

## **Задание 2.**

**Расчёт на прочность статически неопределимой системы при растяжении (сжатии)  
с учётом температурных деформаций**

## **Задание и варианты к расчётно-проектировочной работе**

Статически неопределимая стержневая система загружена внешней нагрузкой (рис. 1, вариант выбирается по последней цифре номера зачетной книжки).

Первый стержень нагревается на  $\Delta t = 100^\circ \text{C}$ ,

а второй - изготовлен короче номинального размера на  $\delta_2 = 0,25 \text{ мм}$ .

### **Требуется:**

Определить усилия в стержнях, учитывая, что первый стержень стальной (модуль продольной упругости  $E_1 = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha_t = 1,25 \times 10^{-5}$ ); а второй – медный (модуль продольной упругости  $E_2 = 10^5 \text{ МПа}$ ).

Определить напряжения в стержнях и проверить их прочность, принимая допускаемые напряжения:

для стального стержня -  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,

для медного -  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

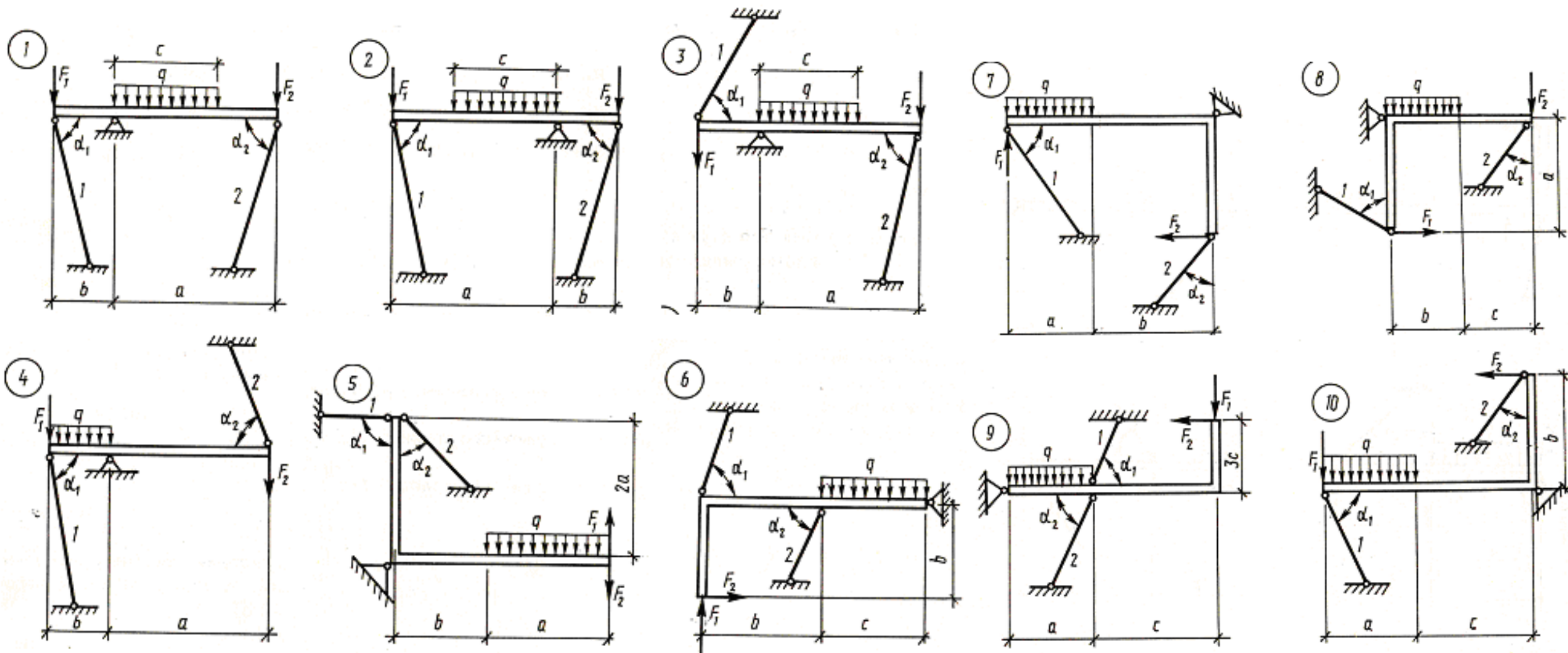
**Из условия прочности для наиболее нагруженного стержня определить допускаемую нагрузку  $[F]$ .**

