

Расчет среднеарифметического отклонения и среднего арифметического оформляется в таблицу, как указано ниже:

x_i	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$
21,6030	1,4877	2,2132
22,4820	0,6087	0,3705
25,2147	-2,1240	4,5114
23,9315	-0,8408	0,7070
22,0423	1,04839	1,09912
24,0335	-0,9428	0,8889
23,9055	-0,8148	0,6639
21,5130	1,5777	2,4891
$\sum_{i=1}^8 x_i = 184,7255$ $\bar{x} = 184,7255/8 = 23,09069$		$\sum_{i=1}^8 (\bar{x} - x_i)^2 = 12,9431$

После этого рассчитывается значение σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{8-1} \cdot 12,9431} = \sqrt{\frac{12,9431}{7}} = \sqrt{1,8490} = 1,3598$$

Далее полученные данные подставляются в условие промаха по

критерию Шовине: $|23,09069 - 25,7| \geq 1,9 \cdot 1,3598$
 $2,6093 \geq 2,5836$

Вывод: условие промаха по критерию Шовине выполняется, следовательно, x_p – промах.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

3.1. Динамические измерения и динамические погрешности

Измерение называется динамическим, если нельзя пренебречь изменением величины во времени. Так как СИ обладает инерционностью, то возникает погрешность, обусловленная динамическими свойствами СИ.

Динамическая погрешность определяется разностью между выходным сигналом $y(t)$ в динамическом режиме и $y_{cm} = Sx(t)$ в статическом режиме при отсутствии инерционных свойств СИ, т.е.:

$$\Delta_{дин} = y(t) - Sx(t) = y(t) - y_{cm}, \text{ где } S - \text{ чувствительность СИ.}$$

Дополнительно возникает фазовый сдвиг измеряемого сигнала:

$$\Delta_{дин} = y(t + \tau) - y_{cm}.$$

В общем случае $y(t) = Bx(t)$, где B – комплексный оператор погрешности.

Для расчетно-экспериментального определения динамических характеристик средств измерений, используют типовые входные воздействия:

а) функция Хейвисайда (рис. 3.1.) - единичная ступенчатая функция, функция скачка, включенная единица.

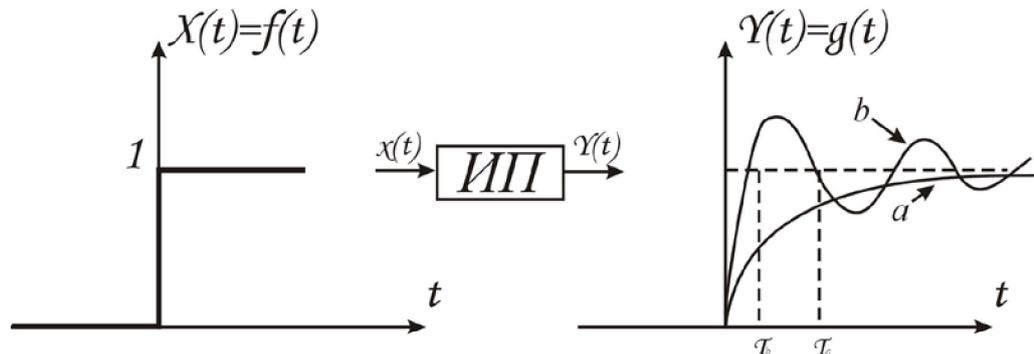


Рис. 3.1. Функция Хейвисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{и} \ddot{\text{д}} \ddot{\text{е}} \quad t \leq t_0 \\ 1 & \text{и} \ddot{\text{д}} \ddot{\text{е}} \quad t > t_0 \end{cases},$$

где $h(t)$ – переходная характеристика системы, т.е. реакция динамической системы на воздействие в виде функции Хейвисайда, при заданных начальных условиях.

Переходная характеристика может воспроизводить входной сигнал с запаздыванием (кривая a на рис. 3.1.), либо колебанием и запаздыванием (кривая b на рис.3.1), т.е. $g(t)$ – переходная характеристика, воспроизводит $x(t)$ с запаздыванием τ_a (кривая a), либо с колебанием и запаздыванием τ_s (кривая b).

