

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра механики материалов

Саммалъ А.С., профессор

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ: 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО»

Профиль подготовки

**Промышленное и гражданское строительство, Производство и применение строи-
тельных материалов, изделий и конструкций**

Квалификация (степень) выпускника: *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Тула 2011

Конспект составлен д.т.н., проф. Саммалем А.С. и обсужден на заседании кафедры механики материалов механико-математического факультета.

Протокол № 9 от " 27 " июня 2011 г.

Зав.кафедрой _____ Н.Н.Фотиева

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.....	5
2. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ	8
2.1. Понятие о напряжённом состоянии в точке упругого тела и его виды.....	8
2.2. Тензор напряжений.....	10
2.3. Закон парности касательных напряжений.....	10
2.4. Напряжения на наклонных площадках.....	11
2.5. Главные напряжения и площадки	12
2.6. Круговая диаграмма напряжённого состояния Мора. Экстремальные касательные напряжения	15
2.7. Октаэдрические напряжения и площадки.....	18
2.8. Линейное и плоское напряжённое состояние	19
2.9. Понятие о деформированном состоянии тела в точке. Тензор деформаций.....	20
Инварианты тензора деформаций. Главные деформации	20
2.10. Обобщённый закон Гука. Закон Гука при плоском напряжённом состоянии.....	25
2.11. Объёмная деформация.....	28
2.12. Потенциальная энергия упругой деформации	29
3. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ.....	31
3.1. Основные понятия	31
3.2. Содержание теорий предельных напряжённых состояний	32
3.3. Критерии пластичности и разрушения	33
3.4. Теория прочности О. Мора	36
3.5. Объединённая теория прочности	38
3.6. Понятия о новых теориях прочности.....	38
4. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	39
4.1. Косой изгиб, одновременное действие изгиба и продольной силы.....	39
4.2. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек при косом изгибе. Пространственный изгиб. Расчёты по нормальным напряжениям на прочность.....	40
4.3. Величина и направление прогибов при косом изгибе. Условие жесткости и типы задач, решаемых на его основе	43
4.4. Внецентренное растяжение (сжатие) стержней большой жесткости	44
4.5. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек	44
4.6. Ядро сечения	46
4.7. Изгиб с кручением. Расчёты на прочность.....	48
5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ.....	49
5.1. Особенности определения перемещений в плоских стержневых системах (рамах, фермах, комбинированных системах)	49
5.2. Потенциальная энергия упругой деформации в бруске малой кривизны.....	50
5.3. Теорема Лагранжа.....	53
5.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений.....	53
5.5. Теорема Кастилиано.....	54
5.6. Теорема Клапейрона.....	54

5.7. Потенциальная энергия деформации упругой системы	55
5.8. Определение перемещений методом Мора	59
5.9. Способ Верещагина	61
6. МЕТОД СИЛ, РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	63
6.1. Статически неопределимые системы. Необходимые и лишние связи	63
6.2. Эквивалентная и основная система метода сил	64
6.3. Канонические уравнения метода сил	65
6.4. Принципы расчёта простых статически неопределимых балок.....	66
7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК	69
7.1. Общие сведения	69
7.2. Учёт сил инерции при расчёте движущихся с ускорением тел.....	69
7.3. Расчёты на удар	72
7.4. Понятие о волновой теории удара.....	74
7.5. Собственные колебания с одной степенью свободы.....	74
7.6. Вынужденные колебания упругой системы	76
8. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ	78
8.1. Понятие об усталостном разрушении и его причины	78
8.2. Виды циклов напряжений	78
8.3. Понятие о пределе выносливости	80
8.4. Диаграмма предельных амплитуд	82
8.5. Факторы, влияющие на величину предела выносливости	83
8.6. Принципы расчёта элементов конструкций на прочность при переменных напряжениях.....	84
9. РАСЧЁТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК.....	84
9.1. Понятие о моментной и безмоментной теориях расчёта оболочек	84
9.2. Определение напряжений в оболочках по безмоментной теории	85
9.3. Учет краевого эффекта в цилиндрических оболочках	86
ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА	87
Дополнительная литература	87

1 ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Целью курса «Техническая механика» является формирование у будущего специалиста строительного профиля представлений о подходах, методах и упрощающих принципах, применяемых при инженерном расчёте элементов строительных конструкций, в том числе – оболочек и сосудов, работающих в условиях сложного нагружения, а также испытывающих циклически изменяющиеся и динамические нагрузки.

Задачами освоения дисциплины (модуля) являются получение фундаментальных знаний о напряжённо-деформированном состоянии тела в точке, теориях прочности, а также о физической сущности применяемых в инженерной практике методов расчёта элементов строительных конструкций и приобретение знаний, которые будут способствовать формированию специалиста, способного разобраться в инженерных подходах к расчёту и проектированию строительных конструкций.

Дисциплина "Техническая механика " относится к профессиональному циклу вариативной части. Курс базируется на дисциплинах: математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов.

До изучения курса студент должен:

Знать: фундаментальные основы высшей математики, современные средства вычислительной техники, основные физические явления, фундаментальные понятия, законы и теории классической физики, принципы и методы расчёта простейших элементов конструкций при основных видах деформаций.

Уметь: самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по строительным наукам; работать на персональном компьютере, пользоваться основными офисными приложениями, применять полученные знания по физике, теоретической механике и сопротивлению материалов при изучении курса.

Владеть: первичными навыками и основными методами практического использования современных компьютеров для выполнения математических расчётов, оформления результатов расчёта, современной научной литературой, навыками ведения физического эксперимента.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенции в соответствии с ФГОС ВО и ОПП ВО по данному направлению подготовки:

а) общекультурных (ОК):

владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);

умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);

готовность к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-3);

умение использовать нормативные правовые документы в своей деятельности (ОК-5);

стремлением к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-6);

б) профессиональных (ПК):

использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);

способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико - математический аппарат (ПК-2);

знание нормативной базы в области инженерных изысканий, принципов проектирования зданий, сооружений, инженерных систем и оборудования, планировки и застройки населенных мест (ПК-9);

владение методами проведения инженерных изысканий, технологией проектирования деталей и конструкций в соответствии с техническим заданием с использованием стандартных прикладных расчётных и графических программных пакетов (ПК-10);

способность проводить предварительное технико-экономическое обоснование проектных расчётов, разрабатывать проектную и рабочую техническую документацию, оформлять законченные проектно-конструкторские работы, контролировать соответствие разрабатываемых проектов и технической документации зданию, стандартам, техническим условиям и другим нормативным документам (ПК-11);

В результате освоения дисциплины студенты должны:

-знать: основные принципы и положения методов, а также практические приемы расчёта стержней, стержневых систем и оболочек при различных силовых, деформационных и температурных воздействиях;

-уметь: грамотно составлять расчётные схемы, определять теоретически и экспериментально внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения, подбирать необходимые размеры сечений стержней из условий прочности, жесткости и устойчивости.

-владеть навыками:

– определения напряжённо-деформированного состояния стержней при различных воздействиях с помощью теоретических методов с использованием современной вычислительной техники, готовых программ;

– выбора конструкционных материалов и форм, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности, экономичности и эффективности сооружений.

Для достижения этой цели при изучении технической механики учебным планом предусмотрены лекционные и практические занятия, самостоятельная работа, а также выполнение расчётно-проектировочных работ.

2. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Понятие о напряжённом состоянии в точке упругого тела и его виды

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела, появляющегося при нагружении его внешними силами. Действию внешних сил, стремящихся изменить расположение частиц тела или вызвать их смещение, препятствуют возникающие при этом в теле напряжения.

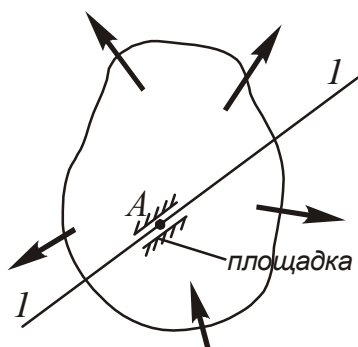


Рис. 2.1.

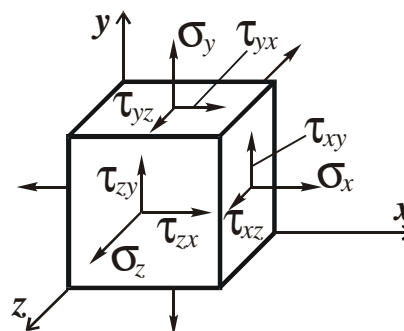


Рис. 2.2.

Эти напряжения ограничивают смещение некоторой малой величиной. В одной и той же точке напряжения в разных направлениях, как правило, будут различными и только в отдельных случаях нагружения они могут быть одинаковыми.

Рассматривая напряжение в точке A нагруженного тела, отнесённые к малым площадкам (рис. 2.1), принадлежащим двум разным частям тела, разделённого сечением $I-I$, проведённым через эту точку, легко убедиться, что если под действием внешних нагрузок площадки стремятся отойти одна от другой или сблизиться, то между ними возникают соответственно растягивающие или сжимающие *нормальные напряжения* σ ; если площадки стремятся сдвинуться одна относительно другой, то в них возникают *касательные напряжения* τ ; если же одна площадка стремится отойти от другой, оставаясь ей параллельной в каком-нибудь произвольном направлении, то в такой площадке одновременно возникают и нормальные σ и касательные τ напряжения, а их результирующей является *полное напряжение* p , вектор которого совпадает с этим направлением. Перемещение площадки в этом случае может быть геометрически разложено на два перемещения: взаимное удаление и сдвиг.

В общем случае, выделим в окрестности рассматриваемой в нагруженном теле точки элементарный объём материала в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 2.2). На его гранях влияние удаленной части тела должно быть заменено соответствующими напряжениями или их составляющими (нормальными и касательными напряжениями), как показано на рисунке. При произвольном выборе положения координатных плоскостей, в каждой из них, вообще говоря, имеются и нормальные, и касательные напряжения. Для них вводятся соответствующие обозначения в плоскости xy : $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yx}$; в плоскости xz : $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$; в плоскости yz : $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Здесь первый индекс показывает ориентацию площадки, в которой действует напряжение, т.е. какой из координатных осей она перпендикулярна. Второй индекс указывает направление напряжения по координатной оси.

При изменении ориентации граней выделенного *элементарного* параллелепипеда напряжения на его гранях также будут изменяться. Всегда можно найти такую ориентацию элемента, при которой в его гранях касательные составляющие напряжений будут отсутствовать.

Те площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках — *главными напряжениями*. Можно доказать, что в каждой точке любым образом нагруженного тела всегда имеется по крайней мере три главные взаимно перпендикулярные площадки, т. е. площадки, в которых отсутствуют касательные напряжения. Направления, параллельные главным напряжениям, называются *главными направлениями* в данной точке. Главные напряжения принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при этом полагают $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, что между указанными напряжениями существует следующее соотношение (понимая его в алгебраическом смысле): $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Напряжённое состояние, в котором только одно из главных напряжений (любое из трёх) не равно нулю, а два других равны нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 2.3, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то такое напряжённое состояние называется *двухосным* или *плоским* (рис. 2.3, б). Случай напряжённого состояния, при котором все три главных напряжения отличны от нуля, называется *трёхосным* или *объёмным* (рис. 2.3, в).

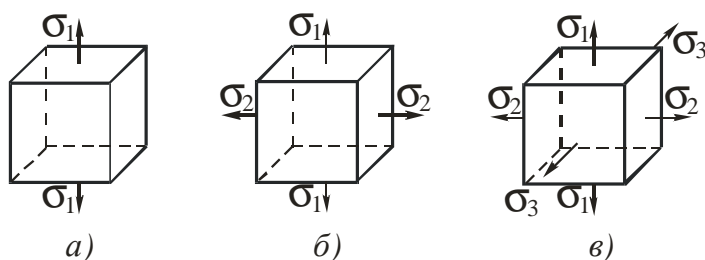


Рис.2.3.

Кроме того, различают *однородное* напряжённое состояние тела, при котором в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечений напряжения одинаковы, и *неоднородное* напряжённое состояние, при котором в разных точках любого сечения рассматриваемого тела или других параллельных ему сечений напряжения различны.

2.2. Тензор напряжений.

В общем случае объёмное напряжённое состояние в точке описывается матрицей третьего порядка

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Эта матрица носит название тензора напряжений, а её элементы (напряжения) называются компонентами тензора напряжений.

2.3. Закон парности касательных напряжений

Следует отметить, что показанные на рис. 2.2 напряжения принято считать положительными. Рассматривая равновесие элемента, т.е. приравнявая нулю сумму моментов всех сил относительно осей x , y и z получим следующие равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

которые отражают суть закона парности касательных напряжений (частично рассмотренного ранее при выводе формулы Журавского): на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательного напряжения, нормальные к линии пересечения

площадок, равны по величине, а по направлению таковы, что стремятся повернуть элемент в противоположные стороны.

Таким образом, из его девяти компонент тензора напряжений в силу закона парности касательных напряжений могут быть заданы только шесть компонент.

2.4. Напряжения на наклонных площадках

Пусть требуется найти нормальное и касательное напряжения в точке A проведенного в нагруженном теле сечения (рис. 2.1). Помещаем в точке A начало системы координат и проводим сечение, параллельное данному, отсекающее на координатных осях бесконечно малые отрезки dx , dy , dz . Вырезаем образованный тетраэдр и рассматриваем его равновесие. Напряжения по граням тетраэдра для большей ясности изображены на двух рисунках. Считаем компоненты напряжённого состояния (рис. 2.4, *а*) и направляющие косинусы l_i, m_i, n_i внешней нормали i к наклонной грани тетраэдра заданными. Напряжение p по этой грани разлагаем на нормальную и касательную составляющие - соответственно σ_i и τ_i , а также на координатные направления p_x, p_y, p_z (рис. 2.4, *б*).

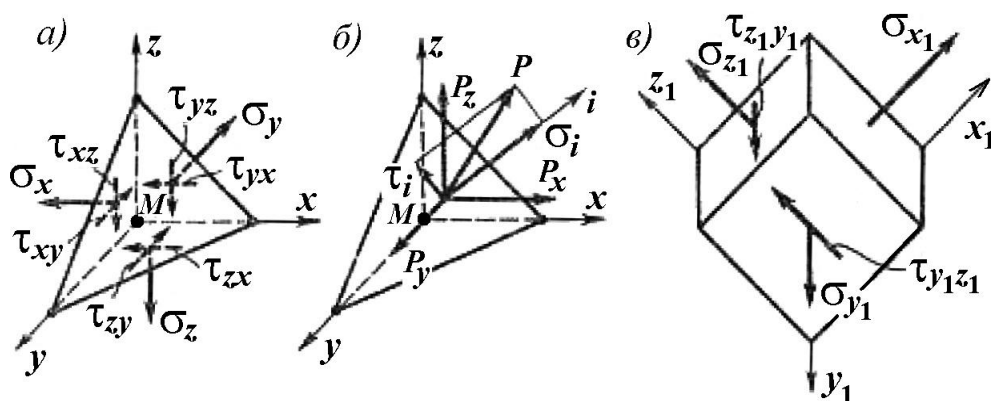


Рис. 2.4.

Если площадь наклонной грани тетраэдра равна dA , то площади его граней, нормальных к осям x , y , z , соответственно равны:

$$dA_x = dA \cdot l_i, dA_y = dA \cdot m_i, dA_z = dA \cdot n_i$$

Составим уравнения равновесия рассматриваемого элемента. При этом рис.2.4, *а* и рис.2.4, *б* рассматриваем совместно. Для тетраэдра:

$$\sum X = p_x dA - \sigma_x l_i dA - \tau_{xy} m_i dA - \tau_{zx} n_i dA = 0,$$

$$\sum Y = p_y dA - \tau_{xy} l_i dA - \sigma_y m_i dA - \tau_{zy} n_i dA = 0,$$

$$\sum Z = p_z dA - \tau_{zx} l_i dA - \tau_{yz} m_i dA - \sigma_z n_i dA = 0.$$

Сокращая эти уравнения на dA , получим:

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i; \\ p_y &= \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i; \\ p_z &= \tau_{zx} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проекция вектора на любое направление равна сумме проекций его составляющих на это направление, поэтому

$$\sigma_i = p_x l_i + p_y m_i + p_z n_i$$

или

$$\sigma_i = \sigma_x l_i^2 + \sigma_y m_i^2 + \sigma_z n_i^2 + 2\tau_{xy} l_i m_i + 2\tau_{yz} m_i n_i + 2\tau_{zx} n_i l_i, \quad (2.3)$$

$$\tau_i = \sqrt{p^2 - \sigma_i^2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_i^2}.$$

Далее можно осуществить подстановку выражений p_x , p_y , p_z и σ_i через компоненты напряжённого состояния и направляющие косинусы нормали i .

В силу бесконечной малости dx , dy , dz напряжения σ_i и τ_i по наклонной грани тетраэдра равны нормальному и касательному напряжениям в точке M данного сечения.

2.5. Главные напряжения и площадки

Как указывалось выше, главными площадками в заданной точке тела называются площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями.

Рассмотрим метод определения главных напряжений.

Если главная площадка существует, то в ней $p = \sigma_i$, и, следовательно, для этой площадки

$$p_x = \sigma_i l_i, p_y = \sigma_i m_i, p_z = \sigma_i n_i$$

Подставляя равенства в (2.2) и используя равенство суммы квадратов направляющих косинусов единице

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1,$$

получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: главным напряжением σ_i и соответствующими направляющими косинусами l_i, m_i, n_i нормали к главной площадке, так как её положение неизвестно:

$$\begin{aligned}\sigma_i l_i &= \sigma_x l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i \\ \sigma_i m_i &= \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i \\ \sigma_i n_i &= \tau_{zx} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i\end{aligned}\tag{2.4}$$

или

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i = 0 \\ \tau_{xy} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{zy} n_i = 0 \\ \tau_{xz} l_i + \tau_{yz} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \end{cases}$$

Первые три уравнения представляют линейную однородную систему с неизвестными l_i, m_i, n_i которые, как следует из её четвёртого уравнения, одновременно нулю равняться не могут. Решение линейной однородной системы отлично от нуля только в том случае, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0.\tag{2.5}$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение с неизвестным главным напряжением σ_i :

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0. \quad (2.6)$$

В этом уравнении:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned}$$

Как известно из алгебры, три корня кубического уравнения с действительными коэффициентами (2.6) могут быть либо действительными числами, либо один из корней будет действительным числом, а два другие — комплексными сопряженными числами. Значит, одно главное напряжение, а, следовательно, и одна главная площадка существуют.

Однако, как нетрудно доказать, уравнение (2.6) в силу симметрии определителя (2.5) относительно главной диагонали, имеет все три действительных корня.

При повороте координатных осей компоненты напряжённого состояния в точке тела изменяются, а главные напряжения, или корни уравнения (2.6) ($i=1, 2, 3$) остаются неизменными. Отсюда следует, что эти уравнения одинаковы или их коэффициенты и свободные члены соответственно равны.

