1 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов с геометрической точки зрения, т.е. без учета их массы и действующих на них сил.

При изучении раздела выделяются кинематика точки и кинематика твердого тела.

Изучение движения точки заключается в определении характеристик её движения: положения точки в заданный момент времени в выбранной системе координат, траектории движения, скорости и ускорения.

Траекторией точки называется геометрическое место последовательных (с течением времени) положений её в пространстве, определяемое в той или иной системе отсчёта.

Кинематически задать движение (закон движения) точки – значит задать ее положение относительно выбранной системы координат в любой момент времени. Математические выражения, определяющие положение точки в любой момент времени в выбранной системе координат, называются уравнениями движения (законом движения) точки. Зная закон движения, можно определить основные кинематические характеристики движения.

Существует три основных способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

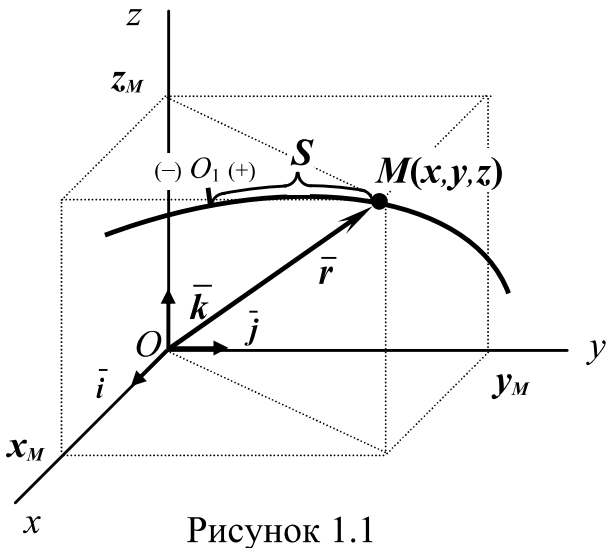


Рисунок 1.1

При векторном способе задания движения положение точки задается её радиус-вектором $\bar{r}$, как функцией времени, проведенным из какого-то неподвижного центра. Уравнение движения записывается в виде

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

При координатном способе задания движения положение точки определяется её координатами в прямоугольной декартовой системе координат (рисунок 1.1). Координаты являются функциями времени, и уравнения движения точки записываются в виде:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t).$$

Очевидна связь между векторным и координатным способами задания движения:

$$\bar{r} = \bar{r}(t),\quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

При естественном способе задания движения положение точки на заданной траектории определяется её дуговой координатой $S = S(t)$ (рисунок 1.1).

Задается начало отсчета (точка O_1), положительное и отрицательное направления отсчёта дуговой координаты.

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются её ***скорость*** и ***ускорение***. Это векторные величины имеющие размерности, соответственно, м/с и м/с^2.

Скоростью точки называется вектор $\bar{V}$, определяющий в каждый момент времени быстроту и направление движения точки в выбранной системе отсчёта.

Вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории (рисунок 1.2). При прямолинейном движении вектор скорости совпадает с траекторией и направлен в сторону движения.

При векторном способе задания движения скорость точки определяется как первая производная по времени от радиус-вектора:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.$$

При координатном способе задания движения скорость определяется через проекции вектора скорости на выбранные координатные оси:

$$\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k},\ V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Проекция вектора скорости на координатную ось равна алгебраическому значению первой производной по времени от соответствующей координаты точки.

Численное значение скорости определяется известным образом:

$$V = \left|\bar{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

При естественном способе задания движения числовое (или алгебраическое) значение скорости точки определяется как первая производная по времени от дуговой координаты:

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.$$

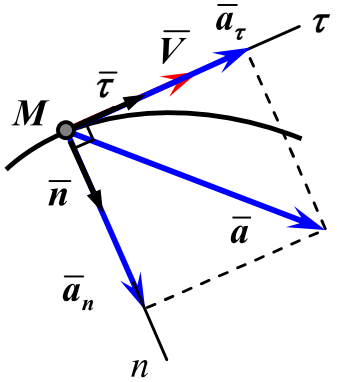


Рисунок 1.2

Ускорение точки $\bar{a}$ характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине и направлению.

Установлено, что вектор ускорения точки находится в соприкасающейся плоскости траектории точки, т.е. в плоскости $M\tau n$ (рисунок 1.2), и направлен в сторону вогнутости траектории. При прямолинейном движении вектор ускорения совпадает с траекторией движения точки.

При векторном способе задания движения ускорение точки равно или первой производной по времени от вектора скорости точки, или второй производной по времени от радиус-вектора точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}\,.$$

При координатном способе задания движения ускорение точки определяется через проекции вектора ускорения на выбранные координатные оси:

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}\,,$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\,,\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}\,,\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}\,,\ a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

При естественном способе задания движения ускорение точки проецируется на оси естественного трехгранника – на касательную ось $M\tau$ и на главную нормаль Mn (рисунок 1.2):

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n} \text{ или } \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n\,,$$

где $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ − единичные векторы касательной и главной нормальной осей естественного трёхгранника.

Проекция ускорения точки на касательную ось a_τ (касательное ускорение) равна первой производной по времени от числового значения скорости точки или второй производной по времени от дуговой координаты точки и характеризует изменение скорости по величине: $a_\tau = \dot{V} = \ddot{S}$.

Проекция ускорения на главную нормальную ось a_n (нормальное ускорение) характеризует изменение вектора скорости по направлению и определяется выражением:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}\,,$$

где ρ - радиус кривизны траектории в данной точке.

Так как $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, то $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Если $V = \dot{S}$ и $a_\tau = \dot{V} = \ddot{S}$ имеют одинаковые знаки, то векторы $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ направлены в одну сторону, и движение точки будет ускоренным. В противном случае - движение точки замедленное.

Пример 1. Точка движется по окружности по закону $S = 5 + 2t^3$ (S – см, t – с). Определить ускорение точки в момент времени, когда её скорость равна 24 см/с, нормальное ускорение 24 см/с^2. Чему равен радиус окружности (рисунок 1.3)? Определить характер движения точки.

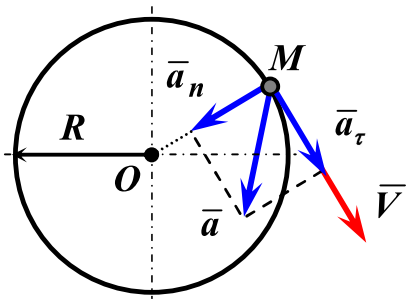


Рисунок 1.3

Решение.

Определяется скорость и касательное ускорение точки:

$$V = \dot{S} = 6t^2\,,\ a_\tau = \dot{V} = 12t\,.$$

$$V = 24 = 6t^2,\ t = 2 \text{ с},\ a_\tau = 24 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение определяется по выражению:

$$a_n = \frac{V^2}{R}, \quad a_n = 24 \text{ см/с}^2, \quad R \ \frac{V^2}{a_n} = \frac{24^2}{24} = 24 \text{ см}.$$

Ускорение точки $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{24^2 + 24^2} = 24\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Движение точки криволинейное ускоренное.

Пример 2. По заданным уравнениям движения точки M установить вид её траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, скорость, ускорение, его касательную и нормальную составляющие, а так же радиус кривизны траектории в данной точке.

Дано: $x = 2\sin\frac{\pi t}{6}$ см, $y = 2 - 2\cos\frac{\pi t}{3}$ см, $t_1 = 1$с.

Найти: $y = f(x)$, x_M, y_M, V_x, V_y, V, a_x, a_y, a, a_τ, a_n, ρ.

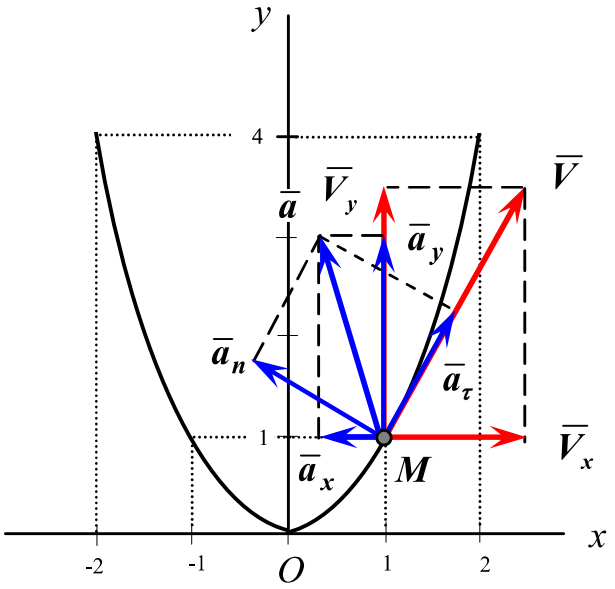


Рисунок 1.4

Решение.

1) Определяем уравнение траектории точки, и её положение в данный момент времени. Решая совместно уравнения движения и преобразуя второе уравнение, получаем:

$$y = 2 - 2(1 - 2\sin^2\frac{\pi t}{6}) = 4\sin^2\frac{\pi t}{6},$$

т.е. $y = x^2$.

Траекторией точки является часть параболы $y = x^2$, ограниченная неравенствами $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$ (рисунок 1.4).

При $t = 1$ с $x_M = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$ см,

$y_M = 2 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ см.

2) Скорость точки. Вектор скорости $\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j}$.

Проекции вектора скорости на выбранные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{6}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

При $t = 1$с $V_x = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}96$ см/с, $V_y = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}813$ см/с.

Модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{\pi\sqrt{15}}{6} \approx 2{,}027 \text{см/с}.$$

Вектор скорости строится по её составляющим, параллельным координатным осям, в выбранном масштабе (рисунок 1.4).

3. Ускорение точки. Вектор ускорения $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j}$.

Проекции вектора ускорения на оси:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi t}{6}, \; a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{2\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}.$$

При $t = 1$ с $a_x = -\frac{\pi^2}{36} \approx -0{,}274$ см/с^2, $a_y = \frac{\pi^2}{9} \approx 1{,}096$ см/с^2.

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}075 + 1{,}201} \approx 1{,}129 \text{ см/с}^2.$$

Строим вектор ускорения по его составляющим, параллельным координатным осям, в масштабе (рисунок 1.4).

4) Касательное и нормальное ускорения.

Величину касательного ускорения находим по выражению:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{0{,}96 \cdot (-0{,}274) + 1{,}813 \cdot 1{,}096}{2{,}027} = 0{,}857 \text{ см/с}^2.$$

Знак плюс показывает, что касательное ускорение совпадает по направлению с вектором скорости.

Величину нормального ускорения находим из выражения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1{,}275 - 0{,}734} \approx 0{,}735 \text{ см/с}^2.$$

5) Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{2{,}027^2}{0{,}735} \approx 5{,}59 \text{ см}.$$

2 ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором хотя бы две точки, принадлежащие телу, остаются неподвижными во время движения тела. Прямая *AB*, проходящая через эти неподвижные точки называется осью вращения тела.

Точки тела, расположенные на оси вращения – неподвижны. Все остальные точки тела описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

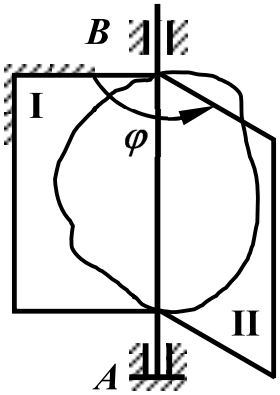


Рисунок 2.1

Положение вращающегося тела (рисунок 2.1) определяется углом φ (углом поворота тела) между двумя полуплоскостями I и II, проведенными через ось вращения. Полуплоскость I – неподвижная, полуплоскость II скреплена с вращающимся телом.

Зависимость угла поворота от времени выражает закон вращательного движения тела вокруг неподвижной оси (уравнение движения):

$$\varphi = \varphi\,(t).$$

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела являются его ***угловая скорость*** $\bar{\omega}$ и ***угловое ускорение*** $\bar{\varepsilon}$.

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ совпадает с осью вращения и направлен в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 2.2).

Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении, и противоположен при замедленном вращении.

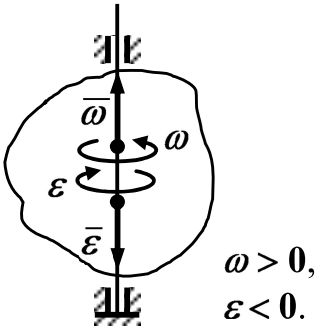


Рисунок 2.2

Алгебраическое значение угловой скорости определяется как первая производная по времени от угла поворота тела. Алгебраическое значение углового ускорения равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ рад/с}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \text{ рад/с}^2.$$

Если знаки ω и ε совпадают, то вращение будет ускоренным, если не совпадают – замедленным.

Алгебраическую угловую скорость ω и алгебраическое угловое ускорение ε на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения. Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения

тела. При ускоренном вращении дуговые стрелки для ω и ε имеют одинаковое направление, для замедленного – противоположное (рисунок 2.2).

