Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители Н.С. Дорофеева,
А.Б. Казачков

Томск 2013

Неопределенный интеграл. Сост. Н.С. Дорофеева, А.Б. Казачков. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 30 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор О.А. Сергеева

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Неопределенный интеграл» для студентов первого курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений и профилей подготовки специалистов и бакалавров. Содержат теоретические сведения, решения типовых задач и варианты контрольных заданий.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 4 от 10 декабря 2012 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо

с 1.09. 2013
до 1.09.2018

Оригинал-макет подготовлен В.В. Макаровой .

Подписано в печать
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнения контрольной работы по теме «Неопределенный интеграл».

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	понятие первообразной функции и неопределенного интеграла, их основные свойства и методы интегрирования.
Уметь:	правильно использовать нужные методы в зависимости от вида интеграла.
Владеть:	основными методами интегрирования.

Основной задачей интегрального исчисления является нахождение функции по ее известной производной. Например: известно ускорение движения, а необходимо определить скорость и закон движения.

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому для проверки правильности выполненного интегрирования достаточно от результата взять производную − должна получиться подынтегральная функция.

Тема 1. **ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА**

1. Основные сведения из теории

1.1. Понятие первообразной функции

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, если в каждой точке этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Задача отыскания первообразной по известной функции $f(x)$ решается неоднозначно.

Теорема. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная для этой функции на том же промежутке имеет вид $F(x)+C$, где C − некоторое произвольное число.

Из теоремы следует, что если функция $f(x)$ на промежутке имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных на этом промежутке.

1.2. Определение неопределенного интеграла и его основные свойства

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на данном промежутке называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$, при этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, выражение $f(x)\cdot dx$ - подынтегральным, а переменной интегрирования является x.

Итак, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывная на некотором промежутке, то для нее на этом промежутке существует первообразная, а следовательно, и неопределенный интеграл.

Отметим основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\int \kappa \cdot f(x)\,dx = \kappa \cdot \int f(x)\,dx$, где κ – константа, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

2. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$, т.е. неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных на некотором промежутке функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой слагаемой функции.

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$

Тема 2. **ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Задача интегрирования является достаточно трудной, т. к. нет правил для интегрирования частного, произведения, сложной и обратной функций. Искусство интегрирования базируется лишь на знании отдельных методов или приемов.

1. Метод непосредственного интегрирования

Определение. Непосредственным интегрированием называется интегрирование с помощью свойств и таблицы неопределенного интеграла с предварительными алгебраическими преобразованиями подынтегральной функции.

Замечания.

1. Перед интегрированием все корни от x необходимо представить в виде дробной степени x, т. е. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

2. Значения x в какой-либо степени, стоящие в знаменателе, перед интегрированием следует записать с отрицательной степенью, т. е. $\frac{1}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha}$, где $\alpha \neq 1$.

Примеры:

1.1. $\int\left(\frac{3}{x^3}+\sqrt[5]{x}+7-x^4\right)dx=3\int x^{-3}dx+\int x^{1/5}dx+7\int dx-$

$-\int x^4dx=3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{6/5}}{6/5}+7\cdot x-\frac{x^5}{5}+C=-\frac{3}{2x^2}+\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+7\cdot x-$

$-\frac{x^5}{5}+C$. (Использовали из таблицы формулы 1 и 2).

1.2. $\int\frac{(2x+7)^2}{x}dx=\int\frac{4x^2+28x+49}{x}dx=4\int\frac{x^2}{x}dx+$

$+28\int\frac{x}{x}dx+49\int\frac{1}{x}dx=4\int x\,dx+28\int dx+49\int\frac{1}{x}dx=4\cdot\frac{x^2}{2}+28x+$

$+49\cdot\ln|x|+C$. (Использовали из таблицы формулы 1 – 3).

