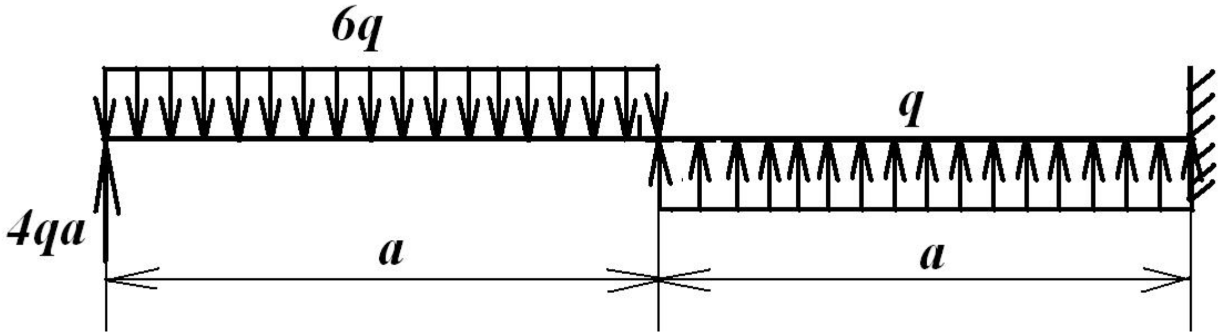
Расчетно-графическая работа №3

Задача №1. Оценить жесткость свободного окончания консольной балки (Прил. 4) двутавровой формы.

Принять: интенсивность нагрузки q; линейный размер a; модуль продольной упругости E=2·10^5 МПа; допускаемые перемещения - линейное $[\delta]$ =20 мм и угловое $[\theta]$=7°, двутавр № 12.



