Практикум по теме 4

Целью практикума является более глубокое усвоение материала контента темы 4, а также развитие следующих навыков:

- представление транспортной задачи и задачи о назначениях как задачи линейного программирования;
- построение математической модели для задачи о кратчайшем пути и максимальном потоке в сети;
- нахождение допустимого решения транспортной задачи методами северо-западного угла, минимального элемента, методом Фогеля;
- применение алгоритма метода потенциалов для нахождения оптимального решения транспортной задачи;
- нахождение оптимального решения транспортной задачи средствами MS-Excel;
- нахождение максимального потока и минимального сечения в сети с пропускными способностями.

Перед решением заданий практикума рекомендуется внимательно изучить материал контента темы 4 и провести самостоятельный анализ всех разобранных примеров.

Решение типовых задач

<u>ТЗ 4.1.</u> Написать математическую модель для транспортной задачи

$$a = \ 15,25,5\ , \ b = \ 5,15,15,10\ , \ C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 10 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u> Пусть переменная x_{ij} задает объем перевозок продукции из пункта производства A_i в пункт потребления B_j, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$, тогда план перевозок имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}.$$

Цель задачи – найти план перевозок, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные расходы z:

$$z = 10x_{11} + 0x_{12} + 20x_{13} + 11x_{14} + 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} + 20x_{24} +$$
$$+ 0x_{31} + 14x_{32} + 16x_{33} + 18x_{34}$$

при выполнении ограничений для пунктов производства:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=15,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=25,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5,$$

и для пунктов потребления:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=5,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=15,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=15,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=10.$$

Переменные задачи должны также удовлетворять условию целочисленности и ограничениям на знак:

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4},\ \ x_{ij} - \text{целые}.$$

<u>ТЗ 4.2</u>. Найти начальное допустимое решение транспортной задачи из ТЗ 4.1 методом северо-западного угла, минимального элемента и методом Фогеля.

- Метод северо-западного угла:

10 5	0 10	20	11	15
12	7 5	9 15	20 5	25
0	14	16	18 5	5
5	15	15	10	

Стрелки указывают порядок заполнения клеток, значения переменных, соответствующих незаполненным клеткам, равны нулю.

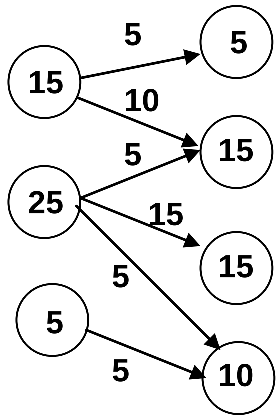
Опорный план:

$$X^1=\begin{pmatrix}5 & 10 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 15 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции:

$$z\ \ X^1\ =5\cdot 10+5\cdot 7+15\cdot 9+5\cdot 20+5\cdot 18=410.$$

Сетевая интерпретация решения:



- Метод минимального элемента:

Компоненты решения находятся в следующем порядке: x_{12}, x_{31}, x_{23}, x_{24}.

$\boxed{10}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{11}$ 0	15
$\boxed{12}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 10	25
$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$ 0	$\boxed{16}$ 0	$\boxed{18}$ 0	5
5	15	15	10	

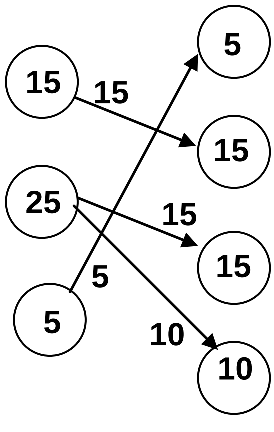
Опорный план имеет вид:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции:

$$z\left(X^2\right) = 5\cdot 0 + 10\cdot 20 + 15\cdot 9 + 5\cdot 0 = 335.$$

Сетевая интерпретация решения:



- Метод Фогеля:

						штрафы		
10 0	0 5	20 0	11 10	15		10	11	11
12 0	7 10	9 15	20 0	25		2	2	13*
0 5	14 0	16 0	18 0	5		14*	–	–
5	15	15	10					

10	7	7	7	штрафы
–	7	11*	9	
–	7	–	9	

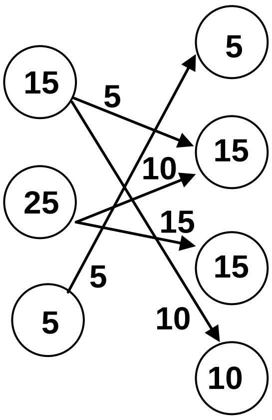
Максимальный штраф на каждом шаге помечен звездочкой (*). Опорный план:

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции:

$$z\left(X^3\right) = 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 5 = 315.$$

Сетевая интерпретация решения:



<u>ТЗ 4.3.</u> Найти оптимальное решение транспортной задачи из примера ТЗ 4.1.