В технике скорость вращения (частоту вращения) задают числом оборотов в минуту – n об/мин, а угол поворота тела – числом оборотов N за какое-то время. Зависимость между N об и φ рад определяется выражением $\varphi = 2\pi \cdot N$, а n об/мин и ω рад/с:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

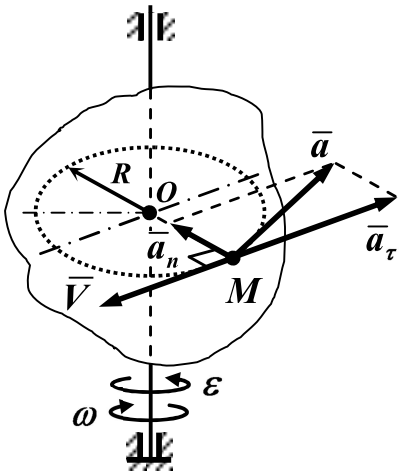


Рисунок 2.3

Скорости и ускорения точек вращающегося тела (рисунок 2.3) определяются по выражениям:

$$V = \omega \cdot R, \quad a_n = \omega^2 \cdot R, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot R,$$

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

где R – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

Преобразование простейших движений твёрдого тела

Под преобразованием простейших движений следует понимать:
а) преобразование вращательного движения одного тела в поступательное другого (и обратное преобразование);
б) преобразование вращения одного тела вокруг неподвижной оси во вращение другого тела вокруг своей неподвижной оси.

При решении задач о движении механизмов, преобразующих простейшие движения, следует пользоваться совместно формулами кинематики точки и формулами кинематики твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Передача вращательного движения от одной машины к другой или внутри машины от одного её вала к другому осуществляется разнообразными механизмами, носящими название ***передач***.

Передачи могут быть разделены на передачи с гибкой связью (ременную, канатную, цепную) и передачи, осуществляемые путем непосредственного соприкосновения тел (фрикционную, зубчатую).

Валы и закреплённые на них шкивы и колёса называются ***ведущими***, если они передают движение, и ***ведомыми***, когда они его воспринимают.

1. Ременные передачи. Ременная передача передаёт вращение одного тела другому, когда их оси вращения параллельны. Подразделяется на *открытую* (рисунок 2.4) и *перекрестную* (рисунок 2.5).

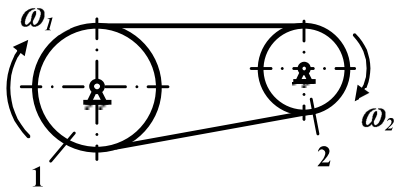


Рисунок 2.4

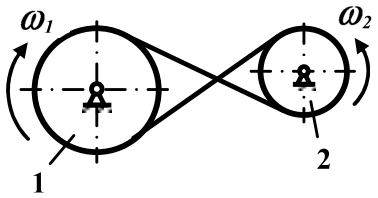


Рисунок 2.5

2. Зубчатые передачи. Они являются одним из самых распространенных видов передаточных механизмов, в которых передача вращения осуществляется с помощью пары зубчатых колёс. Зубчатые пары бывают с внешним зацеплением (рисунок 2.6) и внутренним (рисунок 2.7). Передача движения может осуществляться между параллельными осями с цилиндрическими колёсами и пересекающимися осями с коническими колёсами (рисунок 2.8).

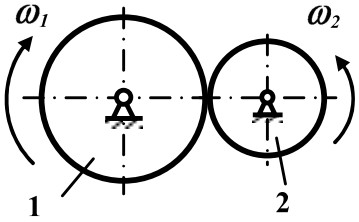


Рисунок 2.6

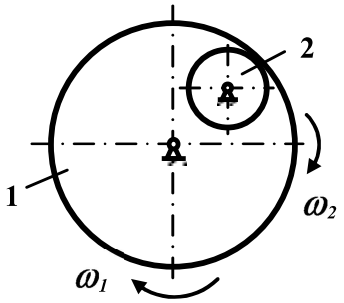


Рисунок 2.7

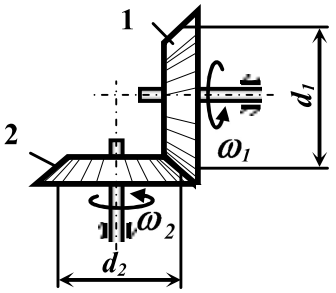


Рисунок 2.8

3. Фрикционные передачи. Фрикционная пара представляет собой два прижатых друг к другу колеса (шкива, вала). Вращение одного колеса передаётся другому за счёт сил трения между поверхностями колёс (рисунок 2.9).

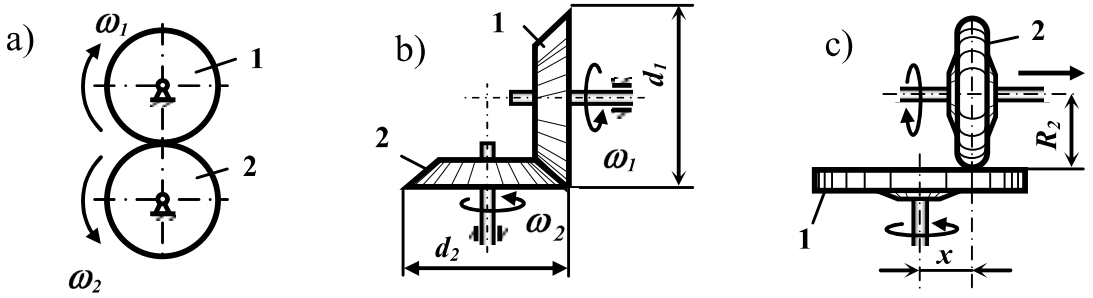


Рисунок 2.9

На рисунке 2.9, a) изображена фрикционная передача с параллельными осями и цилиндрическими колёсами, на рисунке 2.9, b) – передача с пересекающимися осями, осуществляемая коническими колёсами.

Во всех колёсных парах (рисунки 2.6 − 2.9) контактные точки (точки сцепления) имеют общую скорость и общее касательное ускорение, следовательно, справедливы равенства:

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \varepsilon_1 \cdot R_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса называется ***передаточным отношением*** (передаточным числом) механизма:

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Принято считать, что если не учитывать проскальзывание, то при ременной передаче (рисунки 2.4 и 2.5) точки бесконечного ремня и поверхностей шкивов также имеют одинаковые скорости и касательные ускорения, следовательно, справедливы те же соотношения.

Для *лобовой* передачи (вариатора), позволяющей путем поступательного перемещения колеса 2 вдоль диаметра колеса 1 получить переменное передаточное отношение между ведущим и ведомым валами (рисунок 2.9, с), будем иметь:

$$k_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{x}.$$

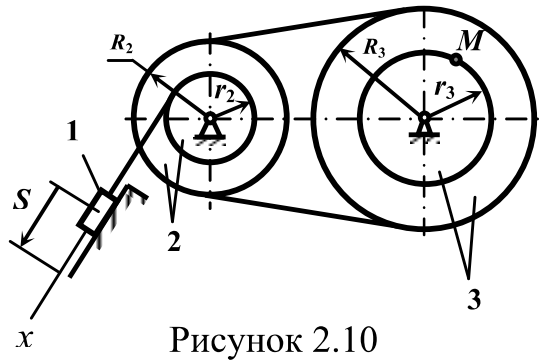


Рисунок 2.10

Пример. Груз 1 на нерастяжимой нити, намотанной на барабан 2, опускается по закону $x = x\ (t)$ по неподвижной плоскости. Определить скорость и ускорение точки M, расположенной на ободе шкива 3, в момент времени, когда груз пройдёт расстояние S (рисунок 2.10).

Дано: $x = 20 + 70t^2$ см, $R_2 = 50$ см, $r_2 = 30$ см, $R_3 = 60$ см, $r_3 = 40$ см, $S = 0{,}4$ м.

Определить: $\overline{V}_{\text{M}}$, $\overline{a}_{\text{M}}$.

Решение.

1. Найдем момент времени t_1, когда расстояние S, пройденное грузом 1, равно 40 см:

$$S = x_{t_1} - x_{t=0} = (20 + 70t_1^2) - 20 = 70t_1^2,$$

откуда $t_1 = \sqrt{\frac{S}{70}} = \sqrt{\frac{40}{70}} = 0{,}76$ с.

2. Определяем скорость груза:

$$V_1 = \frac{dx}{dt} = 140t, \text{ при } t_1 = 0{,}76 \text{ с}, V_1 = 106{,}4 \text{ см/с}.$$

3. Определяем угловую скорость и угловое ускорение барабана 2:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{140t}{r_2} = 4{,}67t \text{ , при } t_1 = 0{,}76 \text{ с, } \omega_2 = 3{,}55 \text{ рад/с,}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d(4{,}67t)}{dt} = 4{,}67 \text{ рад/с}^2.$$

Так как ε_2 не зависит от t, то вращение тела 2 является равноускоренным.

4. Определяем угловую скорость и угловое ускорение шкива 3, т.к.:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2} \text{ , то } \omega_3 = \frac{R_2}{R_3}\omega_2 = \frac{50}{60} \cdot 4{,}67t = 3{,}89t \text{ .}$$

При $t_1 = 0{,}76$ с имеем $\omega_3 = 2{,}94$ рад/с, $\varepsilon_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt} = \dfrac{d(3{,}89t)}{dt} = 3{,}89$ рад/с^2.

5. Определяем скорость и ускорения точки M:

$$V_M = \omega_3 \cdot r_3 = 117{,}6 \text{ см/с}, \quad a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 155{,}6 \text{ см/с}^2,$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot r_3 = 345{,}7 \text{ см/с}^2, \; a_M = r_3\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} = 379{,}1 \text{ см/с}^2.$$

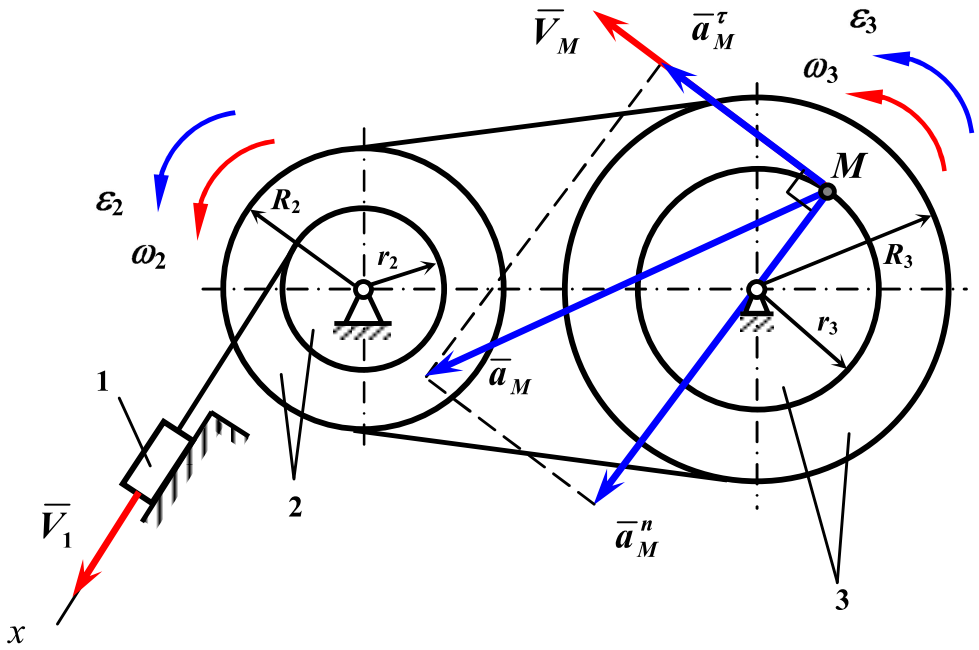


Рисунок 2.11

Все найденные кинематические характеристики показаны на рисунке 2.11.

4 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (или плоским) движением твердого тела называют такое движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости *П*, принятой за неподвижную (рисунок 4.1).

При таком движении тела любая прямая M_1M, перпендикулярная неподвижной плоскости *П*, будет совершать поступательное движение и кинематические характеристики всех точек, лежащих на такой прямой, будут одинаковыми в конкретный момент времени.

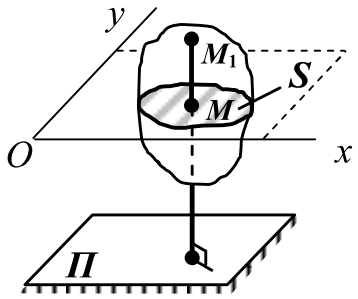


Рисунок 4.1

Из этого следует, что для изучения движения тела, достаточно исследовать движение любого сечения *S* (плоской фигуры *S*), какой-нибудь плоскостью *Oxy*, параллельной плоскости *П*.

Для задания движения выбранного сечения *S* в плоскости *Oxy*, достаточно описать движение любого отрезка *AB*, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A, y_A точки *A*, и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox* (рисунок 4.2).