Коэффициенты I_1 , I_2 и свободный член I_3 уравнения (2.6) **называются инвариантами** (независящими от выбора системы координатных осей) напряжённого состояния в данной точке тела. Из выражения для I_1 в частности, следует, что сумма трех нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку, постоянна.

В заключение отметим, что если в качестве исходных принять главные оси I, II, III, то формулы для определения нормальных и касательных напряжений на произвольно ориентированной площадке (нормаль n к которой образует углы α_1 , α_2 и α_3 с соответствующими осями) значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 \\ p_n &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3}, \\ \tau_n &= \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.6. Круговая диаграмма напряжённого состояния Мора. Экстремальные касательные напряжения

У произвольной точки тела вырежем элемент, по бесконечно малым граням которого действуют главные напряжения (рис. 2.5, а).

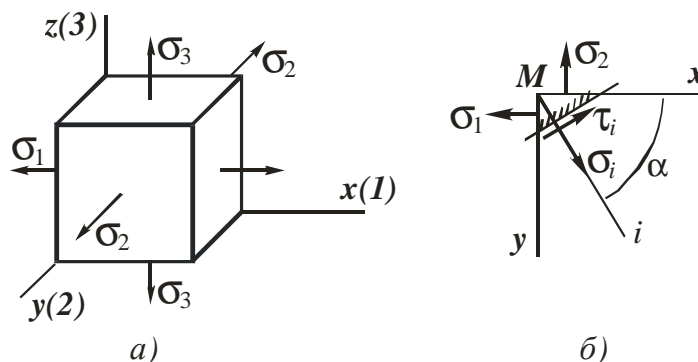


Рис. 2.5

С целью упрощения изображения компоненты напряжённого состояния здесь и в дальнейшем показываем только на передних гранях вырезанного элемента (условность). Для этого элемента:

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Найдем σ_i и τ_i в произвольной площадке, проходящей через ось z (ось 3). Для этой площадки (рис. 2.5, б):

$$l_i = \cos \alpha, \quad m_i = \sin \alpha, \quad n_i = 0.$$

Обратимся к формулам для определения нормальных напряжений на наклонной площадке. Запишем

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \text{ или} \\ \sigma_i &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На основании формул (2.2) для этой площадки будем иметь:

$$p_x = \sigma_1 \cos \alpha, \quad p_y = \sigma_2 \sin \alpha, \quad p_z = 0,$$

а, следовательно, для касательного напряжения

$$\tau_i = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha - \sigma_1^2 \cos^4 \alpha - \sigma_2^2 \sin^4 \alpha - 2\sigma_1 \sigma_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

или

$$\tau_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.8)$$

Взяв систему осей σ, τ (рис. 2.6) и отложив по оси σ в выбранном масштабе σ_1 и σ_2 , построим на разности $\sigma_1 - \sigma_2$, как на диаметре, окружность. Проведем из центра окружности луч, составляющий с осью σ угол 2α .

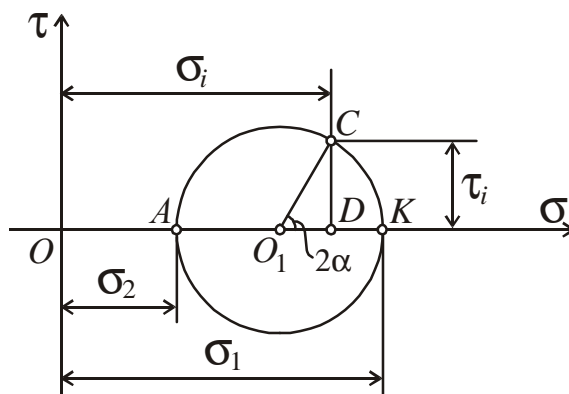


Рис. 2.6

Докажем, что отрезки OD и DC в масштабе диаграммы соответственно равны σ_i и τ_i . Действительно,

$$OD = OA + AO_1 + O_1D = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

или

$$OD = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (2.9)$$

$$DC = O_1C \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Соответствующие выражения (2.6), (2.7) и (2.9) совпадают, что доказывает наше утверждение.

Значит, абсциссы точек построенной окружности в выбранном масштабе равны нормальным, а ординаты — касательным напряжениям, действующим по площадкам, проходящим через ось 3 (третью главную ось). Следовательно, абсциссы и ординаты точек окружностей, построенных на разностях $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметрах (рис. 2.7), равны нормальным и касательным напряжениям по площадкам, проходящим соответ-

венно через оси 1 и 2 (первую и вторую главные оси). Можно доказать, что абсциссы и ординаты точек заштрихованной области в выбранном масштабе соответственно равны нормальным и касательным напряжениям по произвольно ориентированным площадкам, проходящим через заданную точку.

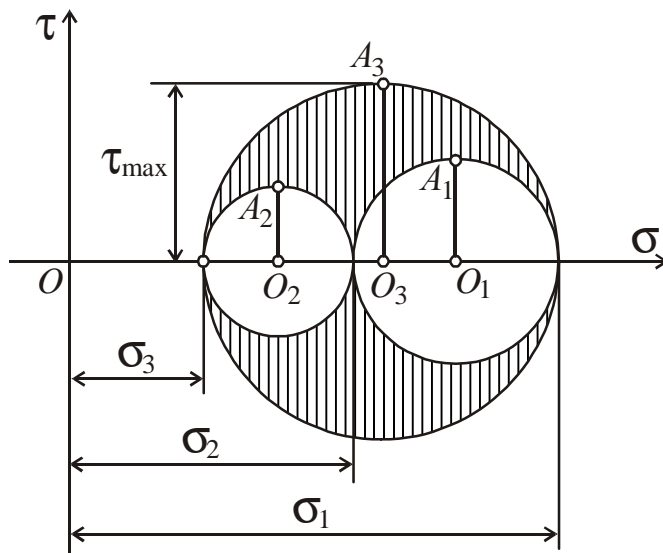


Рис. 2.7

Построенная на рис. 2.7 диаграмма носит название круговой диаграммы напряжённого состояния (напряжений) в данной точке тела. Окружность, построенная на разности $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметре, называется определяющей.

Выводы.

1. Главные напряжения достигают экстремальных значений, т. е. σ_1 - наибольшее нормальное напряжение из всех нормальных напряжений, действующих по площадкам, проходящим через данную точку, а σ_3 — наименьшее.

2. Наибольшие ординаты окружностей III, I и II - O_3A_3 , O_1A_1 и O_2A_2 - равны их радиусам и составляют с осью σ угол $2\alpha = 90^\circ$. Значит, наибольшие касательные напряжения в площадках, проходящих через оси 3, 1 и 2, соответственно равны

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а площадки, в которых они действуют, делят углы между первой и второй, второй и третьей, третьей и первой главными площадками пополам.

Максимальное касательное напряжение, действующее по площадкам, проходящим через данную точку, равно наибольшей ординате заштрихованной области - радиусу O_3A_3 . Положение этой площадки показано на рис.2.8.

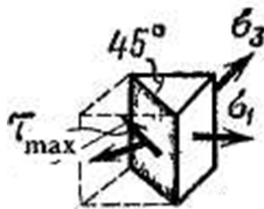


Рис. 2.8

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

2.7. Октаэдрические напряжения и площадки.

Площадка, равнонаклонённая к направлениям трех главных напряжений, называется октаэдрической, а действующие на ней напряжения — октаэдрическими напряжениями. Указанные площадки отсекают на осях I, II, III равные отрезки и образуют в пространстве октаэдр (рис. 2.9). Косинусы углов α_1 , α_2 и α_3 являются направляющими косинусами для нормали и поэтому связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

Для октаэдрических площадок

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{\text{окт}}$ и, следовательно,

$$\cos \alpha_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя это значение косинусов в выражения (2.7) имеем

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$p_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}.$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = p_{\text{окт}}^2 - \sigma_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

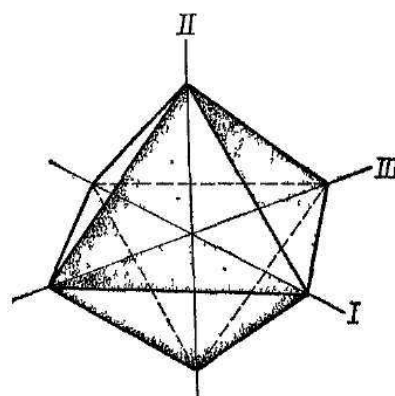


Рис. 2.9.

Отсюда окончательно имеем

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

2.8. Линейное и плоское напряжённое состояние

Исследование напряжённого состояния значительно упрощается в случае, когда на одной из граней выделенного элемента отсутствуют касательные напряжения. Еще проще в случае, когда на этой грани отсутствуют также и нормальные напряжения. В этом случае эта площадка выступает в роли главной площадки.

Свяжем с направлением главной площадки, например, ось z (рис. 2.14).

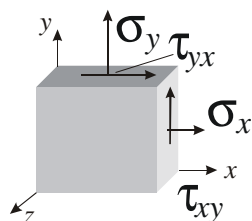


Рис. 2.14.

Тензор напряжений в этом случае имеет вид:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Тогда кубическое уравнение для определения главных напряжений имеет вид:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)\sigma = 0$$

Нетрудно видеть, что на самом деле мы имеем дело с квадратным уравнением, поскольку один корень очевиден $\sigma_3=0$.

Следовательно, рассмотренный случай представляет собой плоское напряжённое состояние. Очевидно, что главные напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (i=1, 2). \quad (2.10)$$

В ряде случаев, например, при рассмотрении случаев плоского изгиба или изгиба с кручением, мы сталкиваемся с тем, что $\sigma_y=0$. Задача определения главных напряжений еще более упрощается. В этих случаях обычно вводятся обозначения $\sigma_x=\sigma$, $\tau_{xy}=\tau$ и формула (2.10) принимает вид

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (2.11)$$

Случай линейного напряжённого состояния, который реализуется при осевом растяжении-сжатии мы рассматривать не будем, поскольку он довольно хорошо изучен в курсе "Сопротивление материалов".

2.9. Понятие о деформированном состоянии тела в точке. Тензор деформаций.

Инварианты тензора деформаций. Главные деформации

Исследуем деформацию упругого тела. Чтобы определить ее, необходимо сравнить положения точек тела до и после приложения нагрузки. На рис. 2.10 показано тело и точка A , координаты

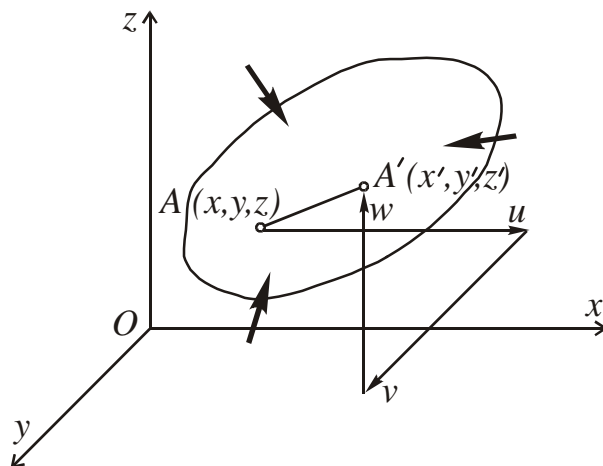


Рис. 2.10.

которой до деформации x, y, z . Под действием нагрузки точка A переместится в новое положение – в точку A' с координатами x', y', z' . Отрезок AA' называется перемещением точки A .

Различают два вида перемещений: перемещение всего тела целиком без его деформации и перемещение, связанное с деформацией тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике как перемещения абсолютно твердого тела. В сопротивлении материалов рассматриваются только перемещения, связанные с деформацией тела.

Проекции перемещения точки A на координатные оси x, y и z равны разности соответствующих координат точек A и A' :

$$u = x' - x,$$

$$v = y' - y,$$

$$w = z' - z$$

и являются функциями координат точки:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned}$$

Разница в величинах перемещений в различных точках тела вызывает его деформацию.

Бесконечно малый параллелепипед $dx dy dz$, вырезанный из упругого тела около произвольной точки A , вследствие различия перемещений его точек деформируется, т. е. изменяясь длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями.

На рис. 2.11 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро AB , параллельное оси x , и ребро AC , параллельное оси z . Длина ребра AB равна dx , ребра AC — dz . После деформирования точки A , B и C займут новые положения — A' , B' и C' .

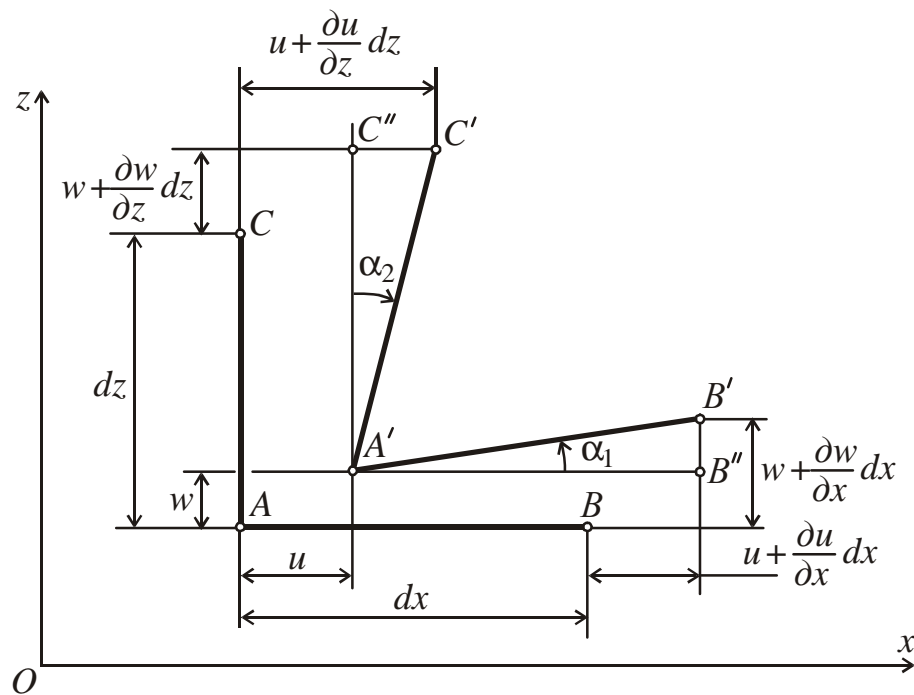


Рис.2.11

При этом точка A получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа u и w . Точка B , отстоящая от точки A на бесконечно малом расстоянии dx , получит перемещение, составляющие которого будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты x :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

В свою очередь, составляющие перемещения точки C будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счёт изменения координаты z :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Длина проекции ребра AB на ось x после деформации будет:

$$A'B'' = dx - u + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Проекция абсолютного удлинения ребра AB на ось x равна:

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси x называется линейной деформацией по направлению оси x . Она равна:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично получим линейные деформации по направлениям координатных осей y и z :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Итак, *линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.*

Рассмотрим изменения углов между ребрами параллелепипеда (см. рис. 2.11). Тангенс угла поворота ребра AB в плоскости xOz равен:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right) - w}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \epsilon_x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно полагать $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ и пренебречь линейной деформацией ϵ_x по сравнению с единицей. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично находим угол поворота ребра AC в этой же плоскости:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Угол сдвига в плоскости xOz , т. е. искажение прямого угла BAC , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота ребер AB и AC :

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Итак, *угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.*

Таким образом, мы получили шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Они носят название формул Коши.

В пределе, когда ребра параллелепипеда стремятся к нулю, формулы (2.11) определяют линейные и угловые деформации в точке A .

Правило знаков для составляющих деформации:

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным — укорочения.

2. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным — увеличение тех же углов.

Рассматривая линейную деформацию произвольно ориентированного волокна не сложно вывести следующее соотношение

$$\epsilon_p = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} nl$$

Как нетрудно заметить, эта формула по виду совпадает с выражением для нормального напряжения на произвольно ориентированной площадке, в которой компоненты линейных деформаций заменены на соответствующие компоненты нормальных напряжений, а компоненты угловых деформаций — касательных напряжений. Таким же образом можно провести полную аналогию между теорией напряжений и деформаций.

Таким образом, можно сказать, что совокупность значений

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

образует симметричный тензор второго ранга, называемый тензором деформаций.

Среди всевозможных волокон, исходящих из рассматриваемой точки, всегда можно указать три взаимно перпендикулярных волокна, которые и в деформированном состоянии остаются перпендикулярными друг к другу. При этом их линейные деформации будут иметь экстремальные значения. Такие волокна называют главными, а их линейные деформации — главными деформациями. Направления главных волокон называют главными направлениями деформаций или главными осями деформаций.

Можно показать, что определение главных деформаций сводится к решению кубического уравнения

$$\lambda^3 - B_1\lambda^2 + B_2\lambda - B_3 = 0$$

где B_1, B_2, B_3 — инварианты тензора деформаций, которые определяются по формулам:

$$B_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$B_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{4} \gamma_{yx} & \frac{1}{4} \gamma_{yx} \\ \frac{1}{4} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{4} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{4} \gamma_{xz} & \frac{1}{4} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что рассмотренное кубическое уравнение также имеет три действительных корня $\lambda_{1,2,3}$ – которые являются величинами главных деформаций $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

2.10. Обобщённый закон Гука. Закон Гука при плоском напряжённом состоянии

Рассмотрим экспериментально обоснованные соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций в общем случае нагружения. Ограничимся рассмотрением однородных изотропных тел в упругой стадии деформации, при этом скорость деформации учитывать не будем.

Следуя Гуку запишем, что *компоненты деформаций в данной точке тела являются линейными и однородными функциями компонентов напряжений в этой точке и (наоборот).*

Математически это можно записать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{14}\tau_{xy} + c_{15}\tau_{yz} + c_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y &= c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{24}\tau_{xy} + c_{25}\tau_{yz} + c_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= c_{31}\sigma_x + c_{32}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{34}\tau_{xy} + c_{35}\tau_{yz} + c_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= c_{41}\sigma_x + c_{42}\sigma_y + c_{43}\sigma_z + c_{44}\tau_{xy} + c_{45}\tau_{yz} + c_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} &= c_{51}\sigma_x + c_{52}\sigma_y + c_{53}\sigma_z + c_{54}\tau_{xy} + c_{55}\tau_{yz} + c_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} &= c_{61}\sigma_x + c_{62}\sigma_y + c_{63}\sigma_z + c_{64}\tau_{xy} + c_{65}\tau_{yz} + c_{66}\tau_{zx} \end{aligned} \quad (2.12)$$

здесь c_{ij} – постоянные, характеризующие свойства материала.

Для определения постоянных c_{ij} воспользуемся экспериментальными данными, полученными из опытов по одноосному растяжению длинных цилиндрических или призматических образцов и опытов по кручению тонкостенных трубок, хотя, как пока-

жем позднее, они могут быть определены только из эксперимента по растяжению длинных цилиндрических образцов.