<u>Решение:</u> Решим задачу, используя начальное решение X^0, найденное методом северо-западного угла.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции:

$$z(X^0) = 5\cdot 10 + 5\cdot 7 + 15\cdot 9 + 5\cdot 20 + 5\cdot 18 = 410.$$

Итерация 1.

Строим множество

$$S_0 = \{(i,j) \mid x_{ij}^0 > 0\} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

Строим систему уравнений для начального опорного плана $v^0{}_j - u^0{}_i = c_{ij}, (i,j) \in S_0$:

$$v_1^0 - u_1^0 = 10, \quad v_3^0 - u_2^0 = 9,$$
$$v_2^0 - u_1^0 = 0, \quad v_4^0 - u_2^0 = 20,$$
$$v_2^0 - u_2^0 = 7, \quad v_4^0 - u_3^0 = 18.$$

Полагая $u_1^0 = 0$, находим решение системы:

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = -7, \quad u_3^0 = -5,$$
$$v_1^0 = 10, \quad v_2^0 = 0, \quad v_3^0 = 2, \quad v_4^0 = 13.$$

Строим матрицу невязок для плана $X^0 = (x_{ij}^0)$:

$$C_0 \equiv (c_{ij}^0) = (c_{ij} - (v_j^0 - u_i^0)),$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 & -2 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 9 & 23 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица невязок содержит отрицательные элементы, что говорит о неоптимальности решения X^0. Минимальный отрицательный элемент матрицы $\Delta_0 \equiv c_{31}^0 = -15$, соответствующую переменную x_{31} вводим в базис.

Рассматриваем этот элемент (помечен знаком $*$) и все базисные перевозки плана $X^0 = (x_{ij}^0)$. Строим цикл из этих элементов, начинающийся в выделенном элементе:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0^* & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Пропускаем максимально возможный поток по циклу в плане X_0. Величина максимально возможного потока равна $\theta_0 = x_{11} = 5$, соответствующая переменная x_{11} выводится из базиса.

Получаем новый план X^1:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

число ε ставим на месте базисных переменных, равных нулю, т. к. полученный опорный план является вырожденным.

Значение целевой функции:

$$z(X^1) = z(X^0) + \Delta_0\theta_0 = 410 - 5 \cdot 15 = 335.$$

<u>Итерация 2.</u>

Строим множество

$$S_1 = \ (i,j) \big| x_{ij}^1 > 0 \ = \ (1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4) \ .$$

Строим систему уравнений для плана X^1:

$$v_2^1 - u_1^1 = 0, \quad v_4^1 - u_2^1 = 20,$$
$$v_2^1 - u_2^1 = 7, \quad v_1^1 - u_3^1 = 0,$$
$$v_3^1 - u_2^1 = 9, \quad v_4^1 - u_3^1 = 18.$$

Полагая $u_1^1 = 0$, находим решение данной системы.

$$u_1^1 = 0, \quad u_2^1 = -7, \quad u_3^1 = -5,$$
$$v_1^1 = -5, \quad v_2^1 = 0, \quad v_3^1 = 2, \quad v_4^1 = 13.$$

Строим матрицу невязок для плана $X^1 = \ x_{ij}^1 \ $:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 18 & -2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Минимальный отрицательный элемент матрицы $\Delta_1 \equiv c_{14}^1 = -2$, соответствующую переменную x_{14} вводим в базис. Рассматриваем этот элемент (помечен знаком $*$) и все базисные перевозки плана $X^1 = \ x_{ij}^1 \ $. Строим цикл из этих элементов, начинающийся в выделенном элементе:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0^* \\ 0 & \varepsilon & 15 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

Пропускаем максимально возможный поток по циклу в плане X^1. Величина максимально возможного потока равна $\theta_2 = x_{24} = 10$, соответствующая переменная x_{24} выводится из базиса. Получаем новый план X^2:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