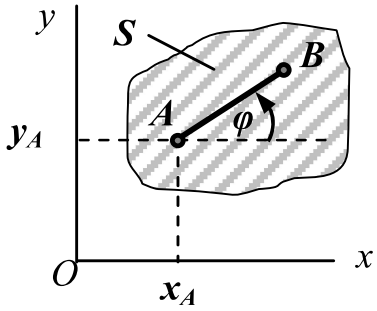


Рисунок 4.2

Тогда уравнениями плоского движения тела (плоской фигуры) будут выражения:

$$x_A = f_1(t),\ \ y_A = f_2(t),\ \ \varphi_A = f_3(t). \qquad (4.1)$$

Выбранную точку (*A*) называют полюсом. Уравнения движения полюса характеризуют поступательное движение плоской фигуры и это движение зависит от выбора полюса. Угол поворота вокруг полюса характеризует вращательное движение плоской фигуры вокруг полюса. Это движение не зависит от выбора полюса.

Характерными примерами плоскопараллельного движения тела являются:

1. Качение колеса по рельсу (дороге) в плоскости *Oxy* (рисунок 4.3);
2. Движение шатуна *AB* кривошипно-шатунного механизма (рисунок 4.4).

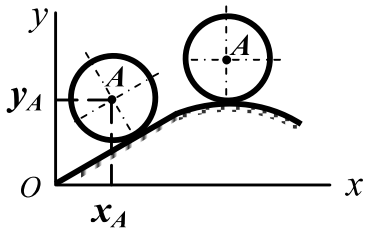


Рисунок 4.3

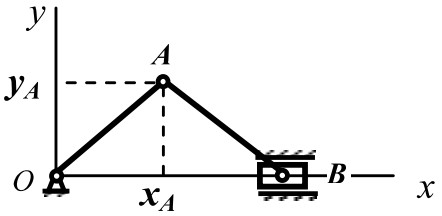


Рисунок 4.4

Скорость любой точки *M* плоской фигуры определяется как геометрическая сумма скорости $\overline{V}_A$ полюса *A* и скорости $\overline{V}_{MA}$, которую получает точка *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A* (рисунок 4.5):

$$\overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA}, \qquad (4.2)$$

где $V_{MA} = \omega \cdot MA$, $\overline{V}_{MA} \perp MA$,

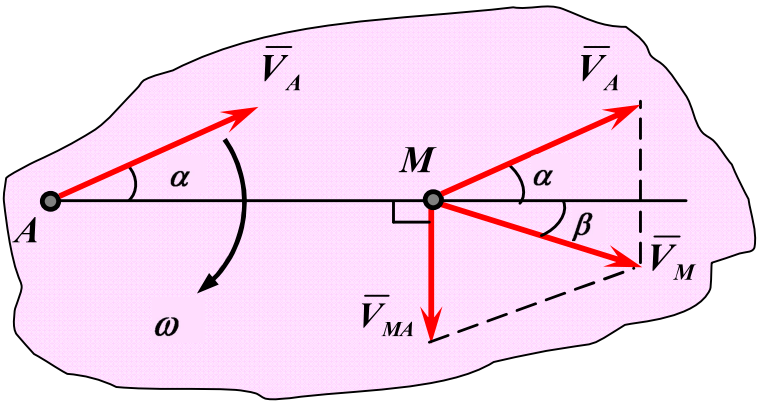


Рисунок 4.5

ω – угловая скорость вращения фигуры вокруг полюса, $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Так как вектор скорости $\overline{V}_{MA}$ перпендикулярен отрезку *MA*, соединяющему полюс *A* с выбранной точкой *M*, то из этого вытекает следствие: ***проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой:***

$$V_A \cdot \cos\alpha = V_M \cdot \cos\beta. \qquad (4.3)$$

Угловую скорость плоской фигуры можно определить, используя понятие мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей **(МЦС)** ***называют геометрическую точку, принадлежащую плоской фигуре или её мысленному продолжению, скорость которой в данный момент времени равна нулю***.

Если угловая скорость вращения плоской фигуры не равна нулю ($\omega \neq 0$), то МЦС существует и это единственная точка. При известном положении МЦС скорости точек плоской фигуры при её движении в своей плоскости определяются так, как если бы фигура вращалась в этот момент времени вокруг МЦС с угловой скоростью ω (рисунок 4.6), т.е.:

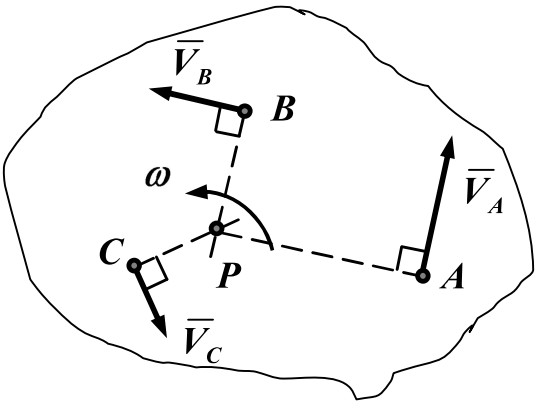


Рисунок 4.6

$$V_A = \omega \cdot AP \ (\overline{V}_A \perp AP),$$

$$V_B = \omega \cdot BP \ (\overline{V}_B \perp BP) \text{ и т.д.} \qquad (4.4)$$

Этот вывод следует из формулы (4.2), если за полюс принять мгновенный центр скоростей – точку *P*, скорость которой равна нулю.

Из рисунка 4.6 видно, что МЦС расположен на перпендикуляре, проведенном из любой точки плоской фигуры к вектору её скорости, и угловая скорость плоской фигуры равна отношению скорости какой-либо её точки к длине отрезка, соединяющего эту точку с МЦС:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (4.5)$$

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ двух точек плоской фигуры, то МЦС − это точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *B* к векторам их скоростей (рисунок 4.7,a).

2. Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу и перпендикулярны отрезку *AB*, то МЦС это точка пересечения прямой *AB* и прямой, проходящей через концы векторов $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, т.к. модули скоростей точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до МЦС (рисунки 4.7, b, c).

3. Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу, но не перпендикулярны отрезку *AB*, или перпендикулярны *AB*, но $\overline{V}_A = \overline{V}_B$, то МЦС лежит в бесконечности, т.к. перпендикуляры к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, проведенные из этих точек не пересекаются (рисунки 4.7, d). Угловая скорость тела в этот момент времени равна нулю ($\omega = \lim\limits_{AP\to\infty} \frac{V_A}{AP} = 0$). Такое движение называется ***мгновенным поступательным*** и скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу по модулю и по направлению.

4. Если тело *A* катится без скольжения по неподвижной поверхности тела B (рисунок 4.7, e), то точка касания *P* имеет в данный момент времени скорость, равную нулю и, следовательно является МЦС (V_P = 0, так как точки касания обоих тел при отсутствии скольжения должны иметь одинаковые скорости, а тело *B* неподвижно).

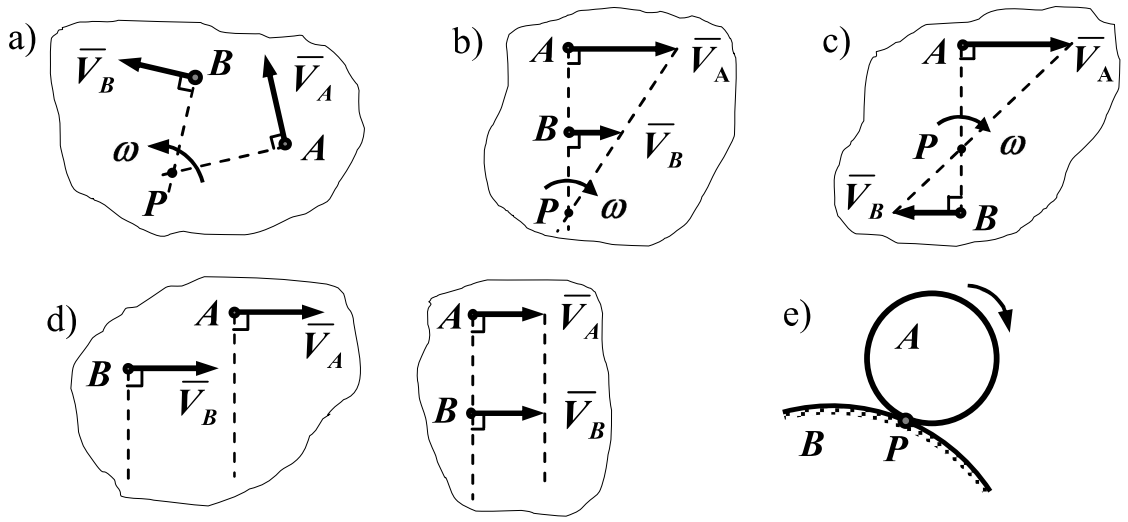


Рисунок 4.7

Ускорение $\bar{a}_M$ ***любой точки*** *M* плоской фигуры равно векторной сумме ускорения $\bar{a}_A$ какой-либо другой точки *A*, принятой за полюс, и ускорения $\bar{a}_{MA}$, которое точка *M* получает при вращении фигуры вокруг этого полюса:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \qquad (4.6)$$

Ускорение $\bar{a}_{MA}$, как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, состоит из касательной и нормальной составляющих:

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}^n_{MA} + \bar{a}^\tau_{MA}, \qquad (4.7)$$

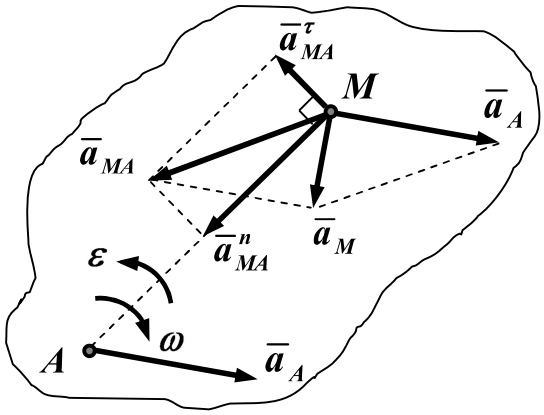


Рисунок 4.8

где $a^n_{MA} = \omega^2 \cdot MA$, $a^\tau_{MA} = \varepsilon \cdot MA$,

ω, ε − угловая скорость и угловое ускорение при вращении фигуры вокруг полюса.

Ускорение $\bar{a}^\tau_{MA}$ направлено перпендикулярно отрезку *MA* в сторону углового ускорения ε, а ускорение $\bar{a}^n_{MA}$ направлено от точки *M* к полюсу *A* (рисунок 4.8).

Тогда выражение (4.6) принимает вид:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{MA} + \bar{a}^\tau_{MA}. \qquad (4.8)$$

Модуль ускорения определяется проецированием равенства (4.8) на две произвольно выбранные координатные оси:

$$a_M = \sqrt{a^2_{Mx} + a^2_{My}}. \qquad (4.9)$$

Пример 1. Механизм состоит из зубчатых колес 1 и 2, и кривошипа 3. Колесо 1 неподвижно, кривошип 3 (*OA*) вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3**.** Определить скорость и ускорение точки *M* колеса 2 при заданном положении звеньев механизма и точки *M*.

Дано: R_1 = 20 см, R_2 = 16 см, ω_3 = 2 рад/с; ε_3 = 1 рад/с^2.

Определить: $\bar{V}_M, \bar{a}_M$.

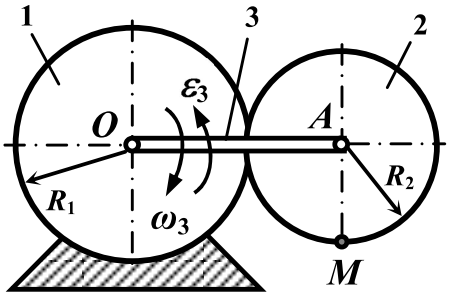


Рисунок 4.9

Решение.

Колесо 1 неподвижно; кривошип 3 совершает вращательное движение, колесо 2 движется плоскопараллельно. Для колеса 2 за полюс принимаем точку *A*, т.к. задано движение кривошипа. Определим скорость и ускорение полюса (рисунок 4.9):

$$V_A = \omega_3 \cdot OA = \omega_3 (R_1 + R_2) = 2 \cdot 36 = 72 \text{ см/с},$$

$$a^n_A = \omega^2_3 \cdot OA = 2^2 \cdot 36 = 144 \text{ см/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_3 \cdot OA = 1 \cdot 36 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Построим эти векторы на рисунке 4.10.

Определяем угловую скорость колеса 2 используя понятие МЦС, который расположен в точке P зацепления колес,

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP}, \qquad (*)$$

где $AP = R_2$, тогда $\omega_2 = \dfrac{V_A}{R_2} = \dfrac{72}{16} = 4{,}5$ рад/с.

Из выражения (*) видно, что ω_2 уменьшается, т.к. точка A движется замедленно, а расстояние AP постоянно.

