ВВЕДЕНИЕ

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучают законы механического движения материальных объектов под действием приложенных сил.

Механическое движение представляет собой изменение положения материальных объектов в пространстве с течением времени относительно принятой системы отсчёта.

В ***классической*** механике пространство принимается трёхмерным ***евклидовым***. Пространство и время считаются ***абсолютными***, т.е. не зависящими друг от друга, а также от материи и движения. Масса тела принимается также не зависящей от времени и скорости движения.

В динамике, в отличие от статики, как активные силы, так и реакции связей в основном являются переменными величинами. Активные (заданные) силы могут зависеть от времени, положения, скоростей точек, а реакции связей ещё и от их ускорений.

Множество частных задач динамики можно разделить на два основных вида:

• по заданному движению и массе материальной точки или механической системы определяются силы, вызывающие это движение (***первая задача динамики***);

• по заданным силам и массе материальной точки или механической системы определяется закон движения (***вторая задача динамики***).

Встречаются также смешанные задачи, в которых необходимо решать оба типа задач.

В основу классической механики положены ***законы Ньютона***. Эти законы установлены путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверены исторической практикой человечества. В современной форме они формулируются применительно к простейшей модели материального тела – материальной точке. Эти законы справедливы относительно

инерциальных систем отсчёта. Любое тело во Вселенной не является полностью изолированным от воздействия, поэтому инерциальные системы отсчёта являются воображаемыми и могут быть введены с той или иной степенью приближения. Близкой к идеальной является ***гелиоцентрическая*** система отсчёта, принятая за основную, – это система координат, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены всё время на одни и те же удалённые звёзды.

При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной степенью точности, можно считать систему координат, жёстко связанную с Землёй.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

1. Закон инерции.

Материальная точка, на которую не действуют силы или действует уравновешенная система сил, сохраняет своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчёта.

2. Второй закон динамики.

Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта пропорционально приложенной к точке силе и совпадает с ней по направлению:

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

где положительный коэффициент пропорциональности m является мерой инертности материальной точки и называется ***массой***.

3. Закон равенства сил действия и противодействия.

Силы взаимодействия двух материальных точек направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны и равны по модулю.

4. Закон независимости действия сил.

При одновременном действии на материальную точку системы сил ускорение точки равно геометрической сумме ускорений, которые получила бы эта точка от действия каждой из сил в отдельности:

$$\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k.$$

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из второго и четвёртого законов получено ***основное уравнение движения*** точки в инерциальной системе отсчёта:

$$m\overline{a} = \overline{F}\,, \tag{1.1}$$

где $\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ − равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

Так как ускорение точки связано с её радиус-вектором соотношением $\overline{a} = d^2\overline{r}\,/\,dt^2$, а сила в рамках классической механики может быть функцией нескольких переменных, уравнение (1.1) преобразуется в ***дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме***:

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{V}). \tag{1.2}$$

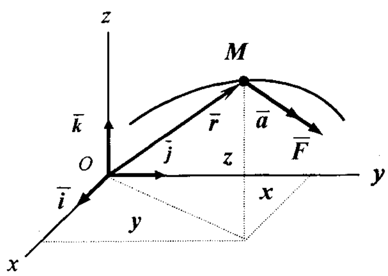


Рисунок 1.1 – Векторная и координатная формы дифференциальных уравнений

В декартовой системе координат (рисунок 1.1) дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{y} = F_y,\ m\ddot{z} = F_z, \qquad (1.3)$$

где F_x, F_y, F_z − проекции равнодействующей всех сил, приложенных к точке, на соответствующие оси.

Уравнения (1.3) называются ***дифференциальными уравнениями движения материальной точки в координатной форме***.

При криволинейном движении точки дифференциальные уравнения её движения можно записать в проекциях на естественные оси (рисунок 1.2):

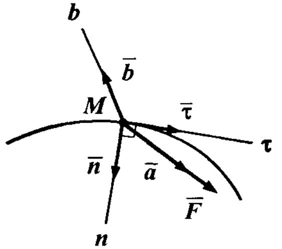


Рисунок 1.2 – Естественная форма

$$ma_\tau = F_\tau, \quad m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau,$$

$$ma_n = F_n, \quad m\frac{V^2}{\rho} = F_n, \qquad (1.4)$$

$$F_b = 0,$$

где F_τ, F_n, F_b − проекции равнодействующей всех сил, приложенных к точке, на естественные оси.

Уравнения (1.4) называются ***дифференциальными уравнениями движения материальной точки в естественной форме***.

С помощью дифференциальных уравнений можно решать обе задачи динамики точки, как свободной, так и несвободной, применяя принцип освобождаемости от связей.

Первой задачей динамики *называется задача, в которой по заданным движению и массе материальной точки определяются силы, приложенные к этой точке.*

Для решения этой задачи необходимо знать ускорение точки, которое либо задано непосредственно, либо может быть определено из закона движения точки.

1. Так, если движение точки задано ***координатным способом*** $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то определяются проекции ускорения на оси координат:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2},\; a_y = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2},\; a_z = \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2},$$

а затем − проекции силы F_x, F_y, F_z на эти оси:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Модуль и направление силы определяются по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\overline{F} \,\hat{;}\, \overline{i}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\overline{F} \,\hat{;}\, \overline{j}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\overline{F} \,\hat{;}\, \overline{k}) = \frac{F_z}{F}.$$

Пример 1. Материальная точка массой m движется в плоскости Oxy согласно уравнениям $x = 2t$, $y = 1 + 2t^2$ (x, y – м, t – с). Определить силу, действующую на точку.

Дано: m, $x = 2t$, $y = 1 + 2t^2$.

Определить: $\overline{F}$.

Решение.

Так как точка движется в плоскости Oxy, запишем два дифференциальных уравнения движения в координатной форме:

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}.$$

Проекции силы на оси координат:

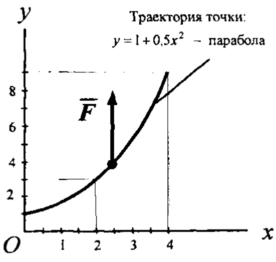


Рисунок 1.3 – Пример 1

$$F_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2 y}{dt^2} = 4m, F_x = m\ddot{x} = 0,$$

Так как:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2, \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 4t, \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = 4.$$

Ответ. Сила, действующая на точку, $F = F_y$ и направлена параллельно оси Oy (рисунок 1.3).

2. Если точка совершает криволинейное движение и известен закон движения $S = f(t)$, траектория точки и её радиус кривизны ρ, то удобно пользоваться естественными осями, а проекции ускорения на эти оси определяются по известным выражениям:

– на касательную ось $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ – касательное ускорение;

– на главную нормаль $a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{\dot{S}^2}{\rho}$ – нормальное ускорение;

– проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Тогда проекции силы на естественные оси:

$$F_\tau = m\frac{d^2S}{dt^2},\ F_n = m\frac{V^2}{\rho},\ F_b = 0.$$

Модуль и направление силы определяются по формулам:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2},\quad \cos(\bar{F}\,\hat{;}\,\bar{\tau}) = \frac{F_\tau}{F},\quad \cos(\bar{F}\,\hat{;}\,\bar{n}) = \frac{F_n}{F}.$$

Второй задачей динамики называется задача, в которой по заданным силам, массе материальной точки и начальным условиям движения, определяется закон ее движения.
Решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка.
В процессе интегрирования появляются постоянные интегрирования, подлежащие определению.

2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике механической системы, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения, более эффективно пользоваться так называемыми ***общими теоремами динамики***, являющимися следствиями основного закона динамики.

Одной из основных динамических характеристик движения точки является ***количество движения*** $\overline{q}$.

Количеством движения *материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на её скорость*:

$$\overline{q} = m\overline{V}. \qquad (2.1)$$

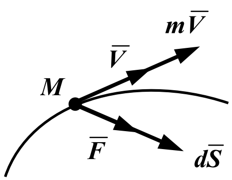


Рисунок 2.1 – Количество движения точки

Единицей измерения количества движения точки в системе СИ является

[q] = 1 кг·м/с = 1 Н·с.

Вектор количества движения $\overline{q}$ направлен так же, как и скорость точки, т.е. по касательной к траектории движения, и является ***мерой механического движения*** точки (рисунок 2.1).

Для оценки действия силы на материальную точку или тело в течение некоторого промежутка времени вводится понятие ***импульса силы***.

Элементарным импульсом силы, *действующей на тело, называется векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени* dt:

$$d\overline{S} = \overline{F}dt. \qquad (2.2)$$

Элементарный импульс силы совпадает с направлением силы (рисунок 2.1).

Полный импульс силы, *действующей на материальную точку в течение времени t, – это вектор, равный определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от 0 до t*:

$$\overline{S} = \int d\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt. \qquad (2.3)$$

Импульс силы характеризует действие силы на материальную точку или тело в течение некоторого промежутка времени.

В частном случае, если сила $\overline{F} = \text{const}$, то импульс силы равен произведению силы $\overline{F}$ на промежуток времени t:

$$\overline{S} = \overline{F}t \text{ и } S = Ft. \qquad (2.4)$$

В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции на координатные оси:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt, \qquad (2.5)$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \qquad (2.6)$$

Единица измерения импульса силы в системе СИ: $[S]$ = 1 кг·м/с = 1 Н·с.

Если $m = \text{const}$ и $\overline{a} = \dfrac{d\overline{V}}{dt}$, то основной закон динамики точки можно представить в виде

$$\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме: ***первая производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме всех сил действующих на точку***.

При решении задач удобно применять конечную (интегральную) форму теоремы.

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу равнодействующей сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени (рисунок 2.2):

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \overline{S}. \qquad (2.8)$$

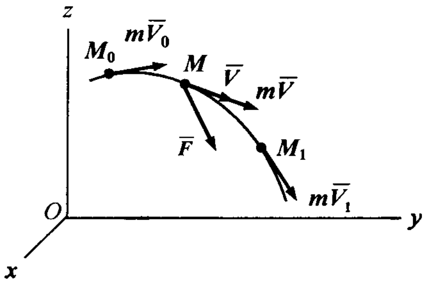


Рисунок 2.2 – Теорема об изменении количества движения точки

Векторное равенство (2.8) в проекциях на координатные оси:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_x, \quad mV_{1y} - mV_{0y} = S_y, \quad mV_{1z} - mV_{0z} = S_z.$$

Теорема об изменении количества движения точки обычно применяется в задачах, когда в число данных и искомых величин входят: действующие силы, время движения точки, её начальная и конечная скорости, причём силы должны быть постоянными или зависящими только от времени.

Центром масс механической системы (рисунок 2.3), *состоящей из n материальных точек, называется геометрическая точка C, положение которой определяется радиус-вектором*:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \qquad (2.9)$$

где m_k – массы материальных точек системы, $\overline{r}_k$ – радиус-векторы точек системы, $\Sigma m_k = M$ – масса системы материальных точек или тел, образующих систему.

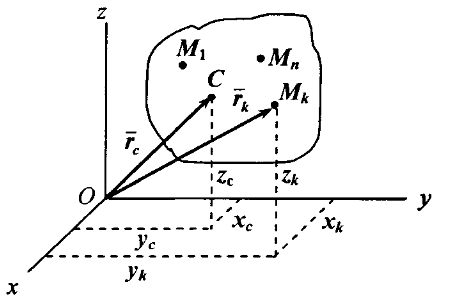


Рисунок 2.3 – Центр масс механической системы

Спроецировав векторное равенство (2.9) на координатные оси, получим выражения для определения координат центра масс:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{M},$$

$$z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}, \qquad (2.10)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек, образующих систему.

Рассмотрим твердое тело, находящееся в однородном силовом поле Земли:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k \overline{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{G}_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k \overline{r}_k}{G}, \qquad (2.11)$$

где $G_k = m_k g$ и $G = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k g = Mg$.

По формуле (2.11) определяется положение центра тяжести твердого тела, т.е. для твердых тел, находящихся в однородном силовом поле Земли, центр масс будет совпадать с центром тяжести твердого тела. Очевидно, что понятие о центре масс сохраняет свой смысл для тел, находящихся в любом силовом поле.

Количеством движения системы *материальных точек называется вектор* $\overline{Q}$, *равный геометрической сумме количества движений всех точек системы*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k. \qquad (2.12)$$

Проецируя равенство (2.12) на координатные оси *Oxyz*, получаем

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{kx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{ky}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{kz}. \quad (2.13)$$

По формулам (2.13) вычисляются проекции количества движения механической системы на оси декартовой системы координат.

Модуль количества движения системы материальных точек определяется выражением:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \qquad (2.14)$$

Для твердого тела количество движения удобно вычислять через скорость центра масс:

$$\overline{Q} = M\overline{V}_C, \qquad (2.15)$$

т.е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс*.

Количество движения и центр масс механической системы характеризуют распределение массы при поступательном движении системы, и, если движение механической системы сложное, то поступательную часть этого движения вместе с центром масс.

Для механической системы теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме записывается в виде

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e, \tag{2.16}$$

т.е. ***первая производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему***.