и суммарные транспортные расходы:

$$z(X^2) = z(X^1) + \Delta_1\theta_1 = 335 - 2\cdot 10 = 315.$$

Переменные u_i, v_j должны удовлетворять уравнениям:

$$v_2^3 - u_1^3 = 0, \quad v_4^3 - u_3^3 = 18,$$
$$v_2^3 - u_2^3 = 7, \quad v_1^3 - u_3^3 = 0,$$
$$v_3^3 - u_2^3 = 9, \quad v_4^3 - u_1^3 = 11.$$

Находим решение системы:

$$u_1^3 = 0, \quad u_2^3 = -7, \quad u_3^3 = -7,$$
$$v_1^3 = -7, \quad v_2^3 = 0, \quad v_3^3 = 2, \quad v_4^3 = 11.$$

Матрица невязок для плана $X^3 = x_{ij}^3$:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 18 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как в матрице нет отрицательных элементов, план X^3 оптимальный.

<u>ТЗ 4.4.</u> Производственный менеджер должен распределить 3 рабочих по 3 работам так, чтобы максимизировать производительность. Индивидуальная производительность приведена в таблице:

	Работа 1	Работа 2	Работа 3
Рабочий 1	15	20	30
Рабочий 2	20	30	10
Рабочий 3	20	15	35

Написать модель ЛП, найти допустимое решение задачи.

<u>Решение:</u>

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ – план назначений, $x_{ij} \in 0{,}1$;

$i, j = \overline{1{,}3}$, тогда математическая модель задачи выглядит так:

$$\max z = \max(15x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 10x_{23} +$$
$$+ 20x_{31} + 15x_{32} + 35x_{33})$$

при выполнении ограничений для рабочих:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1,$$

и для работ:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1.$$

Допустимых решений в задаче будет 6:

$$X^1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ z\ X^1\ =15+30+35=80;$$

$$X^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ z\ X^2\ =30+30+20=80;$$

$$X^3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ z\ X^3\ =20+20+35=75;$$

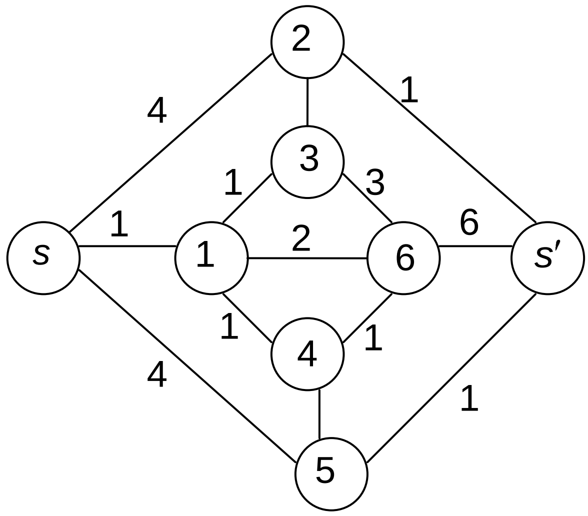
$$X^4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ z\ X^4\ =20+10+20=50;$$

$$X^5=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ z\ X^5\ =15+10+15=40;$$

$$X^6=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ z\ X^6\ =30+20+15=65.$$

Оптимальными решениями являются X^1, X^2.

ТЗ 4.5. Найти поток максимальной мощности в сети:



Решение:

Составим матрицу пропускных способностей $u^0(x,y)$:

$u^0(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	4	0	0	4	0	0
1	1	0	0	1	1	0	2	0
2	4	0	0	2	0	0	0	1
3	0	1	2	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	4	0	0	0	3	0	0	1
6	0	2	0	3	1	0	0	6
s'	0	0	1	0	0	1	6	0

Построим произвольный начальный поток f_0 в сети, направляя его по трем путям:

$$P_1^0 = (s,2),\ (2,s'),\ P_2^0 = (s,1),\ (1,6),\ (6,s'),\ P_3^0 = (s,5),\ (5,s'),$$

$\delta_1^0 = 1, \delta_2^0 = 1, \delta_3^0 = 1$ и представим его в виде матрицы:

$f^0(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	1	0	0	1	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	1	0
2	-1	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	-1	0	0	0	0	0	1
s'	0	0	-1	0	0	-1	-1	0

Находим матрицу $u^1 = u^0 - f^0$:

$u^1(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	3	0	0	3	0	0
1	2	0	0	1	1	0	1	0
2	$\boxed{5}$	0	0	2	0	0	0	0
3	0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	3	0
4	0	1	0	0	0	3	1	0
5	5	0	0	0	3	0	0	0
6	0	3	0	$\boxed{3}$	1	0	0	5
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{7}$	0

Строим путь $P_1(s,s')$, ненасыщенный относительно потока f_1. В нашем случае $P_1(s,s') =$ $(s,2),(2,3),(3,6)(6,s')$. Величина $\delta^1 = 2$. Чтобы не выписывать матрицу соответствующего потока, пометим в матрице $u^1(x,y)$ элементы, из которых будем вычитать $\delta^1 = 2$, кружками, а к которым будем прибавлять $\delta^1 = 2$ – квадратами.