Сначала обратимся к экспериментальным зависимостям, полученным из опыта по растяжению длинных призматических образцов силами P , приложенными к его торцам. Совмещая ось x с продольной осью образца, а оси y и z с главными центральными осями некоторого поперечного сечения, между компонентами тензоров напряжений и деформаций, отличных от нуля, будем зависимости

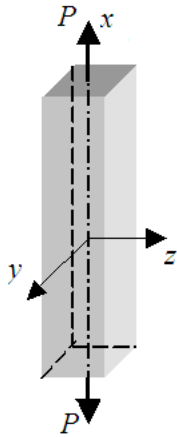


Рис. 2.12.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Сравнивая эти зависимости с (2.12), имеем:

$$c_{11} = \frac{1}{E}, \quad c_{21} = c_{31} = -\frac{\mu}{E}, \quad c_{41} = c_{51} = c_{61} = 0.$$

Проводя круговую перестановку (соответствующим образом меняя направления осей $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) получим дополнительные соотношения:

$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$ и, следовательно, определим константы:

$$c_{22} = c_{33} = \frac{1}{E}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{32} = -\frac{\mu}{E}, \quad c_{42} = c_{52} = c_{62} = c_{43} = c_{53} = c_{63} = 0.$$

Далее обратимся к экспериментальным данным, полученным при кручении длинных тонкостенных трубок сосредоточенными моментами (рис. 2.13), приложенными по торцам. Рассмотрим произвольное сечение: ось x совместим с образующей образца, ось y – направим по касательной, ось z – по радиусу сечения.

При чистом сдвиге, имеющем место в рассмотренном случае, действуют только касательные напряжения τ_{xy}

(рис. 2.12, б). Воспользуемся законом Гука при чистом сдвиге:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Сравнивая эту запись с (2.12), запишем:

$$c_{44} = \frac{1}{G}, \quad c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{54} = c_{64} = 0.$$

Проводя, как и раньше перестановку осей $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, легко определить остальные постоянные:

$$c_{55} = c_{66} = \frac{1}{G}, \quad c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{65} = c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = c_{56} = 0.$$

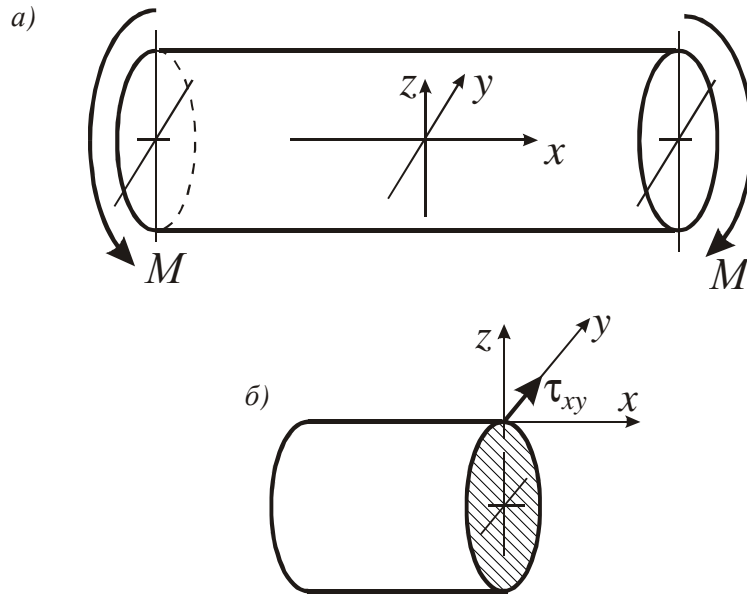


Рис.2.13

С учетом найденных величин c_{ij} , соотношения (2.12) перепишем в виду:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Эти соотношения носят названия обобщенного закона Гука.

Допустим, что главные оси тензора напряжений в точке тела известны. Совмещая оси координат с главными осями, напряжённое состояние тела в точке будем характеризовать главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом угловые деформации, согласно обобщённому закону Гука обращаются в нуль. Следовательно, в области малых упругих деформаций главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями деформаций. Соотношения обобщенного закона Гука в главных осях приобретают вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Суммируя полученные выражения, получим

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Аналогично получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.13)$$

2.11. Объёмная деформация

В процессе деформирования изменяется объём тела. Подсчитаем изменение объёма бесконечно малого параллелепипеда, объём которого до деформирования $dV = dxdydz$. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение объёма связано только с изменением длины ребер, но не с угловыми деформациями.

Длина ребра AB (см. рис. 2.11) равная dx до деформации, после деформации, как указывалось ранее, будет равна:

$$dx_1 = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Воспользовавшись первой формулой Коши (2.10), получим:

$$dx_1 = dx (1 + \varepsilon_x).$$

Аналогично вычисляются длины двух других ребер после деформации:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy (1 + \varepsilon_y), \\ dz_1 &= dz (1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \right\}$$

Объём параллелепипеда после деформирования найдем как произведение новых длин ребер:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx (1 + \varepsilon_x) dy (1 + \varepsilon_y) dz (1 + \varepsilon_z).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Пренебрегая в скобках величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что $dx dy dz = dV$, находим:

$$dV_1 = dV (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительная объёмная деформация равна:

$$\frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Обозначая относительное изменение объёма через θ , получаем:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Принимая во внимание выражение (2.13) можно отметить, что

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Рассмотрим далее случай всестороннего сжатия материала. В этом случае мы можем записать $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$. Тогда относительное изменение объёма будет

$$\theta = -\frac{1-2\mu}{E} 3\sigma.$$

Отсюда видно, что на коэффициент Пуассона μ должно быть наложено ограничение $\mu < 0.5$, поскольку в противном случае при всестороннем сжатии объём тела увеличится в объёме, а это невозможно.

2.12. Потенциальная энергия упругой деформации

Найдем удельную потенциальную энергию u , т.е. энергию, накопленную вследствие упругих деформаций единицей объёма материала при объёмном напряжённом состоянии. Для этого рассмотрим кубик со стороной, равной 1, находящийся под действием главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При простом растяжении мы ранее получили

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon.$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трех напряжений, получим

$$w = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3.$$

Подставим сюда выражения деформаций по закону Гука (2.12), в результате получим выражение потенциальной энергии деформации единицы объёма (удельной)

$$w = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]. \quad (2.14)$$

Обычно удельную потенциальную энергию деформации представляю как сумму энергий затраченных на изменение объёма $w_{об}$ и изменение формы (энергия формоизменения) - w_{ϕ} :

$$w = w_{об} + w_{\phi}.$$

Сохранение формы элементарного объёма при его деформировании возможно лишь в случае, когда на его гранях действуют одинаковые нормальные напряжения, которые обозначим σ_0 .

Тогда, приняв во внимание, что для такого состояния $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, запишем

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0.$$

Определим величину σ_0 из равенства

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

Откуда

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{окт}.$$

Таким образом, чтобы определить величину $w_{об}$ воспользуемся формулой (2.14), подставив вместо $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответствующее значение σ_0 . Имеем

$$w_{об} = \frac{1}{2E} \left[3\sigma_0^2 - 6\sigma_0^2 \right] = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_0^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Чтобы найти энергию формоизменения, запишем:

$$w_{\phi} = w - w_{об}.$$

Осуществив подстановку и сделав очевидные преобразования, получим:

$$w_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

Отметим, что эта формула легко может быть получена из формулы (2.14) с заменой σ_1 на $\sigma_1 - \sigma_0$; σ_2 на $\sigma_2 - \sigma_0$; σ_3 на $\sigma_3 - \sigma_0$.

В связи с особой важностью полученных соотношений, обычно с самого начала тензор напряжений раскладывают

$$T_n = T_0 + D_\sigma,$$

где T_0 - шаровой тензор напряжений, компоненты которого обуславливают изменение объёма без изменения формы; D_σ - девиатор, который обуславливает изменение формы без изменения объёма:

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

3. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

3.1. Основные понятия

При расчёте на прочность различных конструкций и машин необходимо учитывать, что многие их элементы и детали работают в условиях сложного нагружения.

Как было указано ранее, если напряжённое состояние линейное, то оно определяется одним главным напряжением, плоское напряжённое состояние характеризуется двумя, а объёмное – тремя главными напряжениями.

При возрастании действующей нагрузки главные напряжения соответственно увеличиваются, и при некоторых определенных их значениях наступает опасное или так называемое предельное состояние материала в исследуемой точке.

Для пластичных материалов предельным считается такое напряжённое состояние, при котором начинают развиваться заметные остаточные деформации.

Для хрупких материалов предельным считается такое состояние, которому соответствует начало трещинообразования.

Опасное (предельное) состояние материала нельзя никогда допускать, поэтому при расчёте на прочность обычно вводится понятие допускаемого состояния, которое уста-

навливается с учётом ряда технических и экономических факторов путем деления нагрузки, вызывающей предельное состояние, на коэффициент запаса, больший единицы.

Чтобы оценить насколько опасно то или иное напряжённое состояние и определить соответствующий коэффициент запаса, необходимо было бы опытным путем установить значения главных напряжений, при которых наступает предельное напряжённое состояние. Эта задача довольно просто может быть решена при одноосном растяжении или сжатии. В этом случае предельное значение единственного главного напряжения определяется непосредственно из опыта и принимается равным пределу текучести σ_T – для пластичных материалов и пределу прочности σ_B – для хрупких материалов.

Таким образом, если известна расчётная величина напряжения σ , то коэффициенты запаса будут

$n_T = \sigma_T / \sigma$ - для пластичных материалов;

$n_B = \sigma_B / \sigma$ - для хрупких материалов.

Поскольку при плоском и объёмном напряжённых состояниях соотношения между главными напряжениями возможны самые различные, то практически осуществить такие эксперименты невозможно не только из-за их большого числа, но и из-за трудностей в их проведении.

Существующая в настоящее время техника для экспериментального исследования сложного напряжённого состояния позволяет пока проводить испытания только для ограниченного числа некоторых частных случаев соотношений между главными напряжениями.

Это приводит к необходимости создания такой методики расчёта, которая позволяла бы оценивать степень опасности любого напряжённого состояния для того или иного материала, основываясь только на результатах опытов при простом нагружении (растяжении, сжатии или чистом сдвиге).

Решение этой важной задачи осуществляется с помощью, так называемых, теорий прочности или теорий предельных напряжённых состояний.

3.2. Содержание теорий предельных напряжённых состояний

Вводится понятие эквивалентности (равноопасности) напряжённых состояний: Два каких-либо напряжённых состояния считаются равноопасными (эквивалентными), если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз

одновременно становятся предельными. Очевидно, что в этом случае коэффициент запаса прочности для обоих напряжённых состояний будет одинаковым.

Как уже отмечалось, в качестве одного из равноопасных напряжённых состояний принимается одноосное растяжение, хорошо изученное экспериментально, а в качестве другого – напряжённое состояние, опасность которого для данного материала необходимо оценить.

При этом нужно связать главные напряжения двух равноопасных состояний какой-либо зависимостью. Это можно сделать, если известна общая для обоих состояний причина разрушения материала при переходе в предельное состояние. Однако определение истинной причины разрушения материала остается пока неразрешенной задачей. Это повлекло создание различных теорий прочности, каждая из которых основывается на определенной гипотезе о причине наступления предельного напряжённого состояния.

3.3. Критерии пластичности и разрушения

Первая теория прочности Галилея.

Согласно этой теории причиной наступления предельного напряжённого состояния являются наибольшие нормальные напряжения. Название этой теории – теория наибольших нормальных напряжений.

Если за основу принять метод предельных состояний, то эта теория приводит к следующей записи условия прочности:

$$\sigma_{расч}^{(I)} = \sigma_1 \leq R.$$

Недостатком этой теории является неучёт двух других главных напряжений σ_2 , σ_3 . Эта теория подтверждается лишь в очень ограниченном диапазоне нагружения, например, при растяжении хрупких материалов. В настоящее время I теория не используется.

Вторая теория прочности Мариотта.

Эта теория основана на гипотезе, что причиной наступления предельного состояния являются удлинения волокон материала.

В качестве критерия прочности записывается условие

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_1 \leq \epsilon_0,$$

где $\epsilon_0 = \epsilon_{\text{экв}}$ – предельная деформация, полученная из опыта по осевому растяжению. Для перехода к напряжениям используются формулы закона Гука. Так, запишем

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

а для ϵ_0 – выражение $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ (здесь и далее σ_0 – предельное напряжение из опыта по осевому растяжению). Откуда

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0.$$

Или, переходя к методу предельных состояний (σ_0 заменяем на R)

$$\sigma_{\text{расч}}^{(II)} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R.$$

Здесь, в отличие от первой теории используются все напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, возникающие при объёмном напряжённом состоянии. Следует отметить, что эта теория хорошо согласуется с некоторыми данными испытаний, например, сжатия бетонных образцов. Однако в большинстве случаев она не дает достоверных результатов и в настоящее время практически не применяется.

Третья теория прочности Кулона.

Эта теория строится на гипотезе, что причиной предельного напряжённого состояния являются наибольшие касательные напряжения. В основу этой теории положено условие

$$\tau_{\text{max}} \leq \tau_0$$

где

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \text{ а } \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}.$$

В окончательном виде условие прочности согласно этой теории записывается в форме:

$$\sigma_{\text{расч}}^{(III)} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R.^1$$

Обычно мы имеем с упрощенным плоским напряжённым состоянием, как например, изгиб с кручением. В этом случае, воспользовавшись формулой (11.16) получим

$$\sigma_{\text{расч}}^{(III)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R. \quad (3.1)$$

¹Это условие впервые предложил в 1773 г. Кулон, который, впрочем, вопросами прочности не занимался. Как условие наступления пластических деформаций это условие было использовано в 1868 французским инженером Г. Треска и математически сформулировано Б. Сен-Венаном.

Отметим, что III теория хорошо согласуется с данными экспериментов и поэтому она широко применяется на практике, особенно для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Четвертая теория прочности Губера – Мизеса

Эта теория основана на энергетическом критерии. Первоначально было предложено оценивать в качестве критерия полную потенциальную энергию деформации. Однако эксперименты подтвердили лишь случаи, когда в качестве критерия принималась не вся энергия, а лишь энергия изменения формы. Поэтому IV теория прочности строится на гипотезе, что причиной предельного состояния является достижение удельной потенциальной энергии формоизменения величины, соответствующей предельному значению при осевом растяжении.

Условие прочности в соответствии с этой теорией имеет вид²

$$w_{\phi} \leq w_0.$$

Подставив соответствующие выражения, полученные нами ранее,

$$w_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \text{ и } w_0 = \frac{1+\mu}{6E} [2\sigma_0^2],$$

придем к формуле

$$\sigma_{расч}^{(IV)} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq R.$$

Представляет интерес вид полученной формулы в частном случае упрощенного плоского напряжённого состояния. Поступим таким же образом, как описано выше при рассмотрении III теории прочности.

Воспользуемся формулой (2.11). Опустив очевидные преобразования, запишем:

$$\sigma_{расч}^{(IV)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \text{ или } \sigma_{расч}^{(IV)} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_u} \leq R,$$

а вводя характеристику

² В таком виде условие наступления пластических деформаций было предложено в 1904 г. польским ученым М.Губером. А раскрыл это условие в 1913 г. немецкий математик Р.Мизес, который рассматривал касательные напряжения на октаэдрической площадке как простейшую функцию экстремальных касательных напряжений. Впоследствии выяснилось, что идея энергетического критерия была выдвинута еще в 1856 г. английским физиком Д.Максвеллом. Физическое же обоснование этого критерия принадлежит советскому акад. В.В.Новожилову.

$$M_{расч}^{(IV)} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2},$$

приходим к выражению: $\frac{M_{расч}^{(IV)}}{W_u} \leq R$.

Следует отметить, что IV теория дает некоторую экономию материала по сравнению с III теорией прочности.

3.4. Теория прочности О. Мора

Во всех рассмотренных выше теориях в качестве критерия принималась величина какого либо одного фактора (напряжение, деформация, энергия). О.Мор сделал попытку вывести зависимость прочностных свойств материала от вида напряжённого состояния. С этой целью он предложил использовать круговые диаграммы напряжений и использовать три вида испытаний: при осевом растяжении, сжатии и кручении. Для каждого из них он

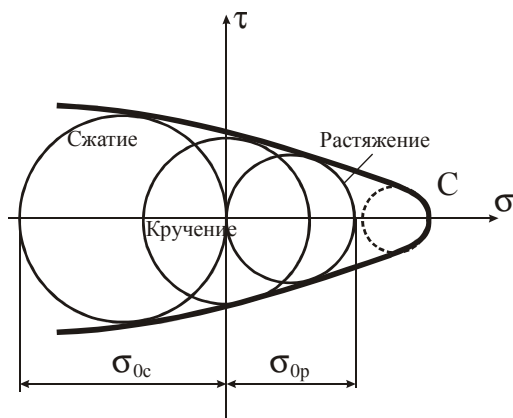


Рис. 3.2.

предложил строить определяющие круги радиу-

$$\text{сов } R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Пусть предельные напряжения при сжатии выше, чем при растяжении, т.е. $\sigma_{0с} > \sigma_{0р}$. Для растяжения или сжатия одно из главных напряжений равно нулю, поэтому круги проходят через начало координат (рис. 3.2). При кручении дей-

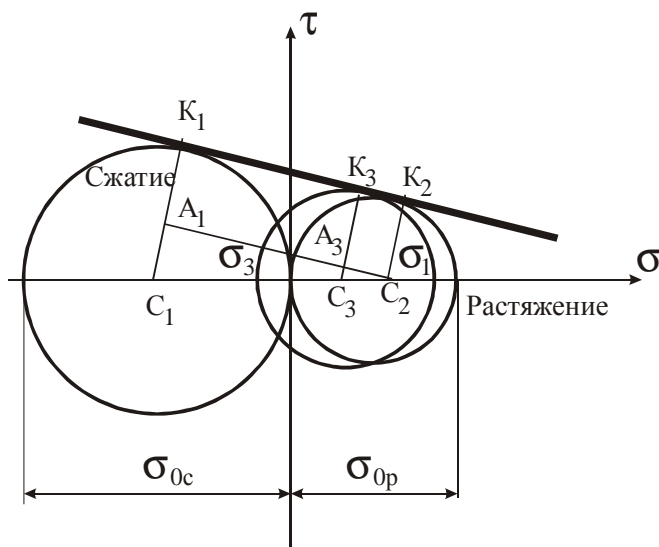


Рис. 3.3.

вуют только касательные напряжения $\pm\tau$. На этой диаграмме можно отобразить результаты и других испытаний, построив соответствующие определяющие круги предельных напряжений.

Если провести огибающую для этих кругов, которую называют предельной огибающей, то в общем случае это будет кривая, которая пересечет ось σ в некоторой точке С. Эту точку можно рас-

считать как предельный круг Мора в случае всестороннего растяжения, т.е. при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{cp}$.