б) дельта-функция Дирака (рис. 3.2.) - дираковская дельта, единичная импульсная функция равна 0 при $t \neq t_0$ и равна ∞ при $t=t_0$.

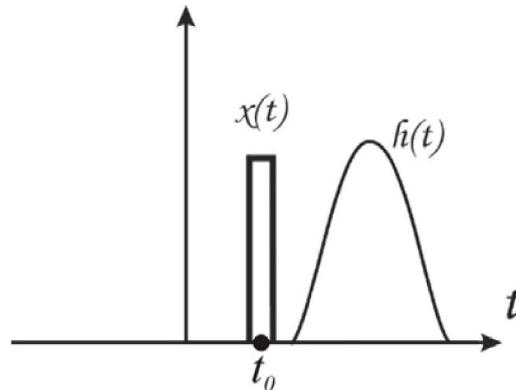


Рис.3.2. Дельта-функция Дирака

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \neq t_0 \\ \infty & \text{if } t = t_0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Однако площадь функции равна единице. Реакция на такое воздействие - функция $h(t)$.

$g(t)$ – переходная характеристика системы, т.е. реакция динамической системы на воздействие в виде функции Дирака, которая описывает точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин, сосредоточенной или приложенной в одной точке.

в) рамповая функция (рис.3.3.) - линейно-изменяющееся во времени воздействие.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0 \\ At & \text{при } t > t_0 \end{cases}$$

где $C(t)$ – переходная характеристика системы, т.е. реакция динамической системы на линейно изменяющееся во времени воздействие, которая описывает изменение физической величины с постоянным шагом в определённом направлении.

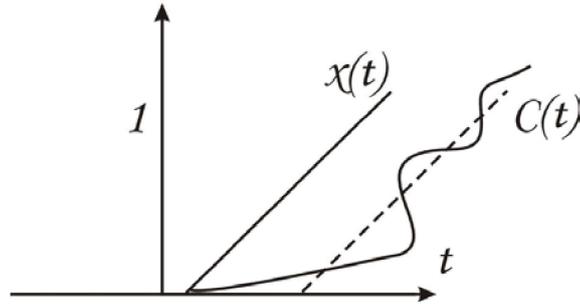


Рис. 3.3. Рамповая функция

г) синусоидальная (гармоническая) функция $x(t) = A \sin \omega t$ (рис. 3.4).

Реакция на такое воздействие – функция $Y(t)$ со сдвигом по фазе на φ . При изменении ω от 0 до ∞ можно получить амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФХ), показывающую статические и динамические характеристики системы в частотной области.

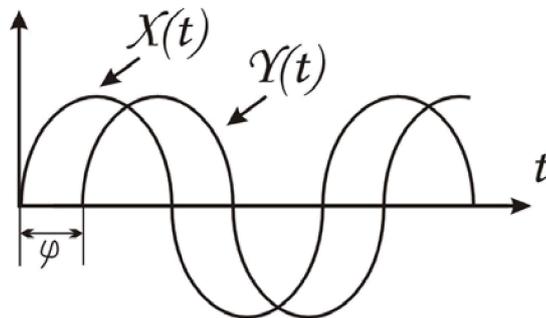


Рис. 3.4. Синусоидальная функция

д) при изменении угловой частоты ω от 0 до ∞ можно получить амплитудно-фазово-частотную характеристику (АФХ), которая позволяет судить о статических и динамических свойствах технических систем (ТС) в частотной области (рис. 3.5.).

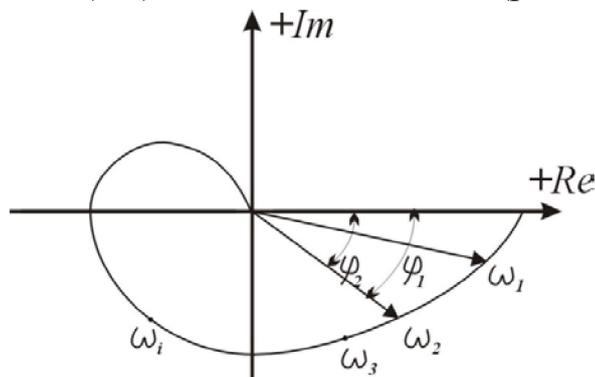


Рис. 3.5. Амплитудно-фазово-частотная характеристика

Характеристики $h(t)$, $g(t)$ и $c(t)$ – позволяют говорить о тех же свойствах ТС во временной области. В комплексном виде АФХ

$$W(j\omega) = P(\omega) + j\Theta(\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