**Числовые данные – в таблице 1** (вариант выбирается по предпоследней цифре номера зачётной книжки).

Таблица 1

Номер варианта	Нагрузка			Длина участков элемента и стержней, м					Площадь сечения, см <sup>2</sup>		Угол, град.	
	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q$ , кН/м	$a$	$b$	$c$	$l_1$	$l_2$	$A_1$	$A_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	-	60	-	5,4	2,6	0,8	1,0	1,2	6	12	90	45
2	30	-	-	4,8	2,8	1,2	1,4	1,0	8	10	45	90
3	20	-	-	4,6	2,4	1,4	1,0	1,4	6	8	90	30
4	-	-	8	4,4	2,8	0,8	1,4	1,2	6	6	60	90
5	-	25	-	4,8	2,6	0,6	1,4	1,0	10	8	90	120
6	-	20	-	4,6	2,6	1,4	1,6	1,4	6	10	135	90
7	50	-	-	5,2	2,4	1,0	1,4	1,2	8	12	90	135
8	-	-	12	4,8	3,2	0,8	1,0	1,4	6	6	60	90
9	-	-	10	4,8	2,6	1,4	1,2	1,6	8	8	90	30
0	-	40	-	4,6	2,4	1,2	1,2	1,0	12	8	30	90

# Схемы для расчета приведены на рис. 1



## Пример 1

Статически неопределимая стержневая система (рис. 1), загружена силой  $F = 400$  кН. Первый стержень нагревается на  $\Delta t = 50^\circ \text{C}$ , а второй - изготовлен короче номинального размера на  $\delta_2 = 0,5$  мм. Расстояния между характерными сечениями:  $a = 2,6$  м;  $b = 2,7$  м;  $c = 1,4$  м. Площади поперечных сечений стержней:  $A_1 = 26 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 13 \text{ см}^2$ .

