5.5. Задача Д8

Механическая система (рис. 5.8, табл. Д8) состоит из грузов *1* и *2*, цилиндрического сплошного однородного катка *3* и ступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней R_4 = 0,3 м, r_4 = 0,1 м, R_5 = 0,2 м, r_5 = 0,1 м (массу каждого шкива считать, распределенной по внешнему ободу). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Система движется под действием постоянной силы $\vec{F}$, приложенной к грузу *1*; при этом на шкивы *4* и *5* действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_4 и M_5.

Используя общее уравнение динамики определить ускорение груза, указанного в столбце «Найти » табл. Д8.

Грузы, массы которых равны нулю, на рисунке не изображать (шкивы *4* и *5* изображать всегда как части системы). Плоскости, по которым движутся грузы считать гладкими; все тела системы имеют плоскость материальной симметрии и их центры масс или находятся (шкивы *4* и *5*), или движутся (тела *1*, *2*, *3*) в этой плоскости.

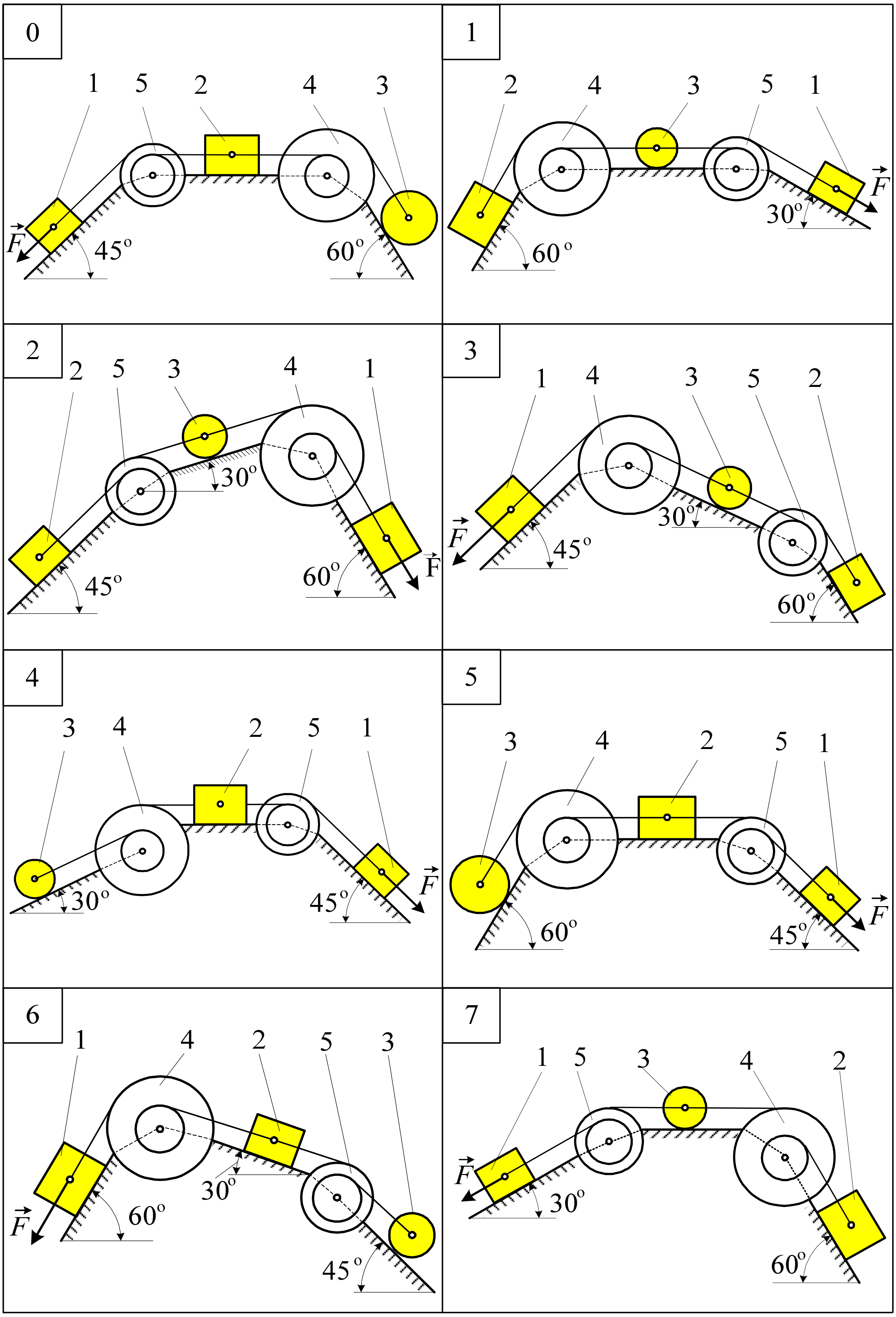
0
1 5 2 4 3
F
45°
60°
1
2 4 3 5 1
F
30°
60°
2
2 5 3 4 1
30°
45°
60°
F
3
1 4 3 5 2
F
45°
30°
60°
4
3 4 2 5 1
30°
45°
F
5
3 4 2 5 1
60°
45°
F
6
1 4 2 5 3
F
60°
30°
45°
7
1 5 3 4 2
F
30°
60°

