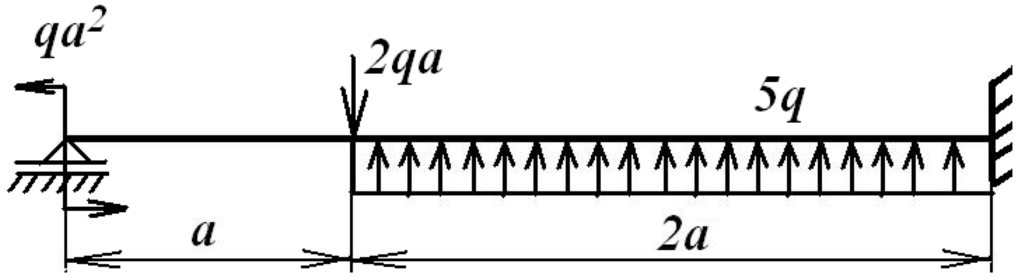
ПОРЯДОК РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ (ПРИЛОЖЕНИЕ 9)

1. Начертить в масштабе схему нагружения



2. Определить степень статической неопределимости

Определяем количество неизвестных реакций в опорах и количество уравнений равновесия.

В данной задаче четыре неизвестные реакции – три в жесткой заделке и одна в шарнирно-подвижной опоре. Уравнений равновесия три – так как система плоская.

Степень статической неопределимости – это разность между количеством неизвестных реакций в опорах и количеством уравнений равновесия:

4 неизвестные реакции – 3 уравнения равновесия = 1 раз статически неопределимая система (4 н.р. – 3 ур.р. = 1 р.с.н.с.).

Степень статической неопределимости показывает число дополнительных (лишних) связей.

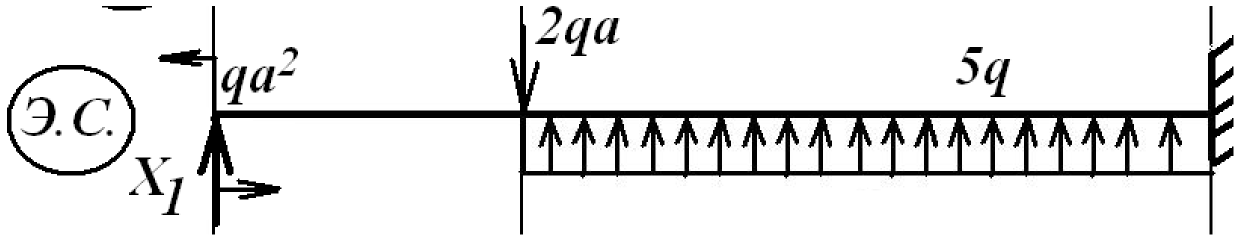
3. Выбрать основную систему (О.С.)

Это система без нагрузок и дополнительных связей – конструкция с необходимой опорой (без лишней опоры) – жесткой заделки достаточно для равновесия системы, но при этом может быть большое перемещение под нагрузкой свободного конца конструкции, чтобы его не было ставят дополнительную опору. В итоге перемещения нет, но данная опора дополнительная (лишняя).

В нашем варианте оставляем жесткую заделку и убираем шарнирно-подвижную опору

4. Начертить эквивалентную систему (Э.С.)

В том месте, где убрали опору прикладываем силу неизвестную X_1 и прикладываем всю внешнюю нагрузку. Система со всей внешней нагрузкой и неизвестной силой в том месте, где была опора – эквивалентная.



5. Записать канонические уравнения

Условие, при котором в направлении отброшенной реакции опоры не будет перемещений - каноническое уравнение: то есть в нашем варианте не должно быть вертикального перемещения.

$$\Delta_{1F}+\delta_{11}\cdot X_1=0$$

где Δ_{1F} - перемещение грузового состояния,

δ_{11} - перемещение единичного состояния.