Найдем $u^2 = u^1 - f^1$:

$u^2(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	3	0	0
1	2	0	0	0	1	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	$\boxed{3}$	1	0
5	$\boxed{5}$	0	0	0	3	0	0	0
6	0	3	0	5	$\boxed{1}$	0	0	3
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{9}$	0

Строим путь $P_2(s,s')$, ненасыщенный относительно потока f_2, $P_2(s,s') =$ $(s,5),(5,4),(4,6)(6,s')$, $\delta^3 = 1$.

Найдем $u^3 = u^2 - f^2$:

$u^3(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	2	0	0
1	2	0	0	0	$\boxed{1}$	0	1	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	$\boxed{4}$	0	0
5	$\boxed{6}$	0	0	0	2	0	0	0
6	0	$\boxed{3}$	0	5	2	0	0	2
s'	0	0	2	0	0	2	$\boxed{10}$	0

Строим путь $P_3(s,s')$, ненасыщенный относительно потока f_3, $P_3(s,s') = \ (s,5),(5,4),(4,1),(1,6),(6,s')\ $, $\delta^4 = 1$.

Найдем $u^4 = u^3 - f^3$:

$u^3(x,y)$	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	0	1	0	0	1	0	0
1	2	0	0	0	2	0	0	0
2	7	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	4	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	5	0	0
5	7	0	0	0	1	0	0	0
6	0	4	0	5	2	0	0	1
s'	0	0	2	0	0	2	11	0

Из источника s по ненасыщенным путям можно попасть только в узлы 2, 5, 4, следовательно, минимальное сечение $S = \ s,2,4,5\ $, $S' = \ 1,3,6,s'\ $.

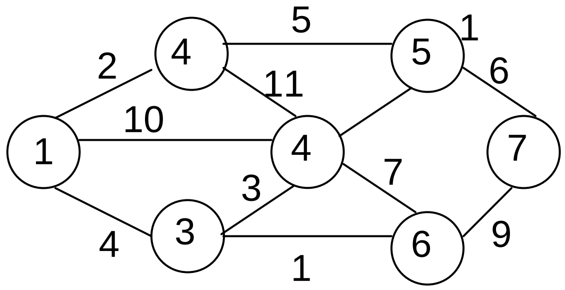
Находим максимальный суммарный поток по формуле $f = u^0 - u^3$:

f	s	1	2	3	4	5	6	s'
s	0	1	3	0	0	3	0	0
1	-1	0	0	0	-1	0	2	0
2	-3	0	0	2	0	0	0	1
3	0	0	-2	0	0	0	2	0
4	0	1	0	0	0	-2	1	0
5	-3	0	0	0	2	0	0	1
6	0	-2	0	-2	-1	0	0	5
s'	0	0	-1	0	0	-1	-5	0

Делаем проверку полученного решения (критерий оптимальности): мощность максимального потока должна быть равна пропускной способности минимального сечения. Действительно,

$$f_{\max}(s,N) = u_{\min}(S,S') = 7\,.$$

<u>**ТЗ 4.6.**</u> Построить математическую модель задачи о кратчайшем пути, заданной сетью:



Решение:

$$\min z = 2x_{11} + 10x_{13} + 4x_{13} + 5x_{25} + 11x_{24} + 3x_{34} + 1x_{36} + 7x_{46} + $$
$$+ 8x_{45} + 6x_{57} + 9x_{67}$$

$$x_{12} + x_{14} + x_{13} = 1, \qquad (x_{25} + x_{45}) - x_{57} = 0,$$
$$x_{12} - (x_{25} + x_{24}) = 0, \qquad (x_{46} + x_{36}) - x_{67} = 0,$$
$$x_{13} - (x_{34} + x_{36}) = 0, \qquad x_{57} + x_{67} = 1,$$
$$(x_{24} + x_{14} + x_{34}) - (x_{45} + x_{46}) = 0, \qquad x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Методические указания по выполнению лабораторной работы №2 «Нахождение оптимального плана транспортной задачи»

Рассмотрим следующую задачу:

у фирмы Powerco есть 3 электростанции, которые снабжают электроэнергией 4 города, причем каждая из станций может поставлять электроэнергию в любой из городов. Мощности электростанций (в млн квт/ч) приведены в табл. 1. Пиковые потребности в электроэнергии для каждого из городов (в млн. квт/ч) приведены в табл. 2. В табл. 3 для каждого города дана стоимость поставки 1 млн квт/ч от каждой из электростанций. Фирме Powerco необходимо составить план поставки электроэнергии для обеспечения потребностей городов (с учетом пиковых потребностей) с наименьшими затратами.