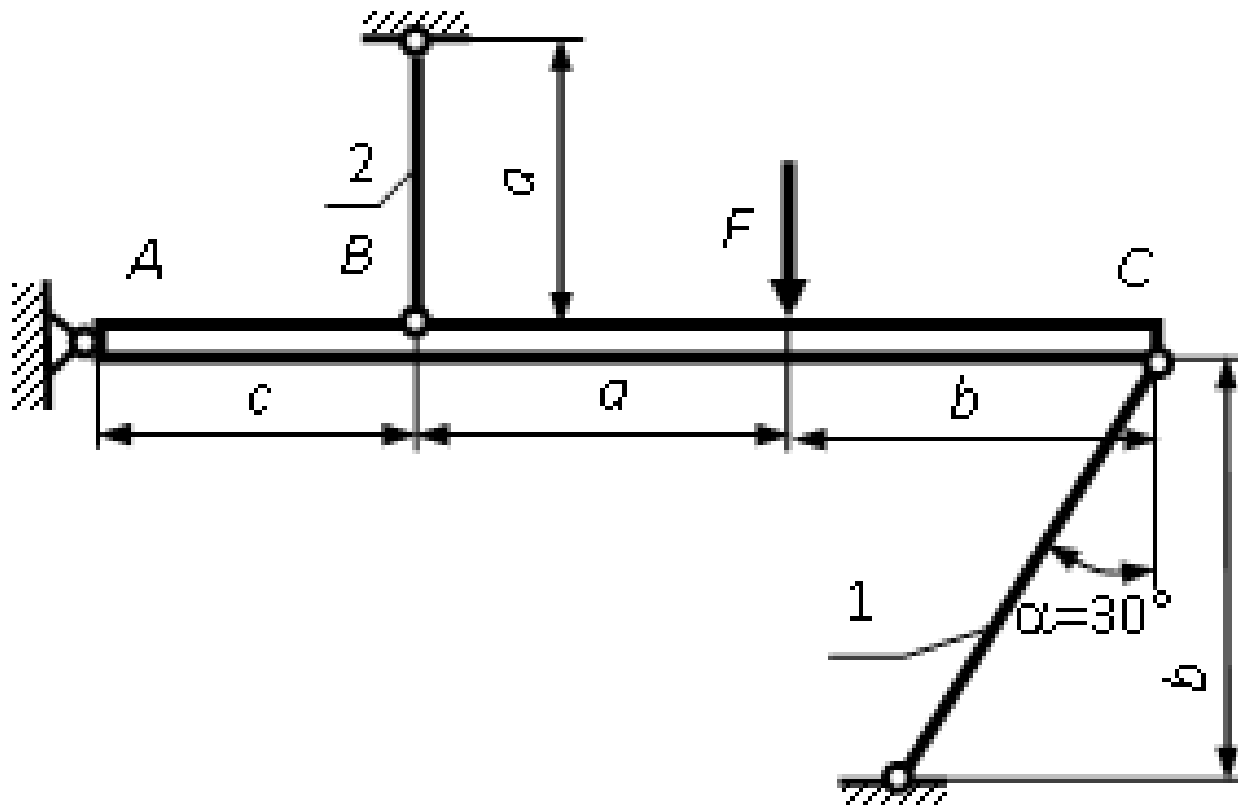


Рис. 1

Требуется:

1. Определить усилия в стержнях, учитывая, что первый стержень стальной (модуль нормальной упругости  $E_1 = 2 \times 10^5$  МПа; коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha_t = 1,25 \times 10^{-5}$ ); а второй – медный (модуль нормальной упругости  $E_2 = 10^5$  МПа).
2. Определить напряжения в стержнях и проверить их прочность, принимая допустимые напряжения: для стального стержня:  $[\sigma] = 160$  МПа, для медного:  $[\sigma] = 80$  МПа.

Из условия прочности для наиболее нагруженного стержня определить допустимую нагрузку  $[F]$ .

## Решение:

### 1. Статическая сторона задачи.

Определим длину первого стержня из геометрических соображений:

$$l_1 = 3,12 \text{ м.}$$

Рассекаем стержни. Неизвестные усилия  $N_i$  направляем в положительную сторону (на растяжение стержня, это правило знаков должно строго выдерживаться, рис. 2).

Уравнение равновесия используем одно:

$$\sum M_A = 0: N_2 c - F(c + a) - N_1 (a + b + c) \cos \alpha = 0.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$N_2 - 2,86F - 4,14N_1 = 0. \quad (4.1)$$

Степень статической неопределенности системы определяем как разницу между числом неизвестных усилий  $N_i$  (их два) и числом независимых уравнений равновесия (одно).

$$i = 2 - 1 = 1.$$

Система один раз статически неопределима. Необходимо одно дополнительное уравнение, которое получим, рассматривая геометрическую сторону задачи.