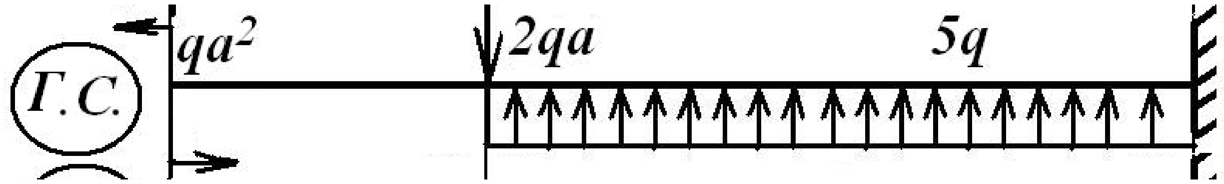
Из данного условия выражаем силу неизвестную

$$X_1=-\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}$$

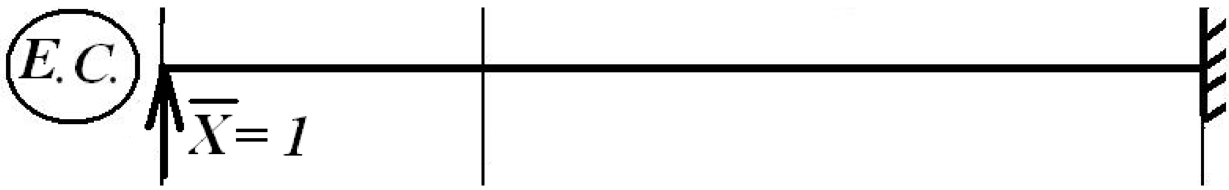
То есть теперь необходимо определить перемещение грузовое и единичное.

6. Начертить грузовое (Г.С.) и единичное состояния (Е.С.)

Грузовое состояние – система с внешней нагрузкой



Единичное состояние – система с одной силой, равной одному.



7. Записать выражения внутренних силовых факторов для грузового состояния и единичного состояния

Делим систему на два силовых участка z_1 и z_2

Участок первый

$$0 \leq z_1 \leq a$$

Момент изгибающий грузовой

$$M_x = -qa^2$$

Момент изгибающий единичный

$$\bar{M}_x = 1 \cdot z_1$$

Участок второй

$$0 \leq z_2 \leq 2a$$

Момент изгибающий грузовой

$$M_x = -qa^2 - 2qa \cdot z_2 + 5q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}$$

Момент изгибающий единичный

$$\bar{M}_x = 1 \cdot (a + z_2)$$

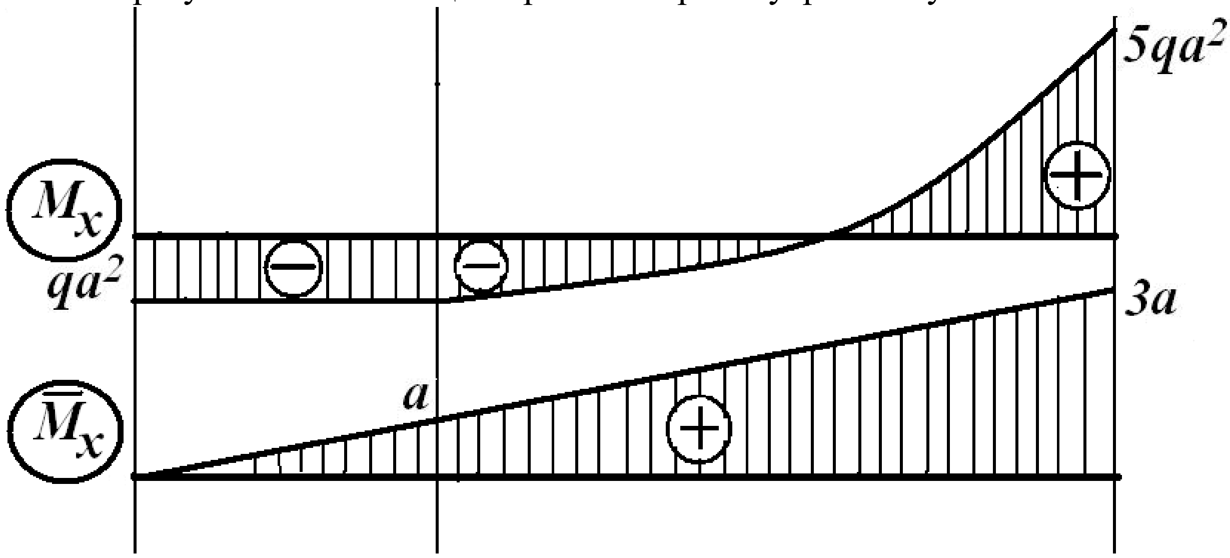
8. Построить эпюру момента изгибающего для единичного состояния