В координатной форме теорема имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e.$$

При решении задач теорему об изменении количества движения механической системы удобнее применять в конечной (интегральной) форме:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k^e, \tag{2.17}$$

изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил, за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси интегральная форма теоремы имеет вид

$$Q_{1\boldsymbol{x}} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e, \quad Q_{1\boldsymbol{y}} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e, \quad Q_{1\boldsymbol{z}} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e.$$

Законы сохранения количества движения

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, в течение некоторого промежутка времени равен нулю, то количество движения механической системы будет постоянным по величине и направлению в течение того же промежутка времени:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e = 0 \rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \rightarrow \bar{Q} = \overline{\text{const}}.$$

2. Если сумма проекций всех внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось в течение некоторого промежутка времени равна нулю (например *Ox*), то проекция количества движения механической системы на эту ось будет величиной постоянной в течение того же промежутка времени:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0 \rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \rightarrow Q_x = \text{const}.$$

Непосредственно из теоремы об изменении количества движения механической системы следует *теорема о движении центра масс механической системы*: ***центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему***:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e. \tag{2.18}$$

Проецируя равенство (2.18) на координатные оси, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы в координатной форме:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e.$$

Законы сохранения движения и положения центра масс

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на механическую систему, в течение некоторого промежутка времени равен нулю, то центр масс этой системы в течение того же промежутка времени движется равномерно и прямолинейно, либо находится в покое:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e = 0 \rightarrow \bar{a}_C = \frac{d\bar{V}_C}{dt} = 0 \rightarrow \bar{V}_C = \overline{\text{const}}.$$

Примечание – в частном случае, если в начальный момент времени механическая система находится в покое, то скорость центра масс равна нулю, следовательно,

$$\bar{V}_C = \frac{d\bar{r}_C}{dt} = 0 \rightarrow \bar{r}_C = \overrightarrow{\mathrm{const}},$$

т.е. положение центра масс системы остаётся неизменным (закон сохранения положения центра масс).

2. Если сумма проекций всех внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось (например Ox) в течение некоторого промежутка времени равна нулю, то проекция скорости центра масс механической системы на эту ось в течение того же промежутка времени есть величина постоянная:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \rightarrow a_{Cx} = \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0 \rightarrow V_{Cx} = \mathrm{const}.$$

Примечание − в частности, если в начальный момент времени механическая система находится в покое, то и проекция скорости центра масс на выбранную ось равна нулю, следовательно,

$$V_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0 \rightarrow x_C = \mathrm{const},$$

т.е. координата центра масс за это время не изменится.

Теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения механической системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твёрдого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих теорем.

Для сплошной среды (жидкость, газ) понятие о центре масс практически теряет смысл. В этих случаях для решения задач пользуются теоремой об изменении количества движения системы.

3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси

Моментом количества движения точки *относительно некоторого центра O называется векторная величина* $\overline{l}_O$*, определяемая выражением*

$$\overline{l}_O = \overline{m}_O(m\overline{V}) = \overline{r} \times m\overline{V}, \tag{3.1}$$

где $m\overline{V}$ − вектор количества движения точки, $\overline{r}$ − радиус-вектор движущейся точки, проведенный из выбранного центра *O* (рисунок 3.1).

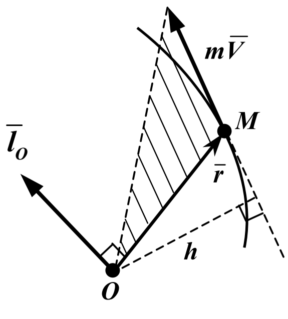


Рисунок 3.1 – Момент количества движения точки относительно центра

Вектор $\overline{l}_O$ строится в выбранном центре перпендикулярно плоскости, в которой расположен вектор $m\overline{V}$ и выбранный центр, и направлен в ту сторону, откуда вектор $m\overline{V}$ относительно центра виден направленным против хода часовой стрелки.

Момент количества движения равен взятому со знаком плюс или минус произведению модуля вектора количества движения на плечо вектора $m\overline{V}$ относительно центра:

$$l_O = \left| m\overline{V} \right| h = \pm mVh, \tag{3.2}$$

где h – плечо вектора количества движения точки, равное длине перпендикуляра, опущенного из выбранного центра на линию действия вектора $m\overline{V}$.

Величина момента количества движения, определённая по выражению (3.2), согласно рисунку 3.1, будет положительной.

Моментом количества движения точки *относительно оси называется момент проекции вектора количества движения точки на плоскость П, перпендикулярную выбранной оси, относительно точки О пересечения оси с плоскостью*:

$$l_z = m_z\left(m\overline{V}\right) = m_O\left(m\overline{V}_П\right) = \pm\left|m\overline{V}_П\right|h_1. \qquad (3.3)$$

Момент количества движения точки относительно оси будет положительным, если глядя с положительного направления оси движение точки будет происходить против хода часовой стрелки (рисунок 3.2).

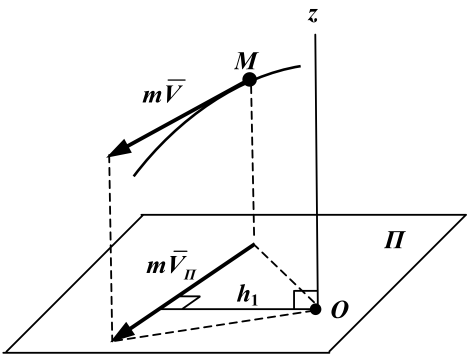


Рисунок 3.2 – Момент количества движения точки относительно оси

Понятие момента количества движения точки относительно центра и оси и правило знаков аналогичны понятиям момента силы относительно центра и оси.

Кинетический момент механической системы

Кинетическим моментом механической системы *(моментом количества движения системы; главным* *моментом количества движения) относительно некоторого центра O называется вектор $\overline{L}_O$, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этого центра*:

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(m_k\overline{V}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k\overline{V}_k, \qquad (3.4)$$

где m_k – масса произвольной материальной точки системы, $\overline{V}_k$ − скорость произвольной точки системы, $\overline{r}_k$ − радиус-вектор произвольной точки системы, проведенный из выбранного центра.

Кинетическим моментом механической системы *относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этой оси*:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(m_k\overline{V}_k), L_y = \sum_{k=1}^{n} m_y(m_k\overline{V}_k), L_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k\overline{V}_k). \qquad (3.5)$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно произвольного центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра:

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^e, \qquad (3.6)$$

где $\overline{M}_O^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k^e)$.

Векторному равенству (3.6) соответствуют три равенства в проекциях на координатные оси:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e = \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e = \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k^e),$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e). \qquad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) выражает теорему об изменении кинетического момента системы относительно координатных осей: ***производная по времени от кинетического момента механической системы относительно какой-либо оси равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно той же оси.***

Законы сохранения кинетического момента

1. Если главный момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно какого-либо центра, в течение некоторого промежутка времени, остаётся равным нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра, в течение этого промежутка времени, остаётся неизменным, т.е. постоянным:

$$\overline{M}_O^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k^e) = 0 \to \frac{d\overline{L}_O}{dt} = 0 \to \overline{L}_O = \overrightarrow{\mathrm{const}}. \qquad (3.8)$$

2. Если главный момент внешних сил, действующих на механическую систему, относительно некоторой оси (например Ox), в течение некоторого промежутка времени, остаётся равным нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси, в течение того же промежутка времени, остаётся неизменным, т. е. постоянным:

$$M_x^e = \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k^e) = 0 \to \frac{dL_x}{dt} = 0 \to L_x = \mathrm{const}. \qquad (3.9)$$

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Твёрдое тело является частным случаем простейшей механической системы. Скорости точек вращающегося тела вычисляются как произведение угловой скорости тела на расстояние точки от оси вращения (радиус вращения) $V_k = \omega r_k$. С учетом этого, согласно (3.5), имеем

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{V}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k V_k r_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \omega r_k^2 = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2,$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = J_z$ называется моментом инерции тела относительно оси вращения. Окончательно запишется:

$$L_z = J_z \omega. \tag{3.10}$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело вращается вокруг оси z, то, подставив выражение (3.10) в последнее уравнение системы (3.7), получаем

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e), \quad J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e), \quad J_z \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e).$$

Если ввести угол поворота тела φ, то, учитывая, что $d\omega / dt = \ddot{\varphi}$, имеем

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e). \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) и есть дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

4. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{mV^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}. \tag{4.1}$$

Единицей измерения кинетической энергии в СИ является джоуль (1 Дж = 1 Н·м).

Кинетическая энергия твердого тела *при поступательном движении* (скорости всех точек одинаковы) определяется по формуле

$$T = \frac{MV^2}{2}. \tag{4.2}$$

где M – масса тела, $\bar{V}$ – скорость любой точки тела.

Кинетическая энергия твердого тела, *вращающегося вокруг неподвижной оси*, вычисляется по формуле

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}. \tag{4.3}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия твердого тела, *движущегося плоскопараллельно*, вычисляется по формуле

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{J_{Cx} \omega^2}{2}. \tag{4.4}$$

где M – масса тела, V_C – скорость центра масс, J_{Cx} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела, ω – угловая скорость тела.

Элементарная работа силы

Элементарная работа dA силы $\overline{F}$ *на элементарном (бесконечно малом) перемещении dS определяется выражением*

$$dA = F_\tau \cdot dS, \qquad (4.5)$$

где F_τ − проекция силы $\overline{F}$ на направление скорости точки приложения силы или на направление элементарного перемещения, которое совпадает с направлением скорости точки (рисунок 4.1).

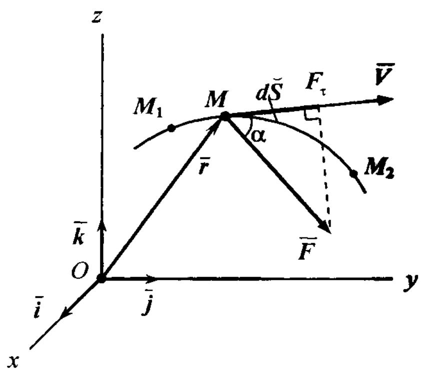


Рисунок 4.1 – Элементарная работа силы

Элементарная работа силы является скалярной величиной. Так как $F_\tau = F\cos\alpha$, где α − угол между силой $\overline{F}$ и направлением вектора скорости точки $\overline{V}$, то выражение (4.5) можно представить в виде

$$dA = F\cos\alpha \cdot dS. \qquad (4.6)$$

В этой формуле знак элементарной работы определяется знаком $\cos\alpha$: если $\alpha < 90°$, то работа положительная, если $\alpha > 90°$ − работа отрицательная.

Отметим частные случаи, которые можно получить из (4.6):

$$\alpha = 0°,\ dA = F \cdot dS;$$
$$\alpha = 90°,\ dA = 0;$$
$$\alpha = 180°,\ dA = -\ F \cdot dS.$$

Таким образом, *если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю*.

Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Из кинематики точки известно, что $\bar{V} = d\bar{r}\,/\,dt,\ V = \left|\bar{V}\right| = dS\,/\,dt.$

Следовательно, $dS = \left|d\bar{r}\right| = Vdt.$ Согласно уравнению (4.6), элементарная работа:

$$dA = F \cdot \left|d\bar{r}\right| \cdot \cos\alpha = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \qquad (4.7)$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на дифференциал радиус-вектора точки приложения силы.

Если силу $\bar{F}$ и радиус-вектор $\bar{r}$ разложить по осям координат, то из формулы (4.7) следует выражение элементарной работы:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (4.8)$$

где F_x, F_y, F_z − проекции силы на координатные оси, dx, dy, dz − дифференциалы координат точки приложения силы.

Полная работа силы

Работа силы на любом конечном перемещении M_1M_2 вычисляется как предел интегральной суммы соответствующих элементарных работ, т.е. равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_1 и M_2:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} dA_k = \int_{M_1}^{M_2} dA_k = \int_{M_1}^{M_2} F_\tau dS = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (4.9)$$

Работа постоянной силы

Работа постоянной силы (*по модулю и направлению*) *на прямолинейном перемещении точки ее приложения вычисляется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения точки* (рисунок 4.2):

$$A(\overline{F}) = \overline{F} \cdot \overline{S} = FS\cos\alpha. \tag{4.10}$$

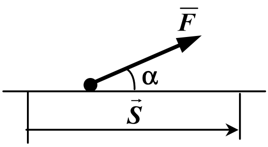


Рисунок 4.2 – Работа постоянной силы

Если направление вектора силы совпадает с перемещением точки её приложения, т.е. $\alpha = 0$, то работа запишется:

$$A(\overline{F}) = FS. \tag{4.10*}$$

Работа силы на прямолинейном перемещении точки её приложения равна *алгебраическому значению произведения проекции силы на направление перемещения на перемещение*.

Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси

Элементарная работа силы, приложенной к произвольной точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела:

$$dA = \pm M_z(\overline{F})d\varphi. \tag{4.11}$$

Полная работа силы равна интегралу от элементарной работы:

$$A = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z(\overline{F})d\varphi. \tag{4.12}$$

Если момент силы относительно оси вращения остается постоянным $M_z(\overline{F}) = \text{const}$, то *полная работа силы равна произведению момента силы на угол поворота тела*:

$$A = \pm M_z \varphi. \qquad (4.13)$$

Аналогичным образом вычисляется работа пары сил, приложенной к вращающемуся телу,

$$A(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \pm M_z(\overline{F}_1, \overline{F}_2)\varphi. \qquad (4.14)$$

где $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) -$ пара сил, $M_z(\overline{F}_1, \overline{F}_2) -$ момент пары сил относительно оси вращения.

Работа момента силы (пары сил) будет положительной, если сила или пара сил способствуют вращению тела, и отрицательной, если препятствуют вращению.

Работа силы тяжести

Обозначим силу тяжести точки как $\overline{G} = m\overline{g}$, где m – масса точки, $\overline{g} -$ ускорение свободного падения.

При перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 (рисунок 4.3) работа силы тяжести будет равна:

$$A(\overline{G}) = G(z_1 - z_2) = Gh_1. \qquad (4.15)$$

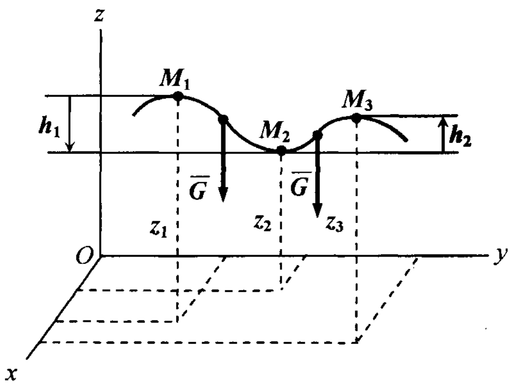


Рисунок 4.3 – Работа силы тяжести

При перемещении точки из положения M_2 в положение M_3 работа силы тяжести равна:

$$A(\overline{G}) = G(z_2 - z_3) = -Gh_2.$$

В первом случае направление силы тяжести совпадает с направлением вертикального перемещения точки, а во втором противоположно. В общем случае можно записать:

$$A(\overline{G}) = \pm mgh. \tag{4.16}$$

Следовательно, *работа силы тяжести не зависит от формы траектории точек тела и равна произведению этой силы на разность начальной и конечной высот центра тяжести*.

Если тело опускается, то сила тяжести тела совершает положительную работу, а если поднимается, то отрицательную.

Работа силы упругости

На рисунке 4.4*a* изображена пружина в ненапряжённом состоянии. На рисунке 4.4*b* пружина растянута и λ_1 – деформация пружины. Работа силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$ на перемещении λ_1 вычисляется по формуле

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c\lambda_1^2}{2}, \tag{4.17}$$

где c – коэффициент упругости (жёсткости) пружины.

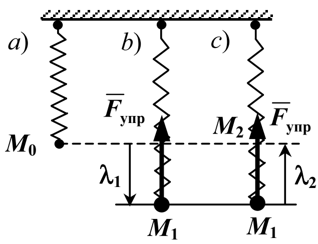


Рисунок 4.4 – Работа силы упругости

На рисунке 4.4*c* пружина возвращается в недеформированное состояние, и работа силы упругости будет равна:

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c\lambda_2^2}{2}. \tag{4.17*}$$

То есть, работа силы упругости определяется выражением

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \pm\frac{c\lambda^2}{2}. \qquad (4.18)$$

Если начальная деформация пружины $\lambda_0 \neq 0$, то работа упругой силы вычисляется по формуле

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c(\lambda_0^2 - \lambda^2)}{2}. \qquad (4.19)$$

Следовательно, *работа упругой силы равна половине произведения коэффициента жёсткости на разность квадратов начального* λ_0 *и конечного* λ *удлинений (или сжатий) пружины*.

Работа равнодействующей

Если к движущейся точке приложено несколько сил, то работа равнодействующей этой системы сил на каком-либо перемещении точки равна алгебраической сумме работ каждой силы на этом перемещении:

$$A(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k) = A(\overline{F}_1) + A(\overline{F}_2) + \ldots + A(\overline{F}_n), \qquad (4.20)$$

где $\overline{F}_k$ – силы, приложенные к точке, $\overline{R} = \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k$ – равнодействующая сходящейся системы сил.

Работа силы на конечном перемещении

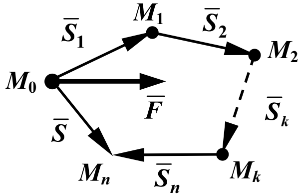


Рисунок 4.5 – Работа силы на конечном перемещении

Если точка приложения постоянной силы $\overline{F}$ получила ряд последовательных перемещений $\vec{S}_k$, то работа силы на результирующем перемещении $\vec{S}$ равна алгебраической сумме работ силы на каждом перемещении (рисунок 4.5):

$$A\left(\overline{F}\right)=\overline{F}\cdot\overline{S}=\overline{F}\cdot\overline{S}_1+\overline{F}\cdot\overline{S}_2+\ldots+\overline{F}\cdot\overline{S}_k+\ldots+\overline{F}\cdot\overline{S}_n=$$
$$=\overline{F}\cdot\left(\overline{S}_1+\overline{S}_2+\ldots+\overline{S}_k+\ldots+\overline{S}_n\right). \qquad (4.21)$$

Работа внутренних сил неизменяемой механической системы

Простейшей механической системой является твердое тело. Силы взаимодействия между частицами тела (системы) попарно равны и противоположно направлены. Следовательно, *сумма работ внутренних сил неизменяемой механической системы равна нулю на любом перемещении системы*.

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к точке, на том же перемещении:

$$\frac{mV_2^2}{2}-\frac{mV_1^2}{2}=\sum_{k=1}^{n}A(\overline{F}_k), \qquad (4.22)$$

где V_1 – скорость точки в начальном положении, V_2 – скорость точки в конечном положении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Изменение кинетической энергии механической системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы, на том же перемещении:

$$T_2-T_1=\sum_{k=1}^{n}A(\overline{F}_k^e)+\sum_{k=1}^{n}A(\overline{F}_k^i), \qquad (4.23)$$

где T_1 – кинетическая энергия системы в начальном положении, T_2 – кинетическая энергия системы в конечном положении, $\overline{F}_k^e$ – внешние силы, $\overline{F}_k^i$ – внутренние силы.

Частный случай. Для неизменяемой механической системы $\sum\limits_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^i) = 0$ и теорема принимает вид

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e). \tag{4.24}$$

Пример 1. Брусок массой m соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Определить максимальную деформацию λ пружины, если коэффициент трения на наклонной плоскости f. Пружина в начальный момент времени не деформирована, ее коэффициент жёсткости c. Расстояние от начального положения бруска до пружины S (рисунок 4.6).

Дано: m = 5 кг, S = 2 м, α = 30°, f = 0,2, c = 50 Н/м.

Определить: λ.

Решение.

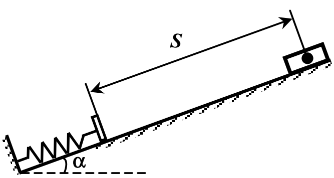


Рисунок 4.6 – Пример 1

Принимаем брусок за материальную точку и рассмотрим его движение на двух участках:

1) $M_0M_1 = S$ – до соприкосновения с пружиной (рисунок 4.7*a*);

2) $M_1M_2 = \lambda$ – до остановки бруска (рисунок 4.7*b*).

На участке M_0M_1 на брусок действует сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция поверхности $\overline{N}$ и сила трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$.

Для решения задачи применяем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\sum_{k=1}^{n}A(\bar{F}_k), \text{где} \sum_{k=1}^{n}A(\bar{F}_k)=A(\bar{G})+A(\bar{N})+A(\bar{F}_{\text{тр}}).$$

Так как $V_0 = 0$ по условию задачи, то теорема принимает вид

$$\frac{mV_1^2}{2}=A(\bar{G})+A(\bar{N})+A(\bar{F}_{\text{тр}}). \qquad (1)$$

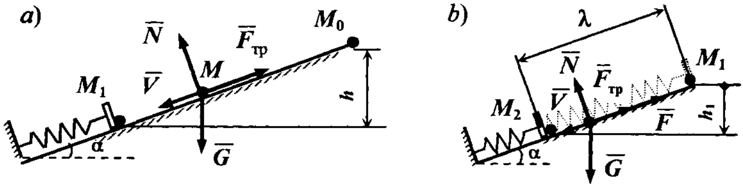


Рисунок 4.7 – Расчётная схема примера 1

Определяем работы сил, действующих на брусок, на перемещении S и подставляем в уравнение (1):

$$A(\bar{G})=mgh, h=S\sin\alpha, A(\bar{G})=mgS\sin\alpha,$$

$$A(\bar{N})=0, \text{так как } \bar{N}\perp\bar{S},$$

$$A(\bar{F}_{\text{тр}})=-F_{\text{тр}}\cdot S,$$

$$F_{\text{тр}}=fN,\ N=G\cos\alpha,\ N=mg\cos\alpha,\ F_{\text{тр}}=fmg\cos\alpha,$$

$$A(\bar{F}_{\text{тр}})=-fmgS\cos\alpha.$$

$$\frac{mV_1^2}{2}=mgS\sin\alpha-fmgS\cos\alpha.$$

Подставляем заданные величины и вычисляем V_1 (здесь и далее $g \approx 10$ м/с^2):

$$\frac{mV_1^2}{2}=mgS(\sin\alpha-f\cos\alpha), \quad V_1^2=2gS(\sin\alpha-f\cos\alpha),$$

$$V_1=\sqrt{2\cdot 10\cdot 2(\sin 30°-0,2\cos 30°)}=\sqrt{13,04}=3,61 \text{ м/с}.$$

Для второго участка M_1M_2 начальная скорость V_1, а конечная скорость $V_2 = 0$. На этом участке на брусок действует сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция поверхности $\bar{N}$, сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ и упругая сила $\bar{F}$ (рисунок 4.7*b*).

Для определения величины максимального сжатия λ пружины (участок M_1M_2) воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$-\frac{mV_1^2}{2} = A(\bar{G}) + A(\bar{N}) + A(\bar{F}_{\text{тр}}) + A(\bar{F}). \qquad (2)$$

Вычислим работы сил, действующих на брусок, на перемещении λ:

$$A(\bar{G}) = mgh_1, \quad h_1 = \lambda \sin\alpha, \quad A(\bar{G}) = mg\lambda \sin\alpha,$$

$$A(\bar{N}) = 0, \text{ так как } \bar{N} \perp \bar{\lambda},$$

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}\lambda,\ F_{\text{тр}} = fN,\ N = G\cos\alpha,\ N = mg\cos\alpha,$$

$$F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha,\ A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -fmg\lambda\cos\alpha,$$

$$A(\bar{F}) = -\frac{c\lambda^2}{2}.$$

Уравнение (2) принимает вид

$$-\frac{mV_1^2}{2} = mg\lambda\sin\alpha - fmg\lambda\cos\alpha - \frac{c\lambda^2}{2}.$$

Преобразуя выражение, получаем квадратное уравнение относительно λ:

$$\frac{c}{m}\lambda^2 + 2g(-\sin\alpha + f\cos\alpha)\lambda - V_1^2 = 0.$$

Подставляем численные значения всех величин и решаем уравнение:

$$10\lambda^2 - 6{,}56\lambda - 13{,}04 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6{,}56 \pm \sqrt{6{,}56^2 + 4\cdot 10\cdot 13{,}04}}{20} = \frac{6{,}56 \pm 23{,}76}{20}.$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения $\lambda = 1{,}52$ м.

Ответ. $\lambda = 1{,}52$ м.

Пример 2. Механическая система, состоящая из трех твердых тел (рисунок 4.8), приводится в движение из состояния покоя силой тяжести груза *A*. Свободные участки нерастяжимых нитей, соединяющих тела в систему, параллельны соответствующим плоскостям. Скольжение нитей по блоку *B*, катку *D* и проскальзывание катка *D* по плоскости отсутствует.

Определить скорость и ускорение тела *A* в момент времени, когда оно опустится по наклонной плоскости на заданное расстояние S_A.

Принятые обозначения: m – массы тел, G – силы тяжести тел, J – моменты инерции тел, ρ_B – радиус инерции тела *B*, f – коэффициент трения скольжения груза *A* по плоскости, δ – коэффициент сопротивления качению, S – перемещение тел системы, M_B – момент сил сопротивления в подшипниках, R и r – радиусы шкива и катка.

Дано: $m_A = 20$ кг, $m_B = 10$ кг, $m_D = 8$ кг, $R_B = 0{,}3$ м, $r_B = 0{,}2$ м, $R_D = 0{,}3$ м, $r_D = 0{,}2$ м, $\rho_B = 0{,}25$ м, $M_B = 5$ Н·м, $f = 0{,}1$, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\delta_D = 0{,}2$ см $= 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ м, $S_A = 0{,}5$ м.

Определить: скорость V_A и ускорение a_A.