Таблица 1. Мощности электростанций.

Станция	Мощность
Станция 1	35
Станция 2	50
Станция 3	40

Таблица 2. Пиковые потребности городов в электроэнергии.

Город	Пиковая потребность
Город 1	45

Город 2	20
Город 3	30
Город 4	30

Таблица 3. Стоимость поставки.

	Город 1	Город 2	Город 3	Город 4
Станция 1	8	6	10	9
Станция 2	9	12	13	7
Станция 3	14	9	16	5

Решение:

Для построения модели необходима следующая информация:

1. Количество электроэнергии, поставленной от каждой станции в каждый город.
2. Суммарное количество электроэнергии, поставленной каждой станцией.
3. Суммарное количество электроэнергии, полученной каждым городом.
4. Суммарная стоимость поставки электроэнергии.

Построение модели (рис. 4.1)

1. **Исходные данные.** Ввести стоимость поставки 1 квт/ч от каждой станции в каждый город в ячейки C6:F8.

2. **Объемы поставок.** Ввести произвольные начальные значения объемов поставки электроэнергии с каждой станции в каждый город в ячейки C13:F15. Это будут изменяемые ячейки.

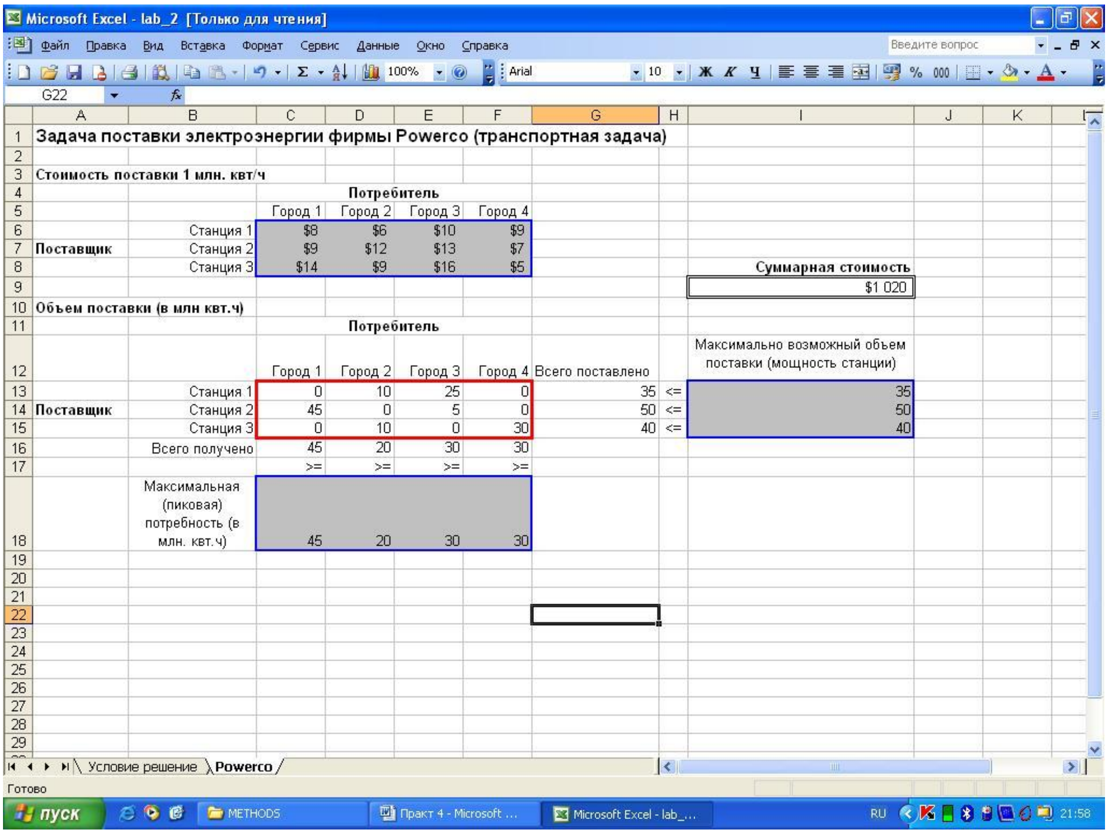


Рис. 4.1

3. **Объемы поставок электроэнергии с каждой станции**. Для того чтобы быть уверенными, что каждая станция не поставляет больше электроэнергии, чем ее мощность, необходимо подсчитать суммарное количество электроэнергии, поставленной каждой станцией. Количество электроэнергии, поставленной станцией 1, подсчитывается в ячейке G13 с помощью формулы

=СУММ(C13:F13).

