22. Конформные отображения в точке и области.

– Б –

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Для данных комплексных чисел z_1 и z_2 вычислить сумму, разность, произведение, частное и $z_1 + \frac{1}{z_2}$.

1.1. $z_1 = \sqrt{2} + i$, $z_2 = \sqrt{2} - i$.

1.2. $z_1 = 1 + \sqrt{2}i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

1.3. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$.

1.4. $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$.

1.5. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$.

1.6. $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$.

1.7. $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 + i\sqrt{2}$.

1.8. $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 - i\sqrt{2}$.

1.9. $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$.

1.10. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 4 + 3i$.

1.11. $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 4 - 3i$.

1.12. $z_1 = 1 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{5}i$.

1.13. $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{5}i$.

1.14. $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{5} + 2i$.

1.15. $z_1 = 2 - \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{5} + 2i$.

1.16. $z_1 = 3 - \sqrt{5}i$, $z_2 = 3 + \sqrt{5}i$.

1.17. $z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$, $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{5}i$.

1.18. $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$.

1.19. $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$, $z_2 = 3 - \sqrt{5}i$.

1.20. $z_1=\sqrt{5}+3i$, $z_2=\sqrt{5}+3i$.

1.21. $z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{3}-i\sqrt{2}$.

Упражнение 2. Вычислить модуль и аргумент, полученного комплексного числа и изобразить его.

2.1. $(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^6\cdot(1+i)^3$.

2.2. $(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^4\cdot(1-i)^4$.

2.3. $(-\sqrt{3}+3i)^6\cdot(3+i\sqrt{3})^4$.

2.4. $(-\sqrt{3}-3i)^3\cdot(3+i\sqrt{3})^6$.

2.5. $(\sqrt{3}+3i)^5\cdot(3+i\sqrt{3})^3$.

2.6. $(\sqrt{3}-3i)^4\cdot(3+i\sqrt{3})^6$.

2.7. $(\sqrt{3}+3i)^3\cdot(1+i)^5$.

2.8. $(\sqrt{3}+3i)^4\cdot(1-i)^5$.

2.9. $(3+i\sqrt{3})^4\cdot(1+i)^5$.

2.10. $(3+i\sqrt{3})^3\cdot(1-i)^5$.

2.11. $(-1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^6\cdot(1+i)^3$.

2.12. $(-1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^4\cdot(1-i)^4$.

2.13. $(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})^6\cdot(1+i)^4$.

2.14. $(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})^3\cdot(1+i)^6$.

2.15. $(1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^5\cdot(1+i)^3$.

2.16. $(1+i\frac{\sqrt{3}}{3})^4\cdot(1-i)^6$.

2.17. $(-1+i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^5$.

2.18. $(-1+i)^4\cdot(1-i\sqrt{3})^5$.

2.19. $(1+i)^4\cdot(1+i\sqrt{3})^5$.

2.20. $(1-i)^3\cdot(1-i\sqrt{3})^5$.

2.21. $(1-i)^3\cdot(1+i\sqrt{3})^8$.

Упражнение 3. Изобразить множество на комплексной плоскости.

3.1. $1<|z+2-3i|\le 3$.

3.2. $1\le|z+1+i|<2$.

3.3. $1<|z-1+i|\le 2$.

3.4. $1\le|z+1-i|<2$.

3.5. $1<|z-3+4i|\le 3$.

3.6. $1\le|z+3-4i|<3$.

3.7. $1<|z-1+2i|\le 2$.

3.8. $1\le|z+1-2i|\le 3$.

3.9. $1<|z-2+i|\le 2$.

3.10. $1\le|z+2-i|\le 3$.

3.11. $1<|z+2+i|\le 2$.

3.12. $1<|z-2-3i|\le 3$.

3.13. $2\le |z-1-3i|<3$.

3.14. $2<|z+1-3i|\le 3$.

3.15. $2\le |z+1+3i|<3$.

3.16. $2<|z-1+3i|\le 3$.

3.17. $2\le |z-3i|<3$.

3.18. $2<|z+3-i|\le 3$.

3.19. $2\le |z+3|<3$.

3.20. $2<|z-3+i|\le 3$.

3.21. $1<|z-2+3i|\le 3$.

Упражнение 4. Изобразить множество на комплексной плоскости.