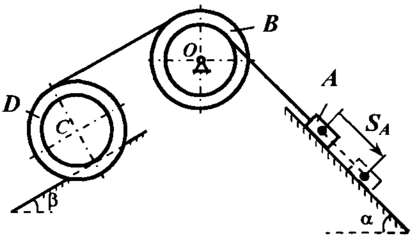


Рисунок 4.8 – Пример 2

Решение.

1. Тело *A* движется поступательно вниз по наклонной плоскости. Шкив *B* вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр *O* шкива перпендикулярно

плоскости рисунка. Каток D движется плоскопараллельно по наклонной плоскости вверх.

Конечное положение тел системы, когда тело A опустится на расстояние S_A, блок B повернется на угол φ_B, центр катка D переместится на S_C, показано на рисунке 4.9 (первоначальное положение тел – пунктиром).

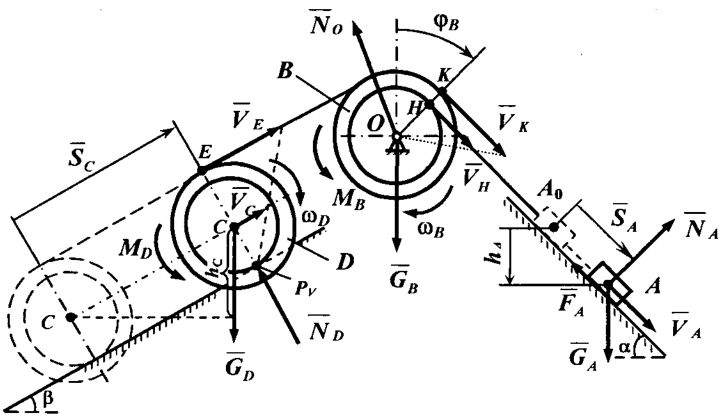


Рисунок 4.9 – Расчётная схема примера 2

2. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии неизменяемой механической системы в виде (4.24)

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e).$$

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, теорема запишется в виде

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e). \qquad (1)$$

3. Вычисляется кинетическая энергия системы:

$$T_1 = T_A + T_B + T_D, \qquad (2)$$

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2}, \quad T_D = \frac{m_D V_C^2}{2} + \frac{J_D \omega_D^2}{2}, \qquad (3)$$

где J_B и J_D – моменты инерции тел B и D относительно осей, проходящих через их центры масс: $J_B = m_B \rho_B^2$, $J_D = m_D R_D^2$, так как принято, что масса катка D равномерно распределена по внешнему ободу.

4. Выразим угловые скорости ω_B и ω_D тел B и D и линейную скорость $\bar{V}_C$ центра катка D через скорость $\bar{V}_A$ тела A:

$$V_H = V_A, \quad \omega_B = \frac{V_H}{r_B} = \frac{V_A}{r_B}, \quad V_K = \omega_B R_B = \frac{V_A R_B}{r_B}, \quad V_K = V_E,$$

$$\omega_D = \frac{V_E}{EP_V} = \frac{V_E}{R_D + r_D} = \frac{V_A R_B}{r_B (R_D + r_D)} \ (P_V - \text{МЦС катка } D),$$

$$V_C = \omega_D CP_v = \omega_D r_D = \frac{V_A R_B r_D}{r_B (R_D + r_D)} = \frac{3}{5} V_A. \tag{4}$$

Подставляем полученные значения моментов инерции и скорости тел в уравнения (3):

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2}, \quad T_B = m_B \rho_B^2 \frac{V_A^2}{2 r_B^2},$$

$$T_D = \frac{m_D V_A^2 R_B^2 r_D^2}{2 r_B^2 \left(R_D + r_D\right)^2} + \frac{m_D R_D^2 V_A^2 R_B^2}{2 r_B^2 \left(R_D + r_D\right)^2}.$$

Полученные значения T_A, T_B, T_D подставляются в уравнение (2):

$$T_1 = \left(\frac{m_A}{2} + \frac{m_B \rho_B^2}{2 r_B^2} + \frac{m_D R_B^2 r_D^2}{2 r_B^2 \left(R_D + r_D\right)^2} + \frac{m_D R_D^2 R_B^2}{2 r_B^2 \left(R_D + r_D\right)^2}\right) V_A^2.$$

Подставляем численные значения всех величин:

$$T_1 = \left(\frac{20}{2} + \frac{10 \cdot 0{,}25^2}{2 \cdot 0{,}2^2} + \frac{8 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}2^2}{2 \cdot 0{,}2^2 (0{,}3 + 0{,}2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{8 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}3^2}{2 \cdot 0{,}2^2 (0{,}3 + 0{,}2)^2}\right) V_A^2 = 22{,}5 V_A^2. \tag{5}$$

5. Вычисляем сумму работ внешних сил, действующих на тела системы, на их перемещениях. На рисунке 4.9 изображаем внешние силы.

На тело A действует сила тяжести $\overline{G}_A$, сила трения скольжения $\overline{F}_A$, нормальная составляющая реакции поверхности $\overline{N}_A$.

К шкиву B, в точке O приложена сила тяжести $\overline{G}_B$ и реакция неподвижного цилиндрического шарнира $\overline{N}_O$ (направлена произвольно), момент сил трения в подшипниках M_B.

На каток D действует сила тяжести $\overline{G}_D$, нормальная составляющая реакции поверхности $\overline{N}_D$, момент сил сопротивления при качении M_D (качение без проскальзывания).

Запишем работу всех внешних сил на перемещении системы:

$$\sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k^e) = A_A + A_B + A_D. \qquad (6)$$

Сумма работ сил, приложенных к телу A:

$$A_A = A(\overline{G}_A) + A(\overline{F}_A) + A(\overline{N}_A) = G_A h_A - F_A S_A,$$

$$A(\overline{N}_A) = 0, \text{ так как } \overline{N}_A \perp \overline{S}_A,$$

$$N_A = G_A \cos\alpha,\ F_A = fN_A = fG_A \cos\alpha,$$

$$A_A = S_A(m_A g \sin\alpha - f m_A g \cos\alpha).$$

Подставляем численные значения (здесь и далее $g \approx 10$ м/с^2):

$$A_A = S_A\left(20\cdot 10\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}1\cdot 20\cdot 10\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 127 S_A. \qquad (7)$$

Сумма работ сил, приложенных к телу B:

$$A_B = A(M_B) = -M_B\varphi_B, \quad \varphi_B = \frac{S_A}{r_B}, \quad A_B = -M_B\frac{S_A}{r_B}.$$

где φ_B – угол поворота тела B, соответствующий перемещению S_A.

Подставляем численные значения:

$$A_B = -M_B \frac{S_A}{r_B} = \frac{5}{0,2} S_A, \quad A_B = -25 S_A. \tag{8}$$

Работы силы тяжести $\bar{G}_B$ и реакции $\bar{N}_O$ шарнира равны нулю, так как силы приложены в неподвижной точке O.

Работа сил, приложенных к телу D:

$$A_D = A(\bar{G}_D) + A(M_D) + A(\bar{N}_D) = -G_D h_C - M_D \varphi_D,$$

$$A(\bar{N}_D) = 0, \text{ так как сила приложена в МЦС,}$$

$$h_C = S_C \sin\beta, \quad \varphi_D = \frac{S_C}{r_D}, \quad M_D = \delta_D N_D = \delta_D G_D \cos\beta.$$

Перемещение S_C центра катка выражается через перемещение S_A аналогично соотношению скоростей (4):

$$S_C = \frac{3}{5} S_A, \quad h_C = \frac{3}{5} S_A \sin 30°, \quad \varphi_D = \frac{3S_A}{5r_D}, \quad M_D = \delta_D m_D g \cos 30°.$$

$$A_D = (-m_D g \frac{3}{5} \sin 30° - \delta_D m_D g \frac{3}{5} \cos 30°) S_A.$$

Подставляем численные значения:

$$A_D = -m_D g \frac{3}{5} \left(\sin 30° + \delta_D \cos 30° \right) S_A =$$

$$= -8 \cdot 10 \frac{3}{5} (0,5 + 0,002 \cdot 0,87) S_A = -24 S_A. \tag{9}$$

Подставляем значения (7), (8), (9) в уравнение (6):

$$\sum_{k=1}^{n} A(\bar{F}_\kappa^e) = A_A + A_B + A_D = 127 S_A - 25 S_A - 24 S_A = 78 S_A. \tag{10}$$

6. Приравниваем (5) и (10) и определяем скорость тела A:

$$22,5 V_A^2 = 78 S_A, \tag{11}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{78 S_\text{А}}{22,5}} = \sqrt{\frac{78 \cdot 0,5}{22,5}} \approx 1,3 \text{ м/с}.$$

7. Вычисляем ускорение a_A тела A.

В общем случае ускорение точки (тело A можно принять за точку) вычисляется как производная по времени от скорости точки.

Продифференцируем уравнение (11) по времени:

$$\frac{d(22,5V_A^2)}{dt} = \frac{d(78S_A)}{dt}.$$

Преобразуя, получим

$$22,5 \cdot 2 \cdot V_A \frac{dV_A}{dt} = 78 \frac{dS_A}{dt}, \text{ где } \frac{dV_A}{dt} = a_A, \frac{dS_A}{dt} = V_A,$$

т.е. $22{,}5 \cdot 2 V_A a_A = 78 V_A$, откуда $a_A = 1{,}73$ м/с^2.

Ответ. $V_A = 1{,}3$ м/с, $a_A = 1{,}73$ м/с^2.

1 ЗАДАЧА Д1

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Рассмотрим следующие случаи выражения силы, действующей на точку:

1) сила зависит от времени;
2) сила зависит от положения точки в пространстве;
3) сила зависит от скорости точки.

Пусть свободная материальная точка массой m движется под действием силы

$$\bar{F} = \bar{i}b_1\cos\omega t + \bar{j}b_2 v_y + \bar{k}b_3 z,$$

где b_1, b_2, b_3 - некоторые постоянные коэффициенты при начальных условиях

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 \neq 0, v_{x0} = 0, v_{y0} \neq 0, v_{z0} = 0.$$

Необходимо определить уравнения движения точки в координатной форме.

Запишем для этой точки дифференциальные уравнение в проекциях на декартовы оси координат

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = b_1\cos\omega t$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = b_2 v_y \qquad (7)$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = b_3 z.$$

Первое уравнение системы (7) можно представить в виде двух уравнений первого порядка

$$m\frac{dv_x}{dt} = b_1\cos\omega t,$$
$$\frac{dx}{dt} = v_x. \qquad (8)$$

В первом уравнении связаны две переменные величины: проекция скорости на ось x и время. Разделяя переменные, получим

$$mdv_x = b_1\cos\omega t dt.$$

Слева и справа от знака равенства стоят дифференциалы некоторых функций. Если дифференциалы равны, то и интегралы равны с точностью до постоянной интегрирования

$$\int m dv_x = \int b_1 \cos\omega t dt + C_1$$

После интегрирования получим

$$v_x = \frac{b_1}{m\omega}\sin\omega t + C_1, \qquad (9)$$

т.е. зависимость проекции скорости точки на ось x от времени. Из второго уравнения системы (8) получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b_1}{m\omega}\sin\omega t + C_1.$$

Снова разделяя переменные, получим

$$dx = \left(\frac{b_1}{m\omega}\sin\omega t + C_1\right)dt.$$

После интегрирования получим

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2}\cos\omega t + C_1 t + C_2. \qquad (10)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим по начальным условиям. Подставляя в выражение (10) значение координаты x при $t = 0$, получаем

$$0 = -\frac{b_1}{m\omega^2}\cos\omega 0 + C_1 0 + C_2,$$

отсюда

$$C_2 = \frac{b_1}{m\omega^2}.$$

Постоянную C_1 определим, подставляя в (9) значение v_x при $t = 0$:

$$0 = \frac{b_1}{m\omega}\sin\omega 0 + C_1,$$

отсюда $C_1 = 0$.

Таким образом, решение первого уравнения системы (7) имеет вид

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{b_1}{m\omega^2}. \qquad (11)$$

Второе уравнение системы (7) также представляем в виде двух уравнений

$$m\frac{dv_y}{dt}=b_2v_y$$

$$\frac{dy}{dt}=v_y \tag{12}$$

Разделяя переменные в первом уравнении, получим

$$m\frac{dv_y}{v_y}=b_2dt \quad \text{или} \quad \ln v_y=\frac{b_2}{m}t+\ln C_3 .$$

Решая относительно v_y, получим

$$v_y=C_3e^{\frac{b_2t}{m}} . \tag{13}$$

Учитывая второе уравнение системы (12) снова получаем

$$\frac{dy}{dt}=C_3e^{\frac{b_2t}{m}} .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$y=C_3\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2t}{m}}+C_4 . \tag{14}$$

Постоянные C_3 и C_4 определяем по начальным условиям.

Из (13) $v_{y0}=C_3e^{\frac{b_2 0}{m}}=C_3$, из (14) $0=v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}0}+C_4$, или $C_4=-v_{y0}\frac{m}{b_2}$.

