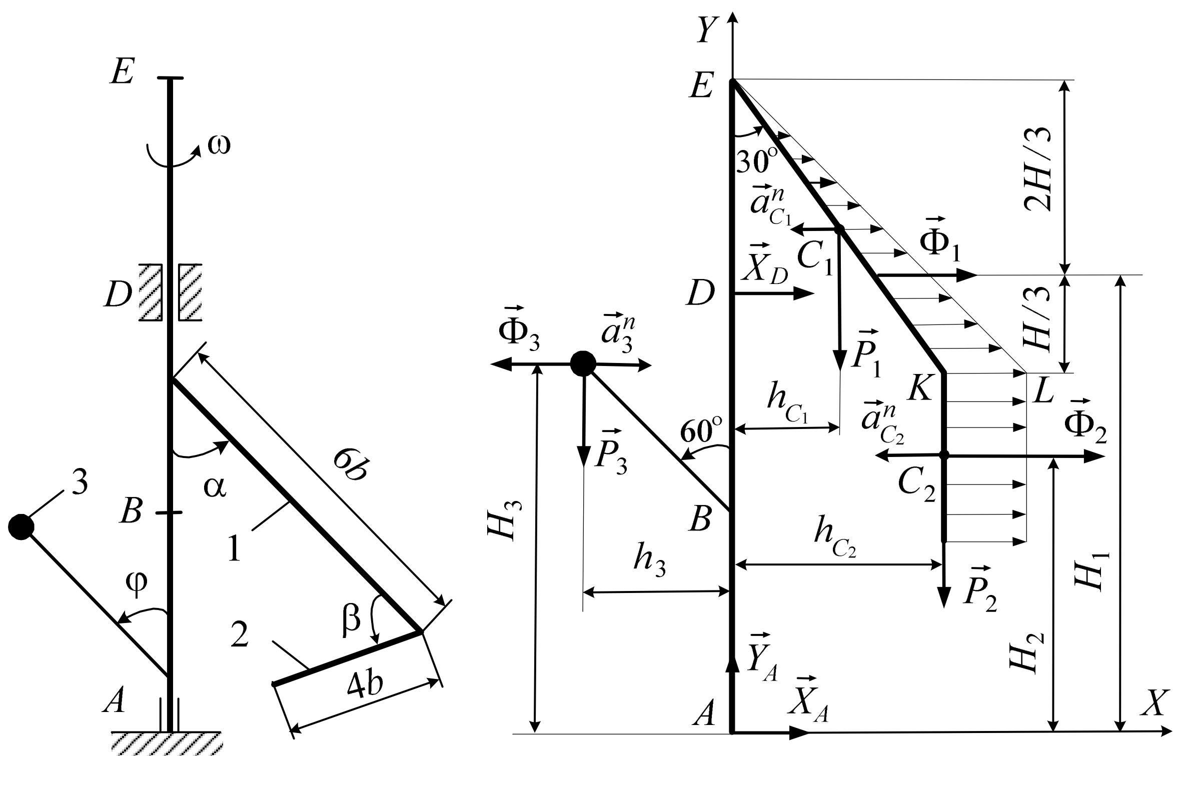
5.2. Пример решения задачи Д6

Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закрепленный подпятником A и цилиндрическим подшипником D (рис. 5.3., *а*) вращается с постоянной угловой скоростью ω.

К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости, весом вала пренебречь.

Определить реакции подпятника A и подшипника D.

Решить задачу при следующих данных: $\omega = 8$ с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, $m_3 = 3$кг, □ = 30º, □ = 150°, □ = 60º, a = 0,3 м, b = 0,1 м.



а *б*

Рис. 5.3

Р е ш е н и е

1. Изобразим (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках *B* и *E* стержни (рис. 5.3, *б*). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного однородного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны

$$m_1 = \frac{m}{10b}6b = 0{,}6m; \qquad m_2 = \frac{m}{10b}4b = 0{,}4m;$$
$$P_1 = 0{,}6mg; \qquad P_2 = 0{,}4mg; \qquad P_3 = m_3 g. \tag{5.1}$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера.

Проведем вращающиеся вместе с валом *AE* координатные оси *AXYZ* так, чтобы стержни всегда лежали в плоскости *AXY* (ось *AZ* на рис. 5.3, *б* не изображена) и рассмотрим механическую систему в произвольный, но фиксированный момент времени. Изобразим действующие активные силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, приложенные в центрах тяжести соответствующих однородных тел.

Согласно принципу Д'Аламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза *3*, считая его материальной точкой.