4.1. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<2\operatorname{Re} z,\\ (\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z.\end{cases}$

4.2. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 3.\end{cases}$

4.3. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ |z|<2.\end{cases}$

4.4. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.5. $\begin{cases}(\operatorname{Im} z)^2<\operatorname{Re} z,\\ |z|<1.\end{cases}$

4.6. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 4.\end{cases}$

4.7. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ |z-i|<1.\end{cases}$

4.8. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ |z-1|<1.\end{cases}$

4.9. $\begin{cases}(\operatorname{Re} z)^2\le \operatorname{Im} z,\\ \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\pi.\end{cases}$

4.10. $\begin{cases}|z-1|<1,\\ |z-i|<1.\end{cases}$

4.11. $\begin{cases}|z-1|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.12. $\begin{cases}|z-i|>2,\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z<\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

4.13. $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>1,\\ |z|<2.\end{cases}$

4.14. $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\le 3,\\ \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 < |z| \le 3. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 1 < |z| \le 3, \\ (\operatorname{Im} z)^2 < \operatorname{Re} z. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 1 < |z| \le 3, \\ (\operatorname{Re} z)^2 < \operatorname{Im} z. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 1 < |z| \le 2, \\ \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Упражнение 5. Доказать, что следующее уравнение является уравнением окружности, найти центр и радиус окружности.

5.1. $|z|^2 + (1-i)z + (1+i)\overline{z} + 1 = 0$.

5.2. $|z|^2 + (1-4i)z + (1+4i)\overline{z} + 6 = 0$.

5.3. $|z|^2 + (2-3i)z + (2+3i)\overline{z} + 11 = 0$.

5.4. $|z|^2 + (2-3i)z + (2+3i)\overline{z} + 12 = 0$.

5.5. $|z|^2 + (4-3i)z + (4+3i)\overline{z} + 20 = 0$.

5.6. $|z|^2 + (2-4i)z + (2+4i)\overline{z} + 9 = 0$.

5.7. $|z|^2 + (4-5i)z + (4+5i)\overline{z} + 21 = 0$.

5.8. $|z|^2 + (4-i)z + (4+i)\overline{z} + 16 = 0$.

5.9. $|z|^2 + (3-i)z + (3+i)\overline{z} + 9 = 0$.

5.10. $|z|^2 + (4-4i)z + (4+4i)\overline{z} + 24 = 0$.

5.11. $|z|^2 + (1-5i)z + (1+5i)\overline{z} + 25 = 0$.

5.12. $|z|^2 + (5-i)z + (5+i)\overline{z} + 25 = 0$.

5.13. $|z|^2+(2-5i)z+(2+5i)\overline{z}+28=0$.

5.14. $|z|^2+(5-2i)z+(5+2i)\overline{z}+28=0$.

5.15. $|z|^2+(3-5i)z+(3+5i)\overline{z}+25=0$.

5.16. $|z|^2+(5-3i)z+(5+3i)\overline{z}+25=0$.

5.17. $|z|^2+(5-4i)z+(5+4i)\overline{z}+25=0$.

5.18. $|z|^2+(2-2i)z+(2+2i)\overline{z}+7=0$.

5.19. $|z|^2+(3-3i)z+(3+3i)\overline{z}+16=0$.

5.20. $|z|^2+(4-4i)z+(4+4i)\overline{z}+28=0$.

5.21. $|z|^2+(4-3i)z+(4+3i)\overline{z}+21=0$.

Упражнение 6. Для точки комплексной плоскости найти её образ на сфере Римана.

6.1. $1+i$.

6.2. $1-i$.

6.3. $2+i$.

6.4. $2i+1$.

6.5. $2-i$.

6.6. $-2+i$.

6.7. $2+2i$.

6.8. $2-2i$.

6.9. $3+i$.

6.10. $3-i$.

6.11. $-1+i$.

6.12. $1+3i$.

6.13. $1-3i$.

6.14. $3+2i$.

6.15. $3-2i$.

6.16. $2+3i$.

6.17. $2-3i$.

6.18. $-2+3i$.

6.19. $-2-3i$.

6.20. $3-3i$.

6.21. $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Упражнение 7. Вычислить.

7.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.

7.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.

7.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.

7.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

7.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.

7.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.

7.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.

7.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\cos\frac{k\pi}{6}$.

7.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^k}\sin\frac{k\pi}{6}$.

7.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.

7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.

7.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\cos\frac{k\pi}{6}$.

7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\sin\frac{k\pi}{6}$.

7.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos\frac{k\pi}{3}$.

7.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin\frac{k\pi}{3}$.

7.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

7.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\sin\frac{k\pi}{4}$.