1.3. $\int\frac{2-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx=2\int\frac{1}{5+x^2}dx-\int\frac{\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx=$

$=2\int\frac{1}{(\sqrt{5})^2+x^2}dx-\int\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}dx=2\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C.$

(Использовали из таблицы формулы 8 и 11).

1.4. $\int 3^x\cdot 4^{2x}dx=\int(3\cdot 4^2)^x dx=\int 48^x dx=\frac{48^x}{\ln 48}+C$.

(Использовали из таблицы формулу 5).

1.5. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=$

$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=$

$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. (Использовали основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и применили из таблицы формулы 12 и 13).

2. Подведение функции под знак дифференциала

Необходимо отметить, что табличные формулы интегрирования инвариантны относительно своей формы, т. е. вместо аргумента x может стоять любая функция, имеющая непрерывную производную, а именно: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(q(x))d\,q(x) = F(q(x)) + C$.

Примеры:

2.1. $\int \cos(e^x)\,de^x = \sin e^x + C$,

2.2. $\int \sin^3 x\,d\sin x = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$,

2.3. $\int 3^{\operatorname{tg} x} d\operatorname{tg} x = \dfrac{3^{\operatorname{tg} x}}{\ln 3} + C$,

2.4. $\int \sqrt[3]{\ln x}\,d\ln x = \dfrac{(\ln x)^{4/3}}{4/3} + C$.

Свойство инвариантности используется чаще всего после применения к подынтегральному выражению приема, который называется подведением под знак дифференциала. Суть метода заключается в преобразовании подынтегрального выражения с помощью формулы для дифференциала функции, которая используется справа налево: $\varphi'(x)\cdot dx = d(\varphi(x))$, т. е. одна из подынтегральных функций забирается под знак дифференциала.

Нижеследующая таблица помогает увидеть функцию, которую нужно убрать под знак дифференциала.

Таблица дифференциалов

1. $x\cdot dx = \dfrac{dx^2}{2}$

8. $\cos x\,dx = +d\sin x$

2. $x^2 dx = \frac{dx^3}{3}$

3. $x^n dx = \frac{dx^{n+1}}{n+1}$

4. $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d\,(\sqrt{x})$

5. $\frac{dx}{x} = d\ln x$

6. $e^x dx = d\,e^x$

7. $a^x dx = \frac{d\,a^x}{\ln a}$

9. $\sin x\,dx = -d\cos x$

10. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$

11. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$

12. $\frac{dx}{1+x^2} = d\,\mathrm{arctg}\,x$

13. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x$

Иногда к свойству инвариантности можно придти более легким путем, используя свойства дифференциала:

1) $dx = d\,(x \pm a)$ − под знаком дифференциала можно прибавлять и отнимать любую константу;

2) $dx = \frac{1}{к} d\,(кx)$ − под знаком дифференциала можно умножать и одновременно делить на константу $к$.

Примеры:

2.5. $$\int \left(e^{4x} - \cos 3x + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right) dx = \int e^{4x} dx - \int \cos 3x \cdot dx +$$

$$+\int \frac{dx}{\sin^2 x/2} = \frac{1}{4} \int e^{4x} d4x - \frac{1}{3} \int \cos 3x\, d\,3x + 2 \int \frac{d\ x/2}{\sin^2 x/2} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{3} \sin 3x - 2\ \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} + C\,.$$

2.6. $\int (7x+5)^{19}dx = \frac{1}{7}\int (7x+5)^{19}d\ (7x+5) = \frac{1}{7}\frac{(7x+5)^{20}}{20} +$

$+ C = \frac{(7x+5)^{20}}{140} + C$.

2.7. $\int \frac{\ln^5 x + x^3}{x}\,dx = \int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx + \int x^2 dx = \int \ln^5 x\, d\ln x +$

$+ \int x^2 dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + \frac{x^3}{3} + C$.

В интеграле $\int \frac{(\ln x)^5}{x}\,dx$ убрали $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала по формуле 5, а именно: $\frac{1}{x}dx = d\ln x$.