Таким образом, решение второго уравнения системы (7) имеет вид

$$y=v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}t}-v_{y0}\frac{m}{b_2} . \tag{15}$$

Третье уравнение системы (7) также представляем в виде двух уравнений

$$m\frac{dv_z}{dt}=b_3z$$

$$\frac{dz}{dt}=v_z \qquad (16)$$

В первом уравнении системы (16), связаны три переменных величины: скорость, время и координата точки. Чтобы разделить переменные необходимо исключить одну из них. Произведем замену

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{dv_z}{dz}\frac{dz}{dt}=v_z\frac{dv_z}{dz}.$$

Тогда первое уравнение (16) примет вид

$$mv_z\frac{dv_z}{dz}=b_3z.$$

Теперь можно разделить переменные

$$mv_zdv_z=b_3zdz.$$

Интегрируя, получим $\frac{mv_z^2}{2}=4\frac{z^2}{2}+C_5$.

Решая относительно v_z, получим

$$v_z=\sqrt{\frac{b_3z^2}{m}+2\frac{C_5}{m}}. \qquad (17)$$

По начальным условиям найдем постоянную C_5.

Подставляя в (17) $v_{z0}=0$ и z_0, получим

$$0=\sqrt{\frac{b_3z_0^2}{m}+2\frac{C_5}{m}}, \text{ и } C_5=-\frac{b_3}{2}z_0^2.$$

Учитывая, что $v_z=\frac{dz}{dt}$ выражение (17) запишется в виде

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{b_3 z^2}{m} - \frac{b_3 z_0^2}{m}}.$$

Разделив переменные, приведем его к виду

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{b_3 z^2}{m} - \frac{b_3 z_0^2}{m}}} = dt.$$

Вынося из под знака корня в знаменателе $\frac{b_3}{m}$, получим

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - z_0^2}} = \int \frac{\sqrt{b_3}}{\sqrt{m}} dt.$$

Интегрируя, получим

$$arcch \frac{z}{z_0} = \frac{\sqrt{b_3}}{\sqrt{m}} t + C_6.$$

Решая относительно z, получим

$$z = z_0 \frac{e^{\sqrt{\frac{b_3}{m}} t + C_6} + e^{-\sqrt{\frac{b_3}{m}} t - C_6}}{2}.$$

Постоянную C_6 найдем по начальным условиям. При $t = 0$, $z_0 \neq 0$.

Отсюда $z_0 = z_0 \frac{e^{C_6} + e^{-C_6}}{2}$ или $e^{C_6} + \frac{1}{e^{C_6}} = 2$.

Решая относительно C_6, получим $e^{C_6} = 1$ или $C_6 = 0$.

Таким образом, решение третьего уравнения системы (7) будет иметь вид

$$z = z_0 \frac{e^{\frac{2}{\sqrt{m}} t} + e^{-\frac{2}{\sqrt{m}} t}}{2}.$$

Окончательно уравнения движения точки в координатной форме имеют вид:

$$x = -\frac{b_1}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{b_1}{m\omega^2},$$

$$y = v_{y0}\frac{m}{b_2}e^{\frac{b_2}{m}t} - v_{y0}\frac{m}{b_2},$$

$$z = z_0\frac{e^{\sqrt{\frac{b_3}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{b_3}{m}}t}}{2}.$$

1.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Материальная точка массой m, движется под действием сил, равнодействующая которых зависит от времени, координат точки и ее скорости. Определить уравнения движения точки в координатной форме при заданных начальных условиях. Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

№ вар.	$\bar{F}$	x_0	y_0	z_0	v_{x0}	v_{y0}	v_{z0}	m
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	$\bar{F} = \bar{i}5t + \bar{j}3v_y + \bar{k}z$	3	2	1	5	3	2	1
2	$\bar{F} = \bar{i}5\sin 3t + \bar{j}3y - \bar{k}v_z$	3	2	2	1/6	0	1	2
3	$\bar{F} = \bar{i}4x + \bar{j}3v_y + \bar{k}\cos 4t$	1	1	1	0	3/4	1	4
4	$\bar{F} = \bar{i}5v_x + \bar{j}3y + \bar{k}3t$	3	1	1	5	1	3	3
5	$\bar{F} = \bar{i}4x + \bar{j}4v_y^2 + \bar{k}\sin 3t$	4	2	1	√2	0,5	-1/6	2
6	$\bar{F} = \bar{i}5\cos 3t + \bar{j}3/v_z - \bar{k}2$	8/9	5/9	1	1	1	1	5
7	$\bar{F} = -\bar{i}3x + \bar{j}3v_y + \bar{k}1/(1+t)^2$	1	1	1	1	1	-1/3	3
8	$\bar{F} = \bar{i}3x + \bar{j}3\cos t - \bar{k}v_z$	2	-1	3	2	2	3	3
9	$\bar{F} = \bar{i}2t^2 - \bar{j}3y + \bar{k}v_z$	1	1	1	1	√3	1/2	2
10	$\bar{F} = \bar{i}5t^2 - \bar{j}3v_y - \bar{k}4z$	1	1	1	2	3	2	5

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
11	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}y + \bar{k}5t$	2	1	3	3	2	5	1
12	$\bar{F} = \bar{i}3x - \bar{j}v_y + \bar{k}5\sin 3t$	2	2	3	0	1	1/6	2
13	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}\cos 4t + \bar{k}4z$	1	1	1	3/4	1	0	4
14	$\bar{F} = \bar{i}3x + \bar{j}3t + \bar{k}5v_z$	1	1	3	1	3	5	3
15	$\bar{F} = \bar{i}4v_x^2 + \bar{j}\sin 3t + \bar{k}4z$	2	1	4	0,5	-1/6	√2	2
16	$\bar{F} = \bar{i}3/v_x - \bar{j}2 + \bar{k}5\cos 3t$	5/9	1	8/9	1	1	1	5
17	$\bar{F} = \bar{i}3v_x + \bar{j}1/(1+t)^2 - \bar{k}3z$	1	1	1	1	-1/3	1	3
18	$\bar{F} = \bar{i}3\cos t - \bar{j}v_y + \bar{k}3z$	-1	3	2	2	3	2	3
19	$\bar{F} = -\bar{i}3x + \bar{j}v_y + \bar{k}2t^2$	1	1	1	√3	1/2	1	2
20	$\bar{F} = -\bar{i}3v_x - \bar{j}4y + \bar{k}5t^2$	1	1	1	3	2	2	5
21	$\bar{F} = \bar{i}x + \bar{j}5t + \bar{k}3v_z$	1	3	2	2	5	3	1
22	$\bar{F} = -\bar{i}v_x + \bar{j}5\sin 3t + \bar{k}3z$	2	3	2	1	1/6	0	2
23	$\bar{F} = \bar{i}\cos 4t + \bar{j}4y + \bar{k}3v_z$	1	1	1	1	0	3/4	4
24	$\bar{F} = \bar{i}3t + \bar{j}5v_y + \bar{k}3z$	1	3	1	3	5	1	3
25	$\bar{F} = \bar{i}\sin 3t + \bar{j}4y + \bar{k}4v_z^2$	1	4	2	-1/6	√2	0,5	2
26	$\bar{F} = -\bar{i}2 + \bar{j}5\cos 3t + \bar{k}3/v_z$	1	8/9	5/9	1	1	1	5
27	$\bar{F} = \bar{i}1/(1+t)^2 - \bar{j}3y + \bar{k}3v_z$	1	1	1	-1/3	1	1	3
28	$\bar{F} = -\bar{i}v_x + \bar{j}3y + \bar{k}3\cos t$	3	2	-1	3	2	2	3
29	$\bar{F} = \bar{i}v_x + \bar{j}2t^2 - \bar{k}3z$	1	1	1	1/2	1	√3	2
30	$\bar{F} = -\bar{i}4x + \bar{j}5t^2 - \bar{k}3v_z$	1	1	1	2	2	3	5

2 ЗАДАЧА Д2
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: механическая система, состоящая из тела 1, блоков 2 и 3, тонкого однородного стержня 4 и однородного сплошного цилиндра 5, под действием силы тяжести тела 1 приходит в движение из состояния покоя (рисунок 2.1). Известны:

$\boldsymbol{m}_1$ – масса груза 1, $\boldsymbol{m}_2 = 2\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_4 = 0{,}5\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_5 = 20\boldsymbol{m}_1$,

$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_3 = 12$ см, $\boldsymbol{r}_2 = 0{,}5\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{r}_3 = 0{,}75\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{R}_5 = 20$ см,

$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{R}_3$, $\boldsymbol{i}_{2\xi} = 8$ см, $\boldsymbol{i}_{3x} = 10$ см, $\boldsymbol{\alpha} = 30°$, $\boldsymbol{f} = 0{,}1$, $\boldsymbol{\delta} = 0{,}2$ см, $\boldsymbol{s} = 0{,}06\boldsymbol{\pi}$ м.

Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Массами звена $\boldsymbol{BC}_5$ и ползуна $\boldsymbol{B}$ пренебречь. На рисунке 2.1, а показана механическая система в начальном положении.

Найти: $\boldsymbol{v}_1$ – скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_0 = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{T}_0$ и $\boldsymbol{T}$ – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}}$ – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, $\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{i}} = 0$.

Так как в начальном положении система находится в покое, то $\boldsymbol{T}_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$\boldsymbol{T} = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{e}}. \qquad (2)$$

Для определения кинетической энергии $\boldsymbol{T}$ и суммы работ внешних сил изобразим систему в конечном положении (рисунок 2.1, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т.е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Скорость центра масс $\boldsymbol{C}$ катка 2 равна скорости груза 1:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}2} = \boldsymbol{v}_1. \qquad (1.3)$$

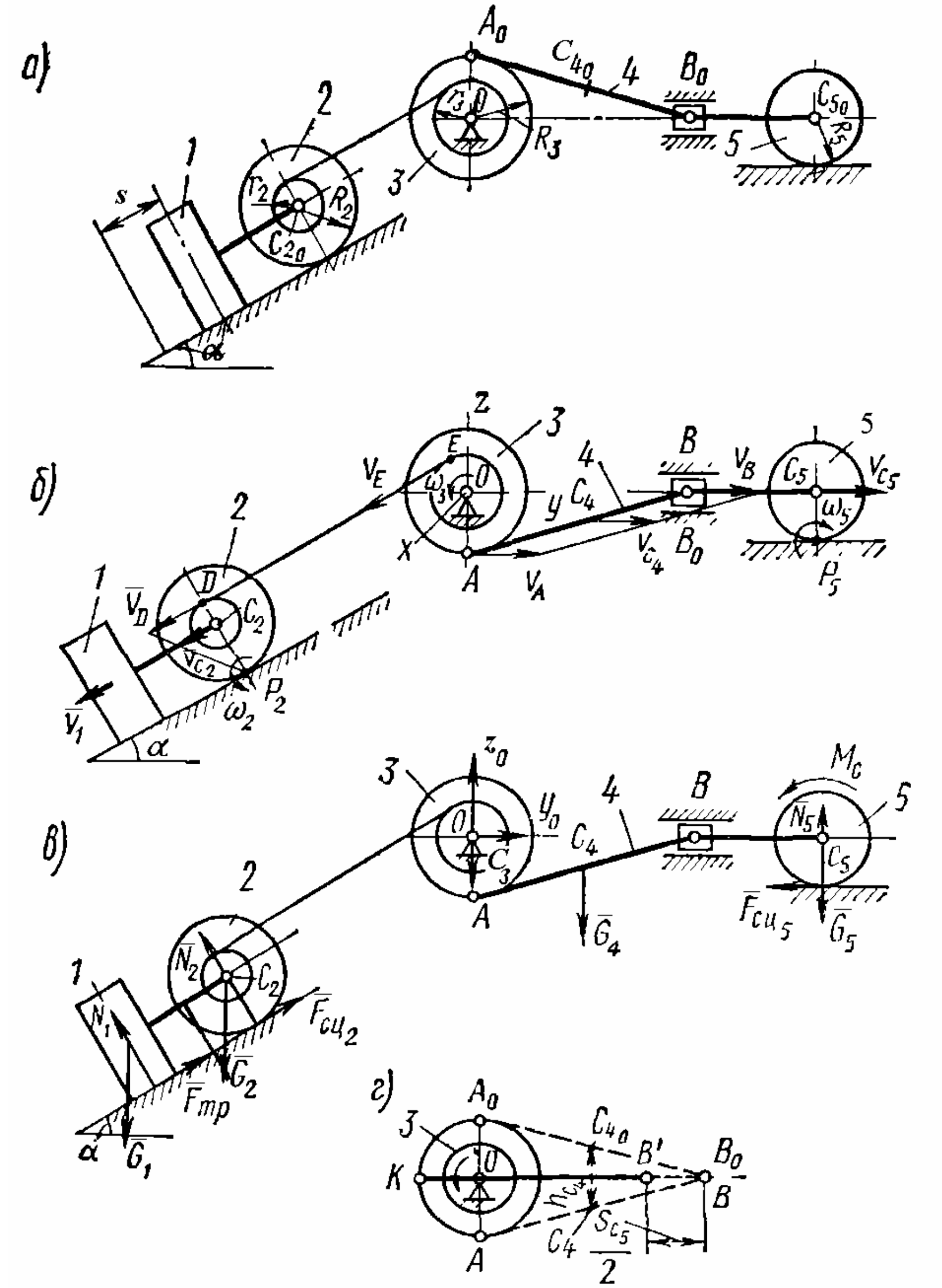


Рисунок 2.1

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке $\boldsymbol{P}_2$,

$$\omega_2 = \frac{\boldsymbol{v}_{C2}}{\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{P}_2} \text{ или } \omega_2 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{R}_2}. \tag{4}$$

Скорость точки $\boldsymbol{D}$ катка 2 $\boldsymbol{v}_D = \omega_2 \cdot \boldsymbol{DP}_2$, т.е. $\boldsymbol{v}_D = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{R}_2}(\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{r}_2)$.