7.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3^k}{4^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

7.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\frac{k\pi}{4}$.

Упражнение 8. Для данной функции определить вид кривой.

8.1. $z = t + it^2 \quad (0 \le t < +\infty)$.

8.2. $z = 2t + it^2 \quad (0 \le t < +\infty)$.

8.3. $z = t + i2t^2 \quad (0 \le t < +\infty)$.

8.4. $z = t + \frac{i}{t} \quad (-\infty < t < 0)$.

8.5. $z = t + \frac{i}{t} \quad (0 < t < +\infty)$.

8.6. $z = 2t + \frac{i}{t} \quad (-\infty < t < 0)$.

8.7. $z = t + \frac{i}{2t} \quad (0 < t < +\infty)$.

8.8. $z = 4t^2 + it^4 \quad (-\infty < t < +\infty)$.

8.9. $z = t^2 + i\frac{t}{16}^4 \quad (-\infty < t < +\infty)$.

8.10. $z = 9t^2 + it^4 \quad (-\infty < t < +\infty)$.

8.11. $z = \mathrm{Re} \cdot e^{i2t} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$.

8.12. $z = \mathrm{Re}\, e^{i3t} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{6})$.

8.13. $z = \mathrm{Im}\, e^{i2t} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$.

8.14. $z = \mathrm{Im}\, e^{i3t} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{6})$.

8.15. $z = 2t \quad (0 \le t \le 3)$.

8.16. $z = 2 + it \quad (2 \le t \le 5)$.

8.17. $z = t + 3i \quad (1 \le t \le 2)$.

8.18. $z = 2 + i + [(3 + 2i) - (2 + i)]t \quad (0 \le t \le 1)$.

8.19. $z = 3 + 2i + [(5 + 4i) - (3 + 2i)]t \quad (0 \le t \le 1)$.

8.20. $z = 3 + 2i + [(4 + 4i) - (3 + 2i)]t \quad (0 \le t \le 1)$.

8.21. $z = 1 + i + [(2 + 3i) - (1 + i)]t \quad (0 \le t \le 1)$.

Упражнение 9. Исследовать функцию на однолистность на заданном множестве.

9.1. $f(z) = z^2, \; E = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.

9.2. $f(z) = z^2, \; E = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$.

9.3. $f(z)=z^3,\ E=\left\{0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}\right\}.$

9.4. $f(z)=z^2,\ E=\{|z|<1\}.$

9.5. $f(z)=z^2,\ E=\left\{|z|<1, 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}.$

9.6. $f(z)=z^2,\ E=\{|z|>2\}.$

9.7. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\ E=\{|z|<1\}.$

9.8. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right),\ E=\{|z|<2\}.$

9.9. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right),\ E=\{\operatorname{Im} z>0\}.$

9.10. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right),\ E=\{\operatorname{Re} z>0\}.$

9.11. $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{2}{z}\right),\ E=\left\{\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}.$

9.12. $f(z)=\dfrac{1}{z+3},\ E=\{|z|<3\}.$

9.13. $f(z)=\dfrac{1}{z+3},\ E=\{|z|>3\}.$

9.14. $f(z)=\dfrac{1}{z+4},\ E=\{|z|<4\}.$

9.15. $f(z)=\dfrac{1}{z+3},\ E=\{\operatorname{Re} z>3\}.$

9.16. $f(z)=\dfrac{1}{z+i},\ E=\{\operatorname{Re} z>1\}.$

9.17. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y),\ E=\{\operatorname{Im} z>0\}.$

9.18. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y),\ E=\{0<\operatorname{Im} z<\pi\}.$

9.19. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y),\ E=\{|z|<1\}.$

9.20. $f(z) = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$, $E = \left\{ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\}$.

9.21. $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$, $E = \{|z| < 2\}$.

Упражнение 10. Исследовать функцию на непрерывность.

10.1. $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$.

10.2. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$.

10.3. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+i)}$.

10.4. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+i)}$.

10.5. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$.

10.6. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+i)}$.

10.7. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$.

10.8. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$.

10.9. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-i)}$.

10.10. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-i)}$.

10.11. $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z+i)}$.

10.12. $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+i)}$.

10.13. $f(z) = \frac{1}{(2z+1)(z+i)}$

10.14. $f(z) = \frac{1z}{(2z+1)(z-i)}$.

10.15. $f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z+i)}$.

10.16. $f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-i)}$.

10.17. $f(z) = \frac{z}{(2z-i)(z-1)}$.

10.18. $f(z) = \frac{z}{(2z-i)(z+1)}$.