2.8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{1/2}\, d\operatorname{arctg} x = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{3/2} + C =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3} + C$.

Использовали формулу 12: $\frac{dx}{1+x^2} = d\operatorname{arctg} x$ и свойство инвариантности.

Метод подведения под знак дифференциала называют иначе устной подстановкой, т. к. данные интегралы можно было взять методом подстановки.

3. Метод подстановки (метод замены переменной)

Во многих случаях, если некоторую функцию от x обозначить через новую переменную, то интеграл записанный через новый аргумент окажется намного проще или табличным.

Примеры:

3.1. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x+5}}{\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{l} \text{Обозначим} \\ \operatorname{ctg} x + 5 = t, \quad \text{продифференцируем} \\ \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = 1\cdot dt \quad \text{слева и справа} \end{array} \right| =$

$= \int e^t \cdot dt = e^t + C = e^{\operatorname{ctg} x+5} + C$.

Рассмотрим интегралы, которые можно найти только методом подстановки.

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен в знаменателе.

Квадратный трехчлен необходимо преобразовать, выделив из него полный квадрат, а потом ввести подстановку.

3.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12} =$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 - 7x + 12 = (x - 7/2)^2 - \dfrac{49}{4} + 12 = \left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \\ \text{Обозначим } x - 7/2 = t, \text{продифференцируем слева и} \\ \text{справа}: 1\cdot dx = 1\cdot dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 1/4} = \int \frac{dt}{t^2 - (1/2)^2} = \frac{1}{2\cdot 1/2}\ln\left|\frac{t - 1/2}{t + 1/2}\right| + C = \ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C.$$

(Использовали табличную формулу 9 при $a = 1/2$).

3.3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{12 - 4x - x^2}} =$

$$= \left| \begin{array}{l} -x^2-4x+12=-(x^2+4x-12)= \\ -\left[(x+2)^2-4-12\right]=-\left[(x+2)^2-16\right]=16-(x+2)^2. \\ \text{Введем подстановку и продифференцируем ее} \\ x+2=t \to dx=dt,\ x=t-2 \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{(t-2)\cdot dt}{\sqrt{16-t^2}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{16-t^2}}-2\int\frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{16-t^2}}-$$

$$-2\int\frac{dt}{\sqrt{4^2-t^2}}=-\frac{1}{2}\int(16-t^2)^{-1/2}\cdot d(16-t^2)-2\int\frac{dt}{\sqrt{4^2-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(16-t^2)^{1/2}}{1/2}-2\arcsin\frac{t}{4}+C=-\sqrt{(16-(x+2)^2}-$$

$$-2\arcsin\frac{x+2}{4}+C.$$

4. Интегрирование иррациональных выражений

Рассмотрим интегралы от иррациональных функций вида $\int R\,(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma})\,dx$, где α, β, γ – дробные рациональные числа.

Этот тип интегралов приводится к рациональному виду с помощью подстановки $x=t^n$, где n – наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ, т. е. n выбирается так, чтобы извлеклись все присутствующие корни.

Пример:

4.1. $$\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l} x=t^6 \\ 1\cdot dx=6t^5\cdot dt \end{array}\right|=\int\frac{\sqrt[6]{t^6}\cdot 6t^5dt}{\sqrt[3]{t^{12}}-\sqrt{t^6}}=$$

$$=6\int\frac{t\cdot t^5dt}{t^4-t^3}\,dt=6\int\frac{t^6}{t^3(t-1)}\,dt=6\int\frac{t^3}{t-1}\,dt.$$

Дробь неправильная, т. к. степень в числителе больше степени знаменателя, необходимо выделить целую часть путем деления числителя на знаменатель столбиком:

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t-1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{t^3 - t^2} & t^2+t+1 \\ t^2 & \\ -\ \underline{t^2 - t} & \\ t & \\ -\ \underline{t - 1} & \\ 1 & \end{array}$$