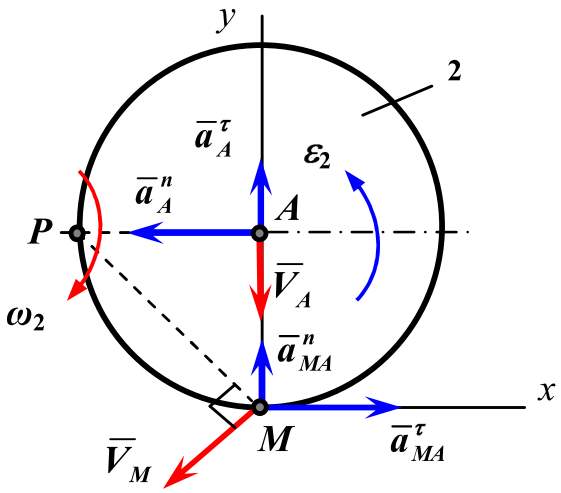


Рисунок 4.10

Скорость точки M определится из выражения:

$$V_M = \omega_2 \cdot MP = = 4{,}5 \cdot R_2 \sqrt{2} = 4{,}5 \cdot 16 \cdot \sqrt{2} \approx$$

$$\approx 101{,}5 \text{ см/с}$$

Ускорение точки определится из выражения (4.8):

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\phi,$$

т.к. полюс движется по криволинейной траектории $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$ и выражение (4.8) принимает вид:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau, \qquad (**)$$

$$a_{MA}^n = \omega_2^2 \cdot MA = 4{,}5^2 \cdot 16 = 324 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot MA, \text{ где } MA = R_2.$$

Угловое ускорение ε_2 в данной задаче можно определить, учитывая, что расстояние от точки A до МЦС не изменяется:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_A}{PA}\right) = \frac{1}{PA} \cdot \frac{dV_A}{dt} =$$

$$= \frac{1}{PA} \cdot \frac{d(\omega_3 \cdot OA)}{dt} = \frac{OA}{PA} \cdot \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \varepsilon_3 = \frac{36}{16} \cdot 1 = 2{,}25 \text{ рад/с}^2,$$

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 2{,}25 \cdot 16 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Проецируем векторное равенство (**) на выбранные оси Mx и My:

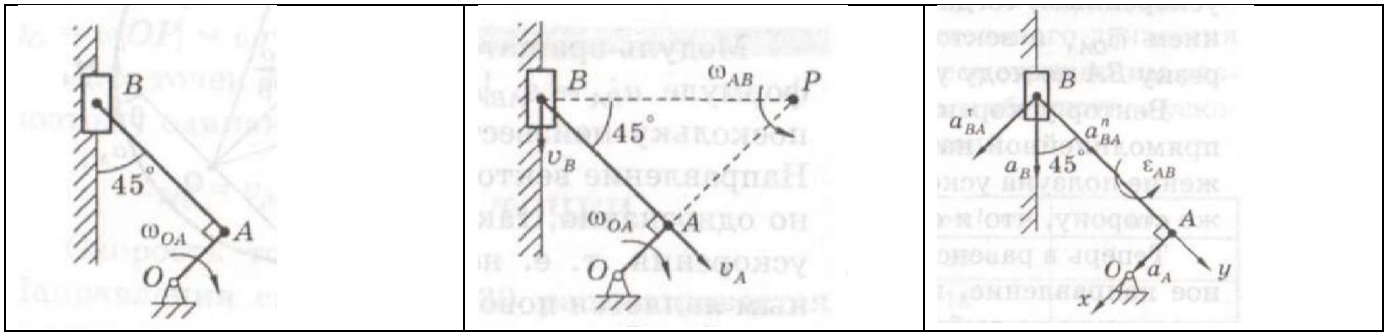
$$a_{Mx} = \sum_{k=1}^{n} a_{kx} = a_{MA}^\tau - a_A^n = 36 - 144 = -108 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{My} = \sum_{k=1}^{n} a_{ky} = a_A^\tau + a_A^n = 324 + 36 = 360 \text{ см/с}^2,$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{108^2 + 360^2} \approx 376 \text{ см/с}^2.$$

Задача 2. Кривошип ОА длиной 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью ω_{OA}= 10 рад/с и приводит в движение шатун АВ длиной 1м. Ползун В движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также скорость и ускорение ползуна в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с вертикалью угол 45°.

Решение:



Исходная схема | Определение скорости | Определение ускорения

1. *Определение скоростей.*

Точка А принадлежит кривошипу, которое совершает вращательное движение:

$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 0{,}2 = 2 м/с$. Вектор скорости направлен перпендикулярно к ОА.

Скорость ползуна В направлена по направляющей вертикально. Для шатуна АВ, которое совершает плоское движение, теперь известны направления скоростей двух его точек: А и В. Восстанавливая перпендикуляры к векторам этих скоростей, находим точку Р их пересечения – МЦС шатуна.

Используя формулу для скоростей точек при плоском движении, получаем: $V_A = \omega_{AB} \cdot AP$, $V_B = \omega_{AB} \cdot BP$.

Из треугольника АВР находим: $AP = 1м$, $BP = \sqrt{2}м$, тогда угловая скорость шатуна:

$\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = 2c^{-1}$ а скорость точки В: $V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 2\sqrt{2}м/с$.

2. *Определение ускорений.*

Найдем ускорение точки А как точки кривошипа ОА: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$.

Здесь $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0$, так как $\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = 0$, поскольку $\omega_{OA} = const$.

Тогда полное ускорение точки А равно: $a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20м/c^2$ и направлено к оси вращения, то есть к точке О.

Для вычисления ускорения точки В воспользуемся теоремой о сложении ускорений, взяв точку А в качестве полюса: $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ (*).

Здесь нормальное ускорение вращательного движения точки В вокруг полюса: $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 1 = 4м/c^2$ и направлено от точки В к полюсу А.

Касательное ускорение вращательного движения точки В вокруг полюса определяется по формуле $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, но пока не известна величина углового ускорения ε_{AB}. Направление вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ также не может быть определено однозначно, так как неизвестно направление углового ускорения, т.е. неизвестно, ускоренным или замедленным является движение шатуна. Поэтому в задаче примем, что шатун двигается ускоренно, тогда направление ε_{AB} совпадает с направлением ω_{AB}, а вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ направим перпендикулярно к отрезку АВ в сторону углового ускорения ε_{AB}.

Вектор ускорения точки В направлен по вертикальной прямолинейной направляющей. Будем считать движение ползуна ускоренным и направим ускорение $\vec{a}_B$ в ту же сторону, сто и скорость $\vec{V}_B$.

Теперь проецируем векторное равенство (*) на выбранные координатные оси x и y:

$x: \quad a_B \sin 45 = a_A + a_{BA}^\tau$

$y: \quad a_B \cos 45 = a_{BA}^n \quad \Rightarrow a_B = \dfrac{a_{BA}^n}{\cos 45} = \dfrac{4}{\sqrt{2}/2} = 4\sqrt{2}м/c^2$,

А из первого уравнения получаем, что $a_{BA}^\tau = a_B \sin 45 - a_A = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 - 20 = -16м/c^2$.

Тогда угловое ускорение $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{AB} = -16c^{-2}$.

Отрицательные знаки у величин a_{BA}^τ и ε_{AB} показывают, что их истинные направления противоположны принятым.

Ответ: $\omega_{AB} = 2c^{-1}$, $\varepsilon_{AB} = -16c^{-2}$, $V_B = 2\sqrt{2}м/c$, $a_B = 4\sqrt{2}м/c^2$.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Выполнение контрольной работы начинается с записи исходных данных. В ходе решения задачи должен быть выполнен чертеж, на котором с учетом выбранного масштаба должны быть изображены все вектора скоростей и ускорений точек и проекции векторов на каждую из осей. Чертеж должен быть аккуратным, наглядным. Решение задачи необходимо сопровождать краткими разъяснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получены те или иные результаты), необходимо подробно излагать весь ход расчетов. В конце должны быть даны численные ответы. В электронном варианте оформления контрольной работы допускается ее выполнение либо в тетради, либо на листах формата А4.
Номер варианта выбираете согласно номеру списку в группе.

1. По теме «Кинематика точки»

Задача 1. По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории. Необходимые для выполнения расчетно-графической работы данные приведены в таблице 1.2. В данной задаче необходимо определить траекторию движения точки, скорость и ускорение точки. Ускорение определяется при координатном и естественном способах задания движения. Совпадение модулей и направлений векторов полных ускорений, найденных двумя способами, является проверкой правильности выполненной работы.

2. По теме «Вращательное движение твердого тела»

Задача 2 (Исследование простейших движений твердого тела, Приложение 2). Дано. Движение груза 1 описывается выражением:

$$x = C_2 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_0,$$

где t – время в секундах; C_0, C_1, C_2 – некие постоянные.
В начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная координата груза равна $x = x_0$, а начальная скорость $\dot{x}_0 = V_0$. В момент времени $t = t_2$ координата груза 1 равна $x = x_2$. Размеры шкивов 2 и 3 характеризуются радиусами R_2, r_2, R_3, r_3. ОПРЕДЕЛИТЬ:

- уравнение движения груза 1;
- скорость и ускорение груза 1 в момент времени $t = t_1$;
- угловые скорости и угловые ускорения шкивов 2 и 3 в момент времени $t = t_1$;
- скорость и ускорение точки М одного из шкива механизма при $t = t_1$.

ПРИМЕЧАНИЕ: при отсутствии проскальзывания одного тела по поверхности другого соприкасающиеся точки этих тел имеют одинаковые скорости и касательные ускорения.

Таблица 1.2

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-\cos(\pi t^2/3)+4$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
2	$-2t^2+3$	$-5t$	0,5
3	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
4	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
5	$8\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-8\cos(\pi t^2/6)$	1
6	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
7	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
8	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
9	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
10	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
11	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
12	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
13	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	2
14	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
15	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1
17	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
18	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	1
19	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
20	$-6t$	$-2t^2-4$	1
21	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
22	$-5t^2-4$	$3t$	1
23	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
24	$6t^2-2$	$4t$	0,25
25	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1
26	$-4t^2+1$	$-3t$	1
27	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
28	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
29	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
30	$6-6t^2+2$	$4-5t^2+5t/3$	1

- Расчеты производить до трех значащих цифр.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Задача 1 (см. примеры решения задач в разделе «Кинематика точки»)
Задача 2

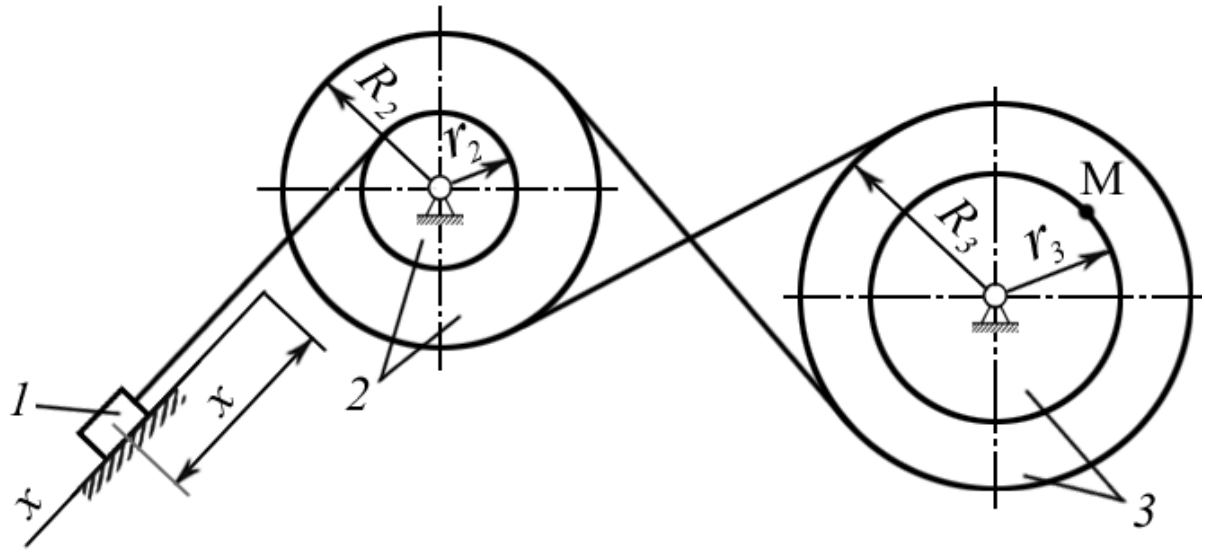


Рис.1. Схема механизма

ДАНО. Заданный механизм представлен на рис.1, уравнение движения груза 1 описывается выражением:

$$x = C_2t^2 + C_1t + C_2 .$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная координата груза x_0=0,14м, а начальная скорость V_0 = 0,05м/с .

В момент времени $t = t_2 = 2$с координата груза x_2 = 1,68м.

R_2 = 0,50м; r_2 = 0,25м; R_3 = 0,65м; r_3 = 0,40м.

ОПРЕДЕЛИТЬ:

- уравнение движения груза 1;
- скорость и ускорение груза 1. в момент времени $t = t_1$;
- угловые скорости и угловые ускорения шкивов 2 и 3 в момент времени $t = t_1$;
- скорость и ускорение точки М шкива 3 при $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ.

ДАНО: $x = C_2t^2 + C_1t + C_0$; $t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;
$t_2 = 2$ с; $x_2 = 1{,}68$ м; $t_1 = 1$с;
$R_2 = 0{,}50$м; $r_2 = 0{,}25$м; $R_3 = 0{,}65$м; $r_3 = 0{,}40$м

ОПРЕДЕЛИТЬ: $x = x(t)$; V_1; a_1; ω_2; ε_2; ω_3; ε_3; $V_М$; $a_М$.