Для расчета количества электроэнергии, поставленной остальными станциями, эту формулу надо скопировать в ячейки G14:G15. Затем необходимо ввести мощность каждой станции в интервал ячеек I13:I15.

4. **Количество электроэнергии, полученной каждым городом.** Для того чтобы быть уверенными, что каждый из городов будет обеспечен электроэнергией (с учетом пиковых потребностей), в интервале ячеек C16:F16 необходимо подсчитать суммарное количество электроэнергии, полученной каждым из городов. Так, количество электроэнергии, полученной городом 1, подсчитывается в ячейке C16 с помощью формулы

=СУММ(C13:C15).

Для расчета количества электроэнергии, полученной остальными городами, необходимо скопировать эту формулу в ячейки D16:F16. Затем необходимо ввести пиковые потребности каждого из городов в ячейки C18:F18.

5. **Суммарная стоимость поставки электроэнергии.** Суммарная стоимость поставленной фирмой Powerco электроэнергии подсчитывается в ячейке I9 с помощью формулы

=СУММПРОИЗВ(C6:F8,C13:F15).

Поиск решения

1. **Целевая функция.** Выбрать ячейку I9 (суммарная стоимость) в качестве целевой ячейки.
2. **Изменяемые ячейки.** Выбрать интервал ячеек C13:F15 в качестве изменяемых ячеек. Ограничения на эти ячейки состоят в том, что они должны быть неотрицательны. В этих ячейках содержатся количества электроэнергии, поставленной станциями различным городам.
3. **Ограничения по возможностям поставки (мощностям).** Добавить ограничения G13:G15<=I13:I15. Эти ограничения означают, что каждая станция не может поставить больше электроэнергии, чем ее мощность.
4. **Ограничения по спросу.** Добавить ограничения C16:F16>=C18:F18. Эти ограничения необходимы для того, чтобы обеспечить потребности каждого из городов в электроэнергии (с учетом пиковых потребностей).
5. **Линейность модели и оптимизация.** Проверить, что выбрана «Линейная модель» и «Выполнить».

Минимальная стоимость обеспечения городов требуемой электроэнергией равна $1020, план поставок содержится в таблице (рис. 4.1).

Задания практикума.

В задачах 4.1 – 4.9 требуется:

- написать математическую модель задачи;
- нарисовать транспортную сеть;
- найти начальное решение методом северо-западного угла, минимального элемента и методом Фогеля;
- найти оптимальное решение методом потенциалов.

4.1.

$$a = 40 \quad 20 \quad 80$$

$$b = 50 \quad 20 \quad 40 \quad 30$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2.

$$a = 40 \quad 60 \quad 60$$

$$b = 35 \quad 70 \quad 55$$

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

4.3.

$$a = 70 \quad 80 \quad 30$$

$$b = 45 \quad 75 \quad 60$$

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4.4.

$a = 25 \quad 55 \quad 60$

$b = 40 \quad 20 \quad 80$

$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4.5.

$a = 3 \quad 5 \quad 5$

$b = 2 \quad 7 \quad 4$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

4.6.

$a = 20 \quad 40 \quad 30 \quad 60$

$b = 50 \quad 70 \quad 30$

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.7.

$a = 40 \quad 20 \quad 80$

$b = 50 \quad 20 \quad 40 \quad 30$

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.8.

$a = 60 \quad 35 \quad 25$

$b = 60 \quad 20 \quad 40$

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.9.

$a = 30 \quad 40 \quad 20 \quad 60$

$b = 50 \quad 70 \quad 30$

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Задания к лабораторной работе №2 «Нахождение оптимального плана транспортной задачи»

В задачах 4.10 – 4.21 требуется:

- написать математическую модель задачи;
- нарисовать транспортную сеть;
- найти начальное решение любым методом;
- найти оптимальное решение средствами MS-Excel.