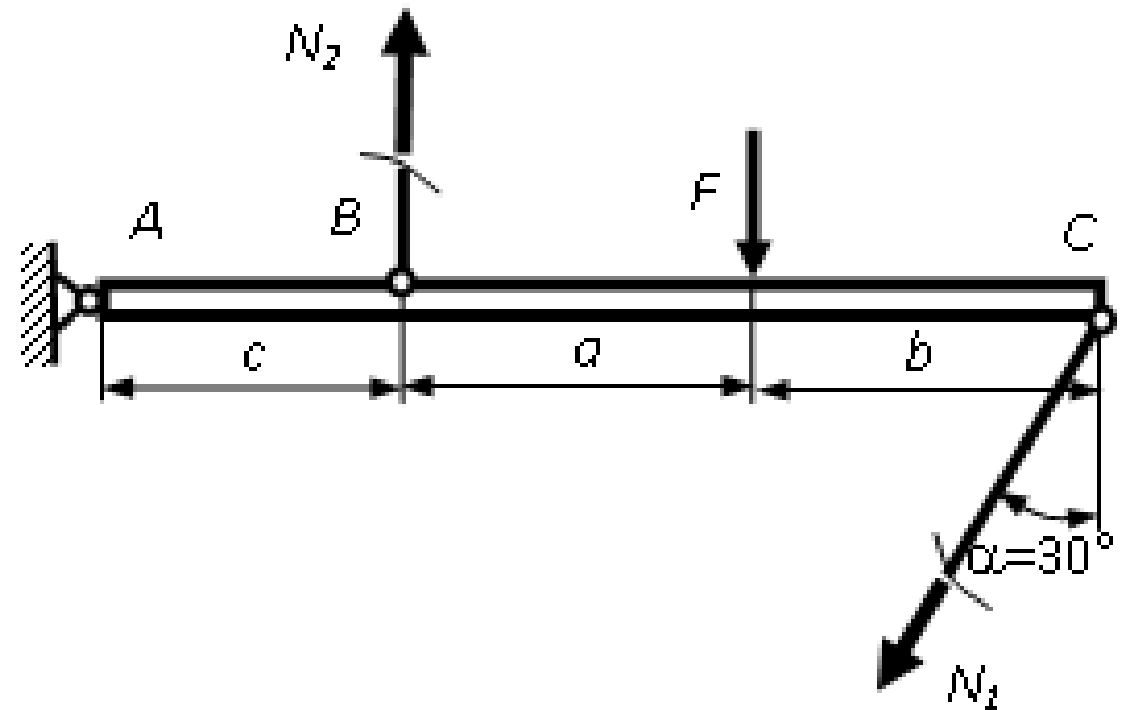


Рис. 2

## 2. Геометрическая сторона задачи

Показываем расчетную схему в деформированном виде (рис. 3). Задача в том, чтобы получить уравнение, связывающее деформации стержней.

На рисунке видны принятые упрощения при рассмотрении деформации системы – перемещения точек  $B$  и  $C$  показываем по прямой линии, а не по окружности с центром в точке  $A$ . При выделении удлинения первого стержня  $\Delta l_1$  принято из точки  $C_1$  проводить перпендикуляр для получения точки  $C_2$ . Принимаем  $\Delta l_1 = CC_2$ .

Удлинение второго стержня определяем геометрически с учётом заданной неточности изготовления  $\delta_2$ :

$$\Delta l_2 = BB_1 + \delta_2. \quad \text{Отсюда } BB_1 = \Delta l_2 - \delta_2.$$