Итак:
- груз 1 движется поступательно по наклонной плоскости вниз;
- шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси O_2z_2 (рис.2);
- шкив 3 вращается вокруг неподвижной оси O_3z_3 (рис.2).

Уравнение движения груза 1

$$x = C_2t^2 + C_1t + C_0 \qquad (1)$$

Скорость груза 1 определим, продифференцировав закон движения по времени:

$$V = \dot{x} = 2 \cdot C_2t + C_1 \qquad (2)$$

Касательное ускорение груза 1 определим, получив вторую производную от уравнения (2):

$$a_\tau = \dot{V} = \ddot{x} = 2 \cdot C_2 = \text{const} \qquad (3)$$

Таким образом**,** ускорение не зависит от времени t. Следовательно, ускорение есть величина постоянная, а движение груза - равноускоренное. При движении по прямой нормальное ускорение отсутствует (a_n=0), поэтому полное ускорение груза определяется только касательной составляющей (a=a_τ).

Для определения постоянных коэффициентов подставим начальные условия в уравнения (1) и (2).

$t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;

$x_0 = C_2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_0$, откуда $C_0 = x_0$

$\dot{x}_0 = 2 \cdot C_2 \cdot 0 + C_1$, откуда $C_1 = \dot{x}_0$

Подставляя числовые значения, находим коэффициенты

$C_0 = 0{,}14$ м, $C_1 = 0{,}05$ м/с;

Для определения коэффициента C_2 используем данные для момента времени t_2, подставляя их в уравнение (1):

при $t_2 = 2$ с, $x_2 = 1{,}68$ м,

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{x_2 - C_1 \cdot t_2 - C_0}{t_2^{\,2}}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$C_2 = \frac{1{,}68 - 0{,}05 \cdot 2 - 0{,}14}{2^2} = 0{,}36 \quad м/с^2$$

Таким образом, уравнение движения груза 1:

$$x = 0{,}36t_2^2 + 0{,}05t_2 + 0{,}14 \qquad (4)$$

Скорость груза 1:

$$V = \dot{x} = 0{,}72t + 0{,}05 \qquad (5)$$

Касательное ускорение груза 1

$$a_\tau = \ddot{x} = 0{,}72 \text{ м/с}^2 = \text{const} \qquad (6)$$

Значение координаты, скорости и ускорения груза 1 в заданный момент времени $t = t_1 = 1$(с) найдем, подставив это время в уравнение (4), (5), (6).

$$x_1 = 0{,}36t_1^2 + 0{,}05t_1 + 0{,}14$$

$$V_1 = 0{,}72t_1 + 0{,}05$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const}$$

Подставляя числовые значения, находим

$$x_1 = 0{,}36 \cdot 1^2 + 0{,}05 \cdot 1 + 0{,}14 = 0{,}55 \text{ м}$$

$$V_1 = 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}05 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const} = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Направления показаны на рисунке 2. Векторы скорости и ускорения направлены по оси Ox, (V_1 и a_1^τ положительны).

Так как нить нерастяжимая, то

$$V_E = V_1 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_E^\tau = a_1 = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Из кинематики вращения тела 2 вокруг неподвижной оси O_2z_2:
угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{V_E}{EO_2},$$

где EO_2 – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения;

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{0{,}77}{0{,}25} = 3{,}08 \quad рад/с$$

Направление угловой скорости ω_2 соответствует направлению вектора скорости в т. F , т.е. против хода часовой стрелки (рис.2);

Угловое ускорение:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_E^\tau}{EO_2} = \frac{a_E^\tau}{r_2} = \frac{0,72}{0,25} = 2,88 \text{ рад/с}^2$$

Направление углового ускорения ε_2 соответствует направлению вектора касательного ускорения $\overline{a_E^\tau}$ (против хода часовой стрелки) (рис.2);

Модуль скорости точки К

$V_К = \omega_2 \cdot КО_2$

где $КО_2$ - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения O_2z_2 .

$V_К = \omega_2 \cdot R_2 = 3,08 \cdot 0,50 = 1,54$ м/с

Направлен вектор скорости $\overline{V_К}$ перпендикулярно к кратчайшему расстоянию $КО_2$ и соответствует направлению угловой скорости ω_2 (рис.2).

Касательное ускорение точки К

$a_К^\tau = \varepsilon_2 \cdot КО_2 = \varepsilon_2 \cdot R_2$

$a_К^\tau = 2,88 \cdot 0,50 = 1,44$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения точки К перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки К до оси вращения, т. е.

$\overline{a_К^\tau} \perp КО_2$ и соответствует направлению углового ускорения ε_2.

Так как ремень нерастяжимый**,** то

$V_N = V_К = 1,54$ м/с

$a_N^\tau = a_К^\tau = 1,44$ м/с^2

Направления векторов $\overline{V_N}$ и $\overline{a_N^\tau}$ показаны на рис.2.

Из кинематики вращения тела 3 вокруг неподвижной оси вращения O_3z_3:

угловая скорость

$$\omega_3 = \frac{V_N}{NO_3},$$

где NO_3 - кратчайшее расстояние от точки N до оси вращения O_3z_3 .

$$\omega_3 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{1,54}{0,65} = 2,37 \ \ рад/с$$

Направлена угловая скорость по часовой стрелке и соответствует направлению вектора скорости $\overline{V_N}$ (рис. 2)

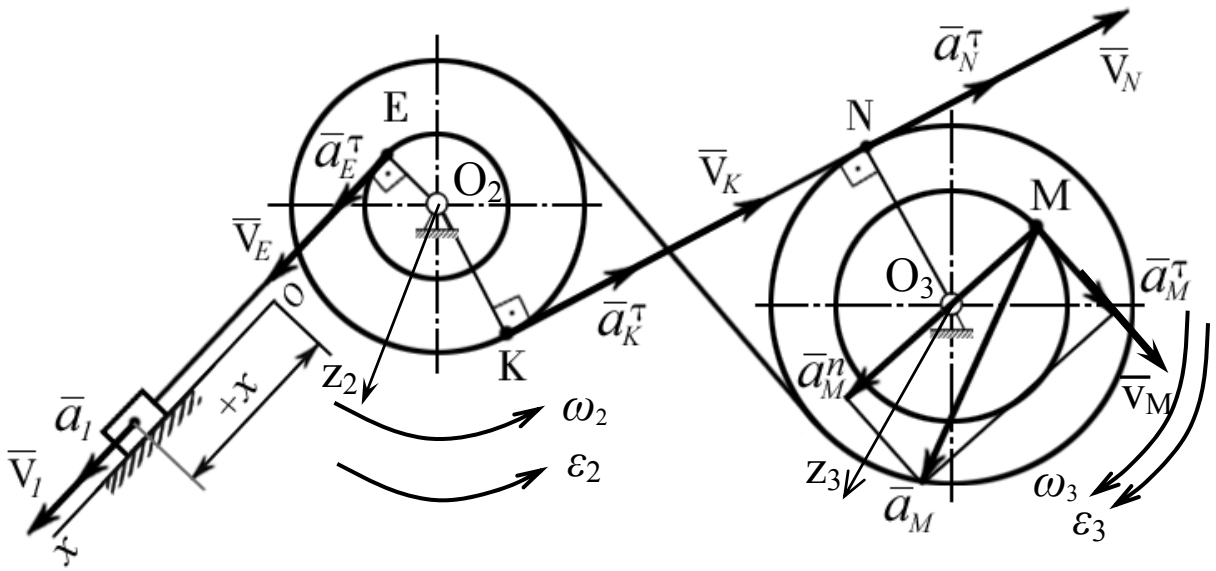


Рис. 2.

Угловое ускорение

$$\varepsilon_3 = \frac{a_N^\tau}{NO_2} = \frac{1,44}{0,65} = 2,22 \quad рад/с^2$$

Направление углового ускорения ε_3 соответствует направлению вектора касательного ускорения a_N^τ (по часовой стрелке) (рис.2).

Скорость точки М:

$V_М = \omega_3 \cdot MO_3$

где MO_3 - кратчайшее расстояние от точки М до оси вращения $O_3 z_3$.

$V_М = \omega_3 \cdot r_3 = 2,37 \cdot 0,40 = 0,95$ м/с

Направлен вектор скорости точки М перпендикулярно кратчайшему расстоянию MO_3 и соответствует направлению угловой скорости ω_3 (рис.2).

Касательное ускорение точки М:

$a_М^\tau = \varepsilon_3 \cdot MO_3$

$a_М^\tau = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 2,22 \cdot 0,40 = 0,89$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения, т.е. $a_М^\tau$ _|_ MO_3, соответствует направлению углового ускорения ε_3 (рис.2).

Нормальное ускорение точки М:

$$a_{\text{М}}^{\text{n}} = \omega_3^2 \cdot \text{МО}_3$$

$$a_{\text{М}}^{\text{n}} = \omega_3^2 \cdot r_3 = 2{,}37^2 \cdot 0{,}40 = 2{,}25 \ \text{м/с}^2$$

Направлен вектор нормального ускорения по радиусу МО_3 в сторону оси вращения (рис.2).

Полное ускорение точки М есть векторная сумма двух ускорений

$$\overline{a}_{\text{М}} = \overline{a}_{\text{М}}^{\text{n}} + \overline{a}_{\text{М}}^{\tau}$$

Его величина:

$$a_{\text{М}} = \sqrt{(a_{\text{М}}^{\text{n}})^2 + (a_{\text{М}}^{\tau})^2}; \ a_{\text{М}} = \sqrt{2{,}25^2 + 0{,}89^2} = 2{,}42 \ \text{м/с}^2$$

Направление вектора $\overline{a}_{\text{М}}$ показано на расчетной схеме (рис.2) диагональю прямоугольника, построенного на векторах нормального и касательного ускорения как на сторонах.

Так как вектор ускорения a_1 и вектор скорости V_1 груза 1 направлены в одну сторону и при этом ускорение есть величина постоянная, то груз 1, тела 2 и 3, а вместе с ними и точка М совершают равноускоренное движение.

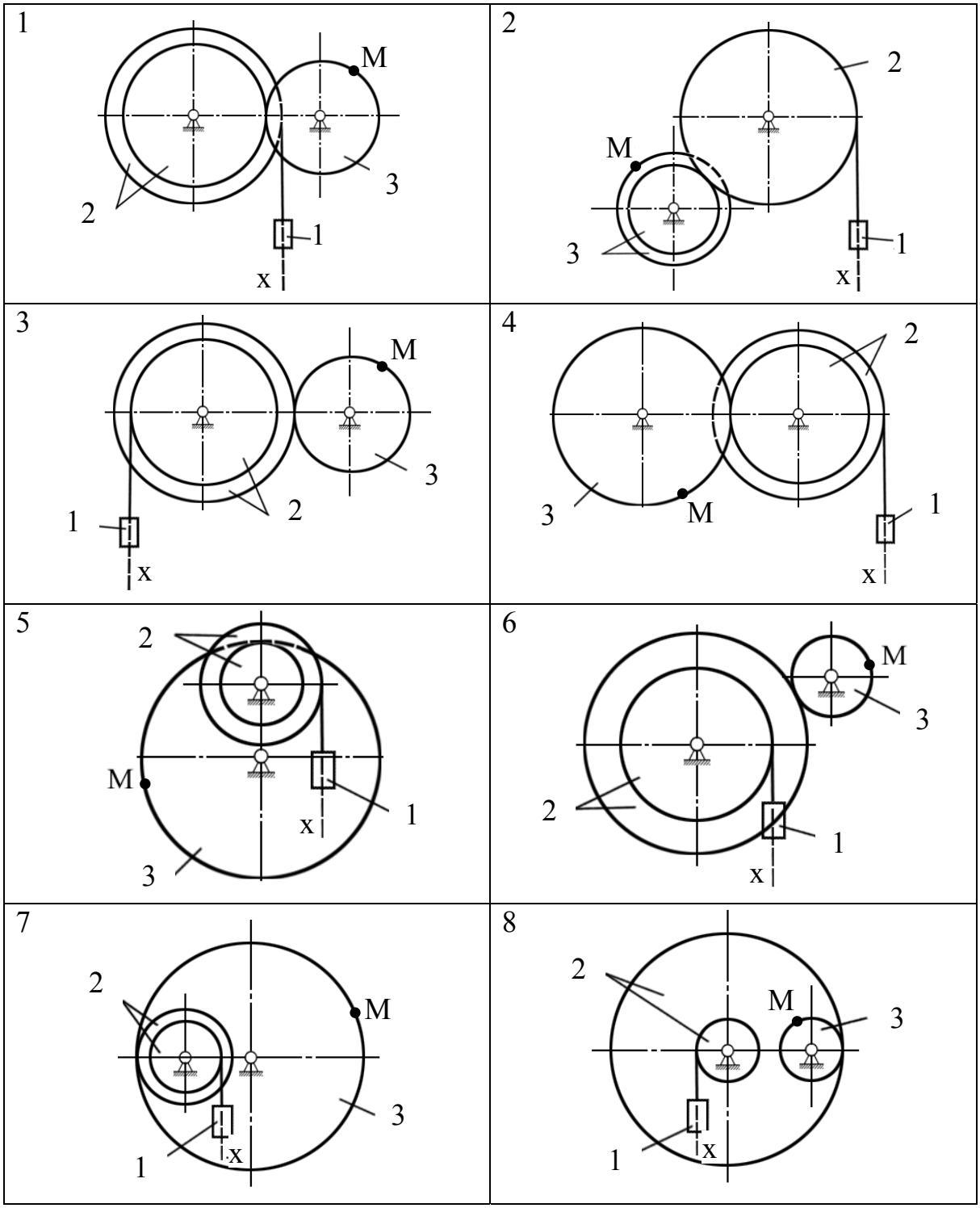
<u>ОТВЕТ.</u> $V_{\text{М}} = 0{,}95$ м/с $\qquad a_{\text{М}} = 2{,}42$ м/с^2

V_1 м/с	a_1 м/с^2	ω_2 рад/с	ε_3 рад/с^2	ω_3 рад/с	ε_3 рад/с^2
0,77	0,72	3,08	2,88	2,37	2,22

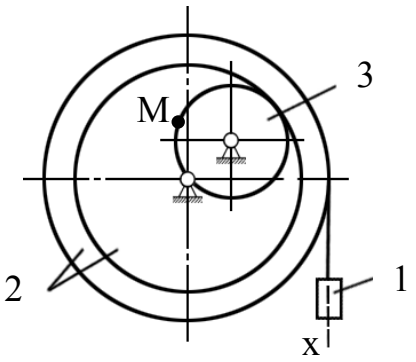
Приложение 2.