Рис. 5.8

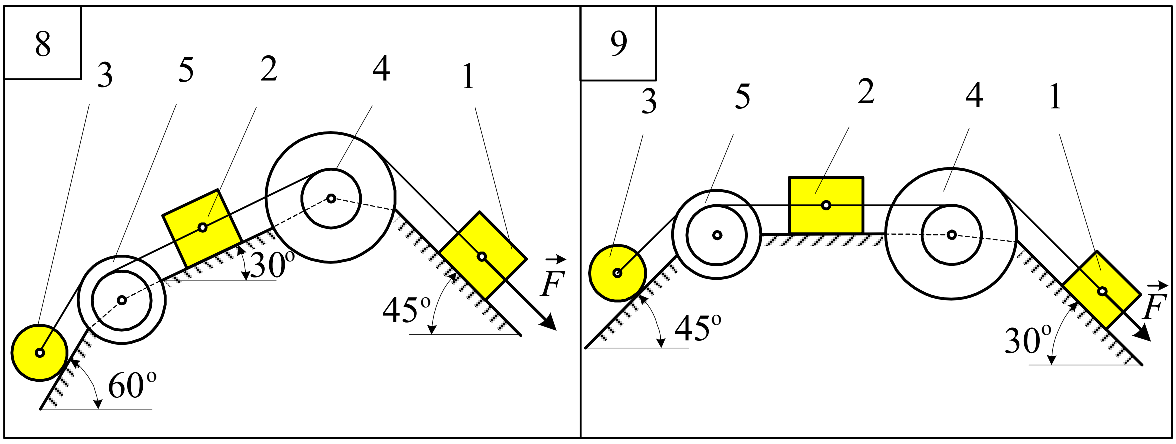

Рис. 5.8. Окончание

Таблица Д8

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н·м	M_5, Н·м	F, Н	Найти
0	2	0	4	6	0	0	0,8	350	$\vec{a}_1$
1	6	0	2	0	8	0,6	0	320	$\vec{a}_1$
2	0	4	6	8	0	0	0,4	380	$\vec{a}_2$
3	0	2	4	0	10	0,3	0	340	$\vec{a}_2$
4	8	0	2	6	0	0	0,6	330	$\vec{a}_1$
5	8	0	4	0	6	0,9	0	340	$\vec{a}_1$
6	0	6	2	8	0	0	0,8	360	$\vec{a}_2$
7	0	4	6	0	10	0,6	0	330	$\vec{a}_2$
8	6	0	4	0	8	0,3	0	340	$\vec{a}_1$
9	0	4	6	10	0	0	0,4	350	$\vec{a}_2$

Указания. Задача Д8 – на применение к изучению движения механической системы с одной степенью свободы общего уравнения динамики (3.5). Последовательность решения этой задачи изложена в методических указаниях на стр. 41.

5.6. Пример решения задачи Д8

Механическая система (рис. 5.9) состоит из грузов *1* и *2*, цилиндрического сплошного однородного катка *3* и ступенчатых шкивов *4* и *5* с радиусами ступеней R_4, r_4, R_5, r_5 соответственно (массу шкива считать, распределенной по внешнему ободу). Тела системы соединены нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Система движется под действием постоянной силы $\vec{F}$, приложенной к грузу *1*; при этом на шкив *5* действует постоянный момент сил сопротивления M_5. Определить ускорение груза *1*.