Поскольку вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$,), то на элементы ломанного стержня, имеющих только нормальные ускорения, направленные к оси вращения *AY*, действуют силы инерции, направленные от оси вращения и образующие системы параллельных сил. Причем силы инерции, приложенные к части *1* ломанного стержня образуют систему параллельных сил, распределенных по линейному закону, равнодействующая которых $\vec{\Phi}_1$ проходит через центр тяжести треугольника *EKL* (см. указания к задаче Д6). Силы инерции элементов части *2* ломанного стержня образуют равномерно-распределенную систему сил, линия действия равнодействующей $\vec{\Phi}_2$ которых проходит через центр тяжести прямоугольника сил, т. е. через центр масс C_2 части *2* (рис. 5.3, *б*).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как согласно (1.14) модуль главного вектора сил инерции любого тела равен $\Phi = m\,a_C$, где m – масса тела, a_C – ускорение его центра масс, то для частей *1* и *2* стержня соответственно получим

$$\Phi_1 = m_1\, a_{C_1}^n, \qquad \Phi_2 = m_2\, a_{C_2}^n. \tag{5.2}$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную ее нормальному ускорению, т. е. от оси вращения *AY*, и численно равна

$$\Phi_3 = m_3\, a_3^n. \qquad (5.3)$$

Ускорение центров масс частей *1* и *2* ломаного стержня и груза *3* определяются по формулам:

$$a_{C_1}^n = \omega^2\, h_{C_1}, \qquad a_{C_2}^n = \omega^2\, h_{C_2}, \qquad a_3^n = \omega^2\, h_3, \qquad (5.4)$$

где h_{C_1} h_{C_2} – расстояния от центров масс C_1 и C_2 частей ломанного стержня до оси вращения *AY*, а h_3 – расстояние до оси *AY* для груза *3*:

$$h_{C_1} = 3b\sin 30° = 0{,}15 \text{ м};$$

$$h_{C_2} = 6b\sin 30° = 0{,}3 \text{ м}; \qquad (5.5)$$

$$h_3 = l\sin 60° = 5b\sin 60° = 0{,}43 \text{ м}.$$

Подставив в (5.2) и (5.3) значения (5.4) с учетом (5.5), получим модули сил инерции Φ_1, Φ_2 и Φ_3:

$$\Phi_1 = 0{,}6m\,\omega^2\, h_{C_1} = 57{,}6 \text{ Н};$$

$$\Phi_2 = 0{,}4m\,\omega^2\, h_{C_2} = 76{,}8 \text{ Н}; \qquad (5.6)$$

$$\Phi_3 = m_3\,\omega^2\, h_3 = 55{,}0 \text{ Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ пройдут через центры тяжести соответственно треугольника и прямоугольника сил инерции элементов ломанного стержня. Поэтому линия действия $\vec{\Phi}_1$, проходит на расстоянии $\dfrac{2}{3}\,H$ от вершины *E* треугольника *EKL*, где его высота $H = 6b\cos 30°$, а линия действия $\vec{\Phi}_2$ – через центр масс C_2 части *2*.

Отбросив связи, изобразим на рис. 5.3, *б* реакции связей. Поскольку активные силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и силы инерции $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$, $\vec{\Phi}_3$ в каждый момент движения лежат в плоскости *AXY*, то реакции подпятника *A* и подшипника *D* должны находиться в этой же плоскости. Поэтому реакция подпятника A имеет только две составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, а реакция цилиндрического подшипника D – только одну составляющую $\vec{X}_D$, лежащих в плоскости AXY. Следовательно, в каждый момент вращения вала составляющие реакций связей вдоль оси AZ равны нулю ($Z_A = 0$, $Z_D = 0$).

3. Согласно принципу Д'Аламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской произвольной системы сил три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{кX} = 0, \\ \sum F_{кY} = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_к) = 0. \end{cases}$$

или для данной системы сил

$$\begin{cases} X_A + X_D + \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0; \\ Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \\ -X_D\, AD - P_1\, h_{C1} - P_2\, h_{C2} + P_3\, h_3 - \\ -\Phi_1\, H_1 - \Phi_2\, H_2 + \Phi_3\, H_3 = 0; \end{cases} \tag{5.7}$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи соответственно сил $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$, $\vec{\Phi}_3$ относительно точки A, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30° = 0{,}52$ м)

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \text{ м};$$

$$H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18 \text{ м}; \tag{5.8}$$

$$H_3 = a + l\cos 60° = 0{,}55 \text{ м}.$$

Подставим в уравнения (5.7) соответствующие величины из (5.5), (5.6), (5.8) и решив полученную систему уравнений (5.7), найдем искомые реакции $X_A = -33{,}7$ Н, $Y_A = 117{,}7$ Н для подпятника A и $X_D = -45{,}7$ Н для подшипника D. Здесь знак «$-$» указывает, что в действительности реакции $\vec{X}_A$ и $\vec{X}_D$ направлены противоположно векторам, показанным на рис. 5.3, *б*.

Ответ: $X_A = -33{,}7$ Н; $Y_A = 117{,}7$ Н ; $X_D = -45{,}7$ Н.