Скорость точки $\boldsymbol{E}$ блока 3 равна скорости точки $\boldsymbol{D}$ катка 2:

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D. \tag{5}$$

Но $\boldsymbol{v_E} = \boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3$. Следовательно, по (5), $\boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{R}_2}(\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{r}_2)$.

Так как $\boldsymbol{R}_2 = 2\boldsymbol{r}_2$, то $\boldsymbol{\omega}_3\boldsymbol{r}_3 = \dfrac{3}{2}\boldsymbol{v}_1$, откуда

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{r}_3}. \tag{6}$$

Заменяя в формуле (6) $\boldsymbol{\omega}_3 = \dfrac{\boldsymbol{d\varphi}_3}{\boldsymbol{dt}}$, $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}$, получим

$$\frac{\boldsymbol{d\varphi}_3}{\boldsymbol{dt}} = \frac{3}{2\boldsymbol{r}_3}\frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}, \text{ или } \boldsymbol{d\varphi}_3 = \frac{3}{2\boldsymbol{r}_3}\boldsymbol{ds}.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}_3}.$$

Когда груз 1 пройдет путь $\boldsymbol{s} = 0{,}06\boldsymbol{\pi}$ м, блок 3 повернется на угол $\boldsymbol{\varphi}_3$:

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}_3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}06\boldsymbol{\pi}}{0{,}09} = \boldsymbol{\pi}. \tag{7}$$

При этом повороте блока 3 на 180? его точка $\boldsymbol{A}_0$ перейдет в конечное положение $\boldsymbol{A}$ и шатун 4 из начального положения $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0$ перейдет в конечное положение $\boldsymbol{AB}$.

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\boldsymbol{\pi}/2$ и вправо при повороте блока еще на $\boldsymbol{\pi}/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рисунок 2.1, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{T}_3 + \boldsymbol{T}_4 + \boldsymbol{T}_5. \tag{8}$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$\boldsymbol{T}_1 = \frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{v}_1^2}{2}. \tag{9}$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$\boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{v}_{C2}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{J}_{2\xi}\boldsymbol{\omega}_2^2}{2}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{J}_{2\xi}$ - момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $\boldsymbol{C}_{2\xi}$:

$$\boldsymbol{J}_{2\xi} = \boldsymbol{m}_2 \boldsymbol{i}_{2\xi}^2 . \qquad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$\boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{m}_2 \boldsymbol{v}_1^2}{2} + \frac{\boldsymbol{m}_2 \boldsymbol{i}_{2\xi}^2}{2\boldsymbol{R}_2^2} \boldsymbol{v}_1^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{m}_2 \left(1 + \frac{\boldsymbol{i}_{2\xi}^2}{\boldsymbol{R}_2^2} \right) \boldsymbol{v}_1^2 . \qquad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси $\boldsymbol{Ox}$,

$$\boldsymbol{T}_3 = \frac{\boldsymbol{J}_{3x} \boldsymbol{\omega}_3^2}{2} , \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{J}_{3x}$ - момент инерции блока 3 относительно оси $\boldsymbol{Ox}$:

$$\boldsymbol{J}_{3x} = \boldsymbol{m}_3 \boldsymbol{i}_{3x}^2 . \qquad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$\boldsymbol{T}_3 = \frac{\boldsymbol{m}_3 \boldsymbol{i}_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{r}_3} \right)^2 = \frac{9}{8} \boldsymbol{m}_3 \frac{\boldsymbol{i}_{3x}^2}{\boldsymbol{r}_3^2} \boldsymbol{v}_1^2 . \qquad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$\boldsymbol{T}_4 = \frac{\boldsymbol{m}_4 \boldsymbol{v}_{C4}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{J}_{4\xi} \boldsymbol{\omega}_4^2}{2} ,$$

где $\boldsymbol{v}_{C4}$ - скорость центра масс $\boldsymbol{C}_4$ шатуна 4; $\boldsymbol{\omega}_4$ - угловая скорость шатуна 4; $\boldsymbol{J}_{4\xi}$ - момент инерции шатуна относительно центральной оси $\boldsymbol{C}_{4\xi}$.

Для определения $\boldsymbol{v}_{C4}$ и $\boldsymbol{\omega}_4$ найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\boldsymbol{\omega}_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$\boldsymbol{T}_4 = \frac{\boldsymbol{m}_4 \boldsymbol{v}_{C4}^2}{2} , \qquad (16)$$

где

$$\boldsymbol{v}_{C4} = \boldsymbol{v}_A . \qquad (17)$$

Вращательная скорость точки $\boldsymbol{A}$ тела 3

$$\boldsymbol{v_A} = \boldsymbol{\omega}_3 \boldsymbol{R}_3, \tag{18}$$

или с учетом (14)

$$\boldsymbol{v_A} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{R}_3 \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{r}_3}.$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_3 = \frac{3}{4}\boldsymbol{R}_3$, получим $\boldsymbol{v_A} = 2\boldsymbol{v}_1$.

По (17)

$$\boldsymbol{v_{C4}} = \boldsymbol{v_A},\ \boldsymbol{v_{C4}} = 2\boldsymbol{v}_1. \tag{19}$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$\boldsymbol{T}_4 = \frac{\boldsymbol{m}_4(2\boldsymbol{v}_1)^2}{2} = 2\boldsymbol{m}_4\boldsymbol{v}_1^2. \tag{20}$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}5}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{J}_{5\xi}\boldsymbol{\omega}_5^2}{2},$$

где $\boldsymbol{v_{C5}}$ - скорость центра масс $\boldsymbol{C}_5$ катка 5; $\boldsymbol{\omega}_5$ - угловая скорость катка 5; $\boldsymbol{J}_{5\xi}$ - момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной оси $\boldsymbol{C}_{5\xi}$, $\boldsymbol{J}_{5\xi} = \boldsymbol{m}_5\boldsymbol{R}_5^2/2$.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке $\boldsymbol{P}_5$. Поэтому $\boldsymbol{\omega}_5 = \boldsymbol{v_{C5}}/\boldsymbol{R}_5$.

Следовательно,

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}5}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{R}_5^2\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}5}^2}{2\cdot 2\boldsymbol{R}_5^2} = \frac{3}{4}\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{C}5}^2.$$

Так как звено $\boldsymbol{BC}_5$ совершает поступательное движение, то $\boldsymbol{v_{C5}} = \boldsymbol{v_B}$, но $\boldsymbol{v_B} = \boldsymbol{v_{C4}} = 2\boldsymbol{v}_1$. Значит $\boldsymbol{v_{C5}} = 2\boldsymbol{v}_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$\boldsymbol{T}_5 = \frac{3}{4}\boldsymbol{m}_5(2\boldsymbol{v}_1)^2 = 3\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{v}_1^2. \tag{21}$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20) и (21):

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{v}_1^2}{2} + \boldsymbol{m}_2\left(1 + \frac{\boldsymbol{i}_{2\xi}^2}{\boldsymbol{R}_2^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}_1^2}{2} + \frac{9}{8}\frac{\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{v}_1^2\boldsymbol{i}_{3x}^2}{\boldsymbol{r}_3^2} + 2\boldsymbol{m}_4\boldsymbol{v}_1^2 + 3\boldsymbol{m}_5\boldsymbol{v}_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1 v_1^2 [1 + 2(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}) + \frac{9}{4}\frac{i_{3x}^2}{r_3^2} + 2 + 120]/2, \qquad \text{или} \quad T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении (внешние силы, приложенные к системе, показаны на рисунке 2.1, в).

Работа силы тяжести $\overline{G}_1$

$$A_{G1} = G_1 h = m_1 g s \sin\alpha . \quad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\overline{F}_{mp}$

$$A_{Fmp} = -F_{mp} s .$$

Так как $F_{mp} = fN_1 = fG_1 \cos\alpha$, то

$$A_{Fmp} = -f\, m_1 g\, s \cos\alpha . \quad (24)$$

Работа силы тяжести $\overline{G}_2$

$$A_{G2} = G_2 h_{C2} = m_2 g s \sin\alpha . \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\overline{F}_{сц2}$, $\overline{F}_{сц5}$ катков 2 и 5 равна нулю, т.к. эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести $\overline{G}_4$

$$A_{G4} = G_4 h_{C4}, \quad (25)$$

где h_{C4} - вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рисунок 1.1, г), $h_{C4} = R_3$:

$$A_{G4} = m_4 g R_3 . \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_c} = -M_c \varphi_5, \quad (27)$$

где $M_c = \delta N_5 = \delta G_5$ - момент сопротивления качению катка 5; φ_5 - угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C5} / R_5, \quad (28)$$

где s_{C5} - перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$. Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и право:

$$s_{C5} = 2(B_0 B'). \quad (29)$$

Определим перемещение $\boldsymbol{B_0B'}$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки $\boldsymbol{B}$ выберем неподвижную точку $\boldsymbol{K}$ плоскости (рисунок 2.1, г). При этом повороте тела 3 шатун из положения $\boldsymbol{A_0B_0}$ перейдет в положение $\boldsymbol{KB'}$. Тогда $\boldsymbol{B_0B'} = \boldsymbol{KB_0} - \boldsymbol{KB'}$, где

$$\boldsymbol{KB_0} = \boldsymbol{KO} + \boldsymbol{OB_0} = \boldsymbol{R_3} + \sqrt{(\boldsymbol{A_0B_0})^2 - (\boldsymbol{A_0O})^2} = \boldsymbol{R_3} + \sqrt{\boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{R_3^2}},$$

$$\boldsymbol{KB'} = \boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{R_3}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{B_0B'} = \boldsymbol{R_3} + \sqrt{\boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{R_3^2}} - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{R_3} + \sqrt{(4\boldsymbol{R_3})^2 - \boldsymbol{R_3^2}} - 4\boldsymbol{R_3} = 0{,}88\boldsymbol{R_3}. \qquad (30)$$

Подставляя (30) и (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1{,}76\boldsymbol{R_3}/\boldsymbol{R_5}. \qquad (31)$$

Работа момента сопротивления качению по (27)

$$\boldsymbol{A_{M_c}} = -\delta \boldsymbol{m_5 g} \cdot 1{,}76\boldsymbol{R_3}/\boldsymbol{R_5}. \qquad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23) – (26) и (32):

$$\sum \boldsymbol{A_k^e} = \boldsymbol{m_1 g s}\left(\sin\alpha - \boldsymbol{f}\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{\boldsymbol{R_3}}{2\boldsymbol{s}} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1{,}76\boldsymbol{R_3}}{\boldsymbol{R_5 s}}\right), \text{ или}$$

$$\sum \boldsymbol{A_k^e} = 1{,}51\boldsymbol{m_1 g s}. \qquad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения $\boldsymbol{T}$ и $\sum \boldsymbol{A_k^e}$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot \boldsymbol{m_1 v_1^2}/2 = 1{,}51\boldsymbol{m_1 g s}, \text{ откуда } \boldsymbol{v_1} = 0{,}21 \text{ м/с.}$$

2.2 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Механическая система под действием силы тяжести тела 1 (варианты 1-11, 14-16, 20, 23, 24, 30) или тела 4 (вариант 17), или тела 3 (вариант 28), или вращающего момента $\boldsymbol{M}$ (варианты 12, 13, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 29) приходит в движение из состояния покоя (рисунки 2.2-2.6).

Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 4, 19, 12, 13, 18, 19, 21-23, 25-30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 1-4, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 30), определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным $\boldsymbol{s_1}$.