т. е. $6\int \frac{t^3}{t-1}\,dt = 6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$

$$=6\left[\int t^2dt+\int t\,dt+\int dt+\int\frac{1}{t-1}\,d\,(t-1)\right] = 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|\right)+$$

$+\,C =$ (т. к. $x = t^6$, то $t=\sqrt[6]{x}$) $=\ 2(\sqrt[6]{x})^3+3(\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}+$

$$+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C\,.$$

5. Интегрирование тригонометрических выражений

Одним из рекомендуемых методов для таких выражений является универсальная подстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, из которой следует, что $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, если $\operatorname{tg}x=t$, тогда $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$; $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Следует отметить, что эти подстановки приводят к громоздким выражениям, поэтому они используются в основном, когда функции $\sin x$ и $\cos x$ находятся в знаменателе.

Примеры:

5.1. $$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\frac{(1+t^2+2t)}{(1+t^2)}} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\int (1+t)^{-2} d(1+t) =$$

$$= 2\cdot\frac{(1+t)^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{1+t} + C = \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

5.2. $$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| \operatorname{tg} x = t,\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot\frac{(1+t^2+1)}{(1+t^2)}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \left| t = \operatorname{tg} x \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Возможен и более простой вариант подстановок и преобразований. Так для интегралов вида $\int \sin^m x\, dx$, $\int \cos^n x\, dx$, $\int \sin^m x \cdot \cos^n dx\, dx$, если m и n четные, используют формулы, понижающие степень: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; если m или n, или обе степени нечетные, то меньшую нечетную степень разбивают на произведение первой степени и оставшейся четной, к которой применяют одну из формул $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ или $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, а затем функцию в четной степени обозначают через t.

5.3. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}\{1+\cos x)\right]^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos x+\cos^2 x)\, dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8\cdot 2}\int \cos 2x\, dx \cdot 2 = \frac{x}{4} + \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{16}\sin 2x + C.$$

5.4. $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^5 x\, dx =$

$$= \int \sin x (1-\cos^2 x)\cos^5 x\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x \cdot dx = 1 \cdot dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (1-t^2)\cdot t^5 \cdot (-dt) = \int (t^2-1)t^5 dt = t^7 dt - \int t^5 dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C =$$

$$= \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

6. Метод интегрирования по частям

Нахождение интеграла с помощью формулы $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, где u и v дифференцируемые функции от x, называется интегрированием по частям.

Метод рекомендуется использовать, если под знаком интеграла трансцендентные функции или их произведения на алгебраические функции. С помощью указанной формулы нахождение интеграла $\int u \cdot dv$ сводится к отысканию более простого интеграла $\int v \cdot du$. Основная трудность метода заключается в умении правильно разбить данное подынтегральное выражение на множители u и dv. В общем случае рекомендуется за u брать функцию, которая упрощается при дифференцировании, а за dv

ту часть подынтегрального выражения, которая легко интегрируется.

Более конкретно можно дать следующие приоритетные указания для выбора u.

1. Если под знаком интеграла есть логарифмическая или обратная тригонометрическая функция, то именно она выбирается за u.

2. Если этих функций нет, но под знаком интеграла в качестве множителя присутствует многочлен, то он обозначается за u.

3. Если под знаком интеграла произведение функций показательной на тригонометрическую то за u выбирается любая из них. Интегралы такого вида называются круговыми или кольцевыми. Круговыми являются и интегралы от некоторых сложных функций. Следует отметить, что в случае необходимости формулу интегрирования по частям можно применять многократно.