Исходные данные

q= 20 Н/мм

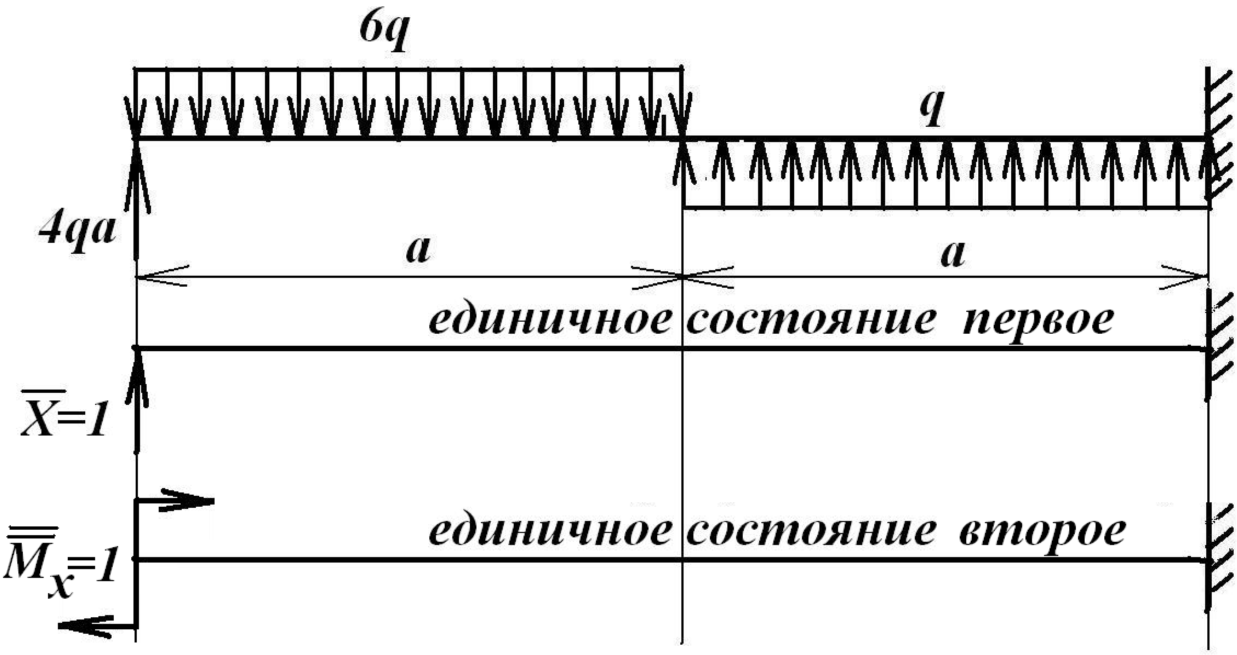
a= 700 мм

E=2·10^5 МПа

$[\delta]$ =20 мм

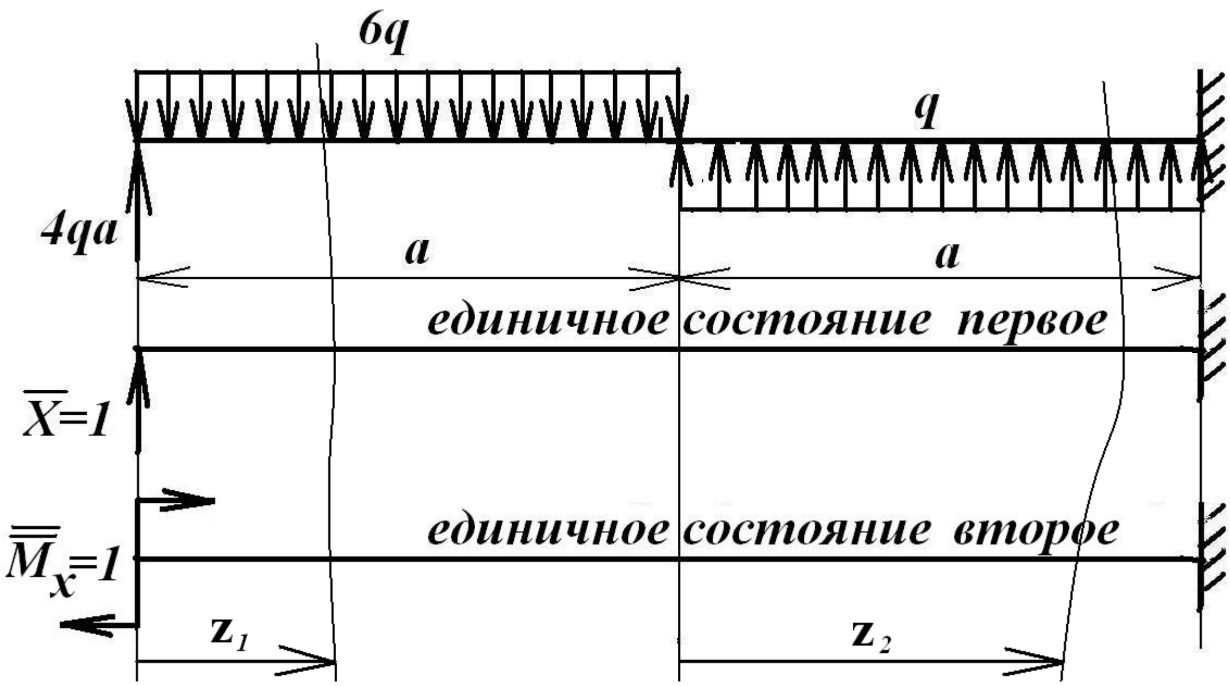
$[\theta]$=7°

Для определения перемещений используем способ Верещагина – нужно перемножить площадь грузовой эпюры на момент единичный под центром тяжести грузовой эпюры. Для этого надо построить единичные состояния – то есть в конструкции приложить только одну силу или момент силы, равные единице в том месте, где необходимо найти перемещение. Для определения вертикального перемещения прикладываем силу, равную единице $\bar{X} = 1$; для определения углового перемещения прикладываем момент силы, равный единице $\bar{\bar{M}}_x = 1$.



Далее строим эпюры внутренних усилий: моменты изгибающие для трех состояний – грузовое (заданное) и два единичных.

Разбиваем на участки z_1, z_2.