Подсчитываем значения внутренних силовых факторов в начале и конце каждого участка. Результаты заносим в таблицу 1.

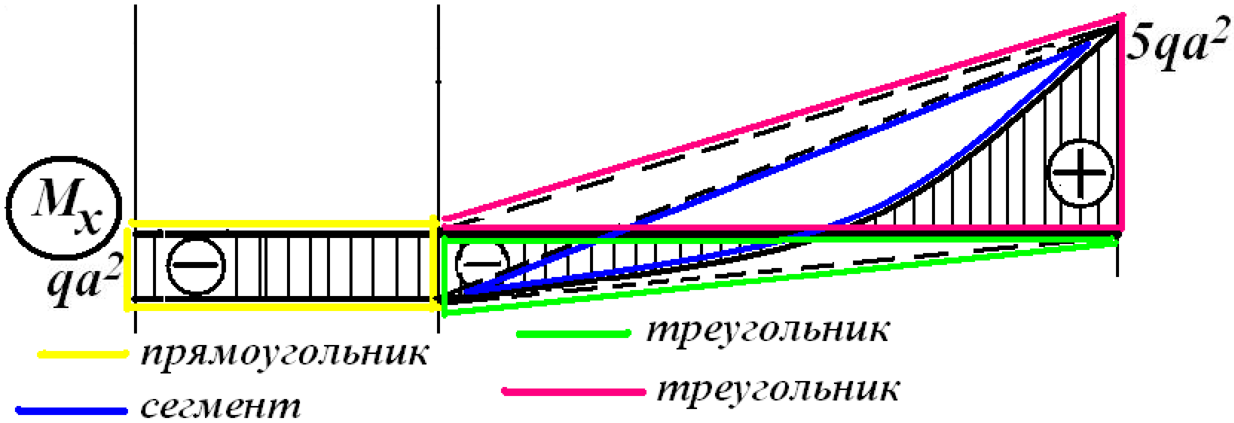
Таблица 1. – Результаты расчета внутренних силовых факторов

Показатель	**Силовой участок первый**		**Силовой участок второй**	
	начало	**конец**	**начало**	**конец**
z	*0*	*a*	*0*	*2a*
M_x	$-qa^2$	$-qa^2$	$-qa^2$	$5qa^2$
$\bar{M}_x$	*0*	*a*	*a*	*3a*