4.10.

В течение следующих 4-х месяцев фирма Sailco, производящая яхты, должна обеспечить потребности клиентов в своей продукции, величины спроса в каждом месяце приведены в таблице. В начале января фирма имела в запасе (на складе) 10 яхт. Фирма должна определить количество яхт, которое следует производить в течение каждого из месяцев. В месяц Sailco может производить 40 яхт на основном производстве и неограниченное количество яхт сверхпланово. Выпуск яхты на основном производстве стоит $400, производство каждой сверхплановой яхты стоит $450. Хранение одной яхты на складе стоит $20 в месяц. Необходимо составить план производства и хранения яхт, удовлетворяющий весь спрос на яхты и минимизирующий суммарные затраты на производство и хранение.

Спрос на яхты фирмы Sailco

Месяц	Спрос (шт.)
Январь	40
Февраль	60
Март	75
Апрель	25

4.11.

Фирма Transportco поставляет свою продукцию трем клиентам, потребность каждого из которых составляет 30 единиц продукции. У компании есть 2 склада. На первом находится 40 единиц продукции, на втором — 30 единиц. Стоимость доставки одной единицы продукции с каждого склада различным клиентам приведена в таблице. За недопоставку каждой единицы продукции клиенту 1 штраф равен \$90, клиенту 2 — \$80, клиенту 3 — \$110. Необходимо найти план поставок продукции, имеющейся на складах и минимизирующий общие затраты.

Стоимость поставки единицы продукции

	Клиент 1	Клиент 2	Клиент 3
Склад 1	\$15	\$35	\$25
Склад 2	\$10	\$30	\$40

Предположим, что фирма Transportco имеет возможность закупить и доставить на склады дополнительную продукцию по цене \$100 за единицу. Найти план поставок, минимизирующий стоимость поставки и дополнительной закупки продукции, при условии, что весь спрос клиентов должен быть удовлетворен.

4.12.

Фирма Wingtip производит обувь. По оценкам менеджеров фирмы в течение следующего полугодия ожидается следующий спрос на ее продукцию (количество пар):

Месяц 1 – 200;
Месяц 2 – 260;
Месяц 3 – 240;
Месяц 4 – 340;
Месяц 5 –190;
Месяц 6 –150.

Производство одной пары на основном производстве стоит \$7, а сверхплановое производство одной пары – \$11. Мощность основного производства ограничена 200 парами в месяц, сверх плана можно произвести до 100 пар в месяц. Хранение одной пары на складе в течение месяца стоит \$1. Необходимо найти план производства (и хранения) продукции, минимизирующий общую стоимость при условии удовлетворения всего спроса в течение полугодия.

4.13.

Банк Banco имеет два центра обработки чеков. Центр 1 может обрабатывать до 10 000 чеков ежедневно, а центр 2 – до 6 000. Банк работает с чеками трех типов – 1, 2 и 3. Стоимость обработки чеков каждого типа приведена в таблице. Ежедневно должно обрабатываться 5 000 чеков каждого типа. Банку необходимо минимизировать ежедневную стоимость обработки чеков.

Стоимость обработки чеков

Вид чека	Центр 1	Центр 2
Тип 1	5	3
Тип 2	4	4
Тип 3	2	5

4.14.

Правительственным комитетом выставлены на аукцион контракты на аренду двух нефтеносных участков. На каждом из участков выставляется по 100 000 кв. км земли. На аукцион подано 3 заявки – от Клифа Ивинга, Блэйка Барнса и Алекса Пайкенса. По правилам аукциона никакой из участников не должен получить более 40% участков, выставленных на аукцион. Были сделаны следующие заявки: Клиф – $1000 за кв. км. участка 1 и $2000 за кв. км. участка 2, Блэйк – $900 за кв. км. участка 1 и $2200 за кв. км участка 2, Алекс – $1100 за кв. км. участка 1 и $1900 за кв. км участка 2. Комитету необходимо определить, каким образом можно максимизировать свой доход.

4.15.

Компания Amorco Oil разрабатывает два участка по добыче нефти. Максимальный ежедневный объем добычи на участке 1 составляет 40 миллионов баррелей, на участке 2 – 50 миллионов баррелей. Стоимость добычи и очистки 1 барреля нефти на участке 1 равна $3, на участке 2 – $2. Нефть поставляется в Великобританию и Японию, стоимость доставки (на 1 баррель) приведена в табл. 4. Великобритания готова покупать до 40 миллионов баррелей ежедневно по цене $6 за баррель, Япония – до 30 миллионов баррелей по $6,50 за баррель. Компании необходимо определить, каким образом максимизировать свою прибыль.