Исследование простейших движений твердого тела

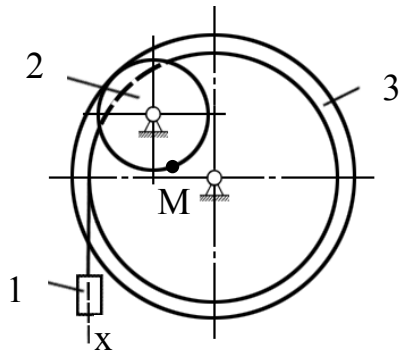
Схемы механизмов



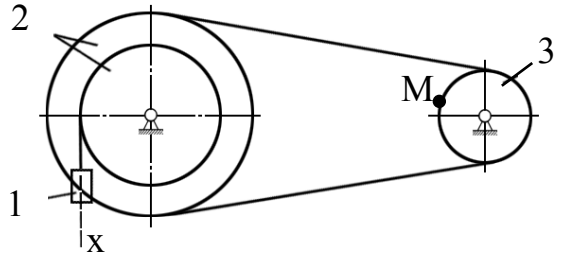
9



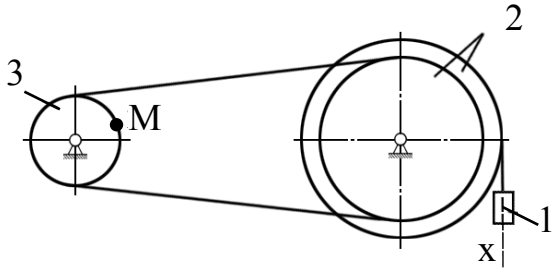
10



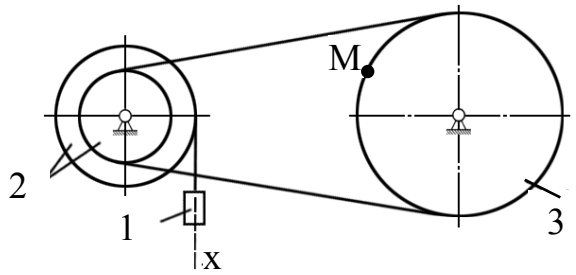
11



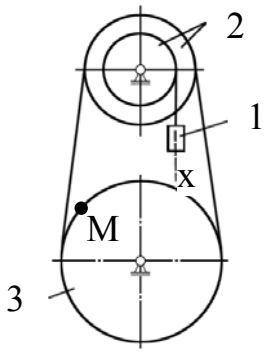
12



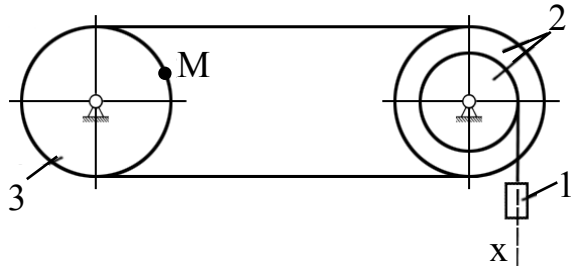
13



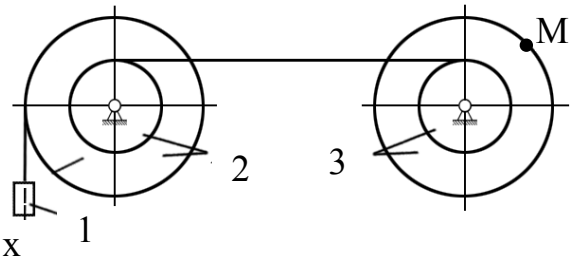
14



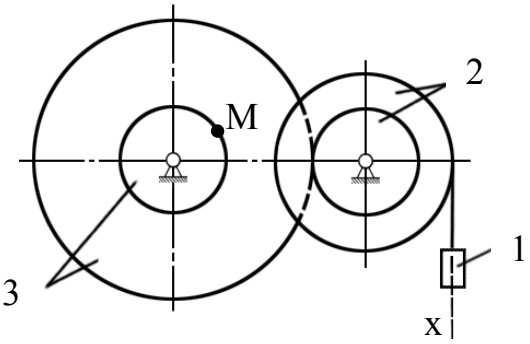
15



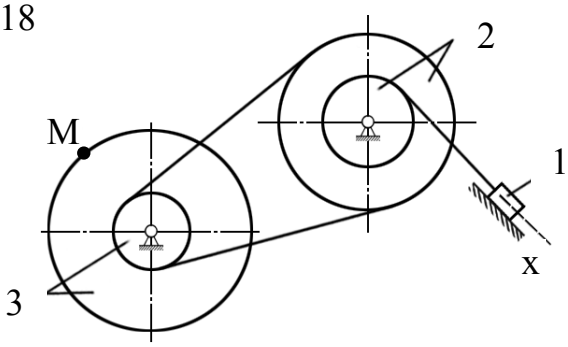
16



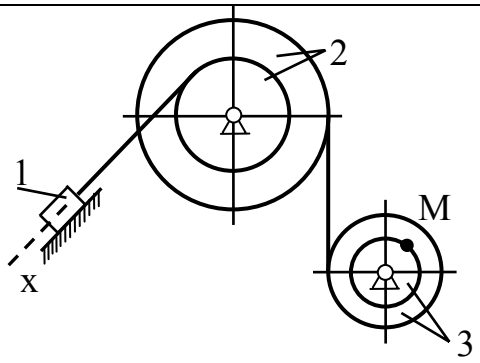
17



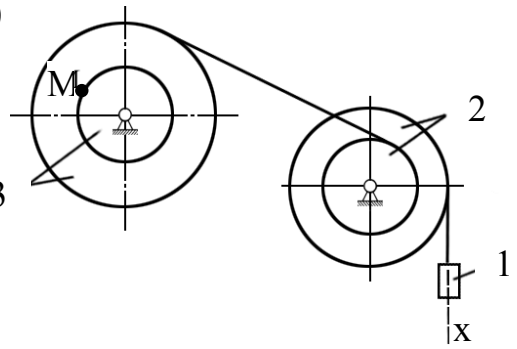
18



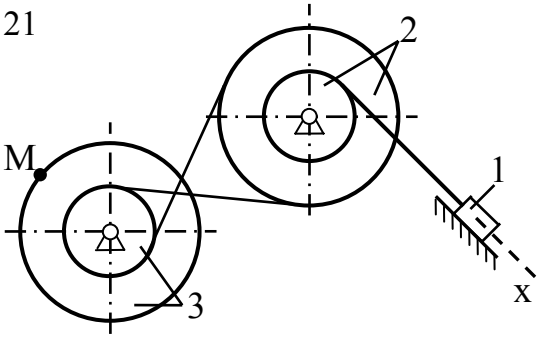
19



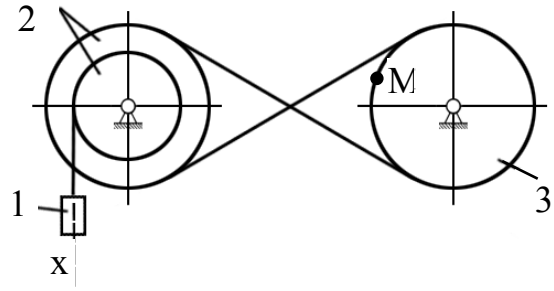
20



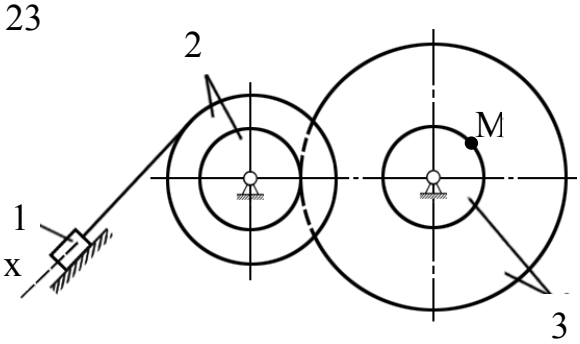
21



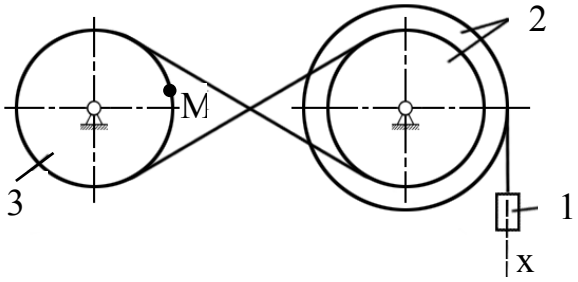
22



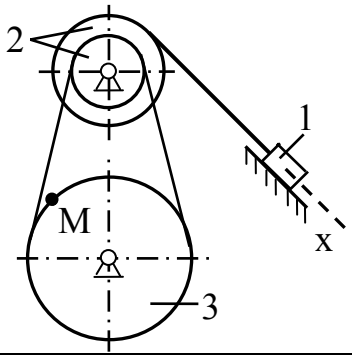
23



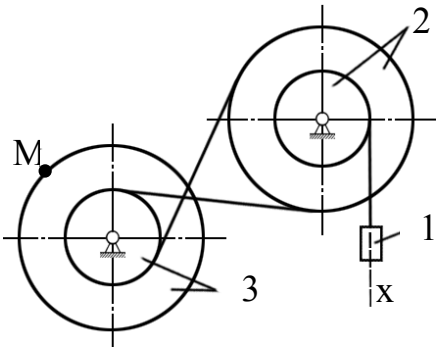
24



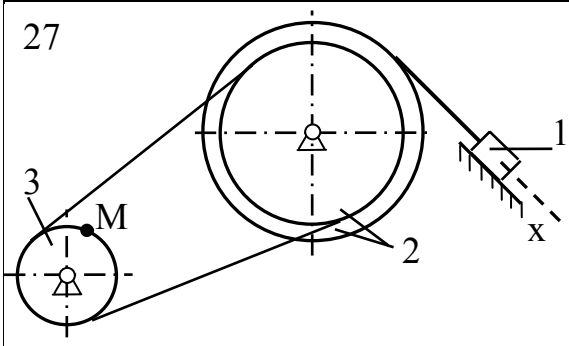
25



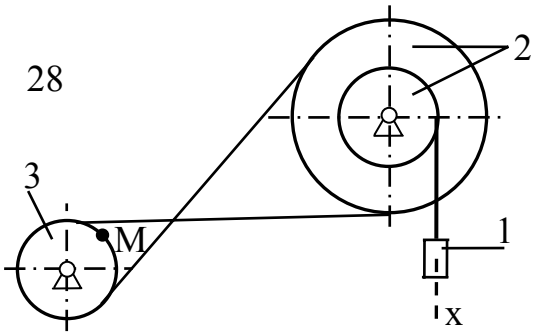
26



27



28



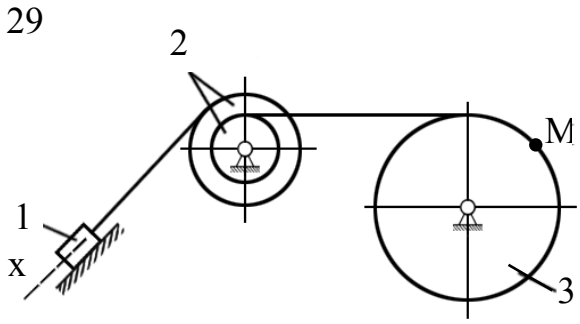
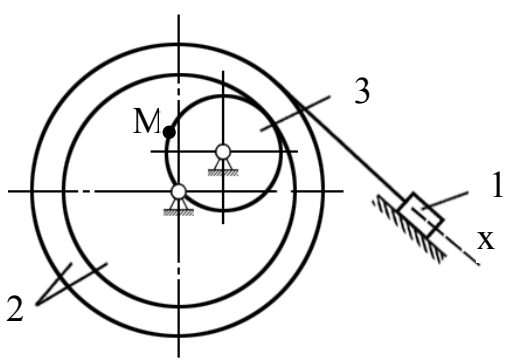
29 	30 