Решить задачу при следующих данных: m_1 = 2 кг; m_2 = 3 кг; m_3 = 4 кг; m_4 = 6 кг; m_5 = 0; R_4 = 0,3 м; r_4 = 0,1 м; R_5 = 0,2 м; r_5 = 0,1 м; M_5 = 0,8 Н·м; F = 360 Н.

Р е ш е н и е

Для решения задачи применим общее уравнение динамики (3.5). Рассматриваемая система имеет одну степень свободы (S = 1), поскольку перемещение любого одного из тел приводит к однозначному перемещению всех других тел системы. Будем считать, что направления ускорений тел соответствует направлениям их скоростей, т. е. предполагаем, что тела системы движутся ускоренно.

1. Изобразим активные силы: силы тяжести грузов *1* и *2* – $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, шкива *4* – $\vec{P}_4$, катка *3* – $\vec{P}_3$ и момент сопротивления M_4, действующей на шкив 4 (рис. 5.9).

Приложим силы инерции тел системы. Силы инерции точек груза *1*, движущегося поступательно с ускорением $\vec{a}_1$ согласно (1.4) приводятся к равнодействующей, проходящей через центр масс тела и равной главному вектору сил инерции

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1. \tag{5.16}$$

Силы инерции точек шкива *4*, вращающегося с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}_4$ вокруг неподвижной оси O_4, проходящей через центр масс шкива *4*

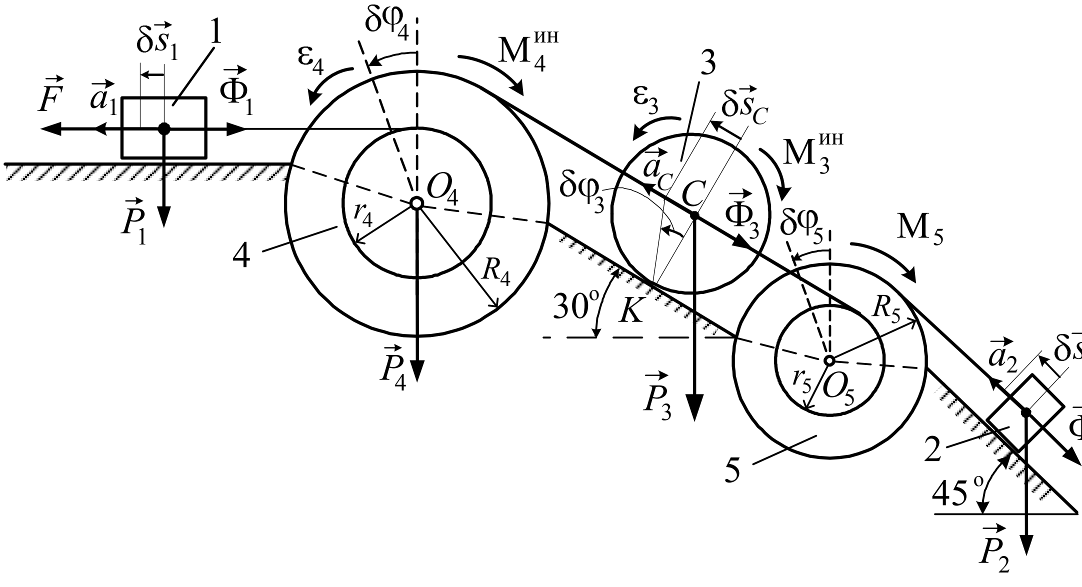

Рис. 5.9

перпендикулярно его плоскости материальной симметрии, приводятся к паре сил, лежащей в этой плоскости, момент которой согласно (1.17)

$$\vec{\text{M}}_4^{\text{и}} = -I_{O_4}\vec{\varepsilon}_4. \tag{5.17}$$

Здесь I_{O_4} – момент инерции шкива *4* относительно оси вращения; так как его масса распределена по внешнему ободу радиусом R_4, то

$$I_{O_4} = m_4 R_4^2. \tag{5.18}$$

Силы инерции точек катка *3*, совершающего плоскопараллельное движение согласно (1.19), приводятся к главному вектору

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3\vec{a}_C, \tag{5.19}$$

приложенному в центре масс *C* катка *3* ($\vec{a}_C$ – ускорение центра масс *C*), и к паре сил, лежащей в плоскости его симметрии, с моментом

$$\vec{\text{M}}_3^{\text{и}} = -I_C\vec{\varepsilon}_3. \tag{5.20}$$

Здесь I_C – момент инерции катка относительно, проходящей через центр масс *C* перпендикулярно плоскости его движения

$$I_C = \frac{m_3 R_3^2}{2}, \tag{5.21}$$

где R_3 - радиус катка *3*; $\vec{\varepsilon}_3$ – его угловое ускорение.