Рассматриваем участок первый

$$0 \le z_1 \le a$$

Момент изгибающий для грузового состояния

$$M_x = 4qa \cdot z_1 - 6q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}$$

Момент изгибающий для первого единичного состояния

$$\bar{M}_x = 1 \cdot z_1$$

Момент изгибающий для второго единичного состояния

$$\bar{\bar{M}}_x = 1$$

Рассматриваем участок второй

$$0 \le z_2 \le a$$

Момент изгибающий для грузового состояния

$$M_x = 4qa \cdot (a + z_2) - 6q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + z_2\right) + q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}$$

Момент изгибающий для первого единичного состояния

$$\bar{M}_x = 1 \cdot (a + z_2)$$

Момент изгибающий для второго единичного состояния

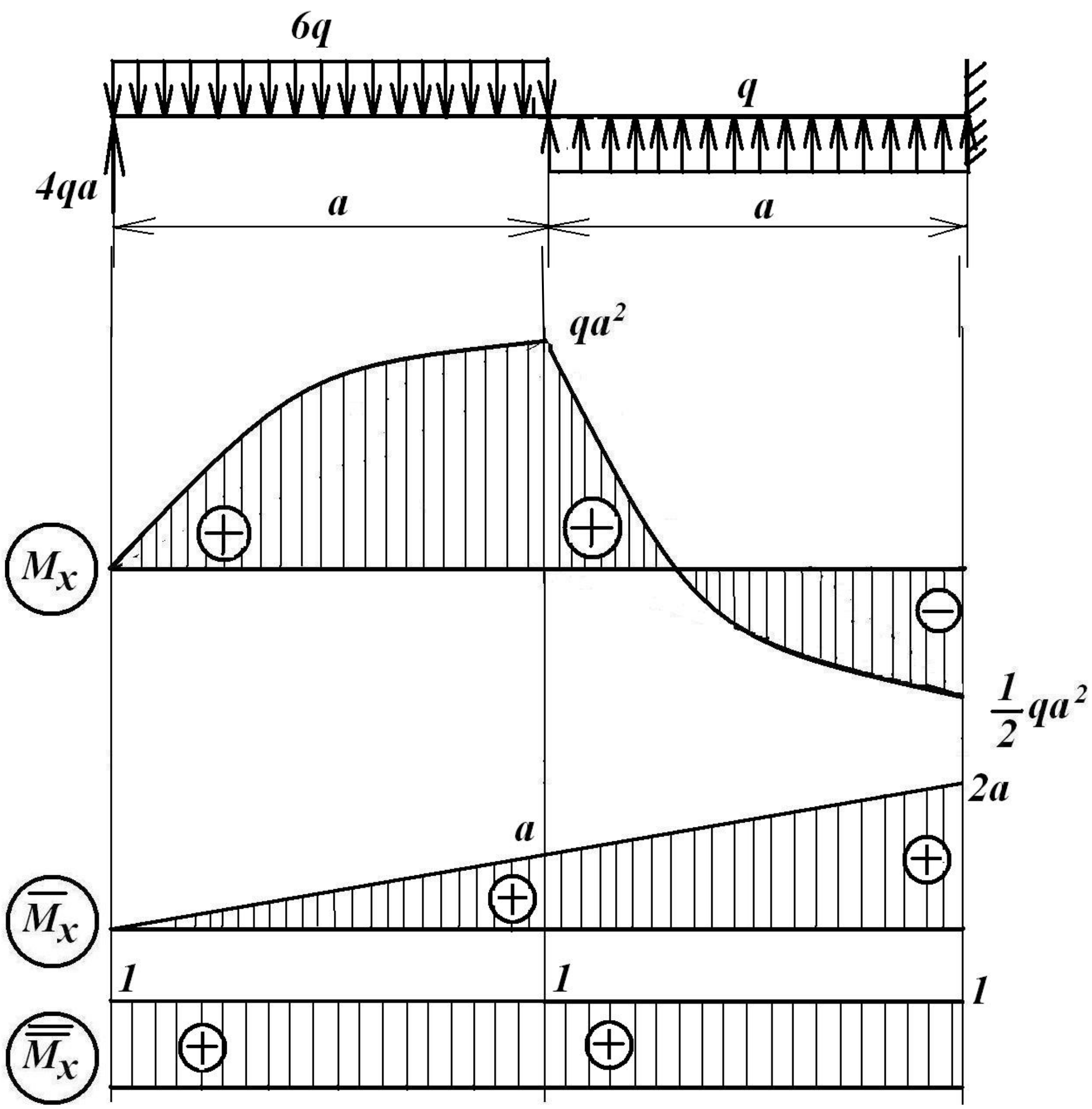
$$\bar{\bar{M}}_x = 1$$

Подсчитываем значения внутренних силовых факторов в начале и конце каждого участка. Результаты заносим в таблицу 1.