Таким образом, если имеется несколько предельных кругов и их огибающая, то можно считать, что напряжённое состояние, главный круг которого касается огибающей, будет также предельным, т.е. мы можем изобразить пунктиром семейство предельных кругов с различными сочетаниями главных напряжений. Огибающая же определяет зависимость этих напряжений от вида напряжённого состояния.³

Построение действительной огибающей предельных кругов, необходимой для оценки прочности, для всевозможных напряжённых состояний, невозможно, т.к. для этого потребовалось бы опытным путем исследовать бесконечное число напряжённых состояний. Поэтому Мор предложил следующую схематизацию: огибающую заменять касательной лишь к двум главным кругам, которые строятся по данным опытов на осевое растяжение и сжатие. Эти касательные (прямые) и принято считать границами прочностных состояний.

Пусть мы имеем напряжённое состояние, главный круг которого касается этих прямых (в силу симметрии можно рассматривать только одну прямую, например, верхнюю), то из подобия треугольников $C_2 C_3 A_3$ и $C_2 A_1 C_1$, используя значения предельных напряжений при сжатии σ_{oc} и при растяжении σ_{op} , можно получить соотношение

$$\sigma_1 = \sigma_{op} + \frac{\sigma_{op}}{\sigma_{oc}} \sigma_3$$

или

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{op}}{\sigma_{oc}} \sigma_3 = \sigma_{op}$$

и условие прочности принимает вид

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 - K \sigma_3 \leq R.$$

Коэффициент $K = \frac{\sigma_{op}}{\sigma_{oc}}$ позволяет учитывать разное сопротивление материала рас-

тяжению и сжатию. Если они одинаковы, то $K=1$ и касательные к главным кругам параллельны оси σ . В этом случае условие прочности совпадает с условием III теории, следовательно оно применимо как для хрупких, так и для пластичных материалов. При этом

³ О.Мор – немецкий инженер в области теории сооружений предпринял первую попытку создания такой теории в 1900 г.

для хрупких берутся вместо σ_{0p} и σ_{0c} соответствующие пределы прочности, а для пластичных – пределы текучести.

Теория прочности Мора дает наиболее достоверные результаты для напряженных состояний, круги которых занимают промежуточные положения между главными кругами растяжения и сжатия. Похожее условие прочности, называемое условием прочности Кулона – Мора, применяется для оценки прочности грунтов в строительном деле.

3.5. Объединённая теория прочности

Заслуживает внимания обобщение энергетической гипотезы прочности, предложенное П. П. Б а л а н д и н ы м и позволяющее учесть различную прочность материала на растяжение и сжатие. Условие прочности, по П. П. Баландину, имеет вид

$$\sigma'_{эkv} = \frac{1-K}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-K)^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 4K[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]} \leq \sigma_{0p}$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, т. е. при $K=1$, гипотеза Баландина совпадает с четвёртой гипотезой прочности.

Опыты показывают, что гипотеза Баландина в определенном диапазоне напряжённых состояний дает удовлетворительные результаты.

Заслуживают внимания предложенные в последнее время так называемые объединенные гипотезы прочности, где в качестве критерия прочности принимается не один фактор, а два или даже три. Проф. Я.Б. Ф р и д м а н предложил объединить вторую и третью гипотезы прочности. Акад. Н.Н. Давиденков на основании опытов с чугуном, стеклом и гипсом предложил объединить первую гипотезу и гипотезу П.П. Баландина.

3.6. Понятия о новых теориях прочности

Предлагались и другие гипотезы прочности, которые в научной литературе принято называть "новыми".

Проф. М.М. Ф и л о н е н к о - Б о р о д и ч предложил записывать условие прочности в виде некоторого многочлена второй или даже третьей степени относительно главных напряжений, содержащего определённое число произвольных постоянных, которые

определяются из опытов, в том числе и из опытов при сложном напряжённом состоянии. Однако приведенные выше диаграммы разрушения хрупких материалов ясно показывают, что условие прочности материала не может быть выражено одной замкнутой функцией во всем диапазоне напряжённых состояний.

Для хрупких материалов наиболее оправданной является, по-видимому, объединенная гипотеза прочности Н.Н. Давиденкова.

Мы рассматривали гипотезы прочности, опираясь на данные опытов с двухосным напряжённым состоянием. Опытных данных, относящихся к трехосным напряжённым состояниям, значительно меньше. Имеющиеся опыты свидетельствуют о том, что при напряжённых состояниях, близких к трехосному сжатию, материалы, даже хрупкие, способны выдерживать весьма значительные напряжения. При равностороннем сжатии таких материалов, как сталь, медь, алюминий, разрушения не происходит при громадных давлениях 5000—20 000 МПа.

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для пластичных материалов при трехосном напряжённом состоянии удовлетворительные результаты дают энергетическая гипотеза формоизменения и третья гипотеза прочности. Что же касается хрупких материалов, то для них рекомендуется гипотеза Н.Н. Давиденкова.

4. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

4.1. Косой изгиб, одновременное действие изгиба и продольной силы

Изгиб называют *косым*, если плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей.

Различают плоский косой изгиб и пространственный косой изгиб.

При *плоском косом изгибе* все нагрузки расположены в одной плоскости, т. е. существует общая для всего бруса силовая плоскость. Следовательно, углы, составляемые силовыми линиями с главными центральными осями, во всех поперечных сечениях бруса одинаковы. В рассматриваемом случае упругая линия бруса — *плоская кривая*, но, в отличие от прямого изгиба плоскость, в которой она расположена, не совпадает с силовой плоскостью. Именно эта особенность характера деформации обуславливает наименование *косой изгиб*.

При *пространственном косом изгибе* нагрузки, вызывающие изгиб, расположены в разных продольных плоскостях бруса. Соответственно углы между главными центральными осями поперечных сечений и силовыми линиями не постоянны по длине бруса.

Упругая линия бруса в этом случае — *пространственная кривая*.

Силы, перпендикулярные продольной оси бруса, но не совпадающие по направлению ни с одной из главных центральных осей его поперечного сечения, всегда могут быть разложены на составляющие по этим осям. Точно так же и моменты, действующие в произвольных продольных плоскостях, могут быть разложены на составляющие относительно главных центральных осей.

4.2. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек при косом изгибе. Пространственный изгиб. Расчёты по нормальным напряжениям на прочность

Таким образом, далее под *косым изгибом* понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения (рис. 4.1, а). Косой изгиб удобнее всего рассмотреть как одновременный изгиб бруса относительно главных осей x и y поперечного сечения бруса. Для этого общий вектор изгибающего момента M , действующего в поперечном сечении бруса, раскладывается на составляющие момента относительно этих осей (рис. 4.1, б):

$$M_x = M \cdot \sin \alpha; \quad M_y = M \cdot \cos \alpha. \quad (4.1)$$

Введём следующее правило знаков для моментов M_x и M_y — момент считается положительным, если в первой четверти координатной плоскости (там, где координаты x и y обе положительны) он вызывает сжимающие напряжения.

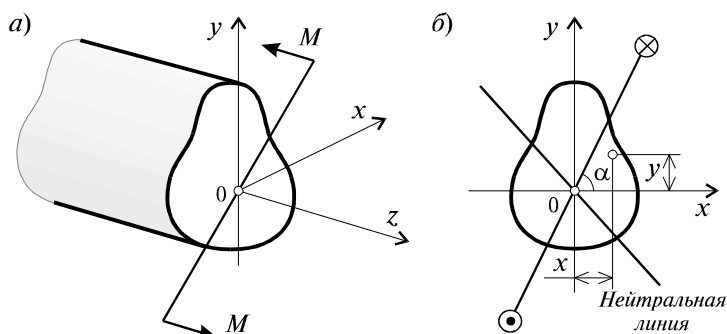


Рис. 4.1

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в произвольной точке, принадлежащей к поперечному сечению бруса и имеющей координаты x, y , определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y , т.е.

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}. \quad (4.2)$$

Подставляя выражения M_x и M_y из (4.1) в (4.2), получим:

$$\sigma(x, y) = M \left(\frac{y}{I_x} \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что последнее выражение представляет собой уравнение плоскости. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор напряжения σ , то концы векторов образуют геометрическое место точек, принадлежащих одной плоскости, как и при поперечном изгибе.

Уравнение *нейтральной линии*, т.е. геометрического места точек, где нормальное напряжение принимает нулевые значения, найдем, полагая в (5.26) $\sigma = 0$:

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0.$$

Откуда определяется:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x. \quad (4.3)$$

Опасные точки сечения

Поскольку свободный член в (4.3) равен нулю нейтральная линия всегда проходит через начало координат. Как видно из выражения (4.3), эпюра напряжений в поперечных сечениях бруса линейна, следовательно, максимальные напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии. В том случае, когда сечение имеет простую форму (прямоугольник, круг), положение наиболее опасных точек легко определяется визуально. Для сечений, имеющих сложную форму, необходимо применить графический подход.

Далее покажем, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента, как это всегда выполнялось при поперечном изгибе. Действительно угловой коэффициент K_1 следа момента (рис. 4.1, б) равен:

$$K_1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.4)$$

Угловой же коэффициент нейтральной линии, как это следует из (5.27), определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = K_2 = \frac{I_x M_y}{I_y M_x} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.5)$$

Так как в общем случае $I_x \neq I_y$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку $K_1 \neq -\frac{1}{K_2}$. Брус, образно выражаясь, предпочитает изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет минимальной.

Условия прочности и типы задач, решаемых на его основе

Расчёты на прочность при косом изгибе будем производить только по нормальным напряжениям. Будем считать, что положение опасных точек известно. Примем, что в точке 1 действуют максимальные растягивающие напряжения, а в точке 2 – максимальные сжимающие напряжения. Координаты этих точек обозначим соответственно x_i, y_i ($i=1, 2$). Составим условие прочности проектировочного расчёта, воспользовавшись уравнением (4.2)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_x}{I_x} y_1 + \frac{M_y}{I_y} x_1 \leq R_t, \\ |\sigma_2| &= \frac{M_x}{I_x} |y_2| + \frac{M_y}{I_y} |x_2| \leq R_c. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь R_t, R_c – расчётные сопротивления материала соответственно на растяжение и сжатие.

Для балок, материалы которых одинаково работают на растяжение и сжатие

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \right| \leq R. \quad (4.4)$$

При проверочном расчёте определяются

$$n_1 = \frac{R_t}{\sigma_1}, \quad n_2 = \frac{R_c}{\sigma_2},$$

и в качестве запаса прочности балки принимается меньшее из полученных значений.

При известных размерах поперечного сечения бруса из условий прочности (4.3) или (4.4) нетрудно определить опускаемое значение нагрузки.

Сложнее выполнить проектный расчёт, поскольку в формулы входят две геометрические характеристики I_x , I_y . В этом случае приходится задаваться размерами сечения и проверять их расчётом на прочность. При неудовлетворительных результатах следует корректировать размеры и вновь производить проверку. Задача существенно упрощается для сечений простой формы, например, прямоугольной, особенно если заданы отношения сторон сечения.

4.3. Величина и направление прогибов при косом изгибе. Условие жесткости и типы задач, решаемых на его основе

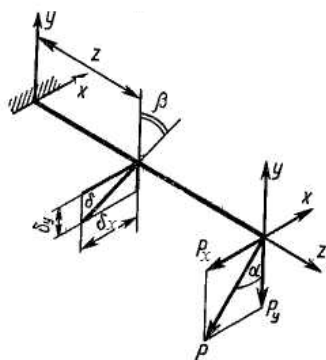


Рис. 4.2.

Внешние силы, приложенные к балке, разлагаются по главным центральным осям сечений, в которых они действуют (рис. 4.2). Если на балку действуют только силы, лежащие в плоскости, перпендикулярной главной центральной оси x , то изгиб будет прямым. Тогда нейтральной линией сечения будет ось x , и воспользовавшись универсальными уравнениями углов поворота и прогибов, найдем прогиб δ_y текущего сечения балки в направлении оси y . Аналогично, при действии на балку сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси y , определим δ_x — прогиб в текущем сечении по

направлению оси x . По принципу независимости действия сил прогиб δ текущего сечения балки и его направление найдем по формулам

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_y}{\delta_x}.$$

Для балок, имеющих большой пролет, актуальным является вопрос проверки жесткости. Задача сводится к определению положения сечения, в котором прогиб достигает наибольшего значения по абсолютной величине. Далее используются те же приемы, которые рассмотрены ранее при решении задачи о плоском поперечном изгибе в курсе "Сопротивление материалов".

4.4. Внецентренное растяжение (сжатие) стержней большой жесткости

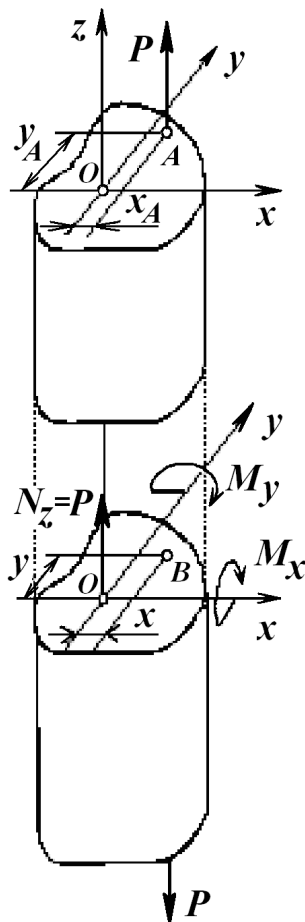


Рис. 4.6

Внецентренное сжатие и растяжение как и косой изгиб относится к сложному виду сопротивления бруса. При внецентренном растяжении (сжатии) равнодействующая внешних сил не совпадает с осью бруса, как при простом растяжении, а смещена относительно оси z и параллельна ей (рис. 4.6).

Пусть в точке $A(x_A, y_A)$ приложена равнодействующая внешних сил P . Тогда относительно главных осей x и y равнодействующая сила P вызывает моменты:

$$M_x = P \cdot y_A; \quad M_y = P \cdot x_A. \quad (4.9)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении (сжатии) в поперечном сечении бруса возникает нормальная сила $N_z = P$ и изгибающие моменты M_x и M_y .

4.5. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек

На основании принципа независимости действия сил в произвольной точке B с координатами x, y нормальное напряжение σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py_A}{I_x} y + \frac{Px_A}{I_y} x. \quad (4.10)$$

Используя выражения для квадратов радиусов инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A},$$

можно (5.35) преобразовать к следующему виду:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right).$$

Уравнение нейтральной линии получим, приравняв нулю выражение для нормальных напряжений σ :

$$\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Из (4.11) можно легко определить отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях. Если приравнять $x = 0$, то получим:

$$1 + \frac{y_A \cdot a_y}{i_x^2} = 0.$$

где a_y – координата точки пересечения нейтральной линии и оси y .

Решая это уравнение, получим:

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_A}.$$

Аналогичным образом можно определить координату пересечения нейтральной линии и оси x :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_A}.$$

Можно решить и обратную задачу – определить координаты приложения силы P при заданных отрезках a_x и a_y . Опуская простейшие выкладки, приведем окончательные выражения:

$$x_A = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_A = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

Наибольшее напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке наиболее удаленной от нейтральной линии.

Условие прочности и типы задач, решаемых на его основе

По тем же соображениям, что и при косом изгибе, опасными точками в сечении будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

Пусть в точке 1 действуют максимальные растягивающие, а в точке 2 – максимальные сжимающие напряжения. Тогда условие прочности проекторочного расчёта для стержня, материал которого неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, имеет вид:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_P x_1}{i_y^2} + \frac{y_P y_1}{i_x^2} \right) \leq R_t,$$

$$\sigma_2 = \left| \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_P x_2}{i_y^2} + \frac{y_P y_2}{i_x^2} \right) \right| \leq R_c.$$

Для стержня, материал которого одинаково работает на растяжение и сжатие, запишем

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_P x}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_x^2} \right) \right|_{\max} \leq R.$$

Раскрывая условие прочности, можно решать, как и раньше, 3 типа задач. При этом самой простой остается задача определения коэффициента запаса конструкции. Сравнительно просто решается задача, связанная с определением максимальной силы $[P]$. Наиболее сложной является задача проекторочного расчёта, которая решается тем же путем, как и при косом изгибе.

4.6. Ядро сечения

При внецентренном растяжении (сжатии) в отличие от косоого изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Расстояние от начала координат xOy до прямой

$ay + bx + c = 0$, как известно из курса аналитической геометрии, определяется по формуле:

$$OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно, в данном случае (рис. 4.7):

$$OC = \frac{1}{A \sqrt{\left(\frac{y_A}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{x_A}{I_y}\right)^2}}. \quad (4.12)$$

Тогда, как это следует из (4.12), по мере того, как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

При $x_A \rightarrow 0$, $y_A \rightarrow 0$, получаем $OC \rightarrow \infty$. Сила в данном случае становится центральной, а напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. В тех случаях, когда нейтральная линия пересекает сечение, в нем возникают напряжения разного знака. В противном случае в сечении во всех точках возникают напряжения одного знака. Следовательно, в окрестности центра тяжести всегда существует некая область, называемая *ядром сечения*, такая, что если точка

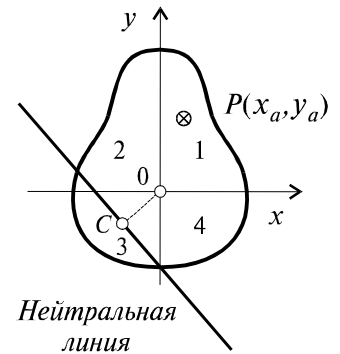


Рис. 4.4.

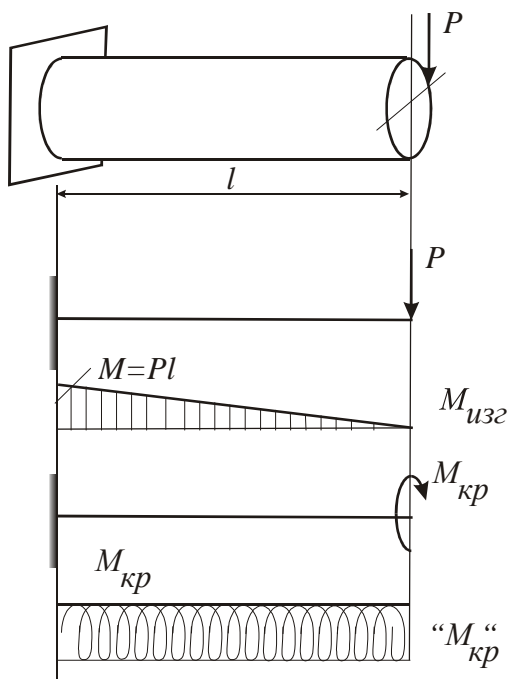


Рис. 3.1.

приложения силы P расположена в пределах указанной области, то в поперечном сечении возникают напряжения лишь одного знака. При этом если сила приложена по границе ядра сечения, то нейтральная линия касается контура сечения.