где $P(\omega)$ и $\theta(\omega)$ - действительная и мнимая части уравнения; $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ – преобразование Фурье для $X(t)$ и $Y(t)$; $A(\omega)$ – АЧХ; $\varphi(\omega)$ – ФЧХ. Таким образом, АЧХ и ФЧХ представляет оператор B в комплексной форме. Все эти функции взаимосвязаны, и их можно найти друг из друга. Например,

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt ; \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

$$W(j\omega) = j\omega \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

В зависимости от параметров функции $W(j\omega)$, СИ могут быть отнесены к одному из типовых динамических звеньев (см. табл.3.1)

Таблица 3.1

Типовые динамические звенья

Звено	Передаточная функция $W(p)$	Схема соединения звеньев	Передаточная функция $W(p)$
Безинерционное (усиленное)	K	Последовательное соединение звеньев	$W_p(P) = W_1(P) \times W_2(P) \dots W_n(P)$
Идеальное дифференцирующее	Kp		
Реальное дифференцирующее	$\frac{K}{Tp+1}$	Параллельное соединение звеньев	$W_p(P) = W_1(P) + W_2(P) \dots W_n(P)$
Идеальное интегрирующее	$\frac{K}{p}$		
Реальное интегрирующее	$\frac{K}{p(Tp+1)}$	Встречно-параллельное соединение двух звеньев с обратной связью	$W_p(P) = \frac{W_1(P)}{1 \pm W_1(P)W_2(P)}$
Апериодическое (инерционное)	$\frac{Kp}{Tp+1}$		
Колебательное	K	Замкнутая система	$W_p(P) = \frac{W_n(P)}{W_p(P)+1}$
	$T^2p^2 + 2T\xi p + 1$		

Примечания: K - коэффициент усиления; T - постоянная времени; ξ -коэффициент успокоения (демпфирования).

Например, измеряя размер детали, изменяющейся скачкообразно из x_0 в x_1 , видим, что на выходе сигнал изменяется по закону:

$$y = y_0 + S_0(x_1 - x_0),$$

где S_0 статическая чувствительность СИ. В общем случае переходная функция: $y = y_0 + S_0(x_1 - x_0)(1 - e^{-t/T})$, где T – постоянная времени. T находят по касательной к графику $y(t)$ при единичном ступенчатом воздействии, что есть 0,63 от времени установки.

В реальности переходный процесс более сложен и имеет дополнительные потери, поэтому измерения начинают через время успокоения $t_y = (3 - 4)T$. При изменении величин, изменяющихся примерно по синусоидальному закону, входная величина изменяется по закону $x(t) = X \sin \omega t$, в этом случае на выходе:

$$y(t) = S(\omega)X \sin [\omega t + \varphi(\omega)].$$

В общем случае для расчета динамической погрешности $\Delta_{дин}$: $\Delta_{дин} = y(t) - Sx(t) = y(t) - y_{cm}$, выходной сигнал представляют в виде интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau,$$

где $h(\tau)$ – переходная импульсная функция при воздействии функ-

ции Хейвисада. Тогда: $y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau - x(t)$

Представив $x(t)$ многочленом степени r , $x(t - \tau)$ можно записать в виде:

$$x(t - \tau) = x(t) - x'(t)\tau + \frac{x''(t)}{2!}\tau^2 + \dots + (-1)^r \frac{x^{(r)}(t)\tau^r}{r!}.$$

При подстановке полученного разложения в предыдущую формулу:

$$y(t) = x(t) \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau - x'(t) \int_0^{\infty} \tau \cdot h(\tau) d\tau + \dots + \frac{(-1)^r}{r!} x^{(r)}(t) \int_0^{\infty} \tau^r \cdot h(\tau) d\tau - x(t)$$