Необходимые для выполнения контрольной работы данные приведены в таблице 2.1. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Таблица 2.1

№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	s_1, м	M, Н·м	R, м	r/R	i_2; i_3, м	δ, м	f	α, ?	β, ?
1	2m	1,5m	m	-	1,2	-	0,2	0,8	0,16	0,005	-	45	-
2	m	4m	2m	-	1,0	-	0,3	0,5	0,2	0,01	-	-	-
3	1,5m	3m	2m	-	0,8	-	0,4	0,4	0,24	0,005	-	30	-
4	4m	2m	2m	m	1,0	-	0,3	0,5	0,28	0,005	0,1	30	60
5	3m	3m	3m	-	0,5	-	-	-	-	-	-	-	-
6	2m	m	4m	-	1,2	-	0,2	-	-	0,002	-	45	-
7	m	4m	1,5m	-	2,0	-	0,4	0,4	0,3	0,001	-	-	-
8	1,5m	2m	3m	1,5m	0,8	-	0,3	0,6	0,22	0,002	-	60	-
9	4m	3m	2m	1,5m	1,2	-	0,2	0,5	0,15	0,001	0,1	30	60
10	m	1,5m	2m	-	1,0	-	0,24	0,4	0,16	0,005	0,08	45	-
11	2m	4m	3m	1,5m	0,8	-	0,32	0,8	0,3	0,002	-	30	-
12	m	1,5m	3m	-	0,5	40	0,4	0,5	-	0,001	0,1	45	-
13	m	2m	m	2m	1,6	25	0,3	0,6	-	0,005	0,08	30	-
14	3m	4m	2m	-	1,4	-	0,6	0,4	-	0,002	-	60	-
15	4m	3m	m	0,5m	0,75	-	0,1	0,75	-	0,001	-	30	-
16	0,5m	m	m	-	1,0	-	0,15	-	-	0,005	-	45	-
17	m	2m	1,5m	1,5m	1,2	-	0,2	-	-	0,01	-	-	-
18	3m	4m	3m	-	0,8	30	0,4	0,5	0,3	0,005	0,08	60	30
19	m	4m	3m	-	1,4	35	0,3	0,6	0,22	0,004	0,1	30	60
20	1,5m	2m	m	-	1,0	-	0,2	-	-	0,006	-	45	-
21	2m	3m	m	-	1,4	40	0,36	0,8	0,3	-	0,15	60	-
22	1,5m	4m	4m	-	0,6	60	0,4	-	-	0,005	0,06	45	-
23	2m	m	1,5m	-	1,2	-	0,32	-	-	0,004	0,08	60	30
24	m	2m	m	1,5m	0,75	-	0,16	-	-	0,005	-	-	-
25	2m	4m	3m	2m	1,4	30	0,3	0,5	0,2	0,003	0,15	30	-
26	3m	4m	2m	-	1,0	35	0,44	0,4	0,32	0,01	0,18	30	60
27	m	1,5m	2m	4m	1,2	10	0,4	0,6	-	0,004	0,20	60	30
28	2,5m	m	0,8m	-	0,6	-	0,32	-	-	-	0,24	-	-
29	4m	2m	3m	-	0,8	20	0,36	-	-	0,005	0,16	60	-
30	3m	4m	2m	-	1,6	-	0,3	0,5	0,2	0,004	0,15	30	60

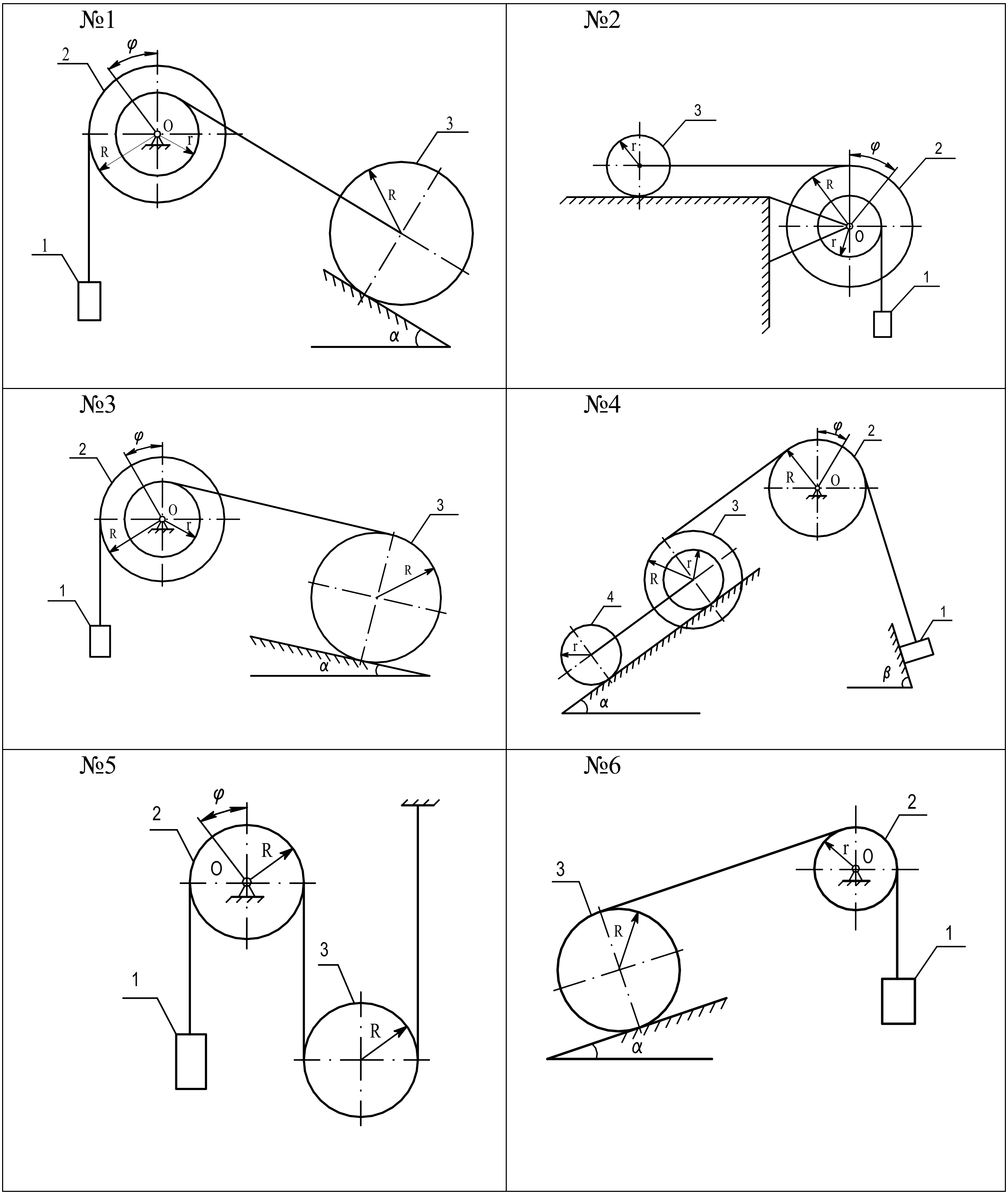
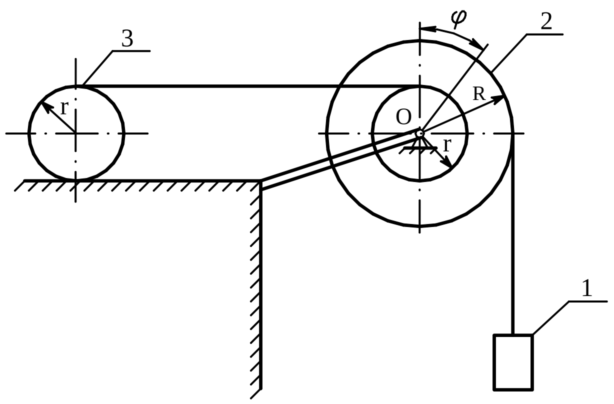
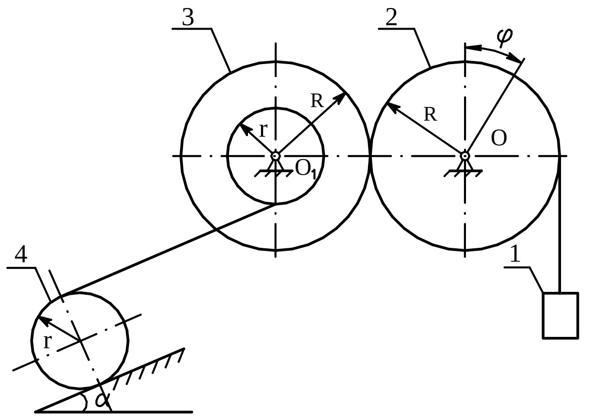

№1
φ
2
O
r
R
3
R
1
α
№2
3
r
φ
2
R
r
O
1
№3
φ
2
O
r
R
3
R
1
α
№4
φ
2
R
O
3
r
R
4
r
1
β
α
№5
φ
2
O
R
1
3
R
№6
2
r
O
3
R
1
α