По результатам таблицы строим эпюры внутренних усилий

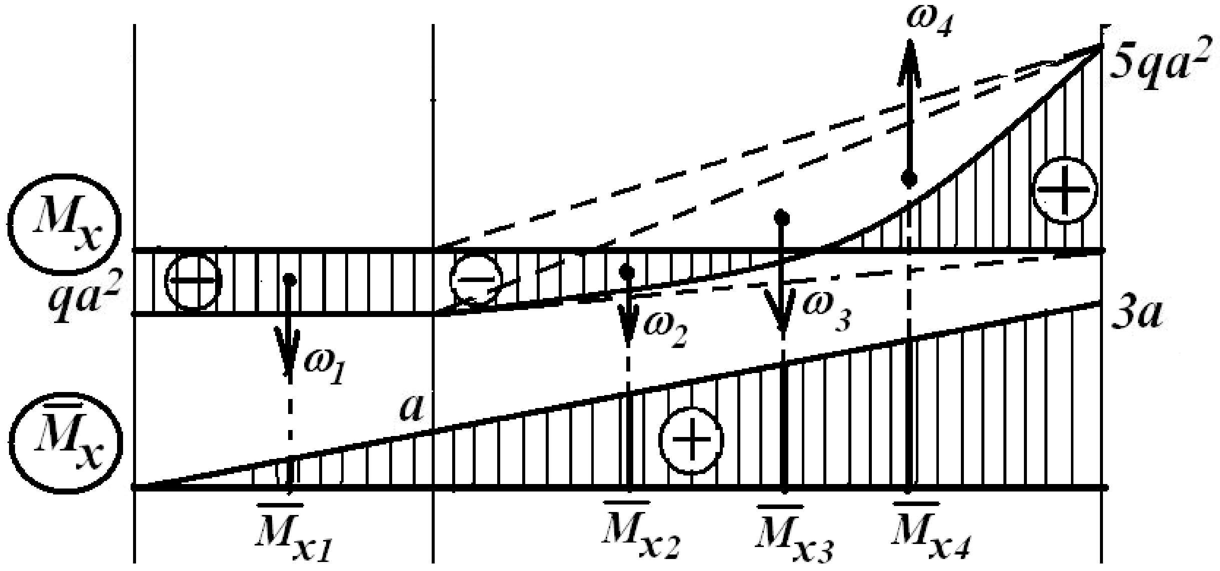


9. Разбить эпюру момента изгибающего для грузового состояния на простые фигуры: прямоугольник, треугольник, сегмент.



10. Отметить на схеме центр тяжести каждой полученной простой фигуры на эпюре момента изгибающего для грузового состояния

11. Напротив соответствующего центра тяжести каждой полученной простой фигуры показать на эпюре момента изгибающего для единичного состояния соответствующее значение (ординату) момента изгибающего единичного



12. Методом перемножения площадей эпюры момента изгибающего для грузового состояния на соответствующие ординаты момента единичного (способ Верещагина) определить грузовое перемещение

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[(-qa^2 \cdot a) \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot qa^2\right) \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{1}{3} \cdot 2a\right)\right) + \left(-\frac{1}{12} \cdot 5q \cdot (2a)^3\right) \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{1}{2} \cdot 2a\right)\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 5qa^2 \cdot 2a\right) \cdot \left(1 \cdot \left(a + \frac{2}{3} \cdot 2a\right)\right) \right] = \frac{17}{6} \cdot \frac{qa^4}{E \cdot I_x}$$

13. Методом перемножения площадей эпюры момента изгибающего для единичного состояния на соответствующие ординаты момента единичного под центрами тяжести простых фигур (способ Верещагина) определить единичное перемещение

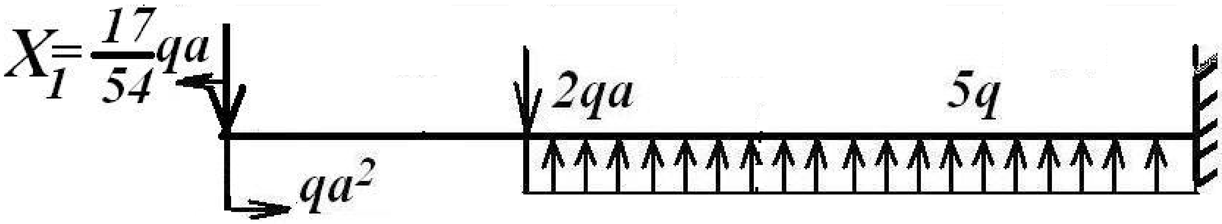
$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a\right) \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a\right) = 9\,\frac{a^3}{E \cdot I_x}$$