Примеры:

6.1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int x^{-3/2}\cdot \ln x\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^{-3/2} dv & v = \int x^{-3/2} dx = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \frac{-2}{x^{1/2}} = \frac{-2}{\sqrt{x}} \end{array} \right| =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x - \int -2x^{-1/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{x}}\ln x + 2\int x^{-3/2}\,dx =$$

$$= -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} + 2\cdot\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C\,.$$

6.2. $\int (x^2 + x + 1)\,e^x\,dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 + x + 1 & du = (x^2 + x + 1)' dx = (2x+1)\, dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} =$$

$= (x^2 + x + 1) \cdot e^x - \int (2x+1) \cdot e^x dx =$ (еще раз к последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям) =

$$= \begin{vmatrix} u = 2x + 1 & du = (2x+1)'\, dx = 2\, dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = (x^2 + x + 1) \cdot e^x -$$

$$-[(2x+1)\, e^x - \int e^x \cdot 2dx] = (x^2 + x + 1) \cdot e^x - (2x+1) e^x + 2 \int e^x dx =$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot e^x - (2x+1) e^x + 2e^x + C\,.$$

6.3. $\int 2^x \cdot \cos x\, dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = 2^x & du = (2^x)'\, dx = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \int \cos x\, dx = \sin x \end{vmatrix} =$$

$= 2^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2^x \cdot \ln 2\, dx = 2^x \cdot \sin x - \ln 2 \int 2^x \sin x\, dx =$
= (к последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям) $= \begin{vmatrix} u = 2^x & du = (2^x)'\, dx = 2^x \cdot \ln 2\, dx \\ dv = \sin x\, dx & v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{vmatrix} =$

$$= 2^x \cdot \sin x - \ln 2 \cdot [2^x (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx] =$$

$$= 2^x \sin x + 2^x \ln 2 \cos x - (\ln 2)^2 \cdot \int 2^x \cos x\, dx\,.$$

В результате интегрирования получился исходный интеграл, поэтому такие интегралы называются кольцевыми.

Обозначим $\int 2^x \cdot \cos x\, dx = J$, тогда получится алгебраическое уравнение относительно *J*, решая которое найдем сам интеграл. Имеем $J = 2^x \sin x + 2^x \ln 2 \cos x - (\ln 2)^2 \cdot J$

$$J \cdot (1 + \ln^2 2) = 2^x \sin x + 2^x \ln 2 \cos x$$

$$J = \frac{2^x (\sin x + \ln 2 \cos x)}{1 + \ln^2 2}\,.$$

Окончательно: $\int 2^x \cos x \, dx = \dfrac{2^x (\sin x + \ln 2 \cos x)}{1 + \ln^2 2} + C.$

7. Интегрирование рациональных дробей

Дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется рациональной, если ее числитель и знаменатель – алгебраические многочлены, т. е. $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m \cdot x^m}$. Если степень многочлена в числителе меньше, чем степень многочлена в знаменателе (т. е. $n < m$), то дробь правильная, если же $n \geq m$, то дробь неправильная. Методика получения правильной дроби из неправильной уже продемонстрирована в примере 4.1..

Алгоритм интегрирования рациональной дроби:

1. Получить правильную дробь.
2. Разложить знаменатель дроби на простые линейные или квадратичные (если $D < 0$) множители.
3. Представить дробь в виде суммы простейших дробей с неизвестными буквенными коэффициентами, используя нижеуказанную таблицу.
4. Вычислить неизвестные коэффициенты либо методом неопределенных коэффициентов, либо методом частных значений, либо комбинируя оба метода.
5. Найти интегралы от простейших дробей.

Следует отметить, что число простейших дробей зависит от числа корней многочлена, стоящего в знаменателе. Существуют теоремы, утверждающие, что всякий многочлен степени n имеет n корней и может быть представлен в виде произведения линейных сомножителей, соответствующих действительным корням, и квадратичных сомножителей, которые соответствуют парам сопряженных комплексных корней ($D < 0$).

Усвоить методику разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей поможет нижеследующая таблица.

Вид множителя	Число дробей	Вид простых дробей, соответствующих данному множителю в знаменателе
линейный $(x \pm a)^{к}$	$к$	$\frac{A_1}{(x \pm a)} + \frac{A_2}{(x \pm a)^2} + \frac{A_3}{(x \pm a)^3} + \ldots + \frac{A_к}{(x \pm a)^к}$
квадратичный $(x^2 + px + q)^s$	s	$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s}$

Напомним методику интегрирования основных типов простейших дробей.