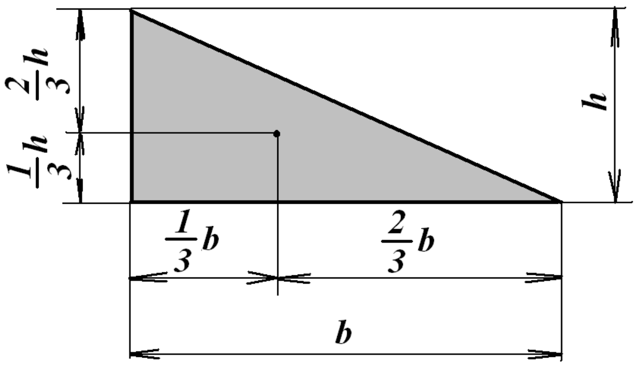
Таблица 1. – Результаты расчета внутренних силовых факторов

Показатель	**Силовой участок первый**		**Силовой участок второй**	
	начало	**конец**	**начало**	**конец**
z	*0*	*a*	*0*	*a*
M_x	*0*	qa^2	qa^2	$-\frac{1}{2}qa^2$
$\bar{M}_x$	*0*	*a*	*a*	*2a*
$\bar{\bar{M}}_x$	*1*	*1*	*1*	*1*

По результатам таблицы строим эпюры внутренних усилий

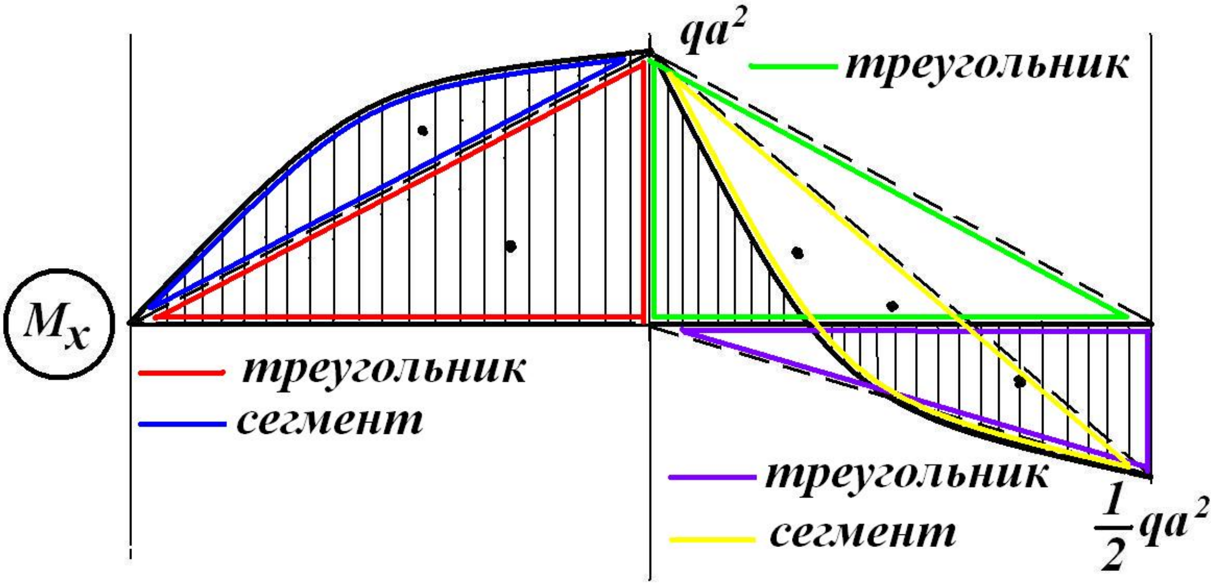


Разбиваем эпюру момента грузового состояния на простые фигуры: прямоугольник, треугольник, сегмент (часть параболы). Отмечаем центры тяжести каждой фигуры – у прямоугольника расположен по центру фигуры,