Таблица 1

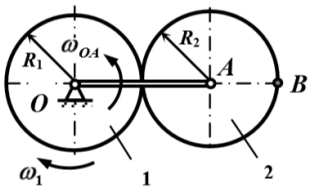
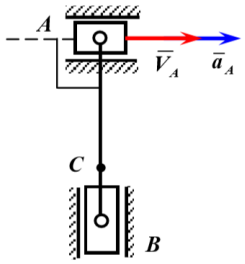
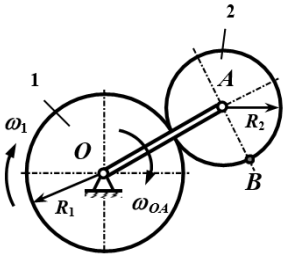
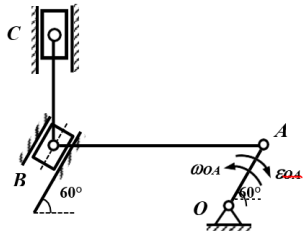
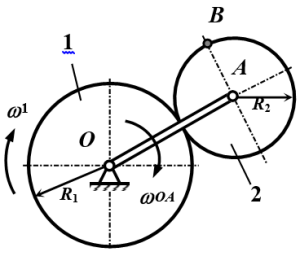
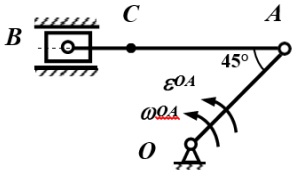
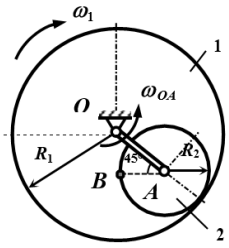
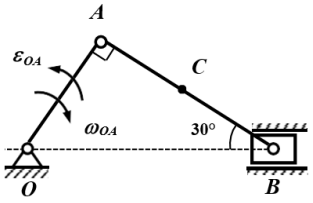
№ варианта	Радиусы шкивов 2 и 3, м				Начальные условия		Координаты груза 1 при $t = t_2$		Заданный момент времени
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0, м	V_0,м/с	t_2, с	x_2, м	t_1, с
1	0,50	0,40	0,36	–	0,02	0,12	3	1,73	2
2	0,80	–	0,70	0,55	0,05	0,10	2	0,41	1
3	1,10	0,45	0,75	–	0,08	0,06	4	0,40	2
4	0,76	0,68	0,60	–	0,04	0,04	4	1,72	3
5	0,60	0,45	1,20	–	0,03	0,15	3	1,02	2
6	0,90	0,60	0,30	–	0,07	0,16	4	2,15	2
7	0,50	0,42	1,05	–	0,08	0,05	4	1,24	3
8	0,90	0,25	0,25	–	0,06	0,02	3	1,11	2
9	0,90	0,75	0,30	–	0,10	0,07	2	0,48	1
10	0,30	–	1,10	0,80	0,05	0,03	4	1,29	3
11	1,00	0,85	0,60	–	0,09	0,08	2	0,65	1
12	0,70	0,50	0,30	–	0,05	0,10	3	1,79	2
13	0,60	0,40	0,80	–	0,07	0,08	5	5,57	2
14	0,60	0,40	0,60	–	0,06	0,03	2	0,80	1
15	0,75	0,50	0,75	–	0,05	0,02	4	1,89	2
16	0,80	0,60	0,80	0,60	0,04	0,06	4	2,20	3
17	0,75	0,50	1,00	0,30	0,08	0,04	2	0,44	1
18	1,00	0,75	1,20	0,75	0,03	0,12	4	2,11	1
19	0,70	0,50	0,60	0,40	0,05	0,10	5	5,05	3
20	1,00	0,60	1,00	0,60	0,10	0,08	3	2,77	1
21	0,60	0,30	0,90	0,30	0,06	0,05	5	3,56	2
22	0,81	0,57	0,60	–	0,07	0,06	2	1,03	1
23	0,85	0,60	0,90	0,60	0,05	0,09	3	1,94	2
24	0,60	0,40	0,40	–	0,09	0,08	4	1,05	2
25	0,98	0,34	1,20	–	0,08	0,04	3	1,19	2
26	1,02	0,50	0,80	0,50	0,06	0,14	4	8,62	2
27	0,96	0,80	0,40	–	0,05	0,10	2	1,93	1
28	0,70	0,40	0,30	–	0,08	0,05	3	3,47	2
29	0,40	0,22	1,06	–	0,04	0,06	2	0,32	1
30	0,50	0,32	1,01	–	0,10	0,07	2	1,28	1

Задание к теме «Плоское движение твердого тела»

Задача 3. Зубчатое колесо 1 радиусом $\boldsymbol{R}_1$ вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, с угловой скоростью ω_1. Вокруг той же оси вращается кривошип OA, соединенный шарнирно с центром зубчатого колеса 2 радиусом $\boldsymbol{R}_2$, с угловой скоростью ω_{OA}. Требуется определить положение мгновенного центра скоростей колеса 2, угловую скорость этого колеса и скорость точки B.

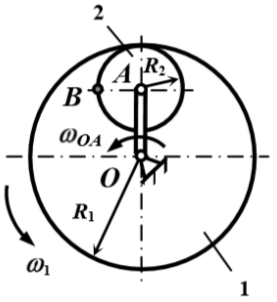
Задача 4. Для заданного положения звеньев механизма определить скорости и ускорения точек B и C.

Варианты заданий

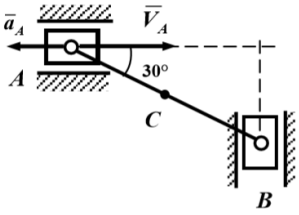
<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1</td><td colspan="2">Вариант 2</td></tr>
<tr>
<td>1. $\omega_1 = 4$ рад/с,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 = 30$ см.
 
</td>
<td>2. $a_A = 30$ см/с^2,
$V_A = 30$ см/с,
AB = 30 см, AC = 20 см.
 
</td>
<td>1. $\omega_1 = 2\,\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 5$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 3$ см.
 
</td>
<td>2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 4OA = 2BC = 40 см.
 
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 3</td><td colspan="2">Вариант 4</td></tr>
<tr>
<td>1. $\omega_1 = 2\,\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 8$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 3$ см.
 
</td>
<td>2. $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 2OA = 40 см,
AC = 15 см.
 
</td>
<td>1. $\omega_1 = 4$ рад/с,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 3\boldsymbol{R}_2 = 6$ см.
 
</td>
<td>2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
OA = 30 см, AC = CB.
 
</td>
</tr>
</table>

Вариант 5

1. $\omega_1 = 4$ рад/с,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 5\boldsymbol{R}_2 = 50$ см.

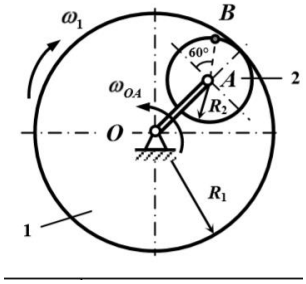


2. $a_A = 20$ см/с^2,
$V_A = 40$ см/с,
AB = 2AC = 10 см.

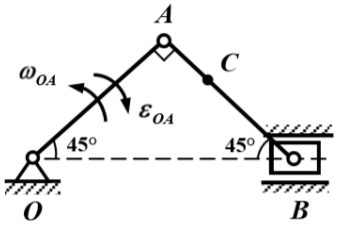


Вариант 6

1. $\omega_1 = 1{,}5$ рад/с,
$\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 4\boldsymbol{R}_2 = 8$ см.

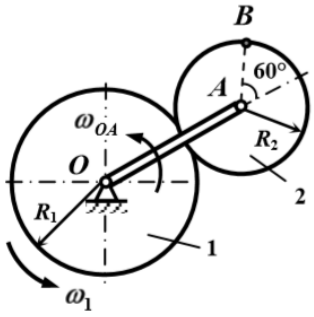


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 20 см, AC = 6 см.

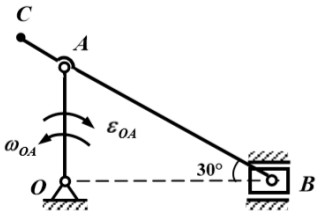


Вариант 7

1. $\omega_1 = \omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 2\,\boldsymbol{R}_2 = 16$ см.

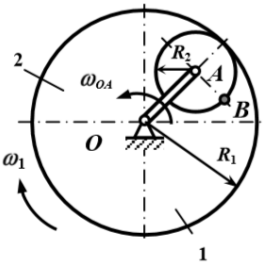


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
OA = 3AC = 30 см.

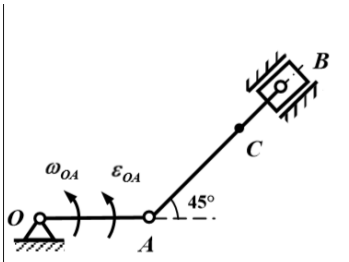


Вариант 8

1. $\omega_1 = 2$ рад/с,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 3\boldsymbol{R}_2 = 60$ см.

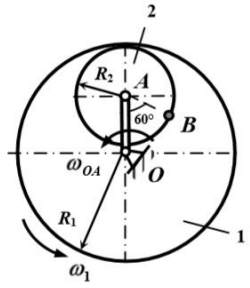


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
OA = AC = 25 см,
AB = 40 см.

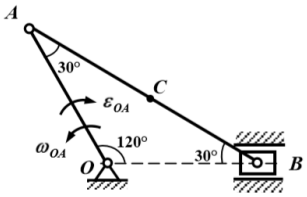


Вариант 9

1. $\omega_1 = 20$ рад/с,
$\omega_{OA} = 40$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2 = 20$ см.

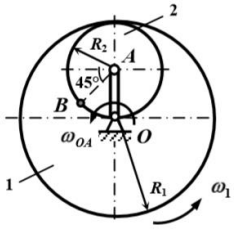


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с,
OA = 20 см, AC = CB.

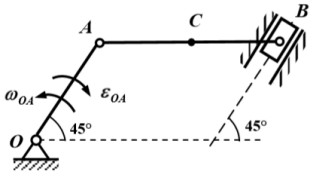


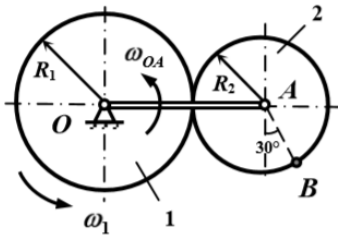
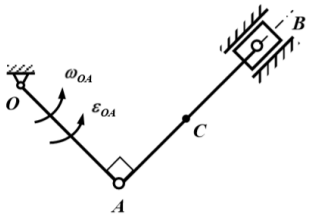
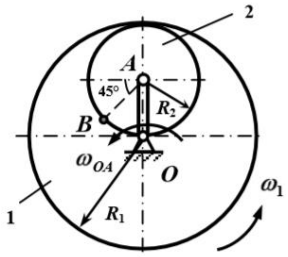
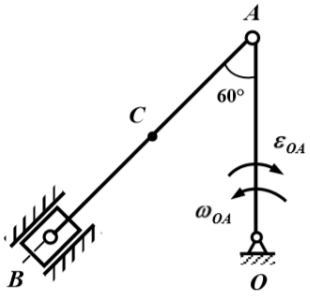
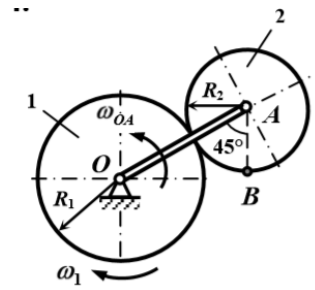
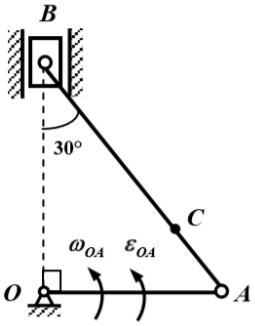
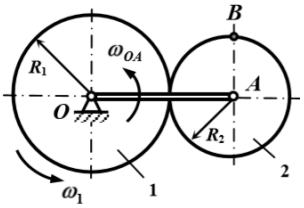
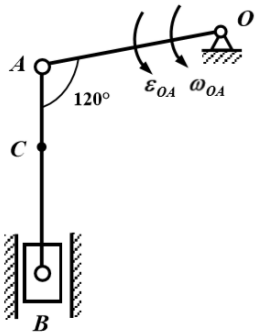
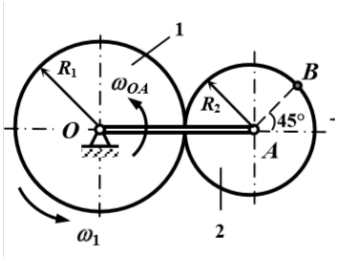
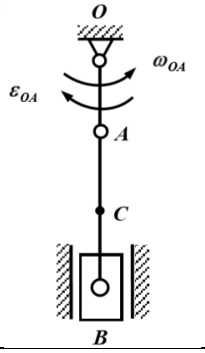
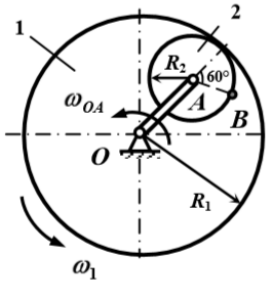
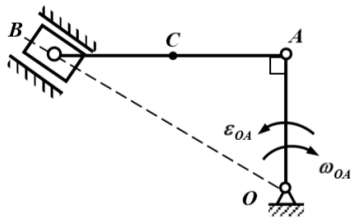
Вариант 10

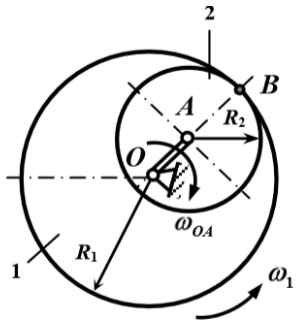
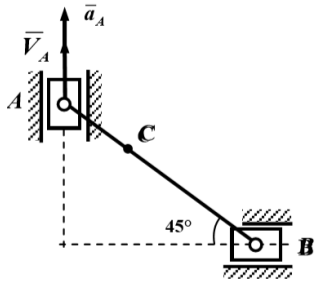
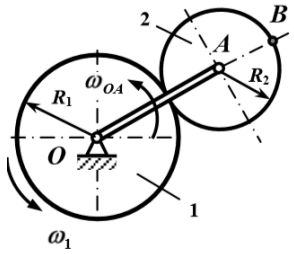
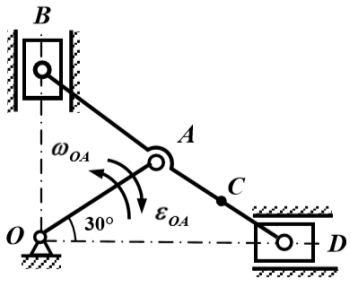
1. $\omega_1 = 5$ рад/с,
$\omega_{OA} = 20$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2 = 70$ см.

