

Примеры к контрольной работе по теме «КИНЕМАТИКА»

Пример 1.

Движение точки M по прямой AB задано уравнением

$s = 10 + 2t - 6t^2 + 4t^3$, где s в метрах и t в секундах. Найти на траектории движения положение точки M для моментов времени $t_1 = 0$; $t_2 = 2$ с; $t_3 = 5$ с.

Решение. Принимаем точку O за точку начала отсчета движения точки M по прямой AB .

Для определения перемещения точки M по прямой в уравнение движения подставляем заданные значения времени движения.

При $t_1 = 0$, получим $s_1 = 10$ м;

при $t_2 = 2$ с, $s_2 = 10 + 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 10 + 4 - 24 + 32 = 22$ м;

при $t_3 = 5$ с, $s_3 = 10 + 2 \cdot 5 - 6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 = 10 + 10 - 150 + 500 = 370$ м.

От точки O отсчета отложим найденные значения s_1 , s_2 и s_3 в некотором масштабе и получим положения точки M на прямой AB в соответствующие промежутки времени

Пример 2.

Движение точки задано в координатной форме уравнениями

$$x = 4t \text{ и } y = 6 + 8t,$$

в которых x выражено в метрах, а t — в секундах. Найти уравнение траектории движения точки.

Решение. Для определения траектории движения точки необходимо из уравнений $x = 4t$ и $y = 6 + 8t$ исключить время t , получив зависимость между x и y . Эта зависимость и будет уравнением траектории движения точки.

Из уравнения $x = 4t$ определяем время $t = x/4$.

Полученное значение подставляем в уравнение $y = 6 + 8t$,

тогда $y = 6 + 8x/4$

$y = 6 + 2x$ — уравнение траектории движения точки (прямая линия, не проходящая через начало координат).

Пример 3.

Движение точки по прямой задано уравнением $s = 6 + 2t - 4t^2 + t^3$, в котором s выражено в метрах, а t — в секундах. Определить скорость и ускорение точки для $t_1 = 3$ с, $t_2 = 8$ с.

Решение. Скорость точки в неравномерном прямолинейном движении есть первая производная от пути по времени, т. е. $v = ds/dt$

В этом случае $v = 2 - 8t + 3t^2$.

При $t_1 = 3$ с $v_1 = 2 - 8 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 2 - 24 + 27 = 5$ м/с

При $t_2 = 8$ с $v_2 = 2 - 8 \cdot 8 + 3 \cdot 8^2 = 2 - 64 + 192 = 130$ м/с.

Ускорение точки в неравномерном прямолинейном движении есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по

времени:

$$a = dv/dt \text{ м/с}^2$$

Так как $v = 2 - 8t + 3t^2$, тогда $a = -8 + 6t$.

При $t_1 = 3 \text{ с}$ $a_1 = -8 + 6 \cdot 3 = -8 + 18 = 10 \text{ м/с}^2$

при $t_2 = 8 \text{ с}$ $a_2 = -8 + 6 \cdot 8 = -8 + 48 = 40 \text{ м/с}^2$.

Пример 4.

Вращение колеса диаметром $d=0,4 \text{ м}$ определяется уравнением:

$\varphi = 180t - 15t^2$, где t — в секундах, φ — в радианах. Определить скорость v , касательное a_t и нормальное a_n ускорения точек на ободе колеса и угловую скорость в начале движения.

Решение. Находим закон изменения угловой скорости

$$\omega = d\varphi/dt = (180t - 15t^2)' = 180 - 30t.$$

Угловая скорость колеса в начале движения

$$t=0 \quad \omega = 180 \text{ рад/сек.}$$

Скорость точек на ободе колеса

$$v = \omega r = 180 \cdot 0,2 = 36 \text{ м/сек.}$$

Находим закон изменения углового ускорения

$$\varepsilon = d\omega/dt = d(180 - 30t)/dt = -30 \text{ рад/сек}^2.$$

Следовательно, колесо вращается равнозамедленно.

Касательное ускорение точек

$$a_t = \varepsilon r = -30 \cdot 0,2 = -6 \text{ м/сек}^2.$$

Нормальное ускорение точек на ободе колеса

$$a_n = v^2/r = 36^2 / 0,2 = 1296 / 0,2 = 6480 \text{ м/сек}^2.$$

Пример 5.

Колесо вращается по закону $\varphi = t^3/2 - 2t$, где φ -радианах, t —в секундах.

Определить: 1) среднюю угловую скорость для промежутка времени от $t=1 \text{ сек}$ до $t=3 \text{ сек}$;

2) для момента $t=2 \text{ сек}$ угловую скорость в рад/сек и об/мин

3) угловое ускорение;

4) линейную скорость; касательное, нормальное и полное ускорения точки А, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r=0,5 \text{ м}$;

изобразить на чертеже векторы v ; a_t , a_n и a .

Решение.

1. Средняя угловая скорость

$$\omega_{cp} = \Delta\varphi/\Delta t = (\varphi_3 - \varphi_1)/(t_3 - t_1),$$

где угол поворота в момент $t=1 \text{ сек}$.

$$\varphi_1 = 1^3/2 - 2 \cdot 1 = -1,5 \text{ рад},$$

угол поворота в момент $t=3 \text{ сек}$.

$$\varphi_3 = 3^3/2 - 2 \cdot 3 = 7,5 \text{ рад}.$$

Тогда

$$\omega_{cp} = (7,5 - (-1,5))/(3-1) = 4,5 \text{ рад/сек.}$$

2. Находим закон изменения угловой скорости

$$\omega = d\varphi / dt = \varphi' = (t^3/2 - 2t)' = 3t^2/2 - 2 = 1,5 t^2 - 2$$

Для момента времени $t_2=2$ сек

$$\omega_2 = 1,5 \cdot 2^2 - 2 = 4 \text{ рад/сек.}$$

Выразим угловую скорость числом оборотов в минуту

$$n_2 = 30 \omega_2 / \pi = 30 \cdot 4 / 3,14 = 38,2 \text{ об/мин}$$

3. Находим закон изменения углового ускорения

$$\varepsilon = d\omega / dt = \omega' = (1,5t^2 - 2)' = 3t$$

Для момента $t_2=2$ сек,

$$\varepsilon_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ рад/сек}^2.$$

4. Линейная скорость точки А

$$v_A = \omega_2 r = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/сек.}$$

Касательное ускорение точки А

$$a_t = \varepsilon_2 r = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ м/сек}^2.$$

Нормальное ускорение точки А

$$a_n = \omega^2 r = 4^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ м/сек}^2$$

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} \approx 8,5 \text{ м/сек}^2.$$

Угол наклона вектора полного ускорения к радиусу:

$$\operatorname{tg} \gamma = a_t / a_n = 3 / 8 = 0,375,$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} 0,375 \approx 20^\circ 36'.$$

Изображаем найденные кинематические характеристики точки А.