10.19. $f(z) = \frac{z}{(2z+i)(z-1)}$.

10.20. $f(z) = \frac{z}{(3z+i)(z-1)}$.

10.21. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

Упражнение 11. Вычислить производную функции по определению.

11.1. $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$ $(z\neq -i)$.

11.2. $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ $(z\neq -1)$.

11.3. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ $(z\neq 1)$.

11.4. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$ $(z\neq i)$.

11.5. $f(z)=\dfrac{1}{2z-1}$ $(z\neq \dfrac{1}{2})$.

11.6. $f(z)=\dfrac{1}{2z+1}$ $(z\neq -\dfrac{1}{2})$.

11.7. $f(z)=\dfrac{1}{2z-i}$ $(z\neq \dfrac{i}{2})$.

11.8. $f(z)=\dfrac{1}{2z+i}$ $(z\neq -\dfrac{i}{2})$.

11.9. $f(z)=z^2$.

11.10. $f(z)=z^3$.

11.11. $f(z)=z^2+2z$.

11.12. $f(z)=z^3-z+1$.

11.13. $f(z)=1-3z^2$.

11.14. $f(z)=z+2z^2$.

11.15. $f(z)=3z-1$.

11.16. $f(z)=2z+3$.

11.17. $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$.

11.18. $f(z)=\dfrac{z}{2}+5$.

11.19. $f(z)=\dfrac{2z}{3}$.

11.20. $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.

11.21. $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ $(z\neq -2)$.

Упражнение 12. Исследовать функцию на $\mathbb{C}$-дифференцируемость.

12.1. $f(z)=\operatorname{Re} z$.

12.2. $f(z)=z^2\operatorname{Re} z$.

12.3. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$.

12.4. $f(z)=z^2\operatorname{Im} z$.

12.5. $f(z)=\operatorname{Re} z^2$.

12.6. $f(z)=z\cdot(\operatorname{Re} z)^2$.

12.7. $f(z)=[\operatorname{Re} z]^2\cdot\operatorname{Im} z$.

12.8. $f(z)=[\operatorname{Im} z]^2\cdot\operatorname{Re} z$.

12.9. $f(z)=z(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)$.

12.10. $f(z)=\operatorname{Im} z^2$.

12.11. $f(z)=|z|^2$.

12.12. $f(z)=|\bar{z}|^2$.

12.13. $f(z)=z\operatorname{Re} z$.

12.14. $f(z)=\bar{z}\cdot\operatorname{Im} z$.

12.15. $f(z)=\operatorname{Im} z$.

12.16. $f(z)=z$.

12.17. $f(z)=\bar{z}$.

12.18. $f(z)=2xy-i(x^2+y^2)$.

12.19. $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$.

12.20. $f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$.

12.21. $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$.

Упражнение 13. Исследовать функцию на голоморфность.

13.1. $f(z)=x+y+i(ax+by)$.

13.2. $f(z)=x^2-y^2+ibxy$.

13.3. $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{ay}{x^2+y^2}$.

13.4. $f(z)=x+2y+i(ax-by)$.

13.5. $f(z)=x-y+i(ax-by)$.

13.6. $f(z)=x+y+i(ax-y)$.

13.7. $f(z)=a(x^2-y^2)+2ixy$.

13.8. $f(z)=x^2+ay^2+ibxy$.

13.9. $f(z)=x+y+i(x+ay)$.

13.10. $f(z)=\dfrac{ax}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

13.11. $f(z)=x^2+ay^2-ibxy$.

13.12. $f(z)=x-y+i(ay+bx)$.

13.13. $f(z)=x^2-y^2+iaxy$.

13.14. $f(z)=ax+by+icy$.

13.15. $f(z)=ax+y+i(bx+cy)$.

13.16. $f(z)=x^2-ay^2+i2xy$.

13.17. $f(z)=\dfrac{ax}{x^2+y^2}+i\dfrac{by}{x^2+y^2}$.

13.18. $f(z)=x-2y+i(bx+cy)$.

13.19. $f(z)=ax+i(bx+cy)$.

13.20. $f(z)=ax+y+i(bx+cy)$.

13.21. $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$.

Упражнение 14. Определить коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке для данного отображения.

14.1. $w=z^2$, $z_0=i$.

14.2. $w=\bar{z}^2$, $z_0=1$.

14.3. $w=\bar{z}+2z$, $z_0=0$.

14.4. $w=z^2$, $z_0=\dfrac{i}{4}$.