Подынтегральное выражение и коэффициенты при нем, представляют собой интеграл свертки для передаточной функции. Обозначив подынтегральные выражения через коэффициенты C :

$$C_0 = \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau; \quad C_1 = -\int_0^{\infty} \tau h(\tau) d\tau; \quad \dots; \quad C_r = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^{\infty} \tau^r h(\tau) d\tau,$$

Выражение $y(t)$ примет вид:

$$y(t) = C_0 x(t) + C_1 x'(t) + \dots + C_r x^{(r)}(t).$$

Коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_r называют коэффициентами ошибок, которые находят через передаточную функцию $W(P)$. Приравняв $P = j\omega = 0$, дифференцируя по P и считая $P=0$, из функции передаточного звена находят коэффициенты C :

$$C_0 = \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau = W(P),$$

$$C_1 = \left. \frac{-dW(P)}{dP} \right|_{P=0}, \quad C_2 = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2 W(P)}{dP^2} \right|_{P=0}, \quad \dots, \quad C_r = \left. \frac{(-1)^r}{r!} \frac{d^r W(P)}{dP^r} \right|_{P=0}.$$

Индекс коэффициента указывает на порядок дифференцирования, знак и основание факториала.

3.2. Задания к лабораторной работе № 3

Нахождение динамических погрешностей

При выполнении лабораторной работы использовать номер варианта, полученный у преподавателя (см. табл. 3.2).

Задание

На измерительный прибор, имеющий передаточную характеристику вида $W(p) = \frac{K}{Tp+1}$ поочередно подается 3 входных сигнала:

- 1) $x_1(t) = a$,
- 2) $x_2(t) = bt$,
- 3) $x_3(t) = c + dt + et^2$.

В передаточной функции K – коэффициент усиления звена; T – постоянная времени; p – комплексная переменная в преобразовании Лапласа. Во входных сигналах t – действительная переменная по времени; коэффициенты a, b, c, d, e – соответствующие коэффициенты в указанных функциях входного сигнала. Необходимо рассчитать и построить графики входного $x_i(t)$ и выходного $y_i(t)$ сигнала.

лов для всех трех случаев. Каждую пару сигналов $x_i(t)$ и $y_i(t)$ строить на отдельных осях координат. На графиках значение по оси времени должно быть не менее 20 единиц.

Уметь находить динамическую погрешность графически.

Таблица 3.2

Варианты заданий и значения коэффициентов

Значение коэфф. № варианта	K	T	a	b	c	d	e
00	4	3	3	0,1	1	0,5	0,03
01	2	0,5	5	4	2	0,4	0,03
02	0,5	4	15	3	1	0,5	0,02
03	1	2	3	0,4	3	1,5	0,1
04	1,5	0,2	7	0,7	2,5	0,15	0,06
05	5	1	2	0,25	2	0,17	0,03
06	1	0,6	4	1	1,2	0,2	0,08
07	1,3	0,4	8	2,4	0,5	0,2	0,02
08	3	1,5	6	0,3	3	0,4	0,01
09	2	3	9	0,6	1,5	0,4	0,07
10	4,4	2,3	6	2,02	1,7	1,14	0,08
11	3,8	4,6	20	4,59	3	1,87	0,07
12	2,2	2,4	17	3,59	1,5	1,46	0,07
13	3,2	3	14	4,03	2,5	2	0,05
14	3,3	3,8	9	3,46	2,2	0,3	0,08
15	1,3	2,3	19	0,4	2,4	0,26	0,05
16	1,8	2,7	20	0,66	2,9	1,84	0,07
17	4,6	4,6	7	1,42	1,5	1,73	0,08
18	1,1	4,9	5	4,78	3	0,97	0,09
19	2,8	3	8	3,13	1,6	0,16	0,08
20	3,4	3,3	20	4,27	2,5	0,1	0,09
21	3,6	1,4	18	2,46	1,8	1,15	0,08
22	4,6	3,9	8	2,76	1,6	0,78	0,1
23	1,7	1,6	20	3,44	1,7	1,32	0,07
24	2,4	4	11	2,79	1,3	1,87	0,08
25	3,4	2,6	10	4,27	2,9	0,27	0,09
26	3,2	1,5	9	1,78	1,4	0,74	0,1
27	2,1	3,7	12	1,96	2,3	1,13	0,06
28	1,7	2,6	6	3,07	2,7	0,62	0,09
29	1,7	1,7	8	0,56	1,8	1,18	0,06
30	4,8	4,7	12	1,16	2,6	1,54	0,1

3.3. Пример решения для входного сигнала $X_3(T)$

Работу необходимо начать с расчета выходного сигнала $y(t)$. Для построения графиков выходного сигнала $y(t)$, необходимо найти формулы $y_i(t)$ для каждого случая по материалам главы 3 «Динамические измерения и динамические погрешности».