Данный факт имеет большое значение при проектировании колонн из хрупких материалов, (например, бетона, кирпича и т.д.), которые, как правило, имеют существенно меньшую прочность на растяжение, нежели на сжатие. Поэтому при проектировании таких конструкций необходимо предусмотреть, чтобы равнодействующая сжимающая сила была

расположена в пределах ядра сечения.

4.7. Изгиб с кручением. Расчёты на прочность

Рассмотрим особенности теории на конкретном примере.

Пусть мы имеем брус круглого поперечного сечения в условиях изгиба с кручением (рис. 3.1). Воспользуемся опытом, полученным нами при рассмотрении косоугольного изгиба или внецентренного растяжения бруса.

Перенесём силу к центру, и обратимся к принципу независимости действия сил. Построив и проанализировав эпюры, приведенные на рис. 3.1, отметим, что опасным является сечение в заделке. При этом изгиб приводит к появлению нормальных напряжений

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_u},$$

а кручение – касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p}.$$

Причем, как было показано ранее, эти напряжения действуют в одних и тех же точках, лежащих на поверхности бруса в заделке. Поэтому для этих точек можно воспользоваться формулой (3.1) и записать согласно III теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(III)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)^2}.$$

Далее учтем, что $W_p = 2W_u$. Тогда

$$\sigma_{\text{экв}}^{(III)} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{2W_u}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}}{W_u} = \frac{M_{\text{расч}}^{(III)}}{W_u}$$

где $M_{\text{расч}}^{(III)} = M_u^2 + M_{кр}^2$.

Таким образом, условие прочности в рассмотренном примере имеет вид:

$$\frac{M_{\text{расч}}^{(III)}}{W_u} \leq R,$$

который похож на вид соответствующего условия прочности при плоском поперечном изгибе.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

5.1. Особенности определения перемещений в плоских стержневых системах (рамах, фермах, комбинированных системах)

Под *стержневой системой* понимается всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. Если элементы конструкции работают только

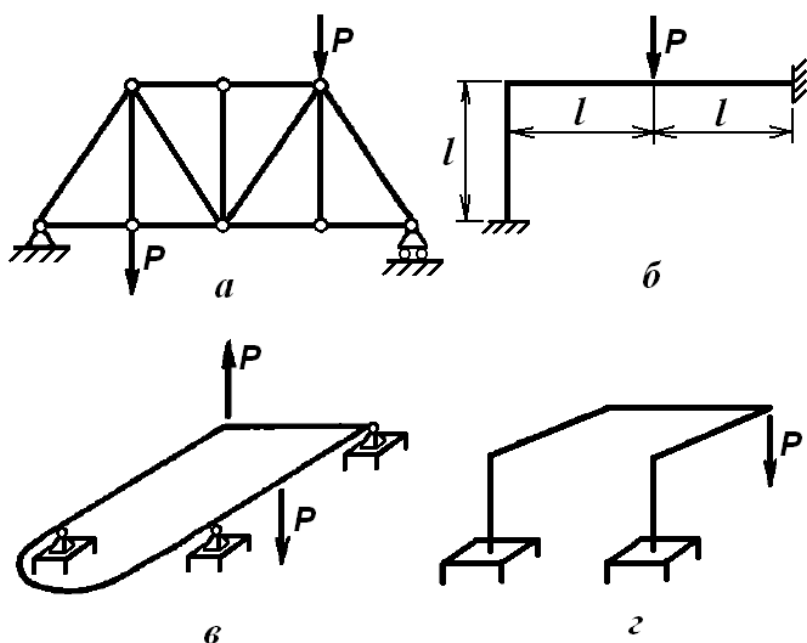


Рис. 5.1.

на растяжение или сжатие система называется *фермой* (рис. 5.1, а). Ферма состоит из шарнирно опертых между собой прямых стержней, образующих треугольники и для нее характерно приложение внешних сил в узлах заданной системы.

Если элементы стержневой системы работают в основном на изгиб или кручение, то такая система называется *рамой* (рис. 5.1, б).

Если все элементы стержневой системы расположены в одной плоскости, в которой также действуют все внешние силы, включая реакции опор, то система называется *плоской* (рис. 5.1, а, б).

Если все элементы заданной системы расположены в одной плоскости, а внешние силы действуют в перпендикулярной плоскости, то система называется *плоскопространственной* (рис. 5.1, в). Стержневые системы, не относящиеся к двум указанным категориям, называются *пространственными* (рис. 5.1, г).

Все стержневые системы принято разделять на статически определимые и статически неопределимые. Под *статически определимой* понимается такая система, для которой усилия во всех её элементах могут быть определены по методу сечений с применением лишь уравнений равновесия. Если этого сделать нельзя, то такая система называется *статически неопределимой*.

Разность между числом неизвестных усилий (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы, называется *степенью статической неопределимости* системы.

В курсе сопротивления материалов мы рассматривали метод начальных параметров для вычисления перемещений в балках. При всех достоинствах этого метода он обладает одним существенным недостатком – при большом количестве участков вычислительные формулы становятся весьма громоздкими. Особенно это существенно в случае криволинейной оси стержневой системы.

В связи с этим, рассмотрим более универсальный метод определения перемещений – *метод Мора*, названный так по имени немецкого ученого, предложившего его.

5.2. Потенциальная энергия упругой деформации в бруске малой кривизны

Изменение потенциальной энергии частиц материала системы при её деформации, создаваемой внешними силами, называется потенциальной энергией деформации.

В процессе нагружения система может прийти в колебательное движение. Потенциальная энергия деформации на основании теорем механики в любой момент времени t равна работе внешних сил, сил инерции и сил сопротивления, действующих на точки системы:

$$u(t) = A(t) - \iiint_m \left[\int \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \cos \alpha + \psi \frac{d\delta}{dt} \cos \beta \right) d\delta \right] dm,$$

где $u(t)$ - потенциальная энергия деформации; $A(t)$ - работа внешних сил; δ - текущее перемещение точки; m - масса системы; $\frac{d^2\delta}{dt^2}dm$ - элементарная сила инерции; $\frac{d\delta}{dt}dm$ - элементарная сила внутреннего трения, которую считаем пропорциональной скорости точки и направленной в сторону, ей противоположную; ψ - коэффициент пропорциональности, зависящий от материала тела; α - угол между направлением ускорения точки и её перемещением; β - угол между направлением скорости точки и её перемещением.

Если величины приложенных к телу сил, достигнув в конце процесса нагружения значений $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, в дальнейшем остаются постоянными, то колебательное движение точек тела будет затухающим. Поэтому в положении статического равновесия, при котором ускорения и скорости всех точек системы равны нулю,

$$u = A,$$

где u — потенциальная энергия деформации в положении статического равновесия; A — работа внешних сил, соответствующая этому состоянию. Следовательно,

$$du = dA.$$

В дальнейшем под Q_i будем понимать как величину сосредоточенной силы, так и величину момента пары и называть Q_i обобщённой силой. Под δ_i будем понимать: для сосредоточенной силы — перемещение точки её приложения по направлению силы, для пары сил — поворот плоскости её действия. Назовем δ_i обобщённым перемещением, соответствующим Q_i .

Из закона Гука в силах и перемещениях, который гласит, что до определённых пределов между внешними силовыми факторами и перемещением любой точки тела по любому направлению существует линейная зависимость, для n обобщённых сил, действующих на механическую систему (рис. 5.2, а), получим систему n линейных уравнений, в которых δ_j выражены через Q_i :

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ji} Q_i ; (j=1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

здесь коэффициенты δ_{ij} при Q_i называются единичными перемещениями или податливостями. Таким образом, δ_{ij} — перемещение сечения, в котором приложена j -я обобщённая сила по её направлению, при действии на систему только единичной безразмерной обобщённой силы, приложенной вместо и по направлению Q_i . Или короче: δ_{ij} — перемещение сечения по направлению j от обобщённой единичной силы, приложенной по направлению i . Единичные перемещения показаны на рис. 5.2,б.

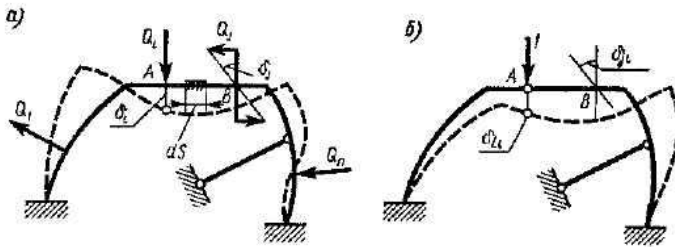


Рис. 5.2.

Выразив из системы (5.1) обобщённые силы через обобщённые перемещения, получим систему уравнений

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \delta_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Здесь C_{ij} — жесткость по направлению j от единичного перемещения по направлению i , причем $C_{ji} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, где Δ — определитель системы уравнений (5.1), A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента δ_{ji} этого определителя. Если каждая обобщённая сила получит бесконечно малое приращение ΔQ_i , то каждое обобщённое перемещение получит бесконечно малое приращение $\Delta \delta_i$. Тогда приращение работы

$$\Delta A = \sum_{i=1}^n (Q_i + \Delta Q_i) \Delta \delta_i ,$$

а дифференциал работы есть дифференциал потенциальной энергии деформации

$$du = \sum_{i=1}^n Q_i d\delta_i , \quad (5.3)$$

5.3. Теорема Лагранжа

Работа, а, следовательно, и потенциальная энергия деформации являются функцией обобщённых перемещений

$$u = u(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Поэтому, как известно из математического анализа,

$$du = \sum_{i=1}^n d\delta_i.$$

Сопоставляя это выражение с (5.3) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = Q_i. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) выражает **теорему Лагранжа**: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщённому перемещению равняется соответствующей обобщённой силе.

5.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений

Несложно доказать, что матрицы $\|C_{ij}\|$ и $\|\delta_{ji}\|$ симметричны, и, следовательно $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Это равенство выражает **теорему взаимности перемещений**, которая гласит: *единичные перемещения с одинаковыми, но переставленными индексами, равны.*

Как следует из (5.1), дифференциалы перемещений можно представить в виде:

$$d\delta_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ji} dQ_i; \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Подставим полученное выражение в (5.3) и учтём полученное выше равенство $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Получим

$$du = (\delta_{11}Q_1 + \dots + \delta_{1n}Q_n)dQ_1 + \dots + (\delta_{n1}Q_1 + \dots + \delta_{nn}Q_n)dQ_n.$$

Следовательно, принимая во внимание (5.1), имеем

$$du = \sum_{i=1}^n \delta_i dQ_i. \quad (5.5)$$

5.5. Теорема Кастилиано

Работа является функцией обобщённых сил $u = u(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, поэтому

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i. \quad (5.6)$$

Сопоставив полученное выражение с (5.5), получим

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_i.$$

Полученная формула выражает **теорему Кастилиано**: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщённой силе равняется соответствующему этой силе обобщённому перемещению.

5.6. Теорема Клапейрона

Чтобы получить $u = u(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ следует проинтегрировать (5.6) по правилу интегрирования полного дифференциала. Так, для двух обобщённых сил, действующих на систему, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_{ii} Q_i + \delta_{ij} Q_j, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ji} Q_i + \delta_{jj} Q_j \quad (5.8)$$

Тогда из первого равенства (5.7) можно представить

$$u = \delta_{ii} \frac{Q_i^2}{2} + \delta_{ij} Q_j Q_i + f(Q_j), \quad (5.7)$$

где $f(Q_j)$ – неизвестная функция только от Q_j . Для определения этой функции продифференцируем выражение (5.7) по Q_j . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ij} Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}.$$

Далее воспользуемся представлением (5.8). Получим

$$\delta_{ji}Q_i + \delta_{jj}Q_j = \delta_{ij}Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}$$

откуда, учитывая, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, получим

$$f(Q_j) = \delta_{jj} \frac{Q_j^2}{2} + u_0,$$

где u_0 - произвольная постоянная.

Подставив полученное выражение в формулу (5.7) будем иметь

$$u = \frac{1}{2} \delta_{ii} Q_i^2 + \delta_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{2} \delta_{jj} Q_j^2 + u_0. \quad (5.8)$$

Принимая во внимание, что при $Q_i = Q_j = 0$ должно следовать равенство $u = 0$, тогда $u_0 = 0$.

Обобщая (5.8) для n обобщённых сил, действующих на систему, получим

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ji} Q_j Q_i.$$

Это выражение можно записать в виде

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \sum_{i=1}^n \delta_{ji} Q_i, \text{ а, учитывая (5.1), - в форме}$$

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \delta_j. \quad (5.9)$$

Эта формула выражает **теорему Клапейрона**: *в положении статического равновесия потенциальная энергия деформации равна сумме половин произведений обобщённых сил на соответствующие им обобщённые перемещения.*

5.7. Потенциальная энергия деформации упругой системы

Далее выразим потенциальную энергию деформации системы через внутренние силовые факторы.

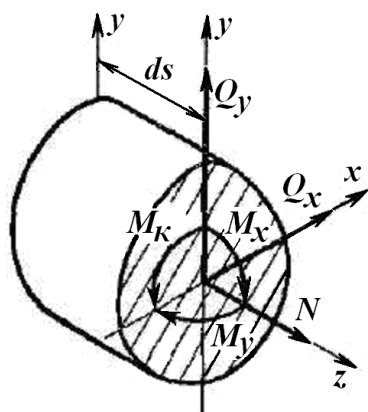


Рис. 5.2

С этой целью двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми по оси участка dS — бесконечно мало, вырежем на 1-м участке системы (рис. 5.1, а) элемент. Силы упругости в поперечных сечениях элемента могут привести к шести внутренним силовым факторам (рис. 5.2), которые для него должны рассматриваться как обобщённые силы. Под действием этих обобщённых сил правое сечение элемента переместится относительно левого, которое считаем

неподвижным. Перемещения сечения в направлениях осей x, y, z от Q_x, Q_y, N и повороты его около осей x, y, z от M_x, M_y, M_k будут взаимно ортогональны, поэтому обобщённое перемещение, соответствующее каждому внутреннему силовому фактору, будет перемещение, вызванное им самим. Или по-другому: *каждый внутренний силовой фактор будет совершать работу только на созданном им (на собственном) перемещении*. На этом основании du — потенциальная энергия деформации элемента может быть найдена, как сумма потенциальных энергий деформации, определенных при действии на элемент каждого внутреннего силового фактора отдельно:

$$du = du_{M_x} + du_{M_y} + du_{M_k} + du_N + du_{Q_x} + du_{Q_y}.$$

При вычислении соответствующих слагаемых, входящих в эту формулу, воспользуемся теоремой Клапейрона (5.9). Так, рассматривая изгиб моментом M_x (рис. 5.3, а), запишем:

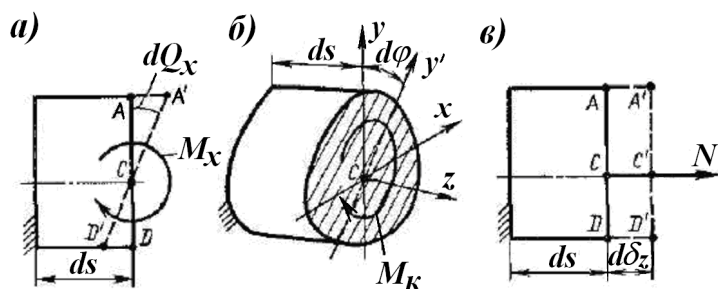


Рис. 5.3

$$du_{M_x} = \frac{M_x d\theta_x}{2}, \text{ где } d\theta_x - \text{поворот}$$

правого сечения элемента, остающегося плоским при чистом изгибе относительно оси x . Принимая во внимание выведенное ранее при рассмотрении плоского

изгиба соотношение

$$\frac{d\theta_x}{ds} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{M_x}{EI_x},$$

запишем

$$d\theta_x = \frac{M_x}{EI_x} ds.$$

Тогда

$$du_{M_x} = \frac{M_x d\theta_x}{2} = \frac{M_x^2}{2EI_x} ds.$$

По аналогии запишем $du_{M_y} = \frac{M_y d\theta_y}{2} = \frac{M_y^2}{2EI_y} ds.$

Аналогичным образом, рассматривая действие крутящего момента M_k (рис. 5.3, б) и осевую растягивающую силу N , получим:

$$du_{M_k} = \frac{M_k d\phi}{2} = \frac{M_k^2}{2GI_k} ds, \quad du_N = \frac{Nd\delta_z}{2} = \frac{N^2}{2EA} ds.$$

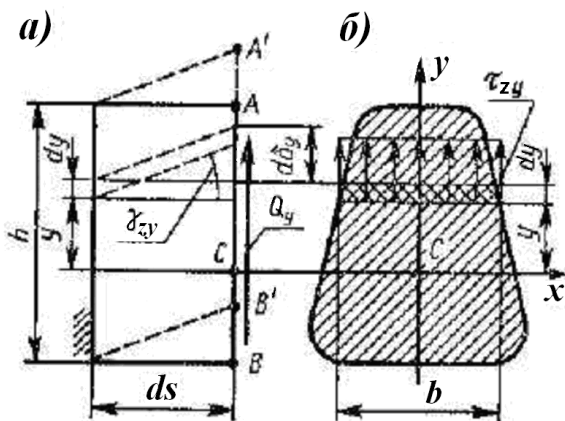


Рис. 5.4.

Угол сдвига γ_{xy} элемента (рис. 5.4, а) с размерами b , ds , dy (рис. 5.4, б) перемещается по высоте сечения h , поэтому для определения du_{Q_y} придется сначала вычислить $d(du_{Q_y})$ - потенциальную энергию деформации этого элемента. Касательные силы упругости, действующие по граням элемента, параллельным нейтральному слою, нормальны к перемещению, и, следовательно, их работа равна нулю. Для элемента; $\tau_{zy} b dy$ - сила, действующая по грани, совпадающей с поперечным сечением; $d\delta_y = \gamma_{zy} ds$ - перемещение этой грани.

Тогда

$$d(du_{Q_y}) = \frac{1}{2} \tau_{zy} b dy \gamma_{zy} ds.$$

Воспользуемся формулой Журавского $\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{onc}}{I_x b}$ и вспомним закон Гука

при чистом сдвиге $\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} = \frac{Q_y S_x^{onc}}{GI_x b}$. Тогда, $d(du_{Q_y}) = \frac{Q_y^2 (S_x^{onc})^2}{2GI_x^2 b} ds dy$.