14. По полученным перемещениям используя канонические уравнения найти неизвестную реакцию

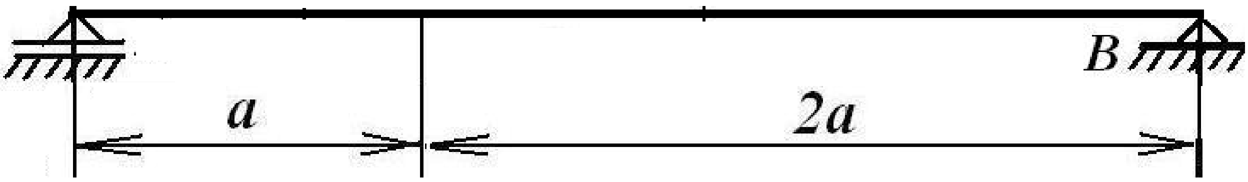
$$X_1 = -\frac{\frac{17}{6}\cdot\frac{qa^4}{E\cdot I_x}}{9\frac{a^3}{E\cdot I_x}} = -\frac{17}{54}\,qa$$

Знак минус в решении говорит о том, что направление неизвестной силы нужно изменить на противоположное – мы в начале задали направление вверх, значит меняем его и направляем силу X_1 вниз.

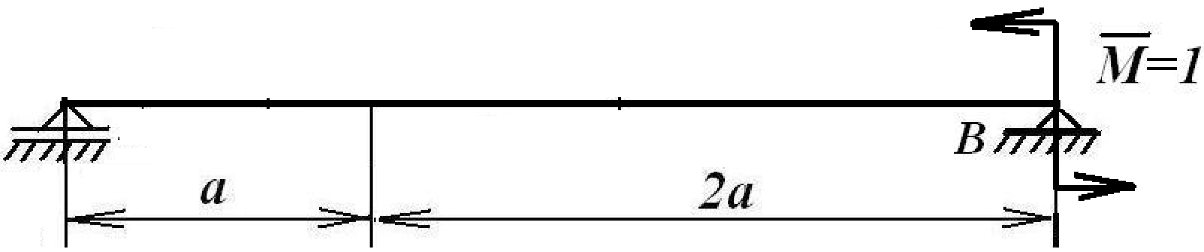
15. Начертить грузовое состояние с найденной неизвестной реакцией



16. Выбрать новую основную систему – оставляем опору, которую убирали в начале, и заменяем жесткую заделку на шарнирно-неподвижную опору.



17. В новой основной системе задать перемещение: угловое, равное единице в направлении отброшенной связи – момент единичный $\overline{M} = 1$.



18. Построить эпюры внутренних силовых факторов для грузового состояния с найденной неизвестной реакцией (с раскрытой статической неопределимостью)

Делим систему на два силовых участка z_1 и z_2

Участок первый

$$0 \le z_1 \le a$$

Сила поперечная

$$Q_y = -\frac{17}{54}qa$$

Момент изгибающий грузовой

$$M_x = -qa^2 - \frac{17}{54}qa \cdot z_1$$

Участок второй

$$0 \le z_2 \le 2a$$

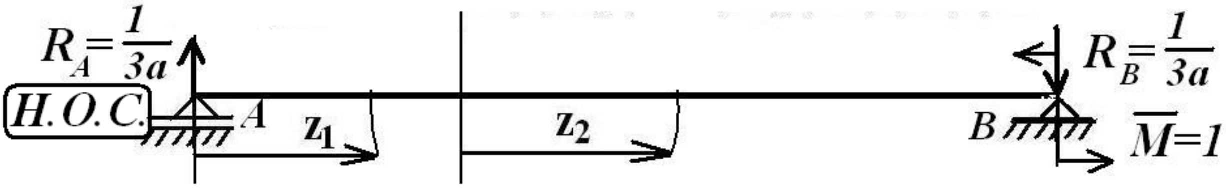
Сила поперечная

$$Q_y = -\frac{17}{54}qa - 2qa + 5q \cdot z_2$$

Момент изгибающий грузовой

$$M_x = -qa^2 - \ 2qa \cdot z_2 + 5q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} - \frac{17}{54}qa \cdot (a + z_2)$$

19. Построить эпюры момента изгибающего для новой основной системы



Здесь нужно определить реакции в опорах.