В общем случае для расчета динамической погрешности $\Delta_{дин}$:

$$\Delta_{дин} = y(t) - Sx(t) = y(t) - y_{см.}$$

При известной передаточной функции, выходной сигнал рассчитывается с помощью интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

где $h(\tau)$ – импульсная функция. Представив $x(t)$ многочленом степени r , преобразуем $x(t-\tau)$:

$$x(t-\tau) = x(t) - x'(t)\tau + \frac{x''(t)}{2!}\tau^2 + \dots + (-1)^r \frac{x^{(r)}(t)\tau^r}{r!}.$$

Подставив полученное разложение в предыдущую формулу, получим:

$$y(t) = x(t)\int_0^{\infty} h(\tau)d\tau - x'(t)\int_0^{\infty} \tau \cdot h(\tau)d\tau + \dots + \frac{(-1)^r}{r!} x^{(r)}(t)\int_0^{\infty} \tau^r \cdot h(\tau)d\tau.$$

Подынтегральное выражение и коэффициенты при нём представляют собой преобразование передаточной функции из импульсной функции $h(\tau)$ к передаточной характеристике вида $W(p)$, где степень производной соответствует степени при r . Обозначив подынтегральные выражения через коэффициенты C_i , получим:

$$C_0 = \int_x^{\infty} h(\tau)d\tau, \quad C_1 = -\int_x^{\infty} \tau h(\tau)d\tau, \quad C_r = \frac{(-1)^r}{r!} \int_x^{\infty} \tau^r h(\tau)d\tau.$$

Выходной сигнал $y(t)$ можно представить:

$$y(t) = C_0 x(t) + C_1 x'(t) + \dots + C_r \frac{d^r x(t)}{dt^{(r)}}.$$

Приравняв $p = j$ и $\omega = 0$, дифференцируя по p и считая $p = 0$, из функции передаточного звена находят коэффициенты C :

$$C_0 = W(0), \quad C_1 = -1 \cdot \left. \frac{dW(p)}{dp} \right|_{p=0}, \quad C_r = \frac{(-1)^r}{r!} \left. \frac{d^r W(p)}{dp^{(r)}} \right|_{p=0}.$$

Исходные данные:

$$K = 4, \quad T = 0.5, \quad a = 15, \quad b = 0.4, \quad c = 2.5, \quad d = 0.17, \quad e = 0.08,$$

$$x_3(t) = et^2 + dt + c.$$

Для начала найдём коэффициенты C_r . Так как наибольшая степень аргумента входной функции равна 2, то для нахождения $y_i(t)$ понадобятся коэффициенты C_0 , C_1 и C_2 .

Нахождение коэффициентов:

$$C_0 = W(p) \Big|_{p=0} = \frac{K}{Tp+1} \Big|_{p=0} = \frac{4}{0,5p+1} \Big|_{p=0} = \frac{4}{0,5 \cdot 0 + 1} = \frac{4}{1} = 4,$$

$$C_0 = 4$$

$$C_1 = \left(\frac{4}{0,5p+1} \right)' \Big|_{p=0} = 4 \left(\frac{1}{0,5p+1} \right)' \Big|_{p=0} = 4 \left((0,5p+1)^{-1} \right)' \Big|_{p=0} =$$

$$= 4 \cdot (-1)(0,5p+1)^{-2} (0,5p+1)' \Big|_{p=0} = (-4)(0,5p+1)^{-2} (0,5)' \Big|_{p=0}$$

$$= (-2)(0,5p+1)^{-2} \Big|_{p=0} = (-2)(0,5 \cdot 0 + 1)^{-2} = -2$$

$$C_1 = -2,$$

$$C_2 = \left(\frac{4}{0,5p+1} \right)'' \Big|_{p=0} = \left((-2)(0,5p+1)^{-2} \right)' \Big|_{p=0} = (-2) \left((0,5p+1)^{-2} \right)' \Big|_{p=0} =$$