Силы инерции точек груза *2*, движущегося поступательно с ускорением $\vec{a}_2$, приводятся к равнодействующей, проходящей через его центр масс и равной главному вектору сил инерции (1.4)

$$\vec{\Phi}_2 = -m_2\vec{a}_2, \tag{5.22}$$

Знак «минус» в (5.16), (5.17) (5.19), (5.20) и (5.22) указывает на то, что на рис. 5.9 силы инерции $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ и $\vec{\Phi}_3$, моменты сил инерции $\vec{\text{M}}_4^{\text{и}}$ и $\vec{\text{M}}_3^{\text{и}}$ направляются противоположно соответствующим ускорениям $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{\varepsilon}_4$ и $\vec{\varepsilon}_3$.

2. Сообщим механической системе виртуальное перемещение (рис. 5.9), при котором груз *1* переместится на $\delta\vec{s}_1$ в направлении его движения по горизонтальной плоскости. Тогда тела системы получат следующие виртуальные перемещения:

шкив *4* – поворот на угол $\delta\varphi_4$ вокруг оси вращения O_4;

каток *3* – поворот на угол $\delta\varphi_3$ вокруг оси, проходящей через его мгновенный центр скоростей K и перпендикулярной плоскости движения;

шкив *5* – поворот на угол $\delta\varphi_5$ вокруг оси вращения O_5;

груз *2* – перемещение $\delta\vec{s}_2$ вверх по наклонной плоскости.

3. Вычислив элементарную работу активных сил и сил инерции на этих виртуальных перемещениях, запишем общее уравнение динамики (3.5) для рассматриваемой механической системы

$$F\,\delta s_1 - \Phi_1\delta s_1 - \mathrm{M}_4^{\text{и}}\,\delta\varphi_4 - P_3\sin 30^{\circ} R_3\,\delta\varphi_3 - \Phi_3 R_3\,\delta\varphi_3 -$$

$$-\mathrm{M}_3^{\text{и}}\,\delta\varphi_3 - \mathrm{M}_5\delta\varphi_5 - P_2\sin 45^{\circ}\,\delta s_2 - \Phi_2\delta s_2 = 0. \tag{5.23}$$

Поскольку система обладает одной степенью свободы, то из всех виртуальных перемещений, входящих в (5.23), независимым будет лишь одно из них. Выберем в качестве независимого виртуального перемещения δs_1 и выразим в уравнении (5.23) величины виртуальных перемещений $\delta\varphi_4$, $\delta\varphi_3$ и δs_2 через независимое виртуальное перемещение δs_1, учитывая, что виртуальные перемещения связаны так же, как скорости соответствующих тел при движении.

Так как тела системы связаны друг с другом нерастяжимыми нитями, то из соотношений для их скоростей

$$\omega_4 = \frac{V_1}{r_4}, \quad V_C = \omega_4 R_4 = \frac{V_1 R_4}{r_4}, \quad \omega_3 = \frac{V_C}{R_3} = \frac{V_1 R_4}{r_4 R_3},$$

$$\omega_5 = \frac{V_C}{r_5} = \frac{V_1 R_4}{r_4 r_5}, \quad V_2 = \omega_5 R_5 = \frac{V_1 R_4 R_5}{r_4 r_5} \tag{5.24}$$

находим

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_1}{r_4}, \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1 R_4}{r_4 R_3}, \quad \delta\varphi_5 = \frac{\delta s_1 R_4}{r_4 r_5}, \quad \delta s_2 = \frac{\delta s_1 R_4 R_5}{r_4 r_5}. \tag{5.25}$$

Подставив (5.25) в (5.23) и вынося независимое виртуальное перемещение δs_1 как общий множитель за скобки, получим

$$\delta s_1\left(F-\Phi_1-\frac{\mathrm{M}_4^{\text{и}}}{r_4}-P_3\sin 30^{\text{o}}\frac{R_3R_4}{r_4R_3}-\Phi_3\frac{R_3R_4}{r_4R_3}-\right.$$