14.5. $w=z^2$, $z_0=1-i$.

14.6. $w=z^2$, $z_0=-1+i$.

14.7. $w=z^3$, $z_0=i$.

14.8. $w=z^3$, $z_0=-\dfrac{i}{4}$.

14.9. $w=z^2+2\bar{z}$, $z_0=1$.

14.10. $w=z^2-2\bar{z}$, $z_0=i$.

14.11. $w = e^{2x}(\cos 2y + \sin 2y)$, $z_0 = 0$.

14.12. $w = e^{2x}(\cos 2y - i\sin 2y)$, $z_0 = 0$.

14.13. $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, $z_0 = 1$.

14.14. $w = \dfrac{z-(1+i)}{z+1+i}$, $z_0 = 1+i$.

14.15. $w = \dfrac{z-2+i}{z+2-i}$, $z_0 = 2-i$.

14.16. $w = \dfrac{z-2i}{z+2i}$, $z_0 = 2i$.

14.17. $w = \dfrac{z+2}{z-2}$, $z_0 = -2$.

14.18. $w = \dfrac{z-2}{z+2}$, $z_0 = 2$.

14.19. $w = \dfrac{z+2i}{z-2i}$, $z_0 = -2i$.

14.20. $w = \dfrac{z+1-i}{z-1+i}$, $z_0 = -1+i$.

14.21. $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0 = i$.

Упражнение 15. Проверить функцию $u(x, y)$ на гармоничность и найти сопряженную гармоническую функцию $v(x, y)$ в заданной области и соответствующую голоморфную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

15.1. $u(x, y) = 4xy$, $E = \mathbb{C}$.

15.2. $u(x, y) = 2x - 3y + 5$, $E = \mathbb{C}$.

15.3. $u(x, y) = \dfrac{2x + y}{3(x^2 + y^2)}$, $E = \{0 < |z| < \infty\}$.

15.4. $u(x, y) = 2(x^2 - y^2) + 4xy$, $E = \mathbb{C}$.

15.5. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy$, $E = \mathbb{C}$.

15.6. $u(x, y) = \dfrac{x - 2y}{2(x^2 + y^2)}$, $E = \{0 < |z| < \infty\}$.

15.7. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $E = \mathbb{C}$.

15.8. $u(x, y) = 3(x^2 - y^2) - 6xy$, $E = \mathbb{C}$.

15.9. $u(x, y) = x + 2y - 1$, $E = \mathbb{C}$.

15.10. $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $E = \{0 < |z| < \infty\}$.

15.11. $u(x,y)=\dfrac{x+y}{4(x^2+y^2)}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.12. $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.13. $u(x,y)=x^2-3xy^2$, $E=\mathbb{C}$.

15.14. $u(x,y)=-x+4y-5$, $E=\mathbb{C}$.

15.15. $u(x,y)=xy+1$, $E=\mathbb{C}$.

15.16. $u(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$, $E=\{0<|z|<\infty\}$.

15.17. $u(x,y)=2x^3-6xy^2$, $E=\mathbb{C}$.

15.18. $u(x,y)=x^2-y^2+xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.19. $u(x,y)=2x+4y-1$, $E=\mathbb{C}$.

15.20. $u(x,y)=y^2-x^2-4xy$, $E=\mathbb{C}$.

15.21. $u(x,y)=2(x^2-y^2)-1$, $E=\mathbb{C}$.

Упражнение 16. Найти область, на которой конформна заданная функция.

16.1. $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$.

16.2. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z-1}$.

16.3. $f(z)=z^2+1$.

16.4. $f(z)=z^2-1$.

16.5. . $f(z)=2z^2+z-1$

16.6. $f(z)=z^2-2z$.

16.7. $f(z)=z^3-1$.

16.8. $f(z)=z^3+1$.

16.9. $f(z)=e^{-2x}(\cos 2y-i\sin 2y)$.

16.10. $f(z)=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$.

16.11. $f(z)=z^3-3z$.

16.12. $f(z)=\dfrac{z+4}{2z-5}$.

16.13. $f(z)=e^x(\cos y+\sin y)$.

16.14. $f(z)=\dfrac{z-3}{2z+1}$.

16.15. $f(z)=e^{-x}(\cos y-\sin y)$.

16.16. $f(z)=z^3+3z$.

16.17. $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

16.18. $f(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

16.19. $f(z)=3z^2-6z$.

16.20. $f(z)=z^3-8$.

16.21. $f(z)=4z^2-8z$.