Откуда следует $du_{Q_y} = \eta_y \frac{Q_y^2}{2GA} ds$. Здесь введена характеристика

$$\eta_y = \frac{A}{I_x^2} \int \frac{(S_x^{onc})^2}{b} dy - \text{зависящая только от формы сечения.}$$





Совершенно аналогично получим формулу:

$$du_{Q_x} = \eta_x \frac{Q_x^2}{2GA} ds.$$

Значения коэффициентов для некоторых форм сечений приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

Значения коэффициентов η_x, η_y для различных форм сечений

Форма сечения				
$\eta_x = \eta_y$	10/9	6/5	2,00	3,14

Таким образом, мы получили:

$$\begin{aligned} du &= du_{M_x} + du_{M_y} + du_{M_k} + du_N + du_{Q_y} + du_{Q_x} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{GI_k} + \frac{N^2}{EA} + \eta_y \frac{Q_y^2}{GA} + \eta_x \frac{Q_x^2}{GA} \right) ds. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Вводя обозначения: n – число участков системы, s_i – длину i -того участка, получим для системы:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \left(\frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{GI_k} + \frac{N^2}{EA} + \eta_y \frac{Q_y^2}{GA} + \eta_x \frac{Q_x^2}{GA} \right) ds. \quad (5.11)$$

5.8. Определение перемещений методом Мора

Суть метод Мора в следующем. Если необходимо определить перемещение в заданной точке по заданному направлению, то наряду с заданной системой внешних сил в этой точке прикладывается внешнее усилие $F = 1$ в интересующем нас направлении.

Далее составляется выражение потенциальной энергии системы, состоящей из n участков с учетом одновременного действия заданной системы внешних сил и силы F :

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{(M_z + \bar{M}_z F)^2}{2GI_k} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{(M_x + \bar{M}_x F)^2}{2EI_x} dz + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{(M_y + \bar{M}_y F)^2}{2EI_y} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{(N_z + \bar{N}_z F)^2}{2EA} dz + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{K_x(Q_x + \bar{Q}_x F)^2}{2GA} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{K_y(Q_y + \bar{Q}_y F)^2}{2GA} dz,
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

где K_x, K_y – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения и учитывают неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при поперечном изгибе. Так, например, для прямоугольника $K_x = K_y = 1,2$, а для двутавра при изгибе в плоскости его стенки $K = A/A_{CT}$, где A – площадь всего сечения двутавра, A_{CT} – площадь стенки; $N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y$ – внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной стержневой системы; $\bar{N}_z, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ – внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной системы, от действия усилия $F = 1$.

Дифференцируя выражение (5.12) по F , и полагая после этого $F = 0$, находим искомое перемещение в искомой точке в нужном направлении.

$$\frac{dU}{dF} \Big|_{F=0} = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_z \bar{M}_z}{GI_k} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dz +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_z \bar{N}_z}{EA} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{K_x Q_x \bar{Q}_x}{GA} dz + \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{K_y Q_y \bar{Q}_y}{GA} dz. \quad (5.13)$$

Полученные интегралы называются интегралами Мора и широко применяются при вычислении перемещений стержневых систем.

Для систем, элементы которых работают на растяжение или сжатие (например, шарнирно–стержневые системы – фермы), в формуле Мора (5.13) отличен от нуля будет только слагаемое, содержащее продольные силы. При расчёте балок или рамных систем, работающих в основном на изгиб, влияние поперечной и продольной силы на перемещение несущественно и в большинстве случаев их влияние не учитывается. В случае пространственной работы стержня или стержневой системы, элементы которой работают, в основном, на изгиб и кручение, в формуле Мора обычно ограничиваются рассмотрением слагаемых, содержащих изгибающие и крутящие моменты.

Подробно рассмотрим случай, когда брус работает только на изгиб ($M_x \neq 0$, $N_z = M_z = M_y = Q_x = Q_y = 0$). В этой ситуации выражение (5.13) принимает вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dz. \quad (5.14)$$

Согласно (5.14) для определения перемещения произвольной точки в произвольном направлении, последовательно необходимо выполнять следующее:

- Построить эпюру моментов M_x от заданной системы внешних сил;
- Исключая внешние силы и в точке, где необходимо определить перемещение по заданному направлению, прикладывается единичное усилие (сила – если требуется определить линейное перемещение; момент – если требуется определить угловое перемещение), и от действия единичного усилия строится эпюра моментов \bar{M}_x ;
- По формуле Мора (5.14) вычисляется искомое перемещение.

5.9. Способ Верещагина

Если принять $EI = \text{const}$, то перемещение в некоторой точке стержня определяется как интеграл от произведения двух функций моментов – M_x и \bar{M}_x . В общем виде интеграл Мора можно выразить следующей формулой:

$$I = \frac{1}{EI} \int_0^l f_1(z) f_2(z) dz. \quad (5.15)$$

Часто встречаются случаи, когда на участке стержня длиной l необходимо вычислить интеграл Мора при условии, что по крайней мере одна из функций – линейная (рис. 5.2). Пусть $f_2 = b + kz$, тогда из (5.4) получим :

$$\begin{aligned} I &= b \int_0^l f_1(z) dz + \int_0^l z f_1(z) dz = b\Omega_1 + \int_0^l z d\Omega_1 = \\ &= b\Omega_1 + k\Omega_1 z_C = \Omega_1(b + k z_C) = \Omega_1 f_2(z_C), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где Ω_1 – площадь эпюры f_1 ; $f_2(z_C)$ – ордината линейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 5.5).

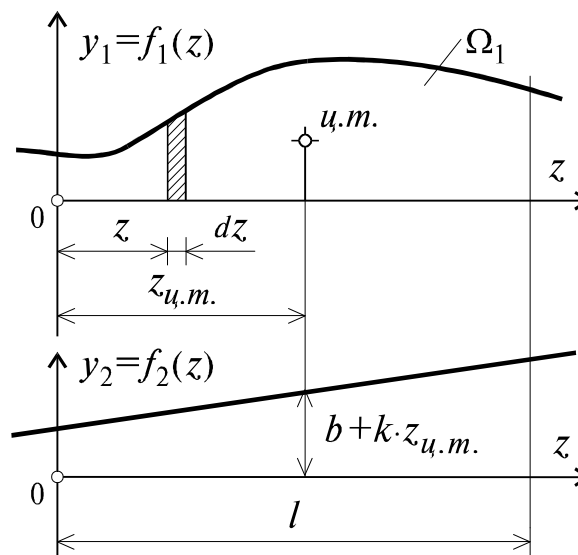


Рис. 5.5.

Приведённое решение носит имя русского ученого Верещагина, впервые его получившего. Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования выражения (5.4) в случае линейности хотя бы одной из подынтегральных функций существенно упрощается и сводится к перемножению площади криволи-

нейной эпюры на ординату второй (линейной) функции под центром тяжести криволинейной.

Используя способ Верещагина, приведём результаты вычисления интегралов Мора для двух наиболее часто встречающихся случаев:

1. Обе функции f_1 и f_2 – линейные (рис. 5.6), тогда

$$I = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc); \quad (5.17)$$

2. Функция f_1 – квадратная парабола, f_2 – линейная функция (рис. 5.7). Такая ситуация встречается, когда на участке длиной l приложена равномерно распределенная нагрузка q , тогда

$$I = \frac{2}{3} f \cdot l \cdot \frac{a+c}{2}, \quad (5.18)$$

где f – “стрелка” квадратной параболы (рис. 5.7), $f = \frac{ql^2}{8}$.

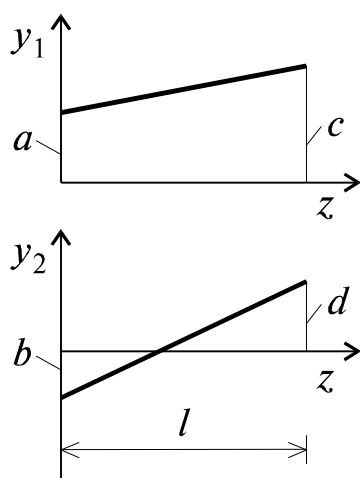


Рис. 5.6.

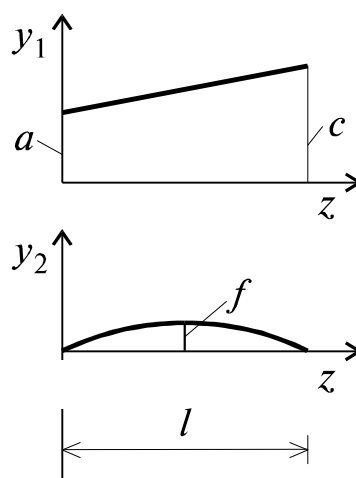


Рис. 5.7.

В общем случае, если площадь Ω эпюры моментов имеет сложную геометрию и представляется возможным её разбить на площади Ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), имеющие элементарную геометрию, то интеграл Мора I от произведения эпюры Ω на эпюру моментов M , может быть представлен в виде:

$$I(\Omega, M) = I(\Omega_1, M) + I(\Omega_2, M) + I(\Omega_3, M) + \dots \quad (5.19)$$

6. МЕТОД СИЛ, РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Для расчёта усилий в статически неопределимых стержневых системах существуют различные методы. Здесь рассмотрим *метод сил*.

6.1. Статически неопределимые системы. Необходимые и лишние связи

Если рассматривать внешние связи, то можно отметить, что положение жесткого тела на плоскости x, y характеризуется тремя независимыми параметрами – координатами x, y и углом поворота рассматриваемой плоскости. Таким образом, необходимое для равновесия число наложенных внешних связей должно быть равно трём (по количеству независимых уравнений равновесия – $\sum x = 0, \sum y = 0, \sum m = 0$). Если плоская система состоит из D частей, каждую из которых можно рассматривать как жёсткое тело, то количество параметров, определяющих положение этой системы, будет равно $3D$. Каждый шарнир, соединяющий две части системы, разрешает лишь их взаимный поворот, устраняя возможность их взаимных смещений – следовательно он уменьшает количество возможных перемещений системы на две единицы. Кроме этого, каждый опорный стержень устраняет возможность перемещения системы в соответствующем направлении. Таким образом, подсчитать степень статической неопределимости системы, определяемую внешними связями, можно по следующей формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C,$$

где D – число частей (“дисков”) системы, каждая из которых может рассматриваться как абсолютно жесткое тело, $Ш$ – количество шарниров в системе, соединяющих “диски”, C – число опорных стержней. Для статически определимых систем $W = 0$. При $W < 0$ система является статически неопределимой.

Наиболее характерные типы внешних связей и их схематичные изображения рассмотрены при изучении теории плоского изгиба.

На рис. 6.1 показана плоская рама, имеющая в первом (*а*) случае три внешние связи, а во втором случае (*б*) – пять. Значит, в первом случае рама имеет необхо-

димое для статической определимости количество внешних связей, а во втором же – две дополнительные внешние связи. Однако в обеих ситуациях рама статически неопределима, т.к. конфигурация её такова, что не позволяет определить усилия во всех её элементах, используя только уравнения равновесия. Следовательно, для окончательного ответа на вопрос о статической определимости системы необходимо проведение совместного анализа наложенных на систему внешних и внутренних связей (более подробно этот вопрос рассматривается в курсе строительной механики).

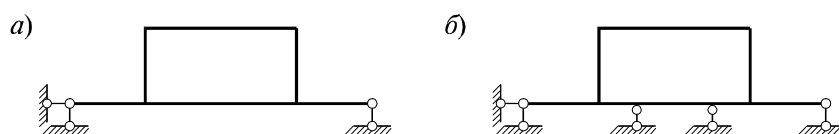


Рис. 6.1.

6.2. Эквивалентная и основная система метода сил

Суть метода сил заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины, в дальнейшем, подбираются так, чтобы перемещения системы соответствовали тем бы ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название *основной системы*. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 6.2, а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 6.2, б, в), однако их должно объединять следующее условие – основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

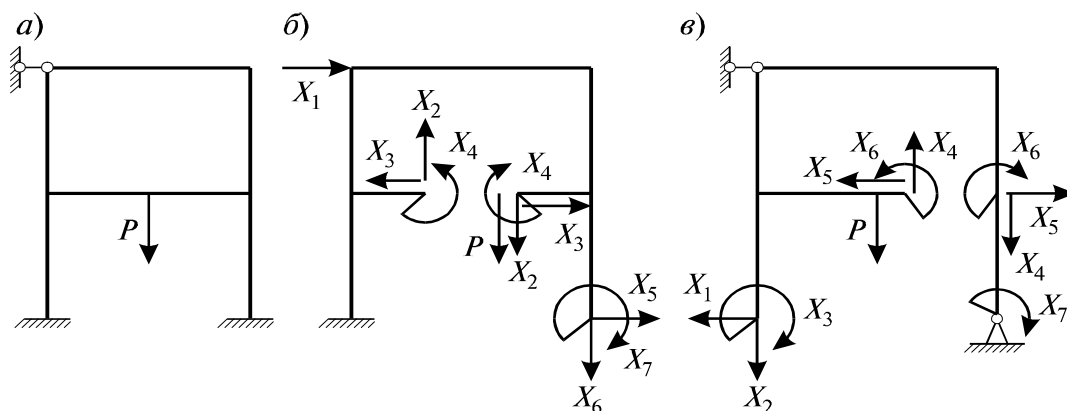


Рис. 6.2.

Рассмотрим систему, которая дважды статически неопределима (рис. 6.3, а). Заменим в основной системе действие отброшенных связей неизвестными усилиями X_1 и X_2 (рис. 6.3, б). Принятая основная система будет работать также, как и заданная, если на нее наложить условие отсутствия вертикальных перемещений в точках А и В (т.е. в тех местах, где в заданной системе стоят опоры):

$$y_A(P, x_1, X_2) = 0; \quad y_B(P, X_1, X_2) = 0. \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) называются *уравнениями совместности деформаций* и при их выполнении фактически устанавливается условие эквивалентности между заданной и основной системой при действии внешней силы P и неизвестных усилий X_1 и X_2 . На основании принципа независимости действия сил (6.1)

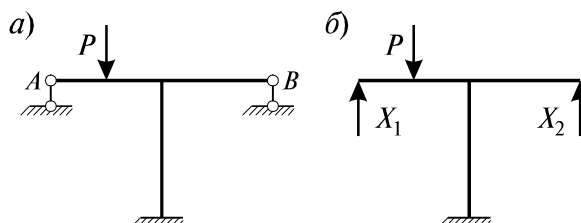


Рис. 6.3

можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_A(P) + y_A(X_1) + y_A(X_2) &= 0, \\ y_B(P) + y_B(X_1) + y_B(X_2) &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $y_A(P)$, $y_B(P)$, $y_A(X_1)$, $y_B(X_1)$, $y_A(X_2)$, $y_B(X_2)$ – вертикальные перемещения точек А и В основной системы соответственно от действия сил P , X_1 , X_2 .

6.3. Канонические уравнения метода сил

Вводя обозначения δ_{11} , δ_{12} , Δ_{1P} – вертикальные перемещения точки А основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от

внешней силы P ; δ_{21} , δ_{22} , Δ_{2P} – вертикальные перемещения точки B основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от внешней силы P , и учитывая существование линейности связи между силой и перемещением, систему уравнений (6.2) можно преобразовать в канонической форме:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Последние уравнения носят названия *канонических уравнений метода сил*.

Для вычисления коэффициентов при неизвестных X_1 и X_2 используют формулу Мора:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dz, \quad (i, j = 1, 2). \quad (6.4)$$

Легко видеть, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, это свойство называется законом *парности коэффициентов* при неизвестных. Свободные же коэффициенты определяются по формуле:

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} dz. \quad (6.5)$$

После решения системы (6.3) определяются величины неизвестных усилий X_1 и X_2 . Если их значения получились отрицательными, это означает, что реально они действуют в направлении противоположном принятому. Окончательная эпюра моментов определяется по зависимости

$$M_{OK} = M_m + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2. \quad (6.6)$$

Эпюра поперечных сил Q_{OK} может быть построена по эпюре моментов M_{OK} с использованием зависимости $Q = \frac{dM}{dz}$ и величин приложенных к системе усилий.

6.4. Принципы расчёта простых статически неопределимых балок

Расчёт статически неопределимых балок с использованием метода сил производится в определённом порядке, который разберем на конкретном примере.

Для балки (рис. 6.4) задано: $l_1 = 2l_2$, $P = ql_1$, $m = ql_1^2$.

Требуется:

1. Определить степень статической неопределимости системы и составить уравнение совместности деформаций;

2. Определить коэффициенты и решить каноническое уравнение метода сил;

3. Построить эпюры моментов M и поперечных сил Q .

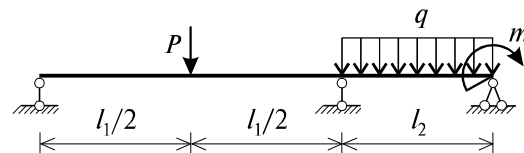


Рис. 6.4

Решение проводится в следующей последовательности:

1. Определяется степень статической неопределимости системы и составить уравнение совместности деформаций.

Используя формулу для определения W , подсчитаем степень статической неопределимости системы.

Имеем: $D = 1$, $III = 0$, $C = 4 \rightarrow W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$, следовательно система один раз статически неопределима.

Основную систему получим путем отбрасывания опоры в точке A и замены её действия неизвестным усилием X_1 (рис. 6.5). Каноническое уравнение метода сил в данном случае запишется в следующем виде:

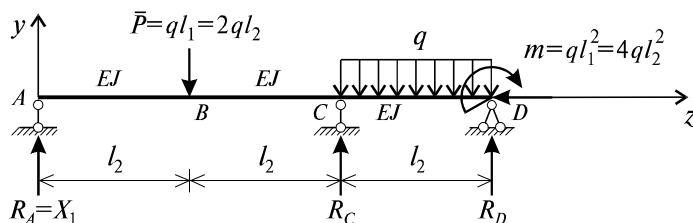


Рис. 6.5

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

2. Определяются коэффициенты и решается каноническое уравнение метода сил.

От силы X_1 строим эпюру M_1 (рис. 6.6). Для определения величины δ_{11} воспользуемся выражением (6.4). Фактически эпюру M_1 нужно умножить саму на себя и проинтегрировать это произведение:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_1 dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2l_2}{6} \left[2 \cdot (2l_2)^2 \right] + \frac{l_2}{6} \left[2 \cdot (2l_2)^2 \right] \right) = \frac{4l_2^3}{EI}.$$

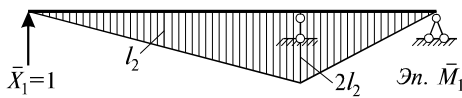


Рис .6.6

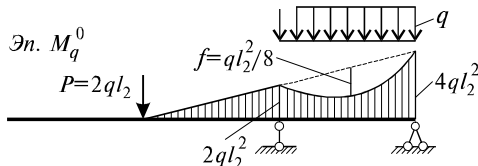


Рис .6.7

Для определения свободного коэффициента в каноническом уравнении строим в основной системе эпюру моментов M_P от внешней нагрузки (рис. 6.7) и в соответствии с (6.5) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_P dz = \\ &= -\frac{l_2}{6EI} \cdot \left(2 \cdot 2l_2 \cdot 2ql_2^2 + 2ql_2^2 \cdot l_2 \right) - \frac{l_2}{6EI} \cdot \left(2 \cdot 2ql_2^2 \cdot 2l_2 + 2l_2 \cdot 4ql_2^2 \right) + \\ &\quad + \frac{2}{3EI} \cdot \frac{ql_2^2}{8} \cdot l_2 \cdot \frac{2l_2}{2} = -\frac{51}{12EI} ql_2^4. \end{aligned}$$

При вычислении Δ_{1P} было учтено, что эпюры M_1 и M_P имеют разный знак, т.к. вызывают растяжение разных волокон – об этом говорит отрицательный знак при Δ_{1P} . Кроме этого, криволинейный участок в эпюре M_P был представлен как разность трапеции и параболического сегмента.