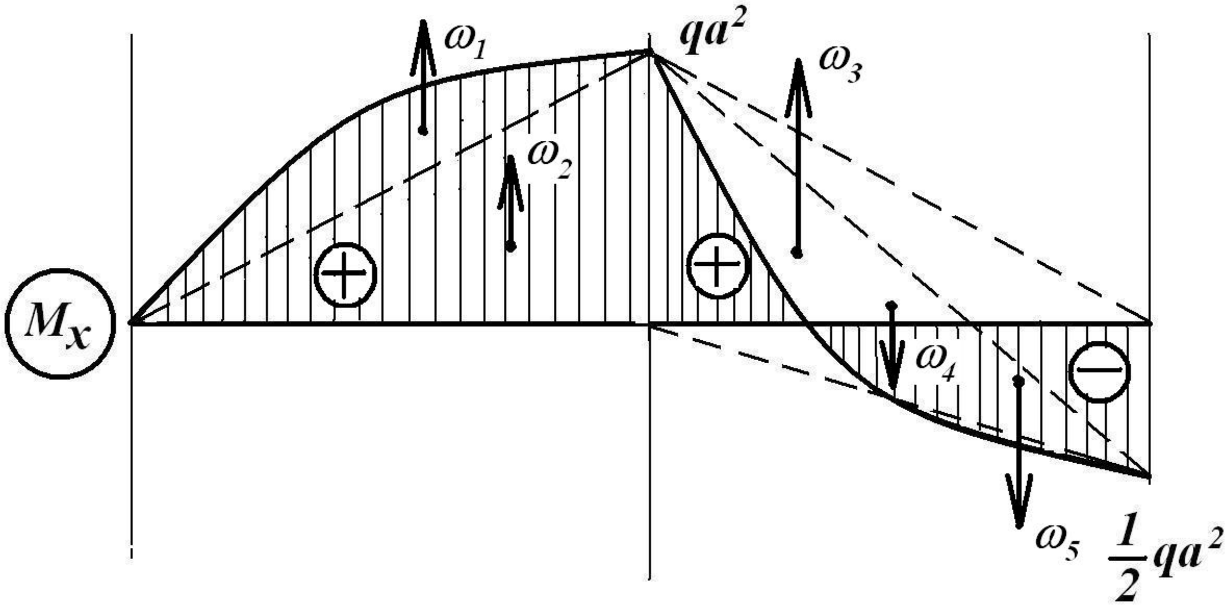
у сегмента так же, у прямоугольного треугольника на $\frac{1}{3}$ от катета и на $\frac{2}{3}$ от катета.

Получаем в итоге фигуры:



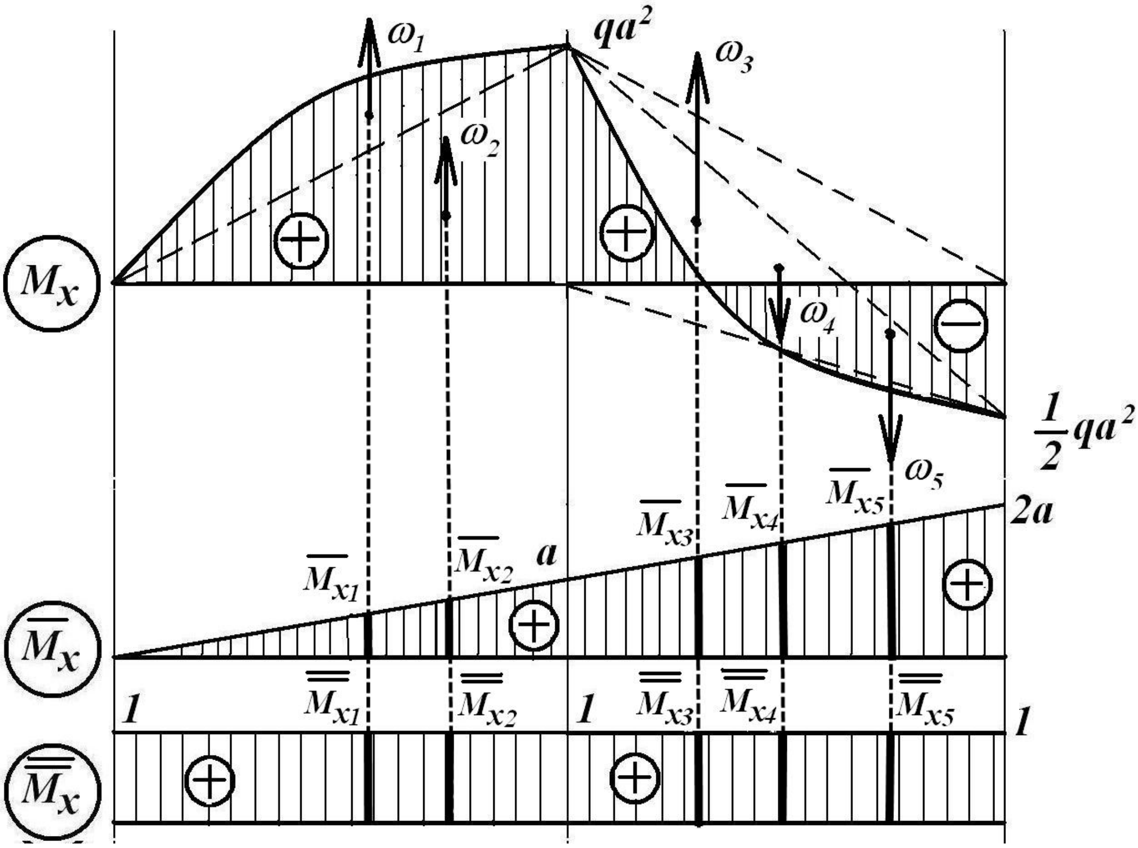
Нам нужна заштрихованная площадь. На первом участке видно сразу как разбить площади, а на втором участке выделяем сегмент (желтый) и достраиваем до треугольника сверху и треугольника снизу.