Стоимость доставки 1 барреля нефти

		Потребитель	
		Великобритания	Япония
Поставщик	Участок 1	$1	$2
	Участок 2	$2	$1

4.16.

На фирме Machinco в процессе производства должны быть выполнены 4 технологические операции. Для выполнения этих операций есть 5 различных видов оборудования. Каждый тип оборудования может быть назначен для выполнения любой операции. Время, необходимое для выполнения операций на различных типах оборудования, приведено в таблице. Необходимо назначить оборудование для выполнения технологических операций таким образом, чтобы минимизировать общую продолжительность выполнения указанных операций.

Время, необходимое для выполнения операций.

Тип оборудования	Операция 1	Операция 2	Операция 3	Операция 4
1	14	5	8	7
2	2	12	6	5
3	7	8	3	9
4	2	4	6	10
5	5	5	4	8

4.17.

Для выполнения четырех производственных заданий на фирме имеется 5 рабочих. Время, необходимое каждому из них для выполнения соответствующих заданий, приведено в таблице (прочерк в таблице означает, что рабочий не может выполнить задание). Необходимо назначить рабочих для выполнения заданий таким образом, чтобы минимизировать общее время выполнения всех 4 заданий.

Время, необходимое для выполнения операций

	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Рабочий 1	22	18	30	18
Рабочий 2	18	–	27	22
Рабочий 3	26	20	28	28
Рабочий 4	16	22	–	14
Рабочий 5	21	–	25	28

4.18.

Компания принимает заявки подряда на строительство 4 объектов. Заявки подали 3 фирмы-подрядчика. Их предложения (в тысячах долларов) приведены в таблице (прочерк означает, что фирма-подрядчик не подавала заявки на выполнение соответствующего подряда). Фирма 1 может выполнить только 1 подряд, каждая из фирм 2 и 3 – до двух подрядов. Необходимо минимизировать стоимость назначения фирм-подрядчиков на выполнение подрядов по строительству объектов.

Заявки фирм-подрядчиков

	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
Фирма 1	50	46	42	40
Фирма 2	51	48	44	—
Фирма 3	—	47	45	45

4.19.

Больнице необходимо приобрести 3 литра скоропортящегося лекарственного физиологического раствора для использования в текущем месяце и 4 литра – для использования в следующем месяце. Так как лекарственный раствор скоропортящийся, то он должен быть использован в течение того месяца, в котором он приобретен. Этот раствор продают две компании (Daisy и Laroach) в ограниченном количестве, поэтому в течение 2 месяцев больница не может покупать более 5 литров раствора у каждой из этих компаний. Необходимо определить, каким образом больница может минимизировать общую стоимость закупаемого раствора.

Цена раствора за литр

Компании	Текущий месяц	Следующий месяц
Daisy	$800	$720
Laroach	$710	$750

4.20.

Фирма производит рюкзаки для путешественников. В течение года спрос на эту продукцию в основном есть только в марте − июне. Фабрика оценивает спрос в эти месяцы соответственно в 100, 200, 180 и 300 единиц изделия. В течение рассматриваемых четырех месяцев фабрика может выпускать 50, 180, 280 и 270 единиц изделия. Производство и спрос в различные месяцы не совпадают, спрос в текущем месяце можно удовлетворить следующими способами:

- производством изделий в течение текущего месяца (стоимость производства одного рюкзака составляет 40 $) ;
- избытком произведенных в прошлом месяце изделий (стоимость хранения одного рюкзака в течение одного месяца составляет 0,5 $);
- избытком произведенных в следующем месяце изделий в счет невыполненных заказов (штраф за просроченный заказ составляет 2 $ на один рюкзак за каждый месяц).

Разработать оптимальный план производства для фабрики на эти четыре месяца.

4.21.

Спрос на скоропортящийся товар в следующие 4 месяца составляет 400, 300, 420 и 380 тонн соответственно. Предложение этого товара в те же месяцы составляет 500, 600, 200 и 300 тонн. Отпускная цена на этот товар колеблется от месяца к месяцу и равна соответственно 100$, 140$, 120$ и 150$ за тонну. Поскольку товар скоропортящийся, он должен быть реализован в течение трех месяцев (включая текущий). Стоимость хранения равна 3$. Найти оптимальное решение задачи, приняв во внимание, что невозможна задержка с поставкой товара.