Напишем уравнение совместности деформаций в виде

$$EI \delta_{11} \cdot X_1 + EI \Delta_{1P} = 0,$$

и, подставляя найденные величины перемещений, получим:

$$4l_2^3 \cdot X_1 = \frac{51}{12} ql_2^4, \text{ откуда } X_1 = \frac{17}{16} ql_2.$$

3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Окончательную эпюру изгибающих моментов получим по формуле:

$$M_{ок} = M_P + M_1 \cdot \frac{17}{16} ql_2.$$

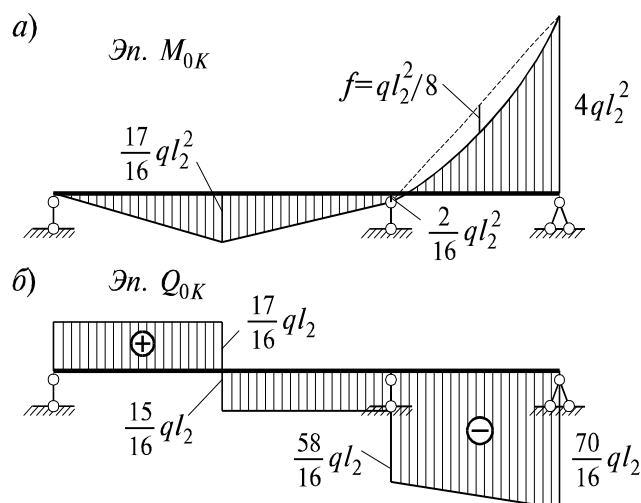


Рис. 6.8

7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

7.1. Общие сведения

В предыдущих главах рассмотрены расчёты элементов строительных конструкций преимущественно на статическую нагрузку. В реальных условиях нередко приходится сталкиваться с нагрузками, меняющими свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени. Такие нагрузки, как отмечалось ранее, называются *динамическими*.

7.2. Учёт сил инерции при расчёте движущихся с ускорением тел

Расчёт на динамическую нагрузку существенно усложняется по сравнению с расчётом на нагрузку, прикладываемую статически. Причина заключается в более сложных методах определения усилий и напряжений, а также механических характеристик материалов, работающих в условиях динамического нагружения. Однако в тех случаях, когда известны силы инерции, определение усилий производится так же, как при статическом нагружении,— с помощью *метода сечений*. Этот подход основан на известном из теоретической механики принципе Д' Аламбера⁴, согласно которому всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим

⁴ Жан Лерон Д' Аламбер (J. L. D' Alembert, 1717—1783)—французский математик и философ. В 1743 г. он впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике.

на него внешним силам добавить силу инерции. Она равна произведению массы m тела на его ускорение a и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Рассмотрим практическую инженерную задачу. Пусть груз весом Q поднимается с постоянным ускорением a (рис. 7.1, а). Для определения усилия в тросе N_d рассечём его в произвольном месте и рассмотрим равновесие системы (рис. 7.1, б), пренебрегая собственным весом троса:

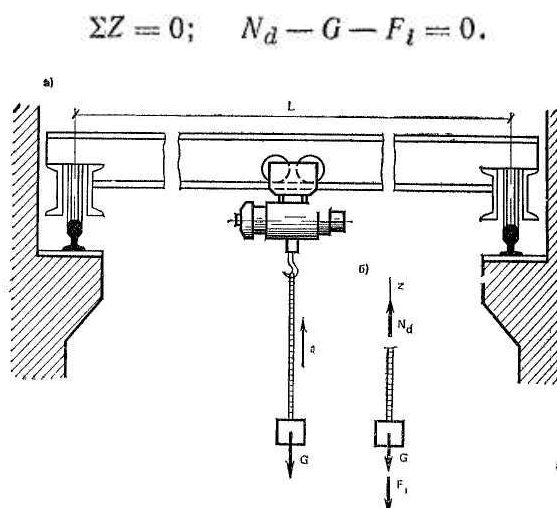


Рис. 7.1.

Сила инерции поднимаемого груза

$$F_i = ma = (G/g)a,$$

где g — ускорение свободного падения, равное $9,81 \text{ м/с}^2$.

Подставляя выражение инерционной силы в уравнение равновесия, получаем

$$N_d - G - Ga/g = 0,$$

Откуда

$$N_d = G(1 + a/g). \quad (7.1)$$

Выражение в скобках (7.1) характеризует отличие усилия в тросе при равноускоренном подъёме груза G от усилия, возникающего при его статическом приложении. Следовательно,

$$N_d = N_{st} k_d,$$

где N_{st} — усилие при статическом нагружении; $k_d = 1 + a/g$ — динамический коэффициент

Таким образом, *усилие от динамической нагрузки равно усилию от статической нагрузки, умноженному на динамический коэффициент.*

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

Пусть тележка однобалочного мостового крана пролетом $L=10$ м, выполненного из двутавра № 40, поднимает равноускоренно расчётный груз $Q=70$ кН (см. рис. 7.1, а). Определить усилие натяжения троса и проверить прочность кран-балки, если за первую секунду груз, находящийся посередине пролета, поднялся на расстояние $s=0,5$ м. Расчётное сопротивление стали $R=235$ МПа. Коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$. Весом троса пренебречь. Вес кран-балки учесть с коэффициентом надёжности $\gamma_f=1,05$.

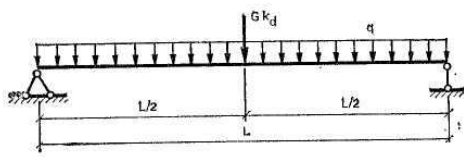


Рис.7.2.

Построим расчётную схему кран-балки.

С этой целью рассмотрим самое неблагоприятное положение крановой тележки (рис. 7.2).

Определение усилия в тросе. Для вы-

числения динамического коэффициента необ-

ходимо найти ускорение a . Воспользуемся известным из кинематики уравнением равнопеременного движения при нулевой начальной скорости $s=at^2/2$, где s — расстояние, пройденное за время t . Тогда

$$a = 2s/t^2 = 2 \times 0,5/1^2 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ м/с}^2$$

и динамический коэффициент

$$k_d = 1 + a/g = 1 + 1/9,81 \approx 1,1.$$

Усилие от динамического нагружения согласно зависимости (7.1)

$$N_d = G \times k_d = 70 \times 1,1 \text{ кН} = 77 \text{ кН}.$$

Проверка прочности кран-балки. Балка работает на изгиб от собственного веса интенсивностью q , прикладываемого статически, и веса груза G , прикладываемого, динамически (рис. 7.2). Наибольший изгибающий момент найдем как сумму моментов от нагрузки, обусловленной собственным весом крановой баки M_q и от действия поднимающегося груза M_G (с учётом динамического эффекта), т.е.

$$M_{\max} = M_q + M_G k_d$$

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} + \frac{Gk_d L}{4} = 0,587 \cdot 10^2 / 8 + 77 \cdot 10 / 4 = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Здесь расчётный вес 1 м длины двутавровой балки №40

$$q = \rho_l g \gamma_f = 57 \cdot 9,81 \cdot 1,05 = 587 \text{ (Н/м)},$$

где ρ_l - линейная плотность балки (кг/м), приводимая в сортаменте.

По найденному изгибающему моменту проверяем напряжения в балке, имеющей согласно той же таблице момент сопротивления сечения $W_x = 953 \text{ см}^3$. Получаем:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{200 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 210 \cdot 10^6 \text{ Па} = 210 \text{ МПа},$$

Т.е. прочность балки обеспечена.

7.3. Расчёты на удар

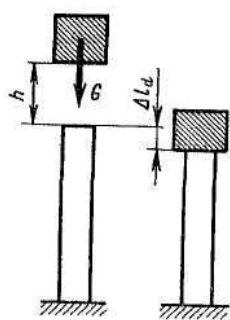


Рис.7.3.

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. 17.1). Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения $v = \sqrt{2gh}$. Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля. Благодаря большому ускорению (замедлению) возникает значительная сила инерции, которая определяет действие удара. Однако определение усилий и напряжений при ударе с помощью условия динамического равновесия (принципа Д'Аламбера) затруднительно, так как силы инерции неизвестны. В этом случае приходится первоначально искать перемещения, используя закон сохранения энергии:

$$K = U,$$

где K — кинетическая энергия ударяющего груза; U — потенциальная энергия деформации ударяемого элемента.

Работа, совершаемая весом падающего груза, будет равна

$$W = G(h + \Delta l_d),$$

где Δl_d - перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии, $U = \Delta l_d^2 EA / (2l)$. Из этих двух уравнений получаем

$$G(h + \Delta l_d) = \Delta l_d^2 EA / (2l), \text{ или } \Delta l_d^2 EA - G2l \Delta l_d^2 - Gh2l = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на EA , получим

$$\Delta l_d^2 - \frac{GL}{EA} 2\Delta l_d - \frac{GL}{EA} 2h = 0.$$

Но $GL/EA = \Delta l_{st}$ — укорочение стержня от статически приложенной нагрузки G . Тогда

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st} \Delta l_d - \Delta l_{st} 2h = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно Δl_d , получим

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}$$

Оставляя знак плюс (так как $\Delta l_d > \Delta l_{st}$) получаем окончательно

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} (1 \pm \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \Delta l_{st} K_d \quad (7.2)$$

где K_d — динамический коэффициент.

Разделив обе части последнего уравнения на длину стержня l и умножив на модуль упругости E , перейдем на основании, закона Гука от деформаций к напряжениям:

$$\sigma_d = \sigma_{st} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \sigma_{st} K_d.$$

Из полученных формул видно, что динамические напряжения и перемещения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения.

Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

При сжимающем ударе во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений

Частные случаи

1. Если $h = 0$, т. е. имеет место *внезапное приложение нагрузки*, то из полученных формул получим $\Delta l_d = 2\Delta l_{st}$. При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки;

2. Если высота падения h значительно больше статической деформации Δl_{st} , то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} \approx \sqrt{2h/\Delta l_{st}}.$$

7.4. Понятие о волновой теории удара

Рассмотренные вопросы расчёта на удар, основанные на представлении систем с бесконечно большим числом степеней свободы системами с одной степенью свободы, являются весьма приближенными. Причем, чем большей жесткостью обладает рассматриваемая система, подвергающаяся ударной нагрузке, тем менее достоверными будут результаты расчётов по приведенным выше формулам.

Для получения более адекватной картины следует воспользоваться более сложной волновой теорией удара. Согласно этой теории возникающая в начальный момент удара деформация в теле зависит только от скорости воздействия и не зависит от массы ударяемого тела. При этом возникает так называемая волна деформации. Эта волна распространяется с определенной скоростью. После того, как волна дойдет до препятствия, она отразится и пойдет с той же скоростью в обратном направлении. При этом будет иметь место явление наложения волн. Это явление тесно связано с изучаемыми в физике процессами дифракции и интерференции волн. Таким образом, суммарные деформации в каждом сечении будут изменяться во времени по сложному закону.

Теория удара, учитывающая волновой характер воздействия, рассматривается в специальных курсах.

7.5. Собственные колебания с одной степенью свободы

Ниже рассматриваются основные положения теории колебаний системы с одной степенью свободы. Этот вопрос особенно важен при изучении воздействия вибрационной нагрузки в различных строительных конструкциях.

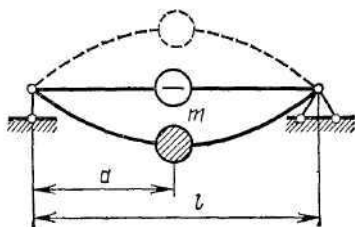


Рис.7.4.

Рассмотрим балку с сосредоточенной массой m , прикрепленной в какой-либо точке на расстоянии a от левой опоры (рис. 7.4). Предположим, что масса самой балки по сравнению с массой m мала и ею можно пренебречь. Ось изогнутой балки

определяется в этом случае величиной отклонения массы, т.е. всего только одним параметром, поэтому такую балку называют *системой с одной степенью свободы*.

Если массу m отклонить от положения равновесия и отпустить, то балка вместе с массой начнет колебаться. Такие колебания называют *собственными*, или *сво-*

бодными. Вследствие сил сопротивления колебания будут постепенно затухать и через некоторое время балка вновь придет в свое исходное положение.

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение, описывающее коле-

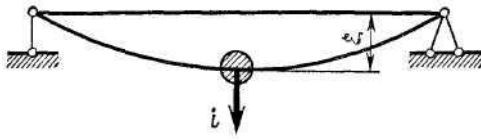


Рис.7.5.

бания, рассмотрим движение массы в произвольный момент времени t (рис. 7.5).

Обозначим отклонение массы от первоначального положения через ξ . На массу действует сила инерции, которая, как известно, равна массе, помноженной на уско-

рение, и направлена в сторону, противоположную ускорению. Учтя, что ускорение определяется как вторая производная от прогиба, получим силу инерции, равную

$$i = -m \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

Прогиб от этой силы можно найти так:

$$\xi = \delta_{11} i, \quad (7.3)$$

где δ_{11} — прогиб от силы, равной единице, приложенной в точке прикрепления массы. Величину δ_{11} легко определить любым из методов, описанных разд. 5

Подставив в уравнение (7.3) значение i , получим

$$i = -m \delta_{11} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

откуда

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \varphi^2 \xi = 0, \quad (7.4)$$

где

$$\varphi^2 = \frac{1}{m \delta_{11}}$$

Как известно из курса дифференциальных уравнений, решение уравнения (7.4) имеет вид

$$\xi = A_1 \cos \varphi t + A_2 \sin \varphi t, \quad (7.5)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Указанные постоянные будем отыскивать в виде

$$A_1 = A \sin \nu, \quad A_2 = A \cos \nu.$$

Тогда выражение (7.5) примет вид

$$\xi = A \sin(\varphi t + \nu).$$

Далее запишем формулу для определения скорости движущейся массы

$$V = \frac{d\xi}{dt} = A\varphi \cos(\varphi t + \nu). \quad (7.6)$$

В уравнениях (7.5), (7.6) содержатся две постоянные A и ν , которые находятся из начальных условий:

При $t \rightarrow 0$

$$\xi = \xi_0,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = V_0.$$

Тогда из уравнений (7.5), (7.6) имеем:

$$A \sin \nu = \xi_0, \quad A\varphi \cos(\varphi t + \nu) = V_0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{V_0}{\varphi}\right)^2}, \quad \nu = \arctg \varphi \frac{\xi_0}{V_0}$$

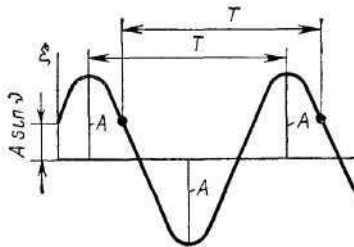


Рис. 7.6.

График изменения перемещения во времени показан на рис. 7.6. Очевидно, что наибольшее отклонение в ту или другую сторону будет, когда $\sin(\varphi t + \nu) = 1$. При этом это максимальное отклонение будет равно постоянной A , представляющей собой амплитуду колебаний. Время T , за которое совершается один полный цикл колебаний называется *периодом колебаний*.

Несложно показать, что частота собственных колебаний увеличивается с увеличением жесткости балки EI и уменьшается с увеличением массы m и пролета балки l .

7.6. Вынужденные колебания упругой системы

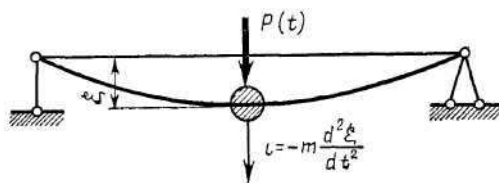


Рис. 7.7.

Если на систему действует сила $P(t)$, изменяющаяся во времени по какому-либо закону, то колебания балки, вызванные действием этой силы, называют *вынужденными*.

После приложения силы инерции балку в отклоненном состоянии можно рассматривать как находящуюся в равновесии (рис. 7.7). Перемещение ξ теперь уже нужно определить от двух сил — i и $P(t)$:

$$\xi = \delta_{11}[i + P(t)],$$

где, как и раньше δ_{11} — прогиб от силы, равной единице, приложенной в точке прикрепления массы.

Решение этой задачи более сложное, поскольку сводится, в отличие от рассмотренного выше случая, к рассмотрению неоднородного дифференциального уравнения.

Рассматривая случай, когда внешняя сила представляет собой периодическую нагрузку, например, вибрационную, изменяющуюся по гармоническому закону $P(t) = P \sin \theta t$ и имеющую частоту θ (эта характеристика обычно носит название *частота вынужденных колебаний*), можно получить выражение для наибольшего перемещения системы в виде:

$$\xi_{\max} = \xi_{\text{ст}} \mu,$$

где $\xi_{\text{ст}}$ — перемещение от статически приложенной силы P , μ — коэффициент динамичности, определяемый по формуле:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}},$$

здесь φ , как и раньше, частота собственных колебаний системы.

Для исследования значения динамического коэффициента представим график (рис. 7.8) зависимости *абсолютного* значения величины μ в зависимости от параметра $\frac{\theta}{\varphi}$.

Из этого графика видно, что в том случае, когда частота вынужденных колебаний θ приближается к частоте собственных колебаний φ , динамический коэффициент безгранично увеличивается. Это явление получило название *резонанс*.

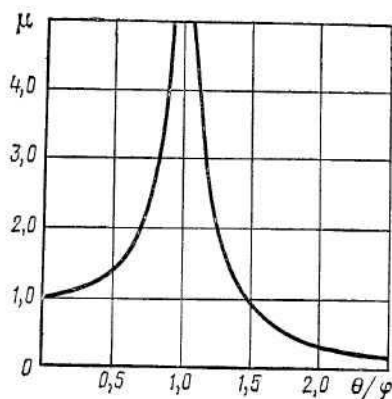


Рис. 7.8

8. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ

8.1. Понятие об усталостном разрушении и его причины

Большинство деталей машин и механизмов, а также элементы некоторых строительных конструкций работают в условиях напряжений, периодически меняющихся во времени t .

Термин «усталость» сохранился с первой половины XIX в., когда бытовало ошибочное мнение, что металл под влиянием переменных напряжений перерождается, превращается из пластичного «волокнутого» в хрупкий зернистый. В действительности процесс усталостного разрушения не сопровождается структурными изменениями, но терминология укоренилась.

К строительным конструкциям, подверженным усталостным явлениям, относятся подкрановые балки, балки рабочих площадок и элементы конструкций бункерных и разгрузочных эстакад, многократно воспринимающие нагрузку от подвижных составов, конструкции под двигатели, а также высотные сооружения типа антенн, промышленных труб, башен, мачт и подъемно-транспортных сооружений, испытывающие ветровую нагрузку.