Проводим направление площадей: если фигура выше нулевой линии, то она положительная, если ниже – отрицательная. Обозначаем площади буквой ω.



В итоге получили 5 фигур.

Напротив каждого центра тяжести отмечаем соответствующий момент единичный на эпюрах единичных моментов.



Находим перемещения.

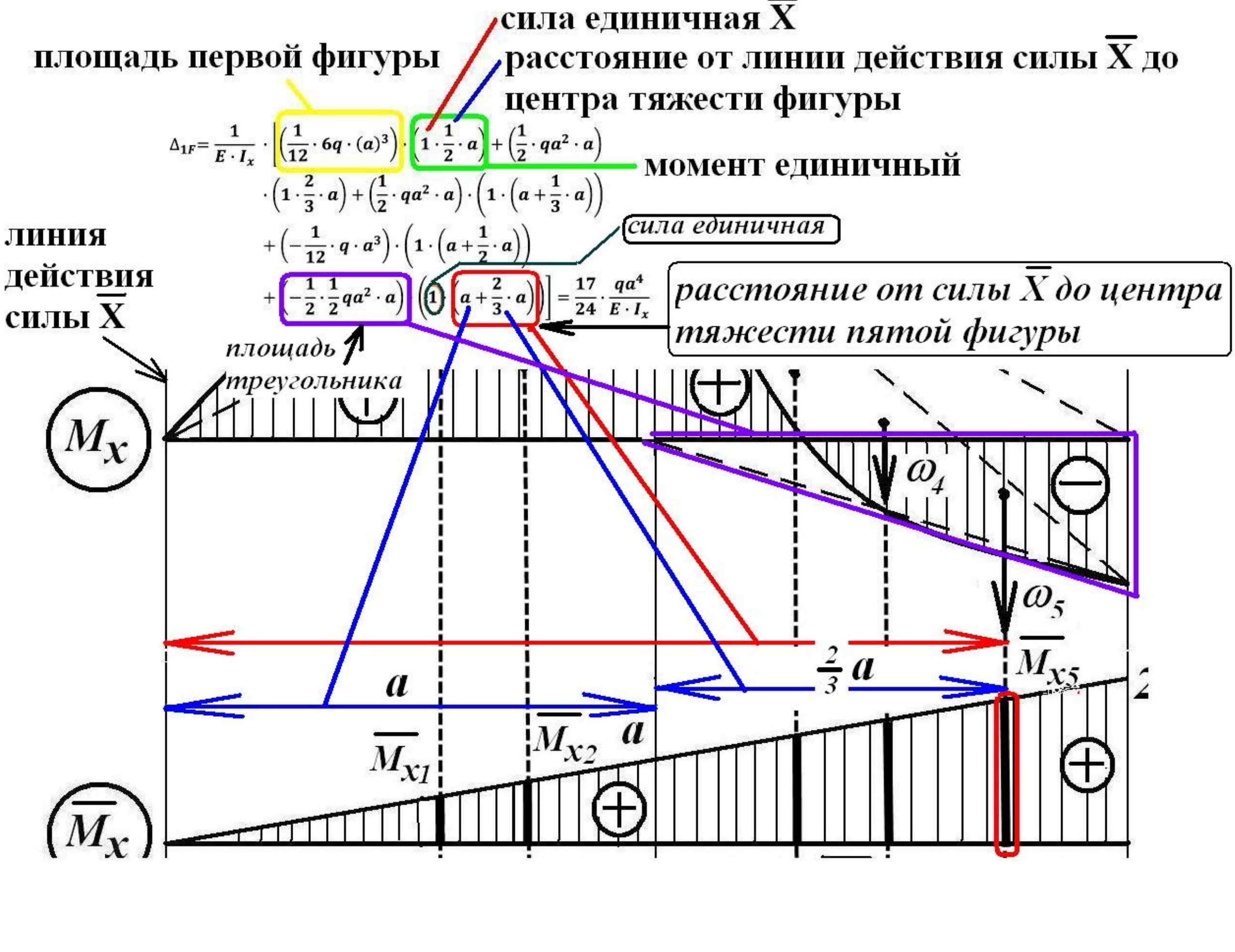
Для этого площадь каждой фигуры умножаем на момент под её центром тяжести. Площадь прямоугольного треугольника – половина произведения катетов, площадь сегмента – одна двенадцатая часть произведения интенсивности нагрузки (на первом участке $6q$, на втором участке q) умноженной на расстояние её действия (на первом и втором участках расстояние a) в кубе.