Находим их из условия равновесия системы – сумма моментов всех сил относительно точки равна нулю.

Сумма моментов всех сил относительно точки A:

$$-R_A \cdot 3a + 1 = 0$$

$$R_A = \frac{1}{3a}$$

Сумма моментов всех сил относительно точки B:

$$-R_B \cdot 3a + 1 = 0$$

$$R_B = \frac{1}{3a}$$

Делим систему на два силовых участка z_1 и z_2

Участок первый

$$0 \le z_1 \le a$$

Момент изгибающий единичный

$$\bar{M}_x = \frac{1}{3a} \cdot z_1$$

Участок второй

$$0 \le z_2 \le 2a$$

Момент изгибающий единичный

$$\bar{M}_x = \frac{1}{3a} \cdot (a + z_2)$$

Подсчитываем значения внутренних силовых факторов в начале и конце каждого участка. Результаты заносим в таблицу 1.

Таблица 1. – Результаты расчета внутренних силовых факторов

Показатель	**Силовой участок первый**		**Силовой участок второй**	
	начало	**конец**	**начало**	**конец**
z	*0*	*a*	*0*	*2a*
Q_y	$-\frac{17}{54}qa$	$-\frac{17}{54}qa$	$-\frac{125}{54}qa$	$\frac{415}{54}qa$
M_x	$-qa^2$	$-\frac{71}{54}qa^2$	$-\frac{71}{54}qa^2$	$\frac{73}{18}qa^2$
$\bar{M}_x$	*0*	$\frac{1}{3}$	*a*	1

По результатам таблицы строим эпюры внутренних усилий

На втором участке пойдет парабола с вершиной, так как эпюра силы поперечной пересекается с нулевой линией.

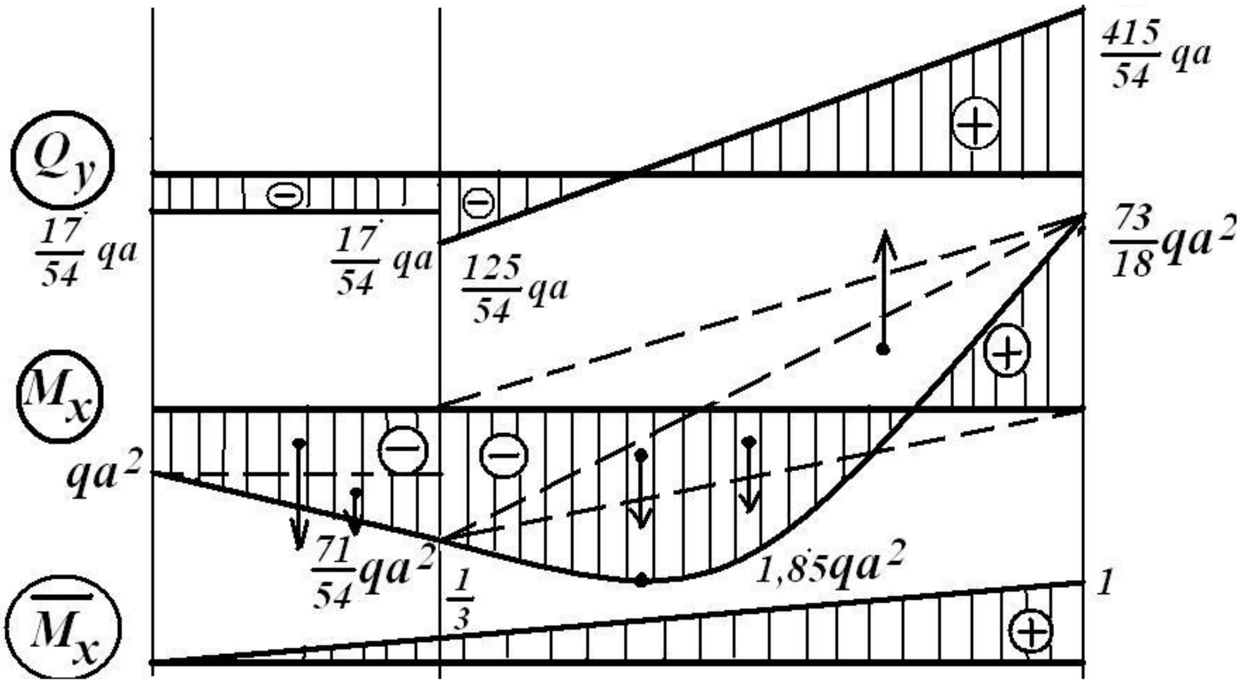
Приравниваем выражение силы поперечной на втором участке к нулю и находим расстояние пересечения с нулевой линией.