I тип $\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \int \frac{d\,(x-a)}{(x-a)} = A \ln \left| x-a \right| + C$

II тип $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m}\, d\,(x-a) = A\, \frac{(x-a)^{1-m}}{1-m} + C$

III тип $\int \frac{M \cdot x + N}{x^2 + px + q}\, dx$ − подынтегральная дробь этого типа содержит в знаменателе квадратный трехчлен, из которого нужно выделить полный квадрат, ввести подстановку и свести данный интеграл к табличным (см. стр. 12).

Примеры:

7.1. $\int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$ - подынтегральная дробь правильная.

Разложим ее знаменатель на множители: $x^3 + x^2 - 2x =$

$= x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$, где $x = 1$ и $x = -2$ корни квадратного трехчлена $(x^2 + x - 2)$, найденные с помощью дискриминанта D.

Подынтегральную дробь с помощью таблицы разложим на сумму трех простейших дробей:

$$\frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Справа дроби приведем к общему знаменателю, тогда числители дадут следующее уравнение:

$$2x + 3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + Cx(x-1).$$

Для определения буквенных коэффициентов применим метод частных значений. Полагаем: $x - 1 = 0$ (т. е. $x = 1$), тогда $B = 5/3$. Если $x + 2 = 0$ (т. е. $x = -2$), то $C = -1/6$. При $x = 0$ получим $A = -3/2$. Следовательно,

$$\int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{-3/2}{x} + \frac{5/3}{x-1} + \frac{-1/6}{x+2}\right] dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{d(x+2)}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + C.$$

7.2. $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2}\,dx$. Подынтегральная дробь неправильная. Разделим числитель на знаменатель столбиком:

$$\begin{array}{r|l} -\;2x^5 + 6x^3 + 1 & x^4 + 3x^2 \\ \cline{2-2} 2x^5 + 6x^3 \phantom{{}+1} & 2x \\ \cline{1-1} 1. & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2}\, dx = \int \left[2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2} \right] dx = 2 \int x dx + \int \frac{1}{x^2 (x^2 + 3)}\, dx.$$

(Знаменатель дроби разложили на множители).

Подынтегральную дробь с помощью таблицы разложим на сумму простейших дробей: $\dfrac{1}{x^2 (x^2 + 3)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{M \cdot x + N}{x^2 + 3}$.

Приведем дроби справа к общему знаменателю, т. к. он будет одинаковым слева и справа, то его можно отбросить, тогда будет равенство числителей:

$$1 = A\,(x^2 + 3) + B \cdot x\,(x^2 + 3) + (M \cdot x + N) \cdot x^2 .$$

Сначала применим метод частных значений. Примем $x = 0$ и подставим в указанное уравнение, тогда $1 = 3A$, т. е. $A = 1/3$. Остальные коэффициенты найдем методом сравнения коэффициентов слева и справа перед одинаковыми степенями x, т. е. решаем систему

$$\begin{cases} B + M = 0 \quad (\text{перед}\, x^3) \\ A + N = 0 \quad (\text{перед}\, x^2) \\ \quad 3B = 0 \quad (\text{перед}\, x). \end{cases}$$

В результате имеем $A = 1/3$, $B = 0$, $N = -1/3$, $M = 0$. Следовательно,

$$\int \frac{1}{x^2 (x^2 + 3)}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно $\displaystyle\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 - 3x^2} dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

7.3. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 8}\, dx$. Подынтегральная дробь правильная, поэтому начинаем работать со второго пункта алгоритма. Используем формулу $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ для разложения знаменателя на множители. В результате

$$\int\frac{x^2-4x}{x^3+8}\,dx=\int\frac{x^2-4x}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,dx\,.$$