Перемещение вертикальное

Перемножаем площадь грузовой эпюры момента на момент единичный первый под центром тяжести.

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{12} \cdot 6q \cdot (a)^3 \right) \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \right) \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) \right.$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \right) \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{1}{3} \cdot a \right) \right) + \left(-\frac{1}{12} \cdot q \cdot a^3 \right)$$
$$\left. \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{1}{2} \cdot a \right) \right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{2}{3} \cdot a \right) \right) \right]$$
$$= \frac{17}{24} \cdot \frac{qa^4}{E \cdot I_x}$$

В формуле первый множитель (первая скобка) – площадь фигуры, второй множитель (вторая скобка) – момент единичный под центром тяжести фигуры грузовой эпюры. Пояснения на рисунке:



Перемещение угловое

Перемножаем площадь грузовой эпюры момента на момент единичный второй под центром тяжести. Здесь момент единичный одинаковый на всей конструкции и равен одному, поэтому площадь умножаем на единицу.

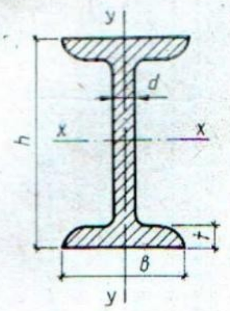
$$\theta_1 = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{12} \cdot 6q \cdot (a)^3 \right) \cdot (1) + \left(\frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \right) \cdot (1) + \left(\frac{1}{2} \cdot qa^2 \cdot a \right) \cdot (1 \cdot) + \left(-\frac{1}{12} \cdot q \cdot a^3 \right) \cdot (1) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \cdot (1) \right] = \frac{7}{6} \cdot \frac{qa^3}{E \cdot I_x}$$

Теперь рассчитываем значения, используя исходные данные

Значение момента инерции берем из ГОСТ на двутавровые сечения.

ГОСТ 8239

Таблица 8.5. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239—72)



Обозначения:

h — высота балки;
b — ширина полки;
d — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
J — момент инерции;
W — момент сопротивления;
i — радиус инерции;
S — статический момент полусечения

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A, см²	J_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	S_x, см³	J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27 696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39 727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55 962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76 806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

У нас двутавр №12, для него момент инерции относительно оси X из ГОСТ 8239-72 $I_x = 350$ см^4

Перемещение вертикальное

$$\Delta_{1F} = \frac{17}{24} \cdot \frac{qa^4}{E \cdot I_x} = \frac{17}{24} \cdot \frac{20 \cdot 700^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^4} = 4{,}86 \text{ мм} < [\delta] = 20 \text{ мм}$$

Условие жесткости выполняется.

Перемещение угловое

$$\theta_1 = \frac{7}{6} \cdot \frac{20 \cdot 700^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 350 \cdot 10^4} = 0{,}011433\ \text{рад} = 0{,}655\ \text{град} < [\theta] = 7\ \text{град}$$

Условие жесткости выполняется.

<u>Примечание. Все расчеты производим в миллиметрах и МПа.</u>