$$Q_y = -\frac{17}{54}qa - 2qa + 5q \cdot z_2 = 0$$

$$z_2 = \frac{25}{54}a$$

Подставляем данное значение в выражение момента изгибающего для грузового состояния на втором участке

$$M_x = -qa^2 - 2qa \cdot \frac{25}{54}a + 5q \cdot \frac{25}{54}a \cdot \frac{\frac{25}{54}a}{2} - \frac{17}{54}qa \cdot \left(a + \frac{25}{54}a\right) = -1{,}85qa^2$$



20. Определить перемещение угловое либо линейное.

Разбиваем эпюру момента изгибающего для грузового состояния на простые фигуры: прямоугольник, треугольник, сегмент.

Отмечаем на схеме центр тяжести каждой полученной простой фигуры на эпюре момента изгибающего для грузового состояния.

Напротив соответствующего центра тяжести каждой полученной простой фигуры показываем на эпюре момента изгибающего для единичного состояния соответствующее значение (ординату) момента изгибающего единичного.

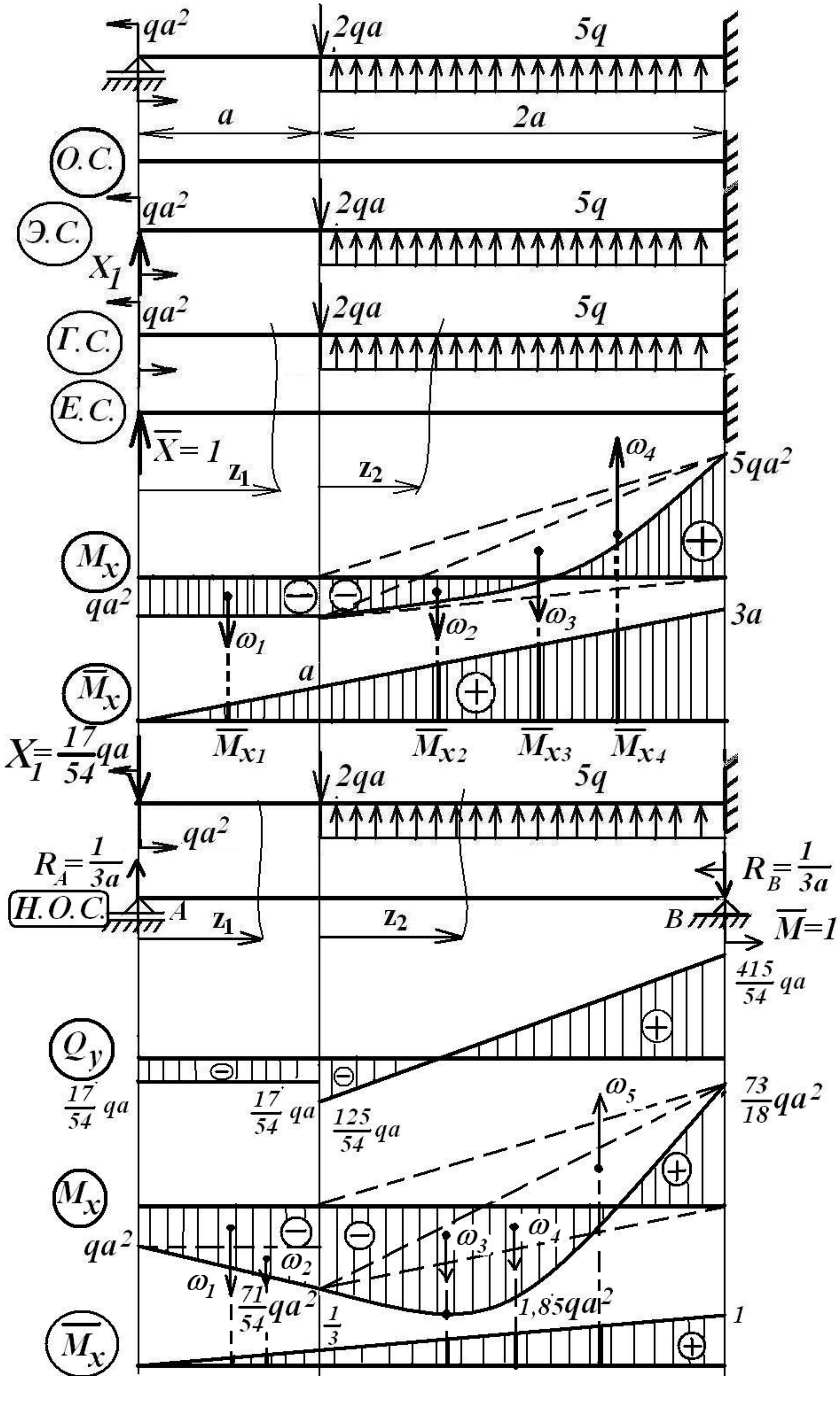
Методом перемножения площадей эпюры момента изгибающего для грузового состояния на соответствующие ординаты момента единичного (способ Верещагина) определяем угловое перемещение