С помощью таблицы разложим подынтегральную дробь на сумму двух простейших дробей: $\dfrac{A}{x+2}$ – для первого множителя, т. к. он линейного типа и дробь $\dfrac{M\cdot x+N}{x^2-2x+4}$ для второго множителя, т. к. он квадратичного вида. Имеем равенство дробей:

$$\frac{x^2-4x}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{M\cdot x+N}{x^2-2x+4}.$$

Приведем дроби справа к общему знаменателю, в числителе раскроем скобки и сделаем приведение подобных членов. Т. к. знаменатели слева и справа одинаковые, то их можно отбросить. В результате

$$x^2-4x=(A+M)\,x^2+(N+2M-2A)\,x+(2N+4A)\,.$$

Для нахождения буквенных коэффициентов применим метод неопределенных коэффициентов, т. е. приравняем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями x. Решая систему, найдем A, M, N.

$$A=1;\; M=0;\; N=-2\,.$$

$$\begin{cases} 1=A+M & (\text{перед } x^2)\\ -4=N+2M-2A & (\text{перед } x^1)\\ 0=2N+4A & (\text{свободные члены}).\end{cases}$$

Тогда подынтегральная дробь $\dfrac{x^2-4x}{x^3+8}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{-2}{x^2-2x+4}$, последняя дробь в знаменателе имеет квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Выделим из него полный квадрат и введем подстановку для интеграла:

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$; $x - 1 = t$; $dx = dt$, тогда

$x^2 - 2x + 4 = t^2 + 3$ и $\int \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 8} dx = \int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} =$

$$= \int \frac{d(x+2)}{x+2} - 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \ln|x+2| - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln|x+2| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент должен выполнять контрольное задание по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Найти неопределенные интегралы методами, рассмотренными выше:

Вариант 1

1. $\int \left(\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$
2. $\int \frac{(3e)^x + e^{2x}}{e^x} dx$
3. $\int \left(e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{4 - 3x^2}} \right) dx$
4. $\int \cos x \sin^5 x \, dx$
6. $\int x^2 e^{-x} dx$
7. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2 (x+1)} dx$
8. $\int \frac{3x+1}{x^2 + 2x + 3} dx$
9. $\int \sin^7 x \cos^6 x \, dx$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(5x+2)^3}}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x}$

Вариант 2

1. $\int \left(\pi^2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\frac{4}{x^3}\right)dx$

2. $\int (x-5)^2\cdot x^3 dx$

3. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 3x}-\frac{1}{\sqrt{9x^2-4}}\right)dx$

4. $\int e^{2x}\sin e^{2x}dx$

5. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,dx$

6. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

7. $\int \frac{x^3-4x^2+6}{(x+1)^2\,(x^2+2)}\,dx$

8. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+10}\,dx$

9. $\int \cos^3 x\sin^8 x\,dx$

10. $\int \frac{dx}{4-2\cos^2 x}$

Вариант 3

1. $\int \left(e+\frac{7}{x}-\sqrt[4]{x}\right)dx$

2. $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,dx$

3. $\int \left(\cos 3x-\frac{1}{9+x^2}\right)dx$

4. $\int x^2 e^{x^3}dx$

6. $\int x^4 \ln x\,dx$

7. $\int \frac{x^2+1}{x\,(x-1)^2}\,dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

9. $\int \cos^4 3x\sin^3 3x\,dx$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}}$

10. $\int \dfrac{dx}{2\sin^2 x-\cos^2 x}$

Вариант 4

1. $\int \left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt[5]{x}\right)dx$

2. $\int \dfrac{(\sin 2x+e^x \sin x)}{\sin x}\,dx$

3. $\int \left(\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-1}}\right)dx$

4. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

6. $\int \ln(x+9)\,dx$

7. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

8. $\int \dfrac{(x-1)}{x^2+x+1}\,dx$

9. $\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx$

10. $\int \dfrac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$

Вариант 5

1. $\int \left(7-\dfrac{6}{x^4}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