Рисунок 2.2

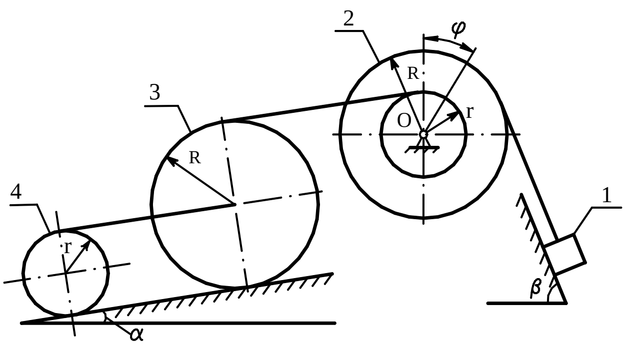
№7



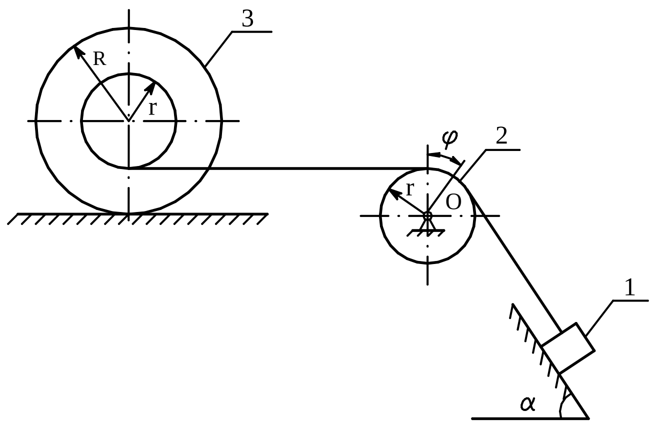
№8



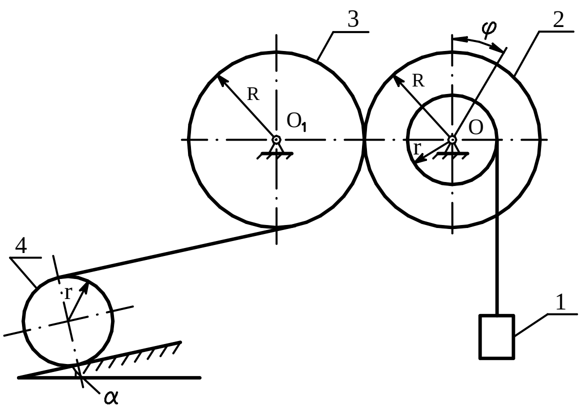
№9



№10



№11



№12

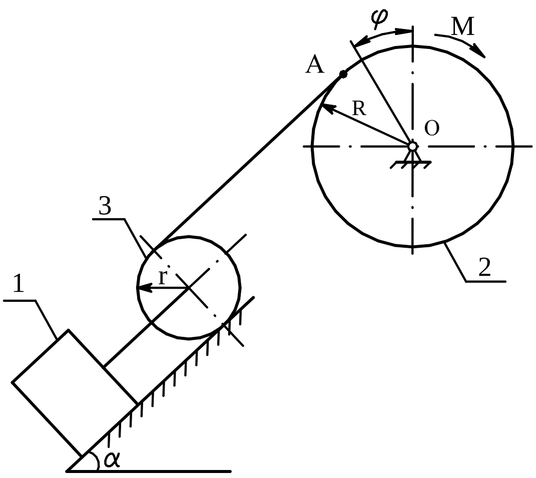


Рисунок 2.3

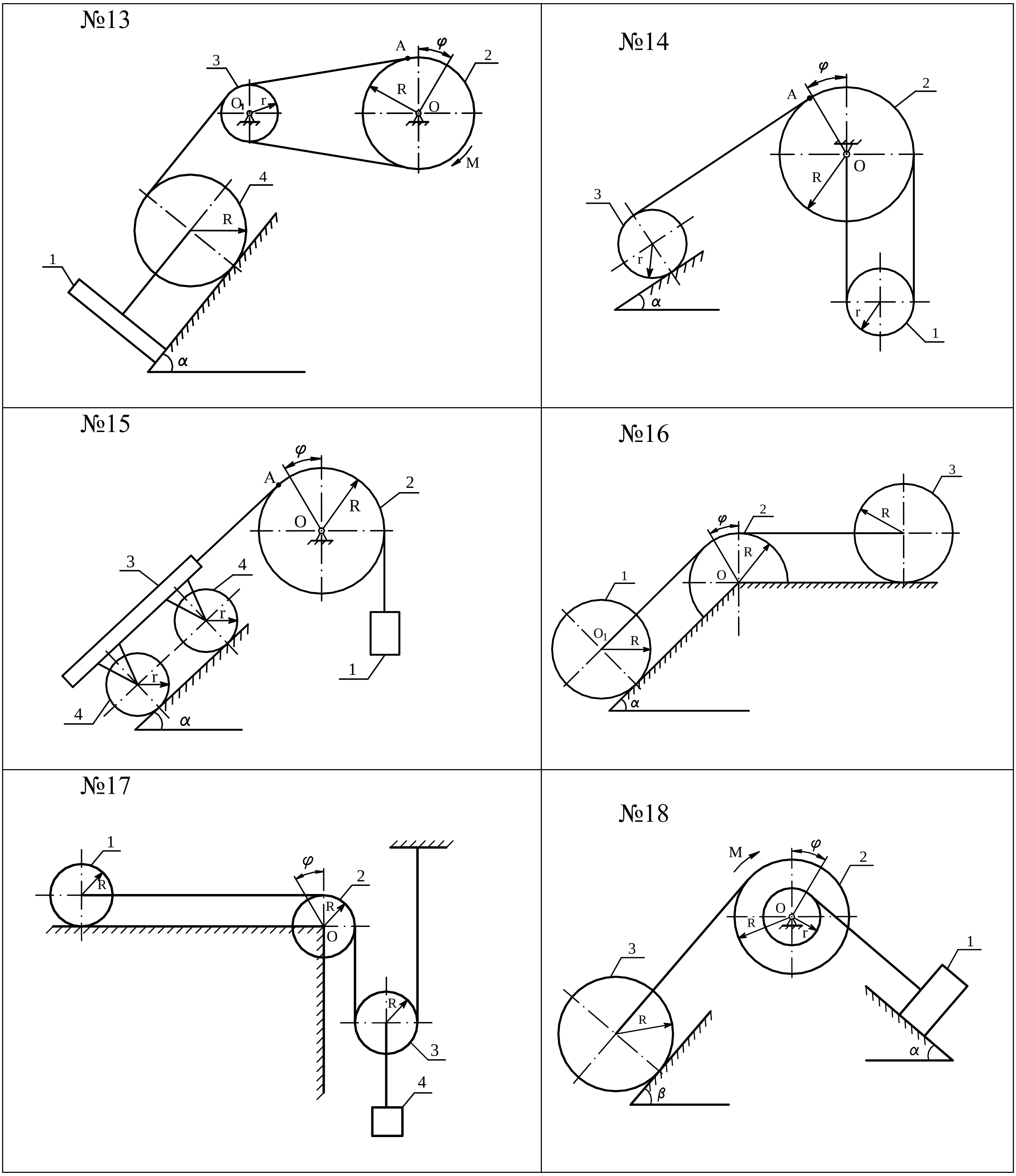
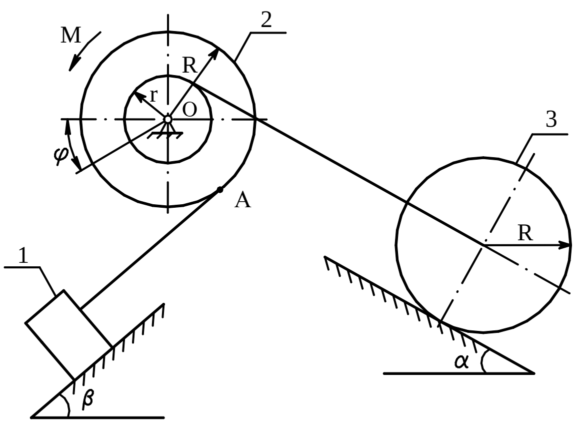
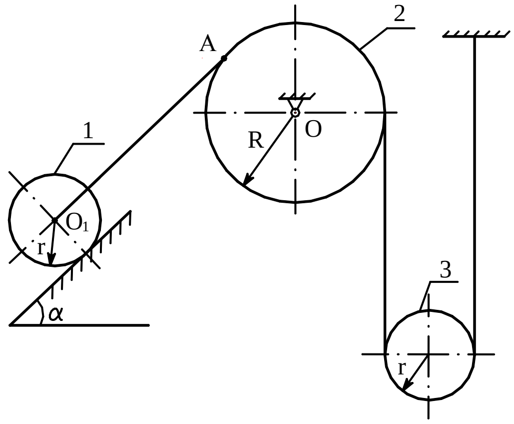

№13
A
φ
3
2
O1
r
R
O
M
4
R
1
α
№14
φ
A
2
O
R
3
r
α
r
1
№15
φ
A
2
R
O
3
4
r
r
4
α
1
№16
3
R
φ
2
R
O
1
O1
R
α
№17
1
R
φ
2
R
O
R
3
4
№18
M
φ
2
O
R
r
3
1
R
α
β

Рисунок 2.4

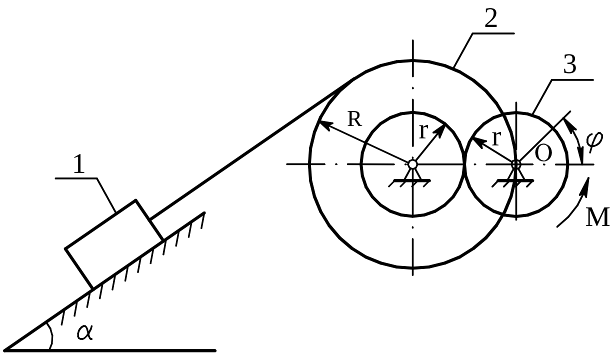
№19



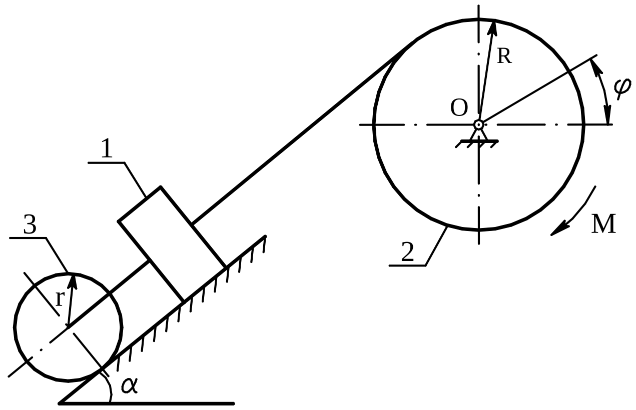
№20



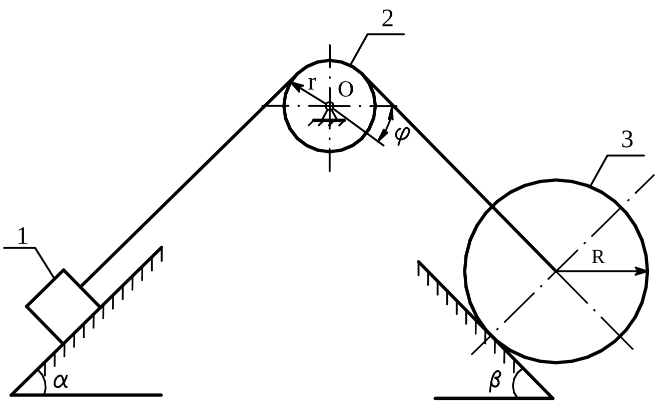
№21



№22



№23



№24

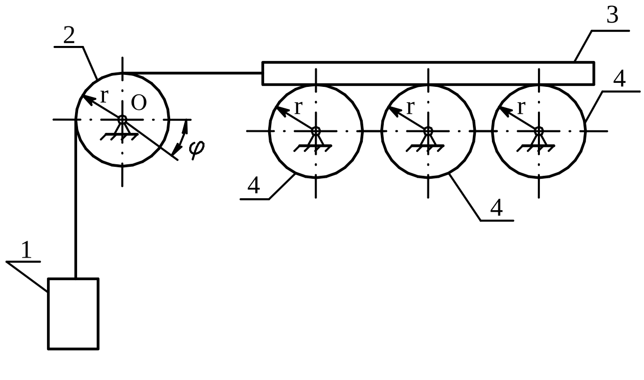
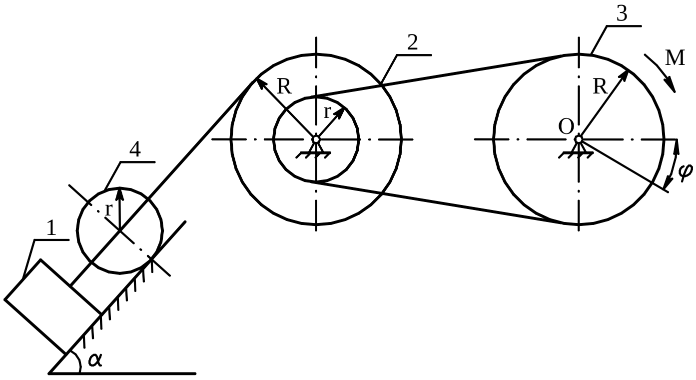
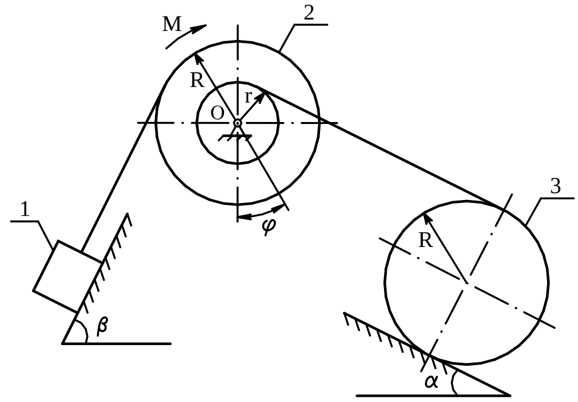


Рисунок 2.5

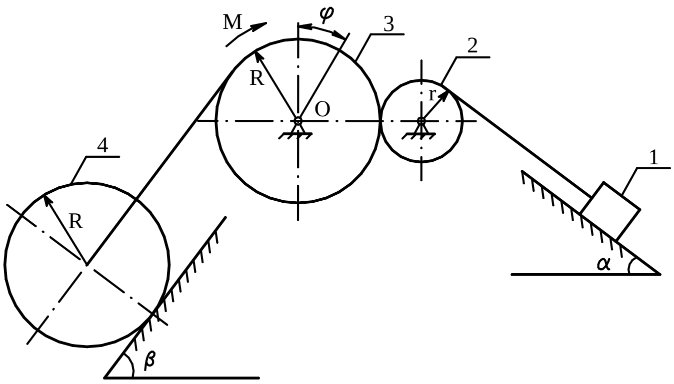
№25



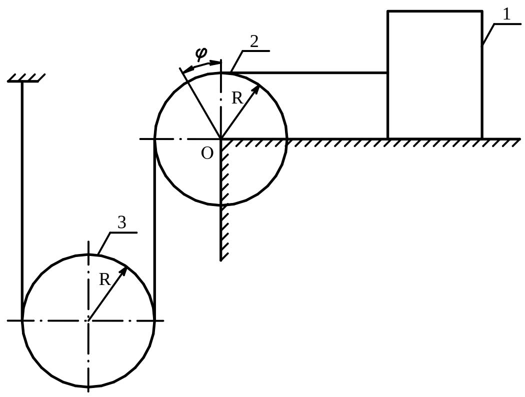
№26



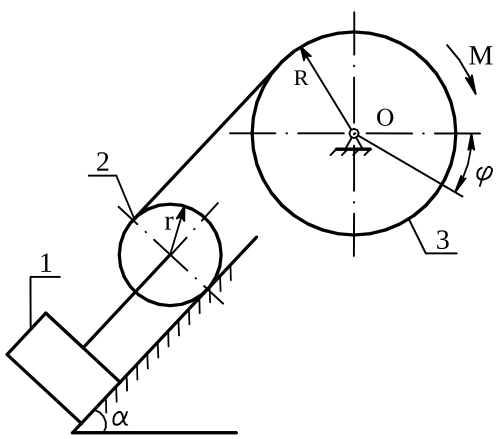
№27



№28



№29



№30

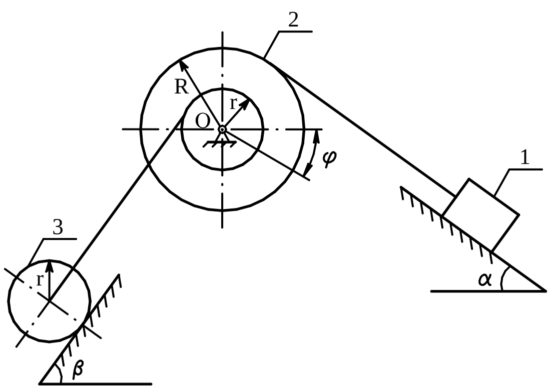


Рисунок 2.6

Динамика. Момент инерции.

Моменты инерции простейших однородных тел.

Полый тонкостенный цилиндр или кольцо с радиусом *R* и массой *m*:

$$I_z = mR^2$$

Сплошной цилиндр или диск с радиусом *R* и массой *m*:

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

Полый толстостенный цилиндр массы *m* с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1:

$$I_z = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

Тонкостенная сфера радиуса *R* и массы *m*:

$$I_z = \frac{2mR^2}{3}$$

Шар радиуса *R* и массы *m*:

$$I_z = \frac{2mR^2}{5}$$