$$\theta = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left[(-qa^2 \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{17}{54} qa^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{3a} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) \right.$$
$$+ \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{71}{54} qa^2 \cdot 2a \right) \cdot \left(\frac{1}{3a} \cdot \left(a + \frac{1}{3} \cdot 2a \right) \right) + \left(-\frac{1}{12} \cdot 5q \cdot (2a)^3 \right)$$
$$\left. \cdot \left(\frac{1}{3a} \cdot \left(a + \frac{1}{2} \cdot 2a \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{73}{18} qa^2 \cdot 2a \right) \cdot \left(\frac{1}{3a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \right) \right] = 0$$

Угловое перемещение равно нулю – задача решена верно!

Примечание. Полученное угловое перемещение должно быть равно нулю исходя из начальных условий работы системы – в жесткой заделке не может быть ни угловых, ни линейных перемещений.

Графическая часть задачи полностью показана на последнем листе (стр.11).



qa²
2qa
5q
a
2a
О.С.
Э.С.
X₁
Г.С.
Е.С.
X̄ = 1
z₁
z₂
ω₄
5qa²
Mx
qa²
ω₁
ω₂
ω₃
3a
a
M̄x
M̄x1
M̄x2
M̄x3
M̄x4
X₁ = 17/54 qa
R_A = 1/3a
R_B = 1/3a
Н.О.С.
A
B
M̄ = 1
415/54 qa
Qy
17/54 qa
125/54 qa
ω₅
73/18 qa²
71/54 qa²
1/3
1,85qa²
1