2. $\int \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 dx$

3. $\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 8x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x^2+4}}\right)dx$

6. $\int (15-x)\cdot 3^x\,dx$

7. $\int \dfrac{7x-22}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$

8. $\int \dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,dx$

4. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} dx$

5. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

9. $\int \cos^7 x \sin^3 x\, dx$

10. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

Вариант 6

1. $\int \left(\sqrt{3} - \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} \right) dx$

2. $\int 2^{3x} \cdot 3^x dx$

3. $\int \left(e^{x/7} + \frac{1}{3x^2 - 4} \right) dx$

4. $\int \frac{5^{\operatorname{arctg} x}}{2(1+x^2)} dx$

5. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} dx$

6. $\int \frac{6x+1}{\cos^2 x} dx$

7. $\int \frac{3x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

8. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+10} dx$

9. $\int \cos^5 x\, dx$

10. $\int \frac{dx}{3\cos x}$

Вариант 7

1. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - 4 - \frac{1}{x^3} \right) dx$

2. $\int (2x+3)\, x^3 dx$

6. $\int (x-4) \sin 2x\, dx$

7. $\int \frac{x^3+1}{x^3 - x^2} dx$

3. $\int\left(\cos\left(\frac{x}{5}\right)-\frac{2}{\sqrt{7-2x^2}}\right)dx$

4. $\int\sqrt[6]{1-2x^3}\cdot x^2dx$

5. $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

8. $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$

9. $\int\sin^2 6x\,dx$

10. $\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$

Вариант 8

1. $\int\left(5x-\sqrt[7]{x}+\frac{3}{x^3}\right)dx$

2. $\int\frac{(x^3-3)}{x}dx$

3. $\int\left(\sin 6x+\frac{3}{5x^2-3}\right)dx$

4. $\int\sqrt[4]{\cos x}\cdot\sin x\,dx$

5. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

6. $\int\frac{7x-3}{\sin^2 x}dx$

7. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$

8. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

9. $\int\sin^3 2x\cdot\cos^6 2x\,dx$

10. $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$

Вариант 9

1. $\int\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{5}\right)dx$

2. $\int\frac{x^4-1}{x-1}dx$

6. $\int\frac{3x}{\cos^2 5x}dx$

7. $\int\frac{1}{(2x-3)(4x+1)}dx$

3. $\int \left(e^{-3x} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2+7}} \right) dx$

4. $\int \dfrac{\cos x \, dx}{1+2\sin x}$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

8. $\int \dfrac{3x-2}{x^2-4x+5}\, dx$

9. $\int \sin^9 x \cdot \cos^3 x \, dx$

10. $\int \dfrac{dx}{4\sin^2 x - 3\cos^2 x}$

Вариант 10

1. $\int \left(\dfrac{x^4}{2} - 7\sqrt{x} + 9 \right) dx$

2. $\int \dfrac{1-x}{x^2-x}\, dx$

3. $\int \left(\sin \dfrac{x}{9} - \dfrac{3}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$

4. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x - 7)}$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

6. $\int x \cdot 2^{x+5}\, dx$

7. $\int \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)}\, dx$

8. $\int \dfrac{3x-1}{x^2-2x+5}\, dx$

9. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^3 3x \, dx$

10. $\int \dfrac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2009. – 420 с.

2. Математический анализ в вопросах и задачах: учебное пособие / В.Ф. Бутузов [и др.]. – СПб.: Лань, 2008. – 480 с.

3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – Т. 2. – 544 с.

Дополнительная литература

1. Хавинсон, С.Я. Лекции по интегральному исчислению: учебное пособие для втузов / С.Я. Хавинсон. – М.: Высшая школа, 1976. – 198 с.

2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. Гл. IX – X. С. 208 – 256.

3. Лесняк, Л.И. Интеграл и его приложения / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 264 с.