(5.26)

$$\left.-\mathrm{M}_3^{\text{и}}\frac{R_4}{r_4R_3}-\mathrm{M}_5\frac{R_4}{r_4r_5}-P_2\sin 30^{\text{o}}\frac{R_4R_5}{r_4r_5}-\Phi_2\frac{R_4R_5}{r_4r_5}\right)=0.$$

Поскольку $\delta s_1 \neq 0$, то из (5.26) имеем

$$F-\Phi_1-\frac{\mathrm{M}_4^{\text{и}}}{r_4}-P_3\sin 30^{\text{o}}\frac{R_3R_4}{r_4R_3}-\Phi_3\frac{R_3R_4}{r_4R_3}-$$

(5.27)

$$-\mathrm{M}_3^{\text{и}}\frac{R_4}{r_4R_3}-\mathrm{M}_5\frac{R_4}{r_4r_5}-P_2\sin 45^{\text{o}}\frac{R_4R_5}{r_4r_5}-\Phi_2\frac{R_4R_5}{r_4r_5}=0.$$

4. Определим модули сил и моментов сил инерций (5.16), (5.17) (5.19), (5.20) и (5.22) тел системы через искомое ускорение a_1 груза *1*. Для этого выразим величины ускорений ε_4, ε_3, a_C, a_2 через это ускорение a_1. Вычислив от обеих частей равенств (5.24) производные по времени, находим

$$\varepsilon_4=\frac{a_1}{r_4},\quad \varepsilon_3=\frac{a_1R_4}{r_4R_3},\quad a_C=\frac{a_1R_4}{r_4},\quad a_2=\frac{a_1R_4R_5}{r_4r_5}. \tag{5.28}$$

С учетом (5.18), (5.21) и (5.28) определим модули сил и моментов сил инерций (5.16), (5.17) (5.19), (5.20) и (5.22) тел системы:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1=m_1a_1,\\
&\mathrm{M}_4^{\text{и}}=I_{O_4}\,\varepsilon_4=m_4R_4^2\varepsilon_4=\frac{m_4R_4^2a_1}{r_4},\\
&\Phi_3=m_3a_C=\frac{m_3R_4a_1}{r_4},\\
&\mathrm{M}_3^{\text{и}}=I_C\,\varepsilon_3=\frac{m_3R_3^2}{2}\,\varepsilon_3=\frac{m_3R_3R_4a_1}{2r_4},\\
&\Phi_2=m_2a_2=\frac{m_2R_4R_5a_1}{r_4r_5}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

5. Подставив в уравнение (5.27) найденные значения модулей сил и моментов сил инерции (5.29) и учитывая, что $P_к = m_к g$ $(к = 2,\ 3)$, получим

$$F - m_1 a_1 - \frac{m_4 R_4^2 a_1}{r_4^2} - m_3 g \sin 30^{\circ} \frac{R_4}{r_4} - \frac{m_3 R_4^2 a_1}{r_4^2} -$$

$$- \frac{m_3 R_4^2 a_1}{2 r_4^2} - \mathrm{M}_5 \frac{R_4}{r_4 r_5} - m_2 g \sin 45^{\circ} \frac{R_4 R_5}{r_4 r_5} - \frac{m_2 R_4^2 R_5^2 a_1}{r_4^2 r_5^2} = 0. \tag{5.30}$$

Из уравнения (5.30) находим искомое ускорение a_1 груза *1*

$$a_1 = \frac{F - \dfrac{R_4}{r_4}\left[\dfrac{\mathrm{M}_5}{r_5} + g\left(m_3 \sin 30^{\circ} + m_2 \sin 45^{\circ} \dfrac{R_5}{r_5}\right)\right]}{\left[m_1 + \dfrac{R_4^2}{r_4^2}\left(m_4 + \dfrac{3}{2} m_3 + m_2 \dfrac{R_5^2}{r_5^2}\right)\right]}.$$

Подставив в это выражение исходные данные задачи, определим величину ускорения груза *1*. Получим $a_1 = 0{,}7$ м/с^2. Так как $a_1 > 0$, то предположение об ускоренном движении груза *1* верное.

Ответ: $a_1 = 0{,}7$ м/с^2.