8.2. Виды циклов напряжений

Введем основные понятия.

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период их изменения T называется *циклом*.

Цикл характеризуется максимальным σ_{\max} , минимальным σ_{\min} и средним $\sigma_m = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ напряжениями, коэффициентом асимметрии $\rho = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ (ГОСТ 23207—78 предусматривает для коэффициента асимметрии обозначение R . Здесь во избежание совпадения с символом расчётного сопротивления материала используется другое обозначение ρ , принятое в главе СНиП) и амплитудой $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$.

Если $\rho = -1$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_0 = \sigma_{\max}$, то цикл называется *симметричным* (рис. 8.1, а). В остальных случаях циклы являются асимметричными (рис. 8.1, б).

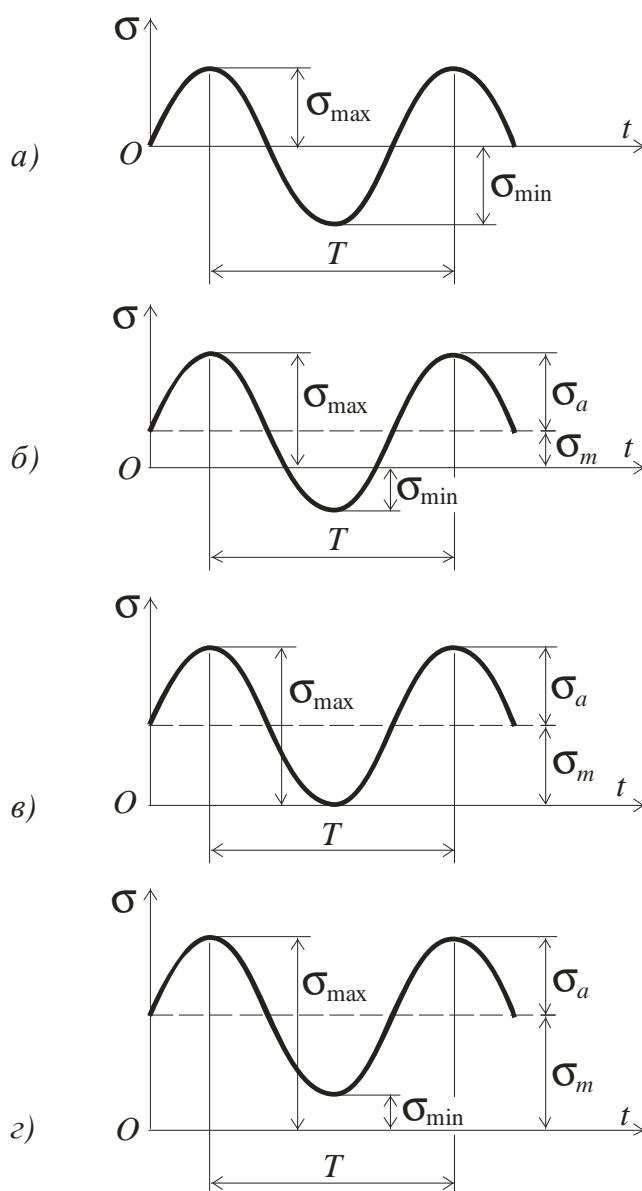


Рис. 8.1

Если минимальное или максимальное напряжение равно нулю, то цикл называется *отнулевым*. При растяжении в этом случае $\rho = 0$, $\sigma_{\min} = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_{\max}/2$ (рис. 8.1, в).

Если алгебраические знаки напряжений σ_{\max} и σ_{\min} одинаковы, цикл называется *однозначным* или *знакопостоянным* (рис. 8.1, г); если знаки неодинаковы — *знакопеременным* (рис. 8.1, а, б).

Разрушение, вызванное многократным повторением переменных напряжений, называется *усталостным*, а способность материала противостоять такому разрушению — *сопротивлением усталости*.

В случае знакопеременного цикла трещина то раскрывается, то закрывается (рис. 8.2).

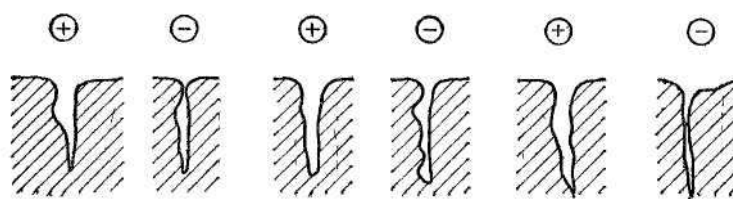


Рис. 8.2

При закрытии её неровные поверхности надавливают друг на друга, обминаются и сглаживаются. По мере возрастания числа циклов трещина постепенно проникает вглубь, еще более увеличивая концентрацию напряжений (на концах трещины возникает объёмное напряжённое состояние). Когда напряжения в неразрушенной части сечения, которая воспринимает всю нагрузку, окажутся настолько большими, что материал не сможет их выдержать, произойдет внезапное неударное разрушение. Картина излома имеет своеобразный вид (рис. 8.3).

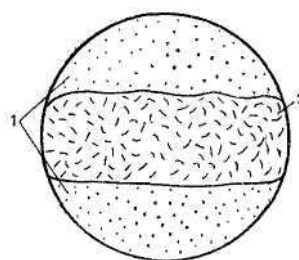


Рис. 8.3

В сечении конструкции отчетливо видна гладкая, иногда отполированная зона 1 внедрения усталостной трещины и резко отличающаяся от нее шероховатая матовая поверхность 2 типично хрупкого разрушения.

8.3. Понятие о пределе выносливости

Предел выносливости для различных конструкционных материалов определяется экспериментально. Анализ выхода из строя различных конструкций и многочисленные экспериментальные исследования показывают, что усталостное разрушение происходит

при напряжениях ниже не только предела прочности, но часто и предела текучести, установленного статическим испытанием.

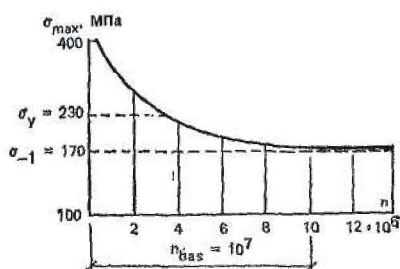


Рис. 8.2.

На рис. 8.2 приведен график изменения сопротивления усталости – кривая Вёлера⁵ стали марки Ст3 в зависимости от числа n симметричных циклов. Асимптота этой кривой характеризует напряжение усталостного разрушения при $n_{bas}=10^7$, называемое **пределом выносливости**. Указанное число циклов принимают за *базу испытаний*. Опыты пока-

зывают, что не разрушившийся за это время стальной образец выдержит сколько угодно большое число циклов при данном максимальном напряжении. Таким образом, под базой следует понимать предварительно задаваемую продолжительность испытаний образцов на усталость.

Обозначим предел выносливости при изгибе σ_p , при кручении τ_p , при растяжении (сжатии) σ_{pt} . Здесь индекс p по-прежнему указывает значение коэффициента асимметрии цикла. Тогда предел выносливости при симметричном цикле изгиба получает обозначение σ_{-1} , кручения – τ_{-1} растяжения – σ_{-1t} . При отнулевом цикле имеем соответственно σ_0 , τ_0 и σ_{0t} .

Если образцы подвергнуть испытанию на усталость при каком-либо асимметричном цикле, то кривая усталости расположится выше, чем при симметричном цикле. Следовательно, при любом виде деформирования (изгиб, кручение, растяжение) нагружение с симметричным циклом наиболее опасно.

Кривая усталости алюминиевых сплавов не имеет асимптоты, поэтому базу испытаний для них увеличивают ($n_{bas}=10^8$). То же относится к некоторым легированным сталям, подвергнутым закалке. К таким материалам понятие предела выносливости, строго говоря, неприменимо. За характеристику их сопротивления усталости (относящуюся к спадающему участку кривой Вёлера) принимают *предел ограниченной выносливости* σ_{pn} — наибольшее максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором образец еще не разрушается после определённого (задаваемого) числа циклов $n < n_{bas}$. Для

⁵ А. Вёлер - A. Wohler (1819—1914) — немецкий ученый и инженер, с экспериментальных работ которого берёт начало изучение усталости материалов.

личинами предельных амплитуд цикла.

Любая точка M , расположенная внутри этой диаграммы, соответствует некоторому циклу, определяемому величинами σ_a (ME) и σ_m (CM).

Для определения σ_{\max} и σ_{\min} цикла из точки M проводят отрезки MN и MD до пересечения с осью абсцисс под углом 45° к ней. Тогда (рис. 8.3):

$$NE = EM = ED = \sigma_a; \quad \sigma_{\max} = OD = OE + ED = \sigma_m + \sigma_a;$$

$$\sigma_{\min} = ON = OE - NE = \sigma_m - \sigma_a.$$

8.5. Факторы, влияющие на величину предела выносливости

Из большого числа факторов, влияющих на сопротивление усталости, наиболее существенна концентрация напряжений. В местах, где возникают наибольшие напряжения (обычно в зонах изменения сечения или нарушения поверхностного слоя), образуется трещина. Её зарождение, однако, еще не свидетельствует о потере несущей способности конструкции, которая после этого может выдержать до нескольких миллионов циклов: При однородном напряжённом состоянии появлению видимой трещины предшествует 85—90 % общего числа циклов и лишь около 10 % приходится на завершающую стадию разрушения.

Другими факторами, определяющими выносливость, являются: абсолютные размеры поперечного сечения конструкции, качество обработки поверхности, агрессивность внешней среды, чувствительность материала к асимметрии цикла. В целом, опыты показывают, что чем крупнее конструкция, тем ниже предел её выносливости. Это явление называют масштабным эффектом. Чем выше качество обработки поверхности конструкции, тем выше её сопротивление усталости. Для количественной оценки влияния этого фактора вводится специальный коэффициент, называемый коэффициентом качества. Логичным представляется влияние внешней среды на усталостную прочность. Агрессивная среда приводит к ухудшению качества поверхности и, тем самым снижает сопротивление усталости.

8.6. Принципы расчёта элементов конструкций на прочность при переменных напряжениях

Проверка элементов строительных конструкций на прочность при циклическом нагружении относится к расчётам по первой группе предельных состояний. Расчёт стальных элементов производится по формуле

$$\sigma_{\max} \leq \alpha R_v \gamma_v,$$

где α — коэффициент учета числа циклов нагружения $n \geq 10^5$, вычисляемый согласно главе СНиП; R_v — расчётное сопротивление усталости, принимаемое по той же главе исходя из нормативного сопротивления стали R_{un} , γ_v — коэффициент, зависящий от алгебраического знака наибольшего по абсолютному значению напряжения.

9. РАСЧЁТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

9.1. Понятие о моментной и безмоментной теориях расчёта оболочек

Будем говорить, что тело симметрично относительно оси, если любая плоскость, проходящая через эту ось (осевая плоскость), является плоскостью его силовой и геометрической симметрии.

Обычно оболочка задаётся своей срединной поверхностью. Оболочка, срединная поверхность которой является поверхностью вращения, называется оболочкой вращения. Рассмотрим такую оболочку (рис. 9.1, а). Назовем: осью оболочки — ось поверхности вращения; меридиональным сечением — сечение оболочки осевой плоскостью; окружным (коническим) сечением — сечение оболочки конической поверхностью, нормальной к её срединной поверхности, вершина которой лежит на оси; меридианом — линию пересечения срединной поверхности с осевой плоскостью; параллелью —

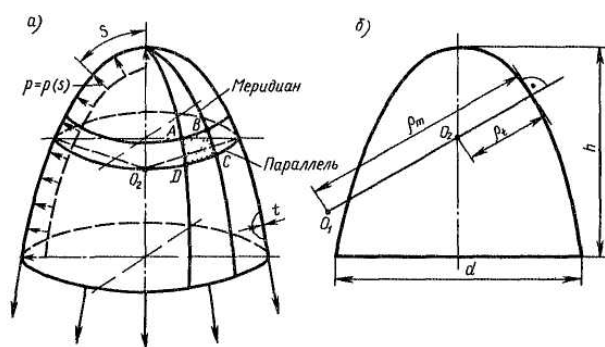


Рис. 9.1.

линию пересечения срединной поверхности с названной выше конической поверхностью.

Обозначим: ρ_m — радиус кривизны меридиана (рис. 9.1, б); ρ_r — отрезок нормали к срединной поверхности, заключённой между срединной поверхно-

стью и осью оболочки; O_1 —центр кривизны меридиана; O_2 — центр кривизны окружного сечения, лежащий на оси оболочки; t — толщину оболочки; $p = p(S)$ — давление, которое должно изменяться только в направлении меридиана, чтобы оболочка была осесимметричной; S — координата, отсчитываемая в направлении меридиана. Радиус ρ_m и отрезок ρ_t являются главными радиусами кривизны срединной поверхности в данной точке. Предполагаем, что:

- оболочка тонкостенная, т.е. $\rho_{\min}/t > 20$, где ρ_{\min} — наименьший из главных радиусов кривизны;
- давление изменяется в направлении меридиана достаточно плавно, в частности к оболочке не прикладываются сосредоточенные силы;
- меридиан не имеет резких изменений кривизны, в частности, изломов;
- опорные устройства оболочки таковы, что реактивные силы направлены по касательной к меридиану;
- оболочка непологая, т. е. (рис. 9.1, б) $h/d \geq 0,15$.

9.2. Определение напряжений в оболочках по безмоментной теории

Двумя бесконечно близкими меридиональными и двумя бесконечно близкими окружными сечениями вырезаем из оболочки элемент $ABCD$ и рассматриваем его равновесие (рис. 9.2). Если принятые предположения выполняются, то нормальные напряжения, действующие по граням элемента, можно считать распределенными по толщине равномерно. Состояние оболочки, при котором напряжения распределяются по её толщине равномерно, называется безмоментным, а теория расчёта такой оболочки — безмоментной. Обозначим: σ_m — меридиональное напряжение; σ_t — окружное напряжение.

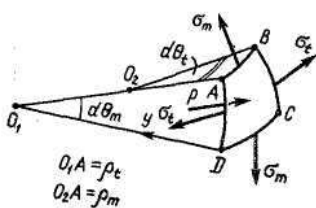


Рис. 9.2

В силу осевой симметрии касательные напряжения по граням элемента, совпадающим с меридиональными сечениями, равны нулю, следовательно, по свойству парности касательных напряжений они равны нулю и по граням, совпадающим с окружными сечениями.

Воспользуемся следующими равенствами для малых углов

$$\sin d\theta_m = d\theta_m, \sin d\theta_t = d\theta_t.$$

Найдем проекцию сил, действующих на элемент, на ось y . Проделаем эту операцию поочередно. Из рис. 9.3 проекция сил, действующих по граням AB и CD , равна

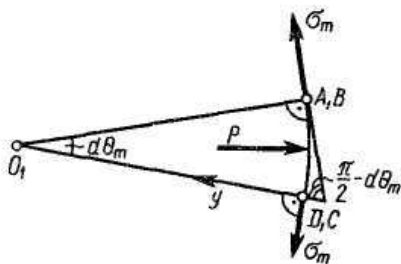


Рис. 9.3.

$$-\sigma_m t \rho_t d\theta_t \cos\left(\frac{\pi}{2} - d\theta_m\right) = \sigma_m \rho_t t d\theta_t d\theta_m.$$

По аналогии, проекция сил, действующих по граням AB и CD , равна

$$-\sigma_t \rho_m t d\theta_m d\theta_t.$$

Проекция сил давления, распределенных по поверхности элемента, равна

$$p \rho_t \rho_t d\theta_t d\theta_m.$$

Складывая выписанные выражения и приравнявая сумму к нулю, получим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}.$$

Полученную формулу называют уравнением Лапласа.

В практическом расчёте σ_m определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, а σ_t из уравнения Лапласа после подстановки в него найденного значения σ_m .

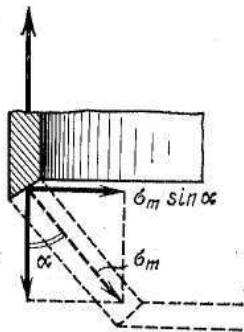


Рис. 9.9

9.3. Учет краевого эффекта в цилиндрических оболочках

В местах, где поверхность сосуда имеет резкий излом, как, например, в месте соединения цилиндрической и конической или сферической частей, радиальная составляющая меридиональных напряжений $\sigma_m \sin \alpha$ не уравновешена, что показано на рис. 9.9. Эта составляющая по периметру кольца создает радиальную нагрузку

$$q = \delta \sigma_m \sin \alpha,$$

стремящуюся согнуть кромки цилиндрической оболочки внутрь (рис. 9.10, а). Для устранения этого изгиба ставится ребро жесткости (распорное

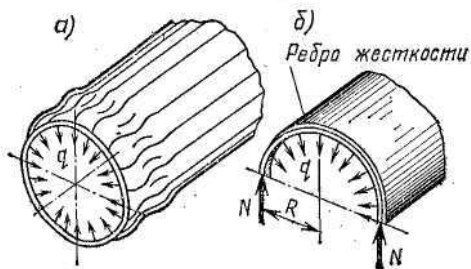


Рис. 9.10.

кольцо) в виде уголка или швеллера, опоясывающего сосуд в месте перелома. Это ребро помогает воспринять радиальную нагрузку q , что показано на рис. 9.10,б. Из условия равновесия полукольца, полученного путем разреза ребра жесткости по диаметру, легко установить, что в ребре возникает сжимающая сила $N = qR$, если приближенно не учитывать совместной работы ребра и оболочки.

Однако постановка ребер жесткости полностью не устраняет изгиба стенок сосуда, так как ребро жесткости стесняет расширение колец оболочки, примыкающих к ребру. В результате образующие оболочки вблизи распорного кольца искривляются. Это явление носит название *краевого эффекта*. Общая теория краевого эффекта рассматривается в специальных курсах.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Инфра-М, 2010.
2. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами строительной механики. М.: Инфра-М, 2011.
3. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах, М.: Инфра-М, 2010.
4. Александров А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин - М.: Высшая школа, 1995. - 560 с.
5. Костенко Н.А. Сопротивление материалов/ Н.А. Костенко и др.//Учебник для студентов вузов. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 488с.
6. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов/ Е.Г. Макаров // В 2 кн. Кн.1. Основной курс. Учебное пособие. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 406 с.

Дополнительная литература

1. Копнов В.А. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчётно-графических работ// В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко, Изд-во «Высшая школа». Изд. 3-е, стереотипное, 2009. – 351 с.

2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – Киев.: Вища школа, 1988. - 736 с.
3. Фотиева Н.Н. Сопротивление материалов в примерах и задачах. Основные виды деформации/ Н.Н. Фотиева, А.К. Петренко, А.С. Саммаль, В.М. Логунов; Тул. гос. ун-т. Тула, 2004. – 186 с.
4. Сопротивление материалов. Под редакцией А.Ф. Смирнова. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1975.