$$= (-2)(-2)(0,5p+1)^{-3} (0,5p+1)' \Big|_{p=0} = 4 \cdot 0,5 (0,5p+1)^{-3} \Big|_{p=0} =$$

$$= 2(0,5 \cdot 0 + 1)^{-3} = 2$$

$$C_2 = 2.$$

После нахождения необходимых коэффициентов, их нужно подставить в формулу расчета выходного сигнала:

$$y_3(t) = C_0 x_3(t) - \frac{C_1 x_3'(t)}{1!} + \frac{C_2 x_3''(t)}{2!} = 4(0,08t^2 + 0,17t + 2,5) -$$

$$- \frac{2(0,08t^2 + 0,17t + 2,5)'}{1} + \frac{2(0,08t^2 + 0,17t + 2,5)''}{2} =$$

$$0,16t^2 + 0,68t + 10 + 2(0,16t + 0,17) + (0,16) = 0,16t^2 + 0,68t + 0,32t +$$

$$+ 10 + 0,34 + 0,16 = 0,16t^2 + t + 10,5$$

$$y(t) = 0,16t^2 + t + 10,5$$

Далее строятся графики $x(t)$ и $y(t)$ на одной оси координат.

По оси абсцисс график должен доходить до значения $t = 20$.

Масштаб по осям должен быть линейным и выбирается самостоятельно.

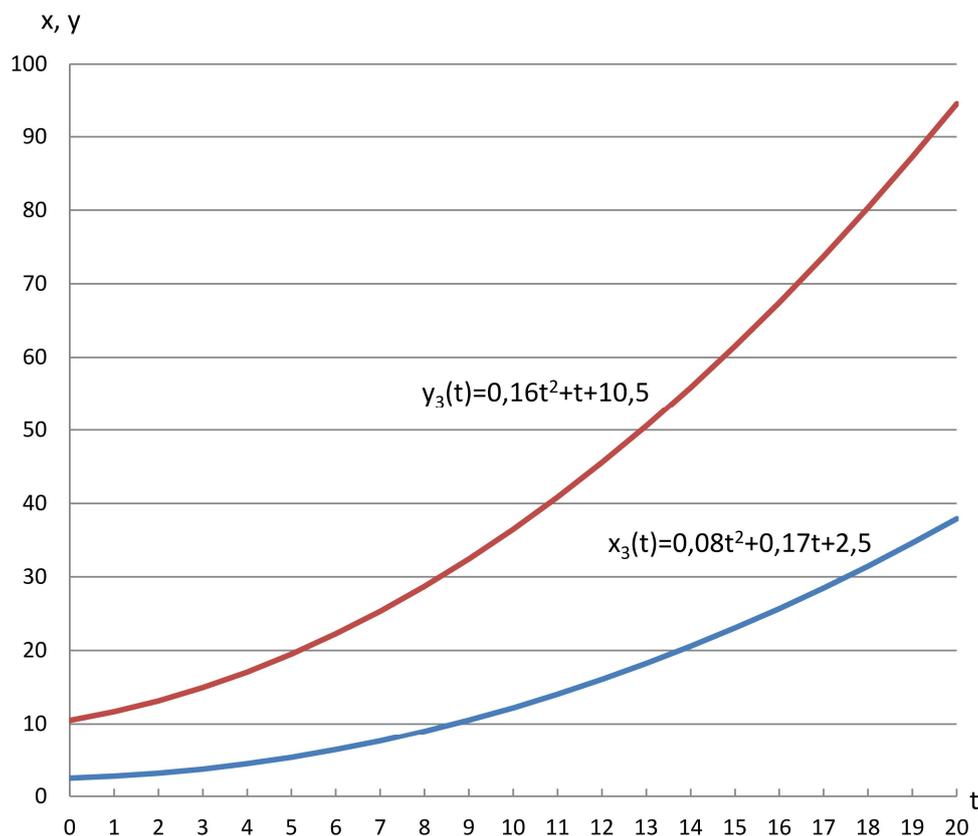


Рис. 3.6. Пример построения графиков