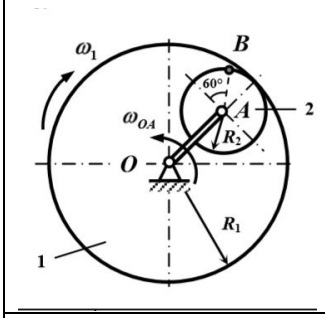
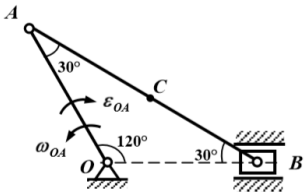
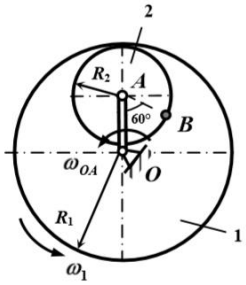
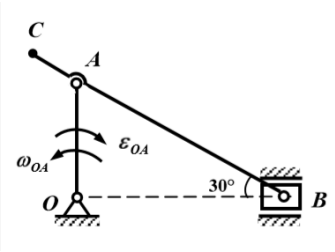


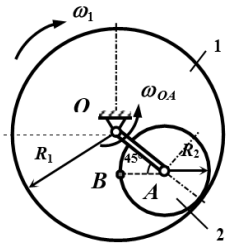
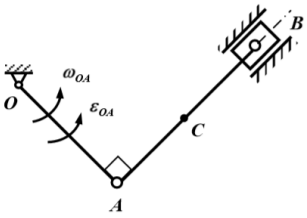
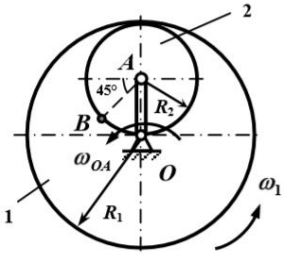
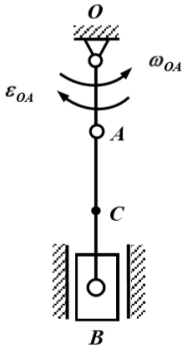
2. $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 2$ рад/с,
OA = 25 см,
AB = 2AC = 40 см.



Вариант 11		Вариант 12	
1. ω_1 = 3 рад/с, ω_{OA} = 12 рад/с, $\boldsymbol{R}_1 = 3\boldsymbol{R}_2$ = 30 см. 	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 4 рад/с, OA = 15 см, AB = 2AC = 20 см. 	1. ω_1 = 1,5 рад/с, ω_{OA} = 6 рад/с, $\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2$ = 50 см. 	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 5 рад/с, OA = 50 см, AB = 2AC = 40 см. 
Вариант 13		Вариант 14	
1. ω_1 = 10 рад/с, ω_{OA} = 2 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 30 см, $\boldsymbol{R}_2$ = 20 см. 	2. ε_{OA} = 1 рад/с^2, ω_{OA} = 2 рад/с, OA = 2AC = 20 см. 	1. ω_1 = 2 рад/с, ω_{OA} = 3 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 60 см, $\boldsymbol{R}_2$ = 40 см. 	2. ε_{OA} = 4 рад/с^2, ω_{OA} = 8 рад/с, OA = 20 см, AB = 3AC = 30 см. 
Вариант 15		Вариант 16	
1. ω_1 = 3 рад/с, ω_{OA} = 4 рад/с, $\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2$ = 40 см. 	2. ε_{OA} = 3 рад/с^2, ω_{OA} = 6 рад/с, AB = 2AC = 3OA = 30 см. 	1. ω_1 = 4 рад/с, ω_{OA} = 6 рад/с, $\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2$ = 12 см. 	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 4 рад/с, CB = AC = OA = 20 см. 

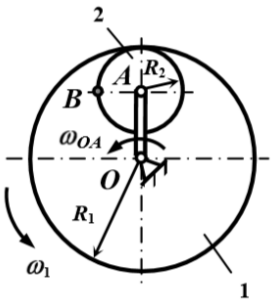
Вариант 17		Вариант 18	
1. ω_1 = 10 рад/с, ω_{OA} = 15 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 60 см, $\boldsymbol{R}_2$ = 40 см.	2. a_A = 10 см/с^2, V_A = 40 см/с, АВ = 3АС = 30 см.	1. ω_1 = 4 рад/с, ω_{OA} = 3 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 10 см, $\boldsymbol{R}_2$ = 6 см.	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 3 рад/с, ОА = АВ = 2АС = 10 см.
			

Вариант 19		Вариант 20	
1. ω_1 = 1,5 рад/с, ω_{OA} = 2 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 4$\boldsymbol{R}_2$ = 8 см.	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 3 рад/с, ОА = 20 см, АС = СВ.	1. ω_1 = 20 рад/с, ω_{OA} = 40 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 2$\boldsymbol{R}_2$ = 20 см.	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 4 рад/с, ОА = 3АС = 30 см.
			

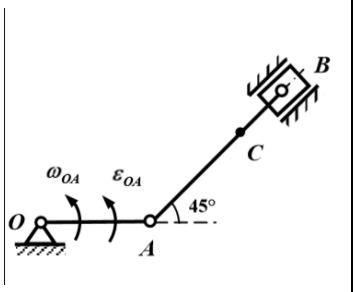
Вариант 21		Вариант 22	
1. ω_1 = 4 рад/с, ω_{OA} = 6 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 3$\boldsymbol{R}_2$ = 6 см.	2. ε_{OA} = 2 рад/с^2, ω_{OA} = 4 рад/с, ОА = 15 см, АВ = 2АС = 20 см.	1. ω_1 = 1,5 рад/с, ω_{OA} = 6 рад/с, $\boldsymbol{R}_1$ = 2$\boldsymbol{R}_2$ = 50 см.	2. ε_{OA} = 3 рад/с^2, ω_{OA} = 6 рад/с, АВ = 2АС = 3ОА = 30 см.
			

Вариант 23

1. $\omega_1 = 4$ рад/с,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 5\boldsymbol{R}_2 = 50$ см.

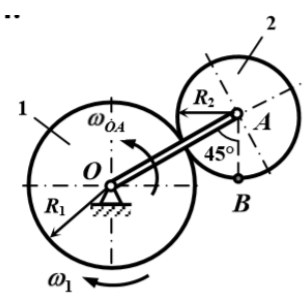


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
OA = AC = 25 см,
AB = 40 см.

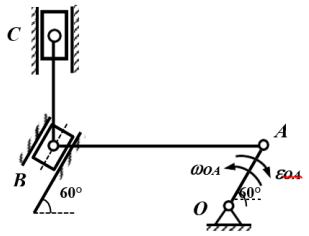


Вариант 24

1. $\omega_1 = 10$ рад/с,
$\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 30$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 20$ см.

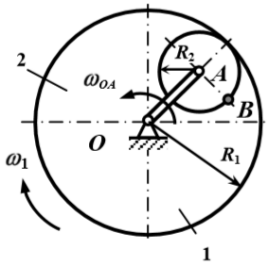


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 4OA = 2BC = 40 см.

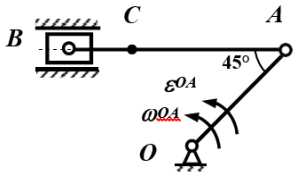


Вариант 25

1. $\omega_1 = 2$ рад/с,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 3\boldsymbol{R}_2 = 60$ см.

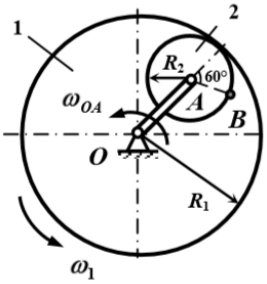


2. $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 2OA = 40 см,
AC = 15 см.

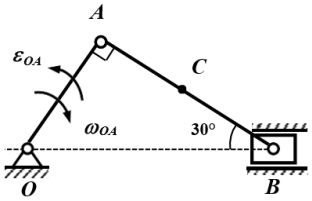


Вариант 26

1. $\omega_1 = 4$ рад/с,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2 = 12$ см.

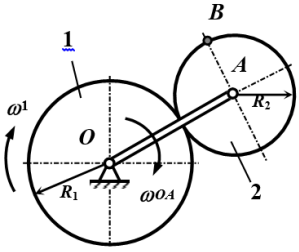


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 6$ рад/с,
OA = 30 см, AC = CB.

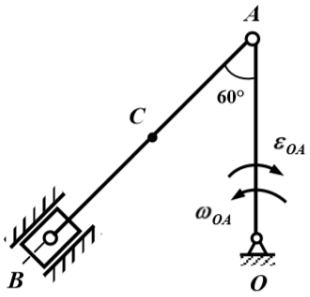


Вариант 27

1. $\omega_1 = 2\,\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 8$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 3$ см.

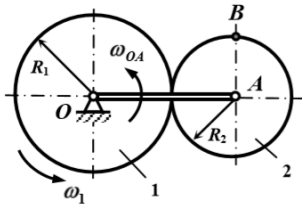


2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 5$ рад/с,
OA = 50 см,
AB = 2AC = 40 см.

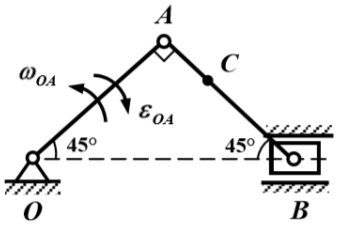


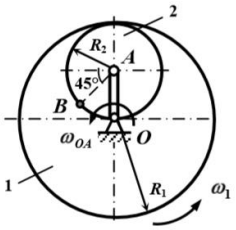
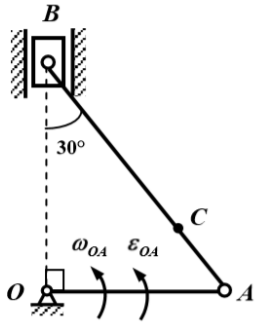
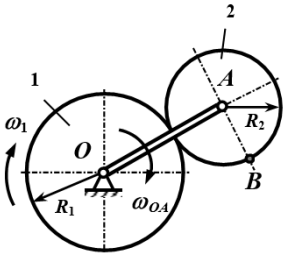
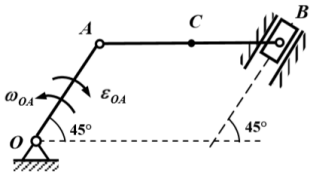
Вариант 28

1. $\omega_1 = 2$ рад/с,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 60$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 40$ см.



2. $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 4$ рад/с,
AB = 20 см, AC = 6 см.



<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 29</td><td colspan="2">Вариант 30</td></tr>
<tr>
<td>1. $\omega_1 = 5$ рад/с,
$\omega_{OA} = 20$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 2\boldsymbol{R}_2 = 70$ см.
 
</td>
<td>2. $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 2$ рад/с,
OA = 2AC = 20 см.
 
</td>
<td>1. $\omega_1 = 2\,\omega_{OA} = 2$ рад/с,
$\boldsymbol{R}_1 = 5$ см, $\boldsymbol{R}_2 = 3$ см.
 
</td>
<td>2. $\varepsilon_{OA} = 1$ рад/с^2,
$\omega_{OA} = 2$ рад/с,
OA = 25 см,
AB = 2AC = 40 см.
 
</td>
</tr>
</table>