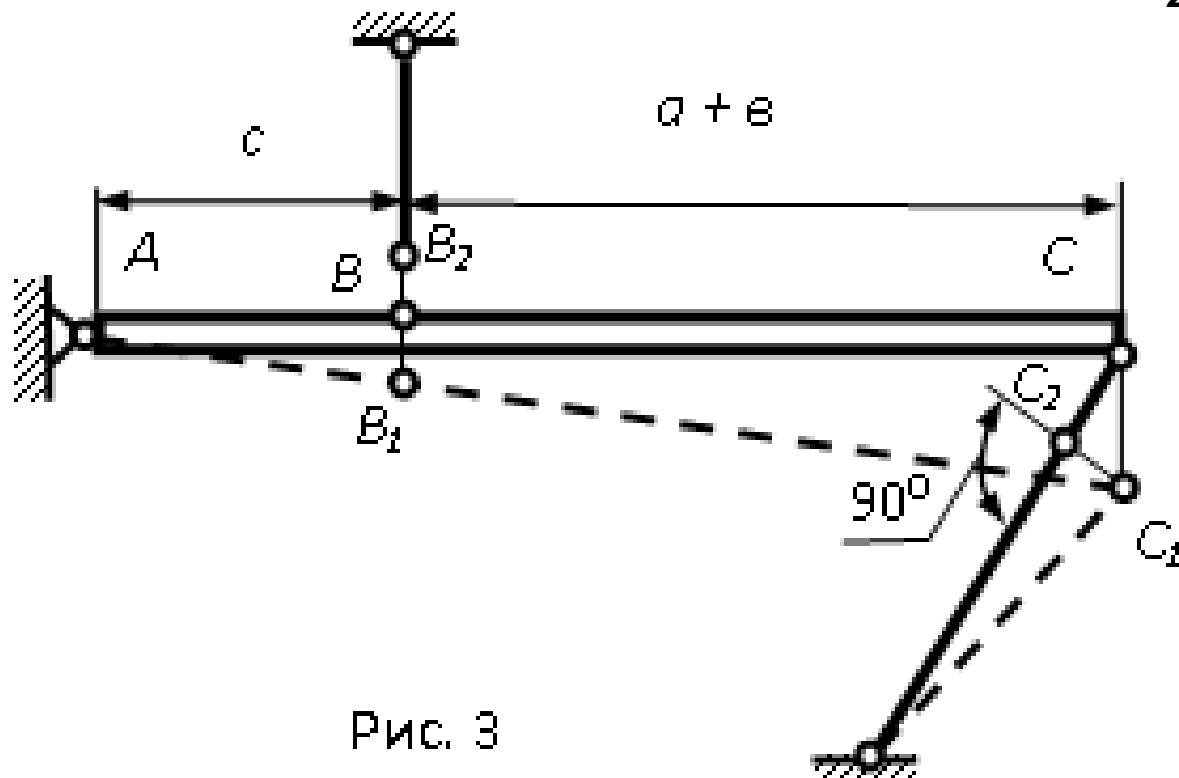


Рис. 3

Рассматриваем прямоугольный треугольник  $CC_1C_2$ :

$$CC_1 = CC_2 / \cos 30 = \Delta l_1 / \cos \alpha$$

из подобия треугольников  $CAC_1$  и  $BA B_1$ :

$$\frac{BB_1}{c} = \frac{CC_1}{a + b + c} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_2 - \delta}{c} = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha (a + b + c)}.$$

Откуда

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2 - \delta}{c} (a + b + c) \cos \alpha = 4,14 (\Delta l_2 - \delta_2). \quad (4.2)$$

### 3. Физическая сторона задачи.

Записываем уравнения закона Гука для каждого стержня:

$$-\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_t l_1 \Delta t_1; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \quad (4.3)$$

Знак минус у усилия первого стержня поставлен потому, что на рисунке деформированного состояния этот стержень сжат (это правило знаков должно строго выдерживаться). На этом этапе должны учитываться и температурные деформации.

### 4. Математическая сторона задачи.

Решаем совместно полученные уравнения (4.1)-(4.3) и вычисляем величины неизвестных усилий в стержнях.

Уравнения (4.3) подставляем в (4.2):

$$-\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} - \alpha_t l_1 t_1 = 4,14 \left( \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} - \delta_2 \right)$$

Получим:

$$N_1 = 20200 - 13,8 N_2 . \quad (4.4)$$

Подставляем (4.4) в (4.1) и получаем:  $N_2 = 21,1$  кН.

Из (4.4) получим:

$$N_1 = - 271 \text{ кН.}$$



**4. Проверяем прочность стержней. Вычисляем напряжения в стержнях:**

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{271 \cdot 10^3}{26 \cdot 10^2} = -104 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{21,1 \cdot 10^3}{13 \cdot 10^2} = 16,2 \text{ МПа};$$

**Условие прочности выполняется:**

$$|\sigma_i| \leq [\sigma];$$

$$104 < 160 \text{ МПа};$$

$$16,2 < 80 \text{ МПа}.$$

**Определяем допускаемую нагрузку,** которую можно приложить к системе.

**Вычисления нужно вести по наиболее напряжённому стержню, для этого заданную внешнюю нагрузку умножаем на минимальное отношение допускаемого напряжения и расчетного напряжения в стержнях:**

$$[F] = F \cdot [\sigma] / |\sigma_1| = 400 \times 160 / 104 = 604